UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Živa Urbančič

Grupa kit in njene upodobitve

Delo diplomskega seminarja

Mentor: izr. prof. dr. Sašo Strle

Ljubljana, 2016

Kazalo

Grupa kit in njene upodobitve

Povzetek

Braid group and her representations

Abstract

Math. Subj. Class. (2010):
Ključne besede:
Keywords:

1. Uvod

Teorija kit je močno povezana s teorijo vozlov, a je zanimiva in pomembna tudi kot samostojna raziskovalna smer. Kite je prvi definiral avstrijski matematik Emil Artin v svojem članku *"Theorie der Z'opfe"*, ki je bil objavljen leta 1925. Glavni izrek članka reši problem klasifikacije kit, a z njegovim dokazom ni bil zadovoljen. Opisal ga je kot "neprepričljivega"in ga nato v članku iz leta 1947 z naslovom *"Theory of braids"* zapisal na način, ki prepriča tudi najbolj rigorozne in skeptične bralce. Tako je teorijo pravzaprav postavil na njene temelje. Leta raziskovanja so prinesla tudi nekatere ekvivalentne definicije, ki so jih matematiki prilagodili potrebam preučevanja in uporabe v drugih matematičnih smereh. Uporablja se recimo v mehaniki fluidov, statistični mehaniki, nekomutativni kriptografiji in pri reševanju polinomskih enačb.???

2. Prosta grupa in upodobitve

To poglavje je namenjeno razlagi algebraične teorije, ki jo bomo potrebovali za nadaljnje raziskovanje. Vpeljali bomo pojme, ki jih potrebujemo, da lahko definiramo, kaj je upodobitev in jo kasneje tudi poiščemo.
Naj bo $X = \{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\}$ neka množica (lahko je tudi neskončna). Imenujmo jo *abeceda*, posamezen element pa imenujmo *črka*. Definirajmo množico S kot množico vseh besed, ki jih lahko sestavimo iz črk abecede X.

Trditev 2.1. *Množica S je za operacijo stikanja besed ($x \circ y = xy,\ \ x, y \in X$) polgrupa.*

Dokaz. Operacija je očitno asociativna. □

Opomba 2.2. Polgrupo $(S, \circ)$ imenujemo *prosta polgrupa*.

Opomba 2.3. Če množici S dodamo še prazno besedo, postane za operacijo stikanja monoid.

Vprašanje, kaj S (z dodano prazno besedo) manjka do grupe, nas motivira k definiciji množice $X^{-1} = \{x_1^{-1},\ x_2^{-1},\ \ldots,\ x_n^{-1}\}$. Nova abeceda naj bo $A = X \cup X^{-1}$. Množica besed nad A pa še ni, kar iščemo, saj v besedah ne želimo podbesed oblike $x_i x_i^{-1}$.

Definicija 2.4. Beseda nad A je *reducirana*, če ne vsebuje podbesede oblike xx^{-1} ali $x^{-1}x$, kjer je $x \in A$.

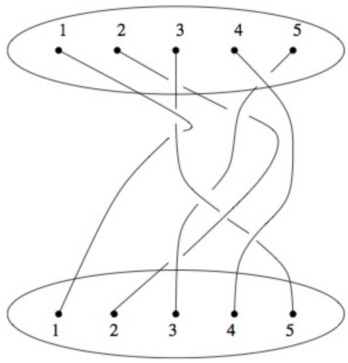
Označimo z F_x množico vseh reduciranih besed nad A. Na njej definirajmo operacijo $\circ$, ki stakne besedi in ju zapiše v reducirani obliki (tj. pokrajša neželene podbesede).

3. Grupa kit

3.1. **Definicija grupe kit.** Kot je bilo omenjeno v uvodu, lahko grupo kit definiramo na različne (ekvivalentne) načine, kakor najbolj ustreza našemu raziskovanju. V tem razdelku bomo podali (algebraično in) geometrijsko definicijo kite (nekatere druge bralec lahko najde v [?] in [?]) in se prepričali, da množica kit, če na njej definiramo operacijo stikanja, res postane grupa. Pri tem bomo morali obravnavati tudi, kdaj sta kiti ekvivalentni, pri čemer bomo sledili [?] in [?].
Kite si lahko zelo lahko predstavljamo kot skupek pramenov, ki so prepleteni med

seboj. To je zgolj opis, za podrobnejše preučevanje potrebujemo bolj formalno in matematično korektno razlago. To nas napelje k zapisu geometrijske definicije kite. Imejmo premici $\{y = z = 0\}$ ter $\{y = 0, z = 1\}$ v $\mathbb{R}^3$. Na vsaki izmed premic izberemo m točk z abscisami $x = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$.

Definicija 3.1. *Kita z m prameni* je množica m disjunktnih gladkih poti, ki povezujejo točke s prve izbrane premice s tistimi z druge (v poljubnem vrstnem redu). Projekcija posamezne poti na ravnino z mora biti difeomorfizem - imenujemo ga *pramen* kite.



Slika 1. Primer kite s 5 prameni.

Imejmo kiti B_0 in B_1. Z γ_i označimo pramen B_0, ki se konča v $(0, 0, i)$, in z θ_i pramen B_1, ki se začne v $(i, 0, 1)$.

....

Povsem jasno je, da lahko vsako kito zapišemo kot produkt večih *elementarnih kit*

Definicija 3.2. *Grupo kit z m prameni* podamo z $(m-1)$ generatorji $\sigma_1,\ \ldots,\ \sigma_{m-1}$, za katere veljata relaciji:

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$$

za vsaka i in j, za katera je $|i - j| \geq 2$ in

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$$

za vsak $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m-2$.

Opomba 3.3. Zgornji relaciji imenujemo *Artinovi relaciji.*

3.2. **Lastnosti grupe kit.**

4. Upodobitve grupe kit

4.1. **Artinove relacije.**

4.2. **Buraujeva upodobitev.**

4.3. **Upodobitev KrammerBigelow.**

Slovar strokovnih izrazov

Živa Najboljša v vsem ever.

Literatura