**Álgebra - Práctica 1 - Conjuntos, Relaciones y Funciones**

# Conjuntos

1. Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, determinar cúales de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

    i) $1 \in A$
    *Verdadero* , 1 está el la lista de elementos de $A$.

    ii) $\{1\} \subseteq A$
    *Verdadero* , el conjunto $\{1\}$ es subconjunto de $A$.

    iii) $\{2, 1\} \subseteq A$
    *Verdadero* , en principio, los elementos de un conjunto no estan ordenados, luego $\{2, 1\} = \{1, 2\}$, y este conjunto es subconjunto de $A$.

    iv) $\{1, 3\} \in A$
    *Falso* , el conjunto $\{1, 3\}$ es *subconjunto* de $A$, más no está en la lista de elementos de $A$.

    v) $\{2\} \in A$
    *Falso* , Ocurre lo mismo que en el caso anterior.

2. Dado el conjunto $A = \{1, 2, \{3\}, \{1, 2\}\}$, determinar cúales de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

    i) $3 \in A$
    *Falso* , El elemento de $A$ es el conjunto $\{3\}$, no el elemento 3.

    ii) $\{3\} \subseteq A$
    *Falso* , el conjunto $\{3\}$ es *un elemento* de $A$, no un subconjunto.

    iii) $\{3\} \in A$
    *Verdadero* .

    iv) $\{\{3\}\} \subseteq A$
    *Verdadero* , el conjunto de un único elemento $\{\{3\}\}$ es subconjunto de $A$.

    v) $\{1, 2\} \in A$
    *Verdadero* .

    vi) $\{1, 2\} \subseteq A$
    *Falso* , el conjunto $\{1, 2\}$ es *un elemento* de $A$.

    vii) $\{\{1, 2\}\} \subseteq A$
    *Verdadero* , dado que $\{1, 2\}$ es un elemento de $A$, el conjunto creado a partir de este único elemento será subconjunto de $A$.

    viii) $\{\{1, 2\}, 3\} \subseteq A$
    *Falso* , el elemento 3 no pertenece a $A$, por lo tanto cualquier conojunto que tenga a 3 no puede ser subconjunto de $A$.

    ix) $\emptyset \in A$
    *Falso* , el conjunto vacio es *un subconjunto* de $A$.

    x) $\emptyset \subseteq A$
    *Verdadero*

    xi) $A \in A$
    *Falso* , Todo conjunto es subconjunto de sí mismo[1].

    xii) $A \subseteq A$
    *Verdadero* .

[1] Aunque es verdad que pueden darse casos en los que por la misma definición del conjunto, este puede ser parte de sí mismo, No en este caso.

3. Determinar si $A \subseteq B$ en cada uno de los siguientes casos:

   i) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{5, 4, 3, 2, 1\}$
   *Verdadero* . los elementos 1, 2, 3 pertenecen a los dos conjuntos.

   ii) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, \{3\}, -3\}$
   *Falso* , ya que el elemento tres no hace parte de los elementos de $B$.

   iii) $A = \{x \in \mathbb{R} \colon 2 < |x| < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \colon x^2 < 3\}$
   *Verdadero* , ya que los intervalos donde $x$ pertenece a $A$ son $(-3, -2)$ y $(2, 3)$, mientras que el intevalo donde $x$ pertenece a $B$ es $(-3, 3)$

   iv) $A = \{\emptyset\}$, $B = \emptyset$
   *Falso* , ya que $B$ es el conjunto vacio, $B$ es subconjunto propio de cualquier otro subconjunto, más no tiene ningún subconjunto propio.

4. Describir a los siguentes subconjuntos de $\mathbb{R}$ por comprensión mediante *una sola* ecuación:

   i) $\{-3, 1, 5\}$: Aunque para describir este conjunto por comprenión hay varias maneras, una de las más sencillas es expresar estos valores como el conjunto solución de las raices de un polinomio, asi, se puede describir el conjunto como:

   $$\{x \in \mathbb{R} \colon (x + 3)(x - 1)(x - 5) = 0\}$$

   $(-\infty, 2] \cup [7, +\infty)$: Una buena manera de describir este conjunto es llevandolo a una expresión relacionada con un valor absoluto, esto se intuye por la misma descripción ya dada: que $x$ pertenezca a $(-\infty, 2] \cup [7, +\infty)$, solo puede ocurrir si:

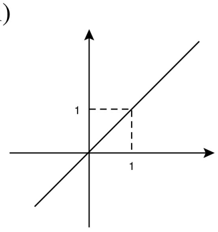
   $$\begin{aligned} x < 2 \quad &\wedge \quad x > 7 \\ x - (9/2) < 2 - (9/2) \quad &\wedge \quad x - (9/2) > 7 - (9/2) \\ x - 9/2 < -5/2 \quad &\wedge \quad x - 9/2 > 5/2 \end{aligned}$$

   Basicamente, al restar a los términos de las desigualdades 9/2 logramos "centrar" los intervalos respecto al origen para ver más claramente cómo reescribir el conjunto. Es claro que el conjunto hace referencia a

   $$\{x \in \mathbb{R} \colon |x - 9/2| > 5/2\}$$

   ii) Describir a los siguentes subconjuntos de $\mathbb{R}$ por comprensión mediante *una sola* ecuación:

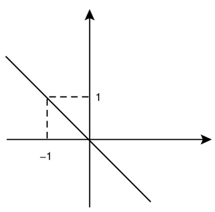
   i)




   Esta es la recta $x = y$, por lo tanto la ecuación que describe este conjunto es

   $$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = y\}$$

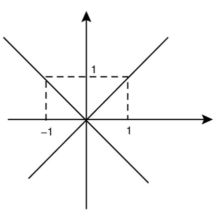
   ii)




   Esta es la recta $x = -y$, por lo tanto la ecuación que describe este conjunto es

   $$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = -y\}$$

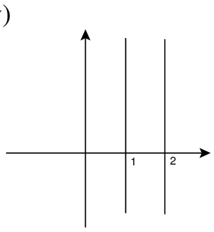
   iii)




   Este es una conbinacií de los dos grupos anteriores donde tanto $x = y$ como $x = -y$, esto es, que $x = |y|$, y reciprocamente $|x| = y$, luego el conjunto se representa mediante la expresión

   $$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| = |y|\}$$

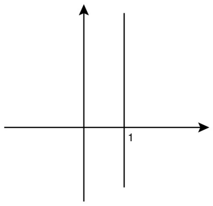
iv)




Aquí se tiene que $x = 1$ y $x = 2$; una vez más, se puede tomar una expresión para estos dos valores como raices de un polinomio, esto es

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x-1)(x-2) = 0\}$$

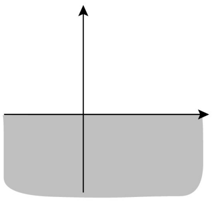
v)




Nuevamente podemos ver que el valor $x = 1$ es la solución a una ecuación autoevidente

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = 1\}$$

vi)



En este caso la expresión que es más útil es una desigualdad

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \leq 0\}$$

5. Dados los subconjunto $A = \{1, -2, 7, 3\}$, $B = \{1, \{3\}, 10\}$ y $C = \{-2, \{1, 2, 3\}, 3\}$ del conjunto referencial $V = \{1, \{3\}, -2, 7, 10, \{1, 2, 3\}, 3\}$ hallar:

   i) $A \cap (B \triangle C)$

   La diferencia simétrica entre dos conjuntos dice que se toman los elementos que pertecen a uno u otro de los dos conjuntos, pero no aquellos que pertenezcan simultaneamente a ambos, esto es:

$$A \cap (B \triangle C)) = A \cap (B \cup C - B \cap C)$$

   Ahora, el conjunto $B \cap C = \emptyset$, por lo que la operación queda:

$$A \cap (B \triangle C) = A \cap (B \cup C)$$

   esto es:

$$A \cap (B \triangle C) = \{1, -2, 3\}$$

   ii) $(A \cap B) \triangle (A \cap C)$

   Primero se hayan los conjuntos correspondientes a las intersecciones, y luego tomamos su diferencia simétrica, así tenemos que

$$(A \cap B) = \{1\}$$
$$(A \cap C) = \{-2, 3\}$$
$$(A \cap B) \triangle (A \cap C) = \{1, -2, 3\}$$

   iii) $A^c \cap B^c \cap C^c$
   En este caso, lo mejor es primer aplicar las leyes de De Morgan, de esta manera se logra simplificar bastante el cálculo del conjunto.

Aplicando las leyes de De Morgan tenemos:

$$\begin{aligned} A^c \cap B^c \cap C^c &= (A \cup B)^c \cap C^c \\ &= ((A \cup B) \cup C)^c \\ &= (A \cup B \cup C)^c \end{aligned}$$

Ahora, al hacer al unión de los conjuntos nos encontramos con

$$(A \cup B \cup C) = \{1, -2, 7, 3, \{3\}, 10, \{1, 2, 3\}\}$$

que es el conjunto referencial $V$, de esta manera tenemos ahora

$$\begin{aligned} A^c \cap B^c \cap C^c &= (A \cup B \cup C)^c \\ &= V^c \end{aligned}$$

$$A^c \cap B^c \cap C^c = \emptyset$$

6. Dados los subconjuntos $A$, $B$, $C$ de un conjunto referencial $V$, describir $(A \cup B \cup C)^c$ en términos de intersecciones y complementos, y $(A \cap B \cap C)^c$ en términos de uniones y complementos.

   Simplemente aplicamos las leyes de De Morgan las veces que hagan falta para llegar un resultado en los términos requeridos, así:

$$\begin{aligned} (A \cup B \cup C)^c &= ((A \cup B) \cup C)^c \\ &= (A \cup B)^c \cap C^c \end{aligned}$$

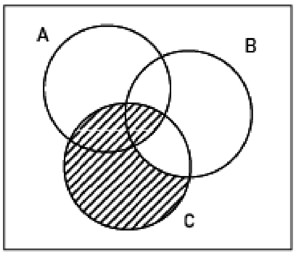
$$(A \cup B \cup C)^c = A^c \cap B^c \cap C^c$$

$$\begin{aligned} (A \cap B \cap C)^c &= ((A \cap B) \cap C)^c \\ &= (A \cap B)^c \cup C^c \end{aligned}$$

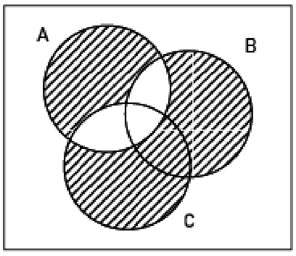
$$(A \cap B \cap C)^c = A^c \cup B^c \cup C^c$$

7. Sean $A$, $B$ y $C$ conjuntos. Representar en un diagrama de Venn

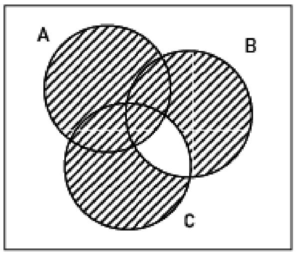
   i) $(A \cup B^c) \cap C$




   ii) $A \triangle (B \cup C)$

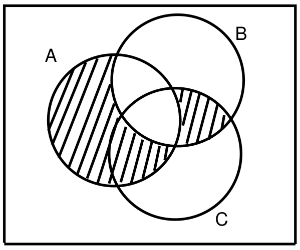



   iii) $A \cup (B \triangle C)$




8. Encontrar fórmulas que describan las partes rayadas de los siguentes diagramas de Venn, utilizando únicamente intersecciones, uniones y complementos.

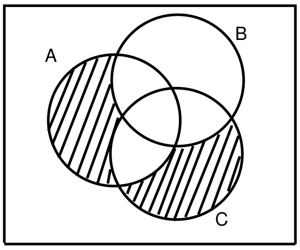
i)




$$R = (A - B) \cup ((B \cap C) - A)$$

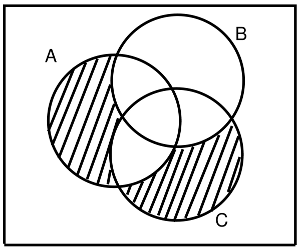
$$R = (A - B) \cup (B \cap C) \cap A^c)$$

ii)




$$\begin{aligned} R &= ((A - B) \cup (C - B)) - (A \cap C) \\ &= ((A \cap B^c) \cup (C \cap B^c)) \cap (A \cap C)^c) \end{aligned}$$

$$R = ((A \cup C) \cap B^c) \cap (A \cap B)^c$$

iii) 


$$\begin{aligned}
R &= ((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)) - ((A\cap B)\cap(A\cap C)\cap(B\cap C))\\
&= ((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)) \cap ((A\cap B)\cap(A\cap C)\cap(B\cap C))^c\\
&= ((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)) \cap ((A\cap B)^c\cup(A\cap C)^c\cup(B\cap C)^c)\\
&= ((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)) \cap ((A^c\cup B^c)\cup(A^c\cup C^c)\cup(B^c\cup C^c))
\end{aligned}$$

$$R = ((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)) \cap (A^c\cup B^c\cup C^c)$$

9. Hallar el conjunto $\mathcal{P}(A)$ (Partes de $A$)[2] en los casos
   i) $A = \{1\}$ $\quad$ $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$
   ii) $A = \{a, b\}$ $\quad$ $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
   iii) $A = \{1, \{1, 2\}, 3\}$ $\quad$ $\mathcal{P}(A) = \{\{1\},\{\{1,2\}\},\{3\},\{1,\{1,2\}\},\{\{1,2\},3\},\{1,3\},\{1,\{1,2\},3\}\}$

10. Sean $A$ y $B$ conjuntos. Probar que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow A \subseteq B$

   $\Rightarrow$ $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \Rightarrow A \subseteq B$

   Si $\mathcal{P}(A)$ es subconjunto de $\mathcal{P}(B)$, dado que $A \in \mathcal{P}(A)$, $A$ pertenecerá obviamente a $\mathcal{P}(B)$, luego, por la definición del conjunto de partes, se debe tener que $A \subseteq B$.

   $\Leftarrow$ $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

   Supongamos que $A \subseteq B$ pero $\mathcal{P}(A) \nsubseteq \mathcal{P}(B)$, entonces debería existir un subconjunto de $A$ que no es ninguno de los subconjuntos de $B$, lo que implicaría que al menos un elemento $x$, que cumple $x \in A$ no pertenece a $B$, pero entonces, si $x \in A$ y $x \notin B$, no puede ser que $A \nsubseteq B$, que contradice nuestra suposición inicial. $\blacksquare$

11. Sean $p$ y $q$ proposiciones verdaderas o Falsas. Comparar las tablas de verdad de

$$p \Rightarrow q, \qquad \sim q \Rightarrow \sim p, \qquad \sim p \vee q, \qquad \sim (p \wedge q)$$

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ | $\sim q \Rightarrow \sim p$ | | | $\sim p \vee q$ | | $\sim (p\wedge \sim q)$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\Rightarrow$ | $\sim q$ | $\Rightarrow$ | $\sim p$ | $\sim p$ | $\vee$ | $\sim$ | $\wedge$ | $\sim q$ |
| V | V | V | F | V | F | F | V | V | F | F |
| V | F | F | V | F | F | F | F | F | V | V |
| F | V | V | F | V | V | V | V | V | F | F |
| F | F | V | V | V | V | V | V | V | F | V |

Tabla 1: Las columnas sombreadas correspondes a los valores de verdad de las expresiones. Como se puede notar, el que tengan los mismos valores implica que son equivalentes.

12. Decidir si son verdaderas o falsas.

[2] Partes de $A$ se define como en conjunto de todos los subconjunto de $A$.