UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Živa Urbančič

Grupa kit in njene upodobitve

Delo diplomskega seminarja

Mentor: izr. prof. dr. Sašo Strle

Ljubljana, 2016

Kazalo

1. Uvod	4
2. Grupa kit	5
2.1. Definicija grupe kit	5
2.2. Lastnosti grupe kit	8
3. Upodobitve grupe kit	8
3.1. Artinove relacije	8
3.2. Buraujeva upodobitev	8
3.3. Upodobitev KrammerBigelow	8
Slovar strokovnih izrazov	9
Literatura	9

Grupa kit in njene upodobitve

Povzetek

Braid group and her representations

Abstract

Math. Subj. Class. (2010):
Ključne besede:
Keywords:

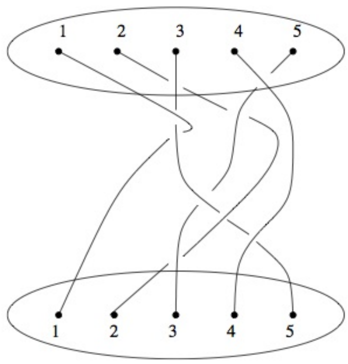
1. Uvod

Teorija kit je močno povezana s teorijo vozlov, a je zanimiva in pomembna tudi kot samostojna raziskovalna smer. Kite je prvi definiral avstrijski matematik Emil Artin v svojem članku *"Theorie der Z'opfe"*, ki je bil objavljen leta 1925. Glavni izrek članka reši problem klasifikacije kit, a z njegovim dokazom Artin ni bil zadovoljen. Opisal ga je kot "neprepričljivega" in ga nato v članku z naslovom *"Theory of braids"*(1947) zapisal na način, ki prepriča tudi najbolj rigorozne in skeptične bralce. Tako je teorijo pravzaprav postavil na njene temelje. Leta raziskovanja so prinesla tudi nekatere ekvivalentne definicije, ki so jih matematiki prilagodili potrebam preučevanja in uporabe v drugih matematičnih in z matematiko povezanih smereh. Uporablja se recimo v mehaniki fluidov, statistični mehaniki, nekomutativni kriptografiji, ...

2. Grupa kit

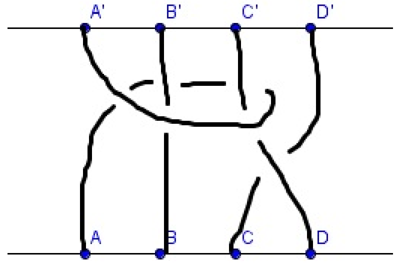
2.1. **Definicija grupe kit.** Kot je bilo omenjeno v uvodu, lahko grupo kit definiramo na različne (ekvivalentne) načine, kakor najbolj ustreza našemu raziskovanju. V tem razdelku bomo podali geometrijsko definicijo kite (nekatere druge bralec lahko najde v [2]) in se prepričali, da množica kit, če na njej definiramo operacijo stikanja, res postane grupa. Pri tem bomo morali obravnavati tudi, kdaj sta kiti ekvivalentni, pri čemer bomo sledili [1] in [2].
Kite si lahko zelo naravno predstavljamo kot skupek pramenov, ki so prepleteni med seboj. To je zgolj opis, za podrobnejše preučevanje potrebujemo bolj formalno in matematično korektno definicijo.
Na vsaki izmed premic $\{y = z = 0\}$ ter $\{y = 0, z = 1\}$, ki sta vloženi v $\mathbb{R}^3$, izberemo m točk z abscisami $x = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$.

Definicija 2.1. *Kita z m prameni* je množica m disjunktnih gladkih poti - imenujemo jih *prameni*, ki povezujejo točke s prve izbrane premice s tistimi z druge (v poljubnem vrstnem redu). Projekcija posameznega pramena na os z mora biti difeomorfizem.



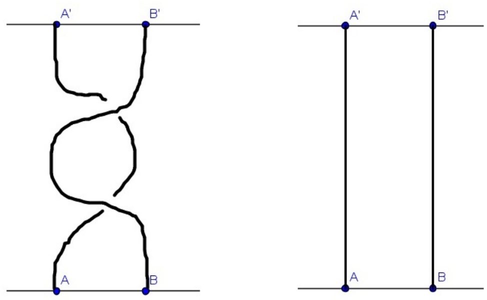
Slika 1. Primer kite s 5 prameni.

Opomba 2.2. Zahteva, da je projekcija vsakega od pramenov na z os difeomorfizem, v resnici pomeni, da prameni monotono padajo (če izberemo parametrizacijo kot v definiciji, tj. od točk na $\{y = 0, z = 1\}$ do tistih na $\{y = z = 0\}$). Enostavneje, nobeden izmed pramenov ne zavije navzgor, kot je prikazano na spodnji sliki.



Slika 2. Projekcija pramena, ki se začne v A' in konča v A, na os z ni difeomorfizem.

Primer 2.3. Oglejmo si enostaven primer kit B_0 in B_1 s spodnje slike. Zelo enostavno je videti, da prvo kito lahko "odpletemo" v drugo, ne da bi kakšen pramen pretrgali ali da bi spreminjali njegovo začetno ali končno točko. Sklepamo, da sta na nek način sorodni. $\diamondsuit$



SLIKA 3. Kiti B_0 in B_1.

Naravno vprašanje, ki sledi zgornjemu primeru je, katere kite so si sorodne oziroma kako lahko deformiramo kito, da se ohranijo njene lastnosti? Da lahko na to vprašanje odgovorimo, vpeljimo nekaj topoloških pojmov.

Definicija 2.4. Vložitvi $f_0, f_1 : X \to Y$ sta *izotopni*, če obstaja taka vložitev $F : X \times I \to Y \times I$, da je

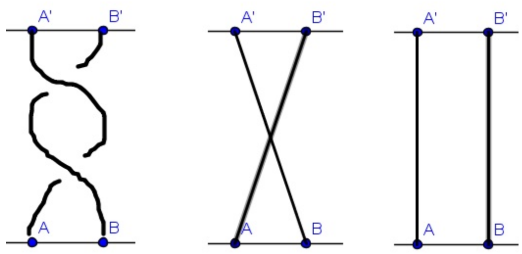
$$F(x,t) = (f(x,t),t),$$

kjer je $x \in X$, $t \in I$, $f(x,0) = f_0(x)$ in $f(x,1) = f_1(x)$. Tako vložitev F imenujemo *level-preserving izotopija.*

Opomba 2.5. Definicija bolj enostavno povedano pomeni, da vložitvi f_0 in f_1 lahko povežemo z vložitvami.

Opomba 2.6. Zaradi enostavnosti zapisa namesto $f(x,t)$ pišemo $f_t(x)$.

Izotopija zvezno "premika" f_0 k f_1, a ne pazi na to, kaj se dogaja v ciljnem prostoru v bližini slike vložitve. Zakaj to predstavlja problem, si oglejmo na naslednjem primeru.



SLIKA 4. Kita B_0, vmesni korak in kita B_1.

Primer 2.7. Oglejmo si kiti B_0 in B_1 z zgornje slike. Jasno je, da moramo, če želimo eno zvezno preoblikovati v drugo, prekiniti pramen ali ga "odlepiti" od ene od fiksnih premic z začetnimi in končnimi točkami. A med njima obstaja izotopija, ki pramena tako približa, da se obe menjavi kite B_0 vršita v isti točki, kar prikazuje vmesni korak na zgornji sliki. $\diamondsuit$

Očitno je, da izotopnosti ne moremo vzeti za definicijo ekvivalence kit. Če želimo, da se bodo ohranjali prepleti, ki jih ne moremo razplesti, brez da bi pretrgali pramene, mora namreč preslikava nositi tudi nekaj informacij o ciljnem prostoru.

Definicija 2.8. Vložitvi $f_0, f_1 : X \to Y$ sta *ambientno izotopni*, če obstaja level-preserving izotopija $H : Y \times I \to Y \times I$, da je

$$H(y,t) = (h_t(y), t),$$

kjer je $f_1 = h_1 \circ f_0$ in $h_0 = id_y$. Preslikavo H imenujemo *ambientna izotopija.*

Opomba 2.9. Namesto, da bi preoblikovali vložitev, sedaj preoblikujemo cel prostor. Preoblikovanje vložitve je posledica preoblikovanja ciljnega prostora.

Definicija 2.10. Kiti B_0 in B_1 sta *ekvivalentni*, če sta ambientno izotopni.

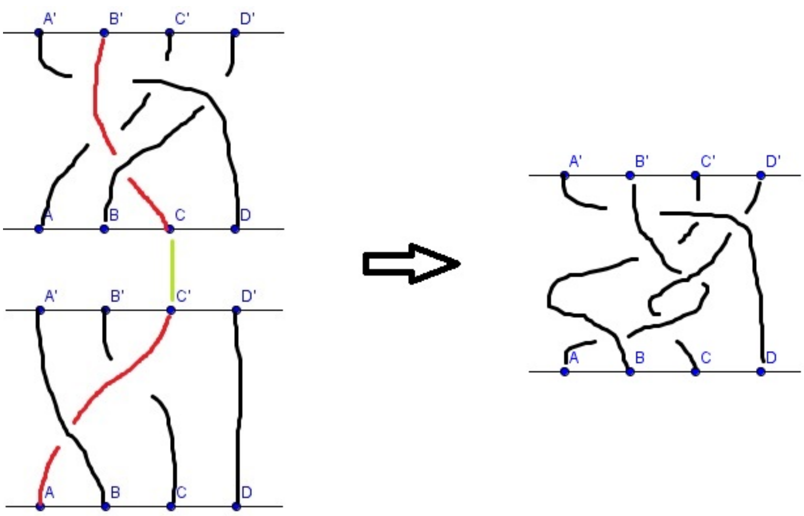
Opomba 2.11. Hiter razmislek pokaže, da je ambientna izotopija ekvivalenčna relacija. Refleksivnost in simetričnost sta očitni, zato utemeljimo le, da velja tranzitivnost. Naj bo $H_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ambientna izotopija, ki B_0 preslika v B_1, in $H_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ambientna izotopija, ki B_1 preslika v B_2. Potem je $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ s predpisom

$$H(y,t) = \begin{cases} H_1(y, 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H_2(y, 2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

ambientna izotopija, ki B_0 preslika v B_2.

Opomba 2.12. Izraz "kita" bomo včasih uporabljali za ekvivalenčni razred kit. Posamezno kito tako obravnavamo kot predstavnika svojega ekvivalenčnega razreda.

Naj bosta B_0 in B_1 kiti z n prameni. Z γ_i označimo pramen B_0, ki se začne v $(i, 0, 1)$, konča pa se v $(j, 0, 0)$, kjer je j poljuben element $\{1, \ldots, n\}$. S θ_i označimo pramen B_1, ki se začne v $(j, 0, 1)$. Iz B_0 in B_1 lahko dobimo novo kito tako, da staknemo γ_i in θ_i za vsak $i = 1, \ldots, n$. Označimo jo z $B_0 * B_1$.



SLIKA 5. Stik pramenov γ_2 in θ_2 in kita, ki jo dobimo s stikom vseh pramenov B_0 in B_1.

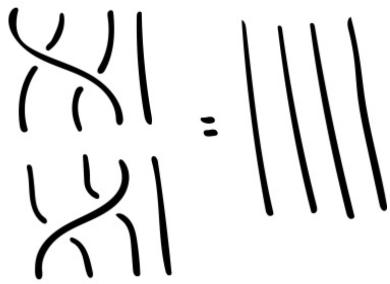
Na množico ekvivalenčnih razredov kit z n prameni torej lahko vpeljemo operacijo stikanja. Kakšno strukturo s tem množica pridobi, povzema naslednja trditev.

Trditev 2.13. *Množica ekvivalenčnih razredov kit z n prameni je za operacijo stikanja grupa.*

Dokaz. Najprej moramo preveriti, da je operacija sploh dobro definirana, nato pa še, da množica ekvivalenčnih razredov z operacijo stikanja zadosti kriterijem za grupo.

- Oglejmo si kite A_0, A_1, B_0 in B_1, za katere velja:
$$A_0 \cong A_1 \text{ in } B_0 \cong B_1.$$
Pokazati želimo, da sta kiti $A_0 * B_0$ in $A_1 * A_2$ ekvivalentni.
- Stikanje je očitno asociativna operacija.
- Enota
- Inverz

□



Slika 6. Inverzni element in enota.

2.2. **Lastnosti grupe kit.**

3. Upodobitve grupe kit

3.1. **Artinove relacije.**
Delo z ekvivalenčnimi razredi je lahko zamudno in težavno, zato si kite poskušamo predstavljati drugače. O kitah lahko razmišljamo kot o zaporedju menjav.

Definicija 3.1. *Grupo kit z m prameni* podamo z $(m-1)$ generatorji $\sigma_1, \ldots, \sigma_{m-1}$, za katere veljata relaciji:
$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$$
za vsaka i in j, za katera je $|i-j| \geq 2$ in
$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$$
za vsak $i = 1, 2, \ldots, m-2$.

Opomba 3.2. Zgornji relaciji imenujemo *Artinovi relaciji.*

3.2. **Buraujeva upodobitev.**

3.3. **Upodobitev KrammerBigelow.**

Slovar strokovnih izrazov

Pramen
Difeomorfizem
Kita
(Gladka) pot
Grupa
Izotopnost
Ekvivalenčna relacija
Ekvivalenčni razred
Generatorji grupe
Artinove relacije

Literatura

[1] G. Burde, H. Zieschang. *Knots*, 2nd ed. Walter de Gruyter, Berlin, 2003.
[2] V. O. Manturov. *Knot Theory*, 1st ed. CRC Press, 2004. Dostopno na `http://varf.ru/rudn/manturov/book.pdf`.
[3] *Braid theory*, v: Wkipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 11. 11. 2016], dostopno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Braid_theory`.