UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Živa Urbančič

Grupa kit in njene upodobitve

Delo diplomskega seminarja

Mentor: izr. prof. dr. Sašo Strle

Ljubljana, 2016

Kazalo

Grupa kit in njene upodobitve

Povzetek

Braid group and her representations

Abstract

Math. Subj. Class. (2010):
Ključne besede:
Keywords:

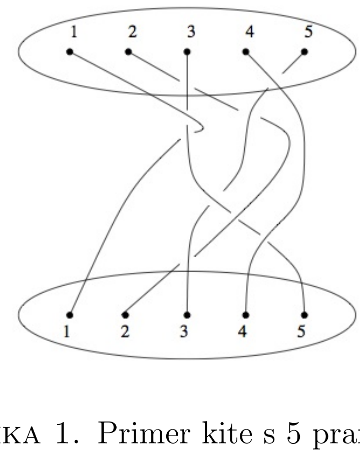
1. Uvod

Teorija kit je močno povezana s teorijo vozlov, a je zanimiva in pomembna tudi kot samostojna raziskovalna smer. Kite je prvi definiral avstrijski matematik Emil Artin v svojem članku *"Theorie der Źopfe"*, ki je bil objavljen leta 1925. Glavni izrek članka reši problem klasifikacije kit, a z njegovim dokazom ni bil zadovoljen. Opisal ga je kot "neprepričljivega" in ga nato v članku z naslovom *"Theory of braids"*(1947) zapisal na način, ki prepriča tudi najbolj rigorozne in skeptične bralce. Tako je teorijo pravzaprav postavil na njene temelje. Leta raziskovanja so prinesla tudi nekatere ekvivalentne definicije, ki so jih matematiki prilagodili potrebam preučevanja in uporabe v drugih matematičnih in z matematiko povezanih smereh. Uporablja se recimo v mehaniki fluidov, statistični mehaniki, nekomutativni kriptografiji in pri reševanju polinomskih enačb.???

2. Grupa kit

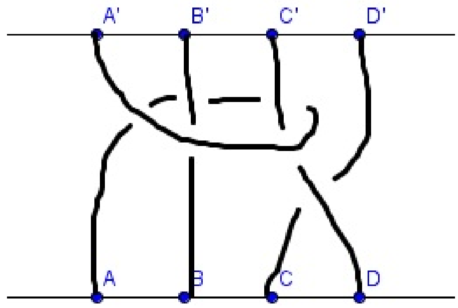
2.1. **Definicija grupe kit.** Kot je bilo omenjeno v uvodu, lahko grupo kit definiramo na različne (ekvivalentne) načine, kakor najbolj ustreza našemu raziskovanju. V tem razdelku bomo podali (algebraično in) geometrijsko definicijo kite (nekatere druge bralec lahko najde v [2]) in se prepričali, da množica kit, če na njej definiramo operacijo stikanja, res postane grupa. Pri tem bomo morali obravnavati tudi, kdaj sta kiti ekvivalentni, pri čemer bomo sledili [1] in [2].
Kite si lahko zelo lahko predstavljamo kot skupek pramenov, ki so prepleteni med seboj. To je zgolj opis, za podrobnejše preučevanje potrebujemo bolj formalno in matematično korektno razlago. To nas napelje k zapisu geometrijske definicije kite. Na vsaki izmed premic $\{y = z = 0\}$ ter $\{y = 0, z = 1\}$, ki sta vloženi v $\mathbb{R}^3$, izberemo m točk z abscisami $x = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$.

Definicija 2.1. *Kita z m prameni* je množica m disjunktnih gladkih poti - imenujemo jih *prameni*, ki povezujejo točke s prve izbrane premice s tistimi z druge (v poljubnem vrstnem redu). Projekcija posameznega pramena na os z mora biti difeomorfizem.



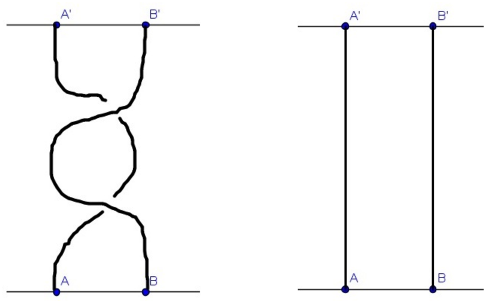
Slika 1. Primer kite s 5 prameni.

Opomba 2.2. Zahteva, da je projekcija vsakega od pramenov na z os difeomorfizem, v resnici pomeni, da prameni monotono padajo (če izberemo parametrizacijo kot v definiciji, tj. od točk na $\{y = 0, z = 1\}$ do tistih na $\{y = z = 0\}$) oziroma, da nobeden ne zavije navzgor, kot je prikazano na spodnji sliki.



SLIKA 2. Projekcija pramena, ki se začne v A' in konča v A, na os z ni difeomorfizem.

Primer 2.3. Oglejmo si enostaven primer kit B_0 in B_1 s spodnje slike.



SLIKA 3. Kiti B_0 in B_1.

Zelo enostavno je videti, da prvo kito lahko "odpletemo" v drugo, ne da bi kakšen pramen pretrgali ali da bi spreminjali njegovo začetno ali končno točko. Sklepamo, da sta na nek način sorodni. ♢

Povsem naravno vprašanje, ki se ob obravnavanju zgornjega primera pojavi, je: "katere premike lahko naredimo, da se ohrani sorodnost?"

Izotopija

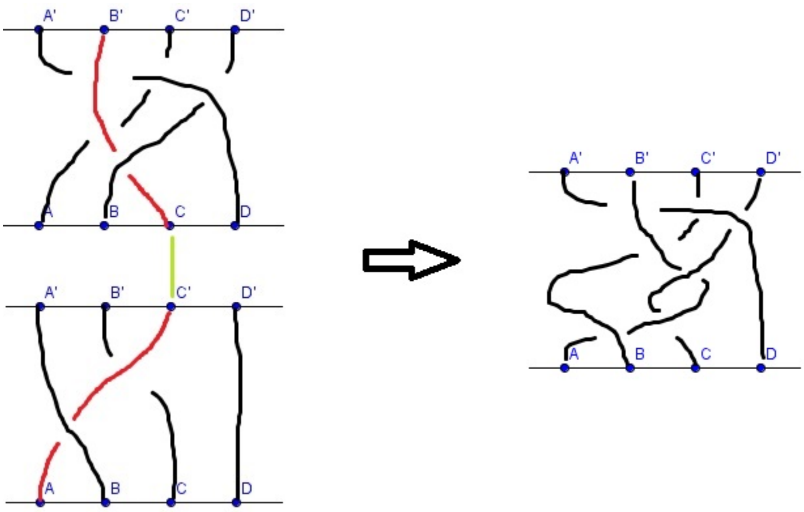
Definicija 2.4. Kiti B_0 in B_1 sta *ekvivalentni*, če sta *izotopni.*

Opomba 2.5. Enostavneje zgornja definicija pove, da eno vložitev kite lahko zvezno deformiramo v drugo.

Naj bosta B_0 in B_1 kiti z n prameni. Z γ_i označimo pramen B_0, ki se začne v $(i, 0, 1)$, konča pa se v $(j, 0, 0)$, kjer je j poljuben element $\{1, \ldots, n\}$. S θ_i označimo pramen B_1, ki se začne v $(j, 0, 1)$. Iz B_0 in B_1 lahko dobimo novo kito tako, da staknemo γ_i in θ_i za vsak $i = 1, \ldots, n$. Označimo jo z $B_0 * B_1$.

Trditev 2.6. *Množica ekvivalenčnih razredov kit z n prameni je za operacijo stikanja grupa.*

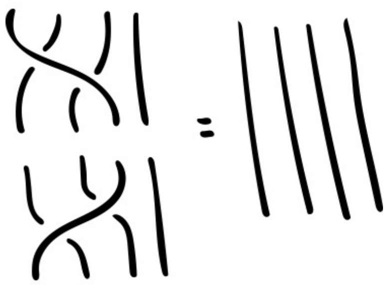
Dokaz. Najprej moramo preveriti, da je operacija sploh dobro definirana, nato pa še, da množica ekvivalenčnih razredov z operacijo stikanja zadosti kriterijem za grupo.



SLIKA 4. Stik pramenov γ_2 in θ_2 in kita, ki jo dobimo s stikom vseh pramenov B_0 in B_1.

- Oglejmo si kite A_0, A_1, B_0 in B_1, za katere velja:
$$A_0 \cong A_1 \text{ in } B_0 \cong B_1.$$
Pokazati želimo, da sta kiti $A_0 * B_0$ in $A_1 * A_2$ ekvivalentni.
- Stikanje je očitno asociativna operacija.
- Enota
- Inverz

□



SLIKA 5. Inverzni element in enota.

2.2. **Lastnosti grupe kit.**

3. UPODOBITVE GRUPE KIT

3.1. **Artinove relacije.** Delo z ekvivalenčnimi razredi je lahko zamudno in težavno, zato si kite poskušamo predstavljati drugače. O kitah lahko razmišljamo kot o zaporedju menjav.

Definicija 3.1. *Grupo kit z m prameni* podamo z $(m-1)$ generatorji $\sigma_1, \ldots, \sigma_{m-1}$, za katere veljata relaciji:
$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$$

za vsaka i in j, za katera je $|i-j| \geq 2$ in

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$$

za vsak $i = 1,\ 2,\ \dots,\ m-2$.

Opomba 3.2. Zgornji relaciji imenujemo *Artinovi relaciji.*

3.2. Buraujeva upodobitev.

3.3. Upodobitev KrammerBigelow.

Slovar strokovnih izrazov

Pramen
Difeomorfizem
Kita
(Gladka) pot
Grupa
Izotopnost
Ekvivalenčna relacija
Ekvivalenčni razred
Generatorji grupe
Artinove relacije

Literatura

[1] G. Burde, H. Zieschang. *Knots*, 2nd ed. Walter de Gruyter, Berlin, 2003.
[2] V. O. Manturov. *Knot Theory*, 1st ed. CRC Press, 2004. Dostopno na `http://varf.ru/rudn/manturov/book.pdf`.
[3] *Braid theory*, v: Wkipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 11. 11. 2016], dostopno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Braid_theory`.