

Metody Monte Carlo dla procesów z częściowym resetowaniem

Krzysztof Jankowski

Promotor: prof. dr hab. Zbigniew Palmowski



HR EXCELLENCE IN RESEARCH

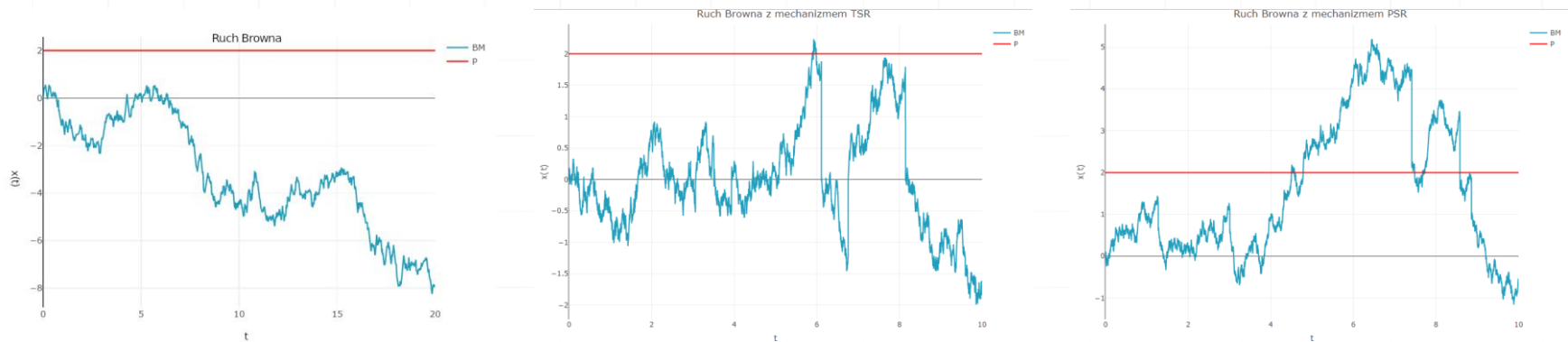


Politechnika Wroclawska

Plan prezentacji

- Wstęp
 - Całkowite stochastyczne resetowanie (TSR)
 - Częściowe stochastyczne resetowanie (PSR)
- Definicje
- Symulacje procesów
 - Implementacja PSR
 - Symulacje Ruchu Browna
 - Symulacje dwuwymiarowego Ruchu Browna
- Podsumowanie

Czym są TSR i PSR



Rys.: Trajektoria Ruchu Browna (niebieski) kolejno (od lewej do prawej) bez mechanizmów SR, z TSR oraz PSR oraz punkt, na prostej (czerwony) w horyzoncie czasowym równym 10.

Definicje

DEFINICJA (Ruch Browna) [1]

Niech $\{B(t) : t \geq 0\}$ jest procesem stochastycznym zdefiniowanym na kompletnej i przefiltrowanej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ spełniającej zwykłe warunki. Proces taki nazywamy Ruchem Browna, jeśli ma ciągle trajektorie oraz spełnia następujące założenia

$$1^\circ B(0) = 0,$$

$$2^\circ B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}} \text{ niezależne dla każdego } 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \dots \leq t_{n-1} \leq t_n,$$

$$3^\circ B(t+s) - B(t) \sim \mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = s) \text{ dla każdych } t, s > 0.$$

DEFINICJA (Jednorodny Proces Poissona) [2]

Niech $\{N_t : t \geq 0\}$ jest procesem stochastycznym zdefiniowanym na kompletnej przestrzeni probabilistycznej z filtracją $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ spełniającej zwykłe warunki. Proces ten nazywamy Jednorodnym Procesem Poissona (JPP), jeśli ma trajektorie *càdlàg* i ponad to spełnia warunki

$$1^\circ N(0) = 0,$$

$$2^\circ N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}} \text{ niezależne dla każdego } 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \dots \leq t_{n-1} \leq t_n,$$

$$3^\circ N(t+s) - N(t) \stackrel{d}{=} N(s),$$

$$4^\circ N(t) \sim \text{Poiss}(\lambda t), \lambda > 0 \text{ dla każdego } t, s > 0.$$

[1] Patrick Billingsley. Probability and measure. 3. ed. A @Wiley-Interscience publication. Literaturverz. S. 581 - 583. New York, NY [u.a.]: Wiley, 1995. 593 pp. isbn: 9780471007104.

[2] Sheldon M. Ross. Simulation. 4th ed. Statistical Modeling and Decision Science Ser. Description based on publisher supplied metadata and other sources. San Diego: Elsevier Science & Technology, 2006. 1313 pp. isbn: 9780080517223.

Definicje

DEFINICJA (Proces Lévy'ego z częściowym resetowaniem)^[3]

Niech $\mathbf{Y} = \{Y_t: t \geq 0\}$ jest d -wymiarowym procesem Lévy'ego oraz $\mathbf{N} = \{N_t: t \geq 0\}$ jest niezależnym od \mathbf{Y} JPP z intensywnością λ_r . \mathbf{Y} oraz \mathbf{N} są zdefiniowane na kompletnej, przefiltrowanej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ spełniającej zwykłe warunki. Oznaczmy za pomocą $T_j: j \in \mathbb{N}$ momenty wystąpienia skoków JPP. Dla $c \in (0, 1)$ definiujemy proces Lévy'ego z częściowym resetowaniem następująco

$$X_t = \begin{cases} Y_t, & \text{gdy } t < T_1, \\ cX_{T_n^-} + Y_t - Y_{T_n} & \text{dla } t \in [T_n, T_{n+1}), \end{cases}$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$, a $X_{T_n^-} = \lim_{t \rightarrow T_n^-} X_t$.

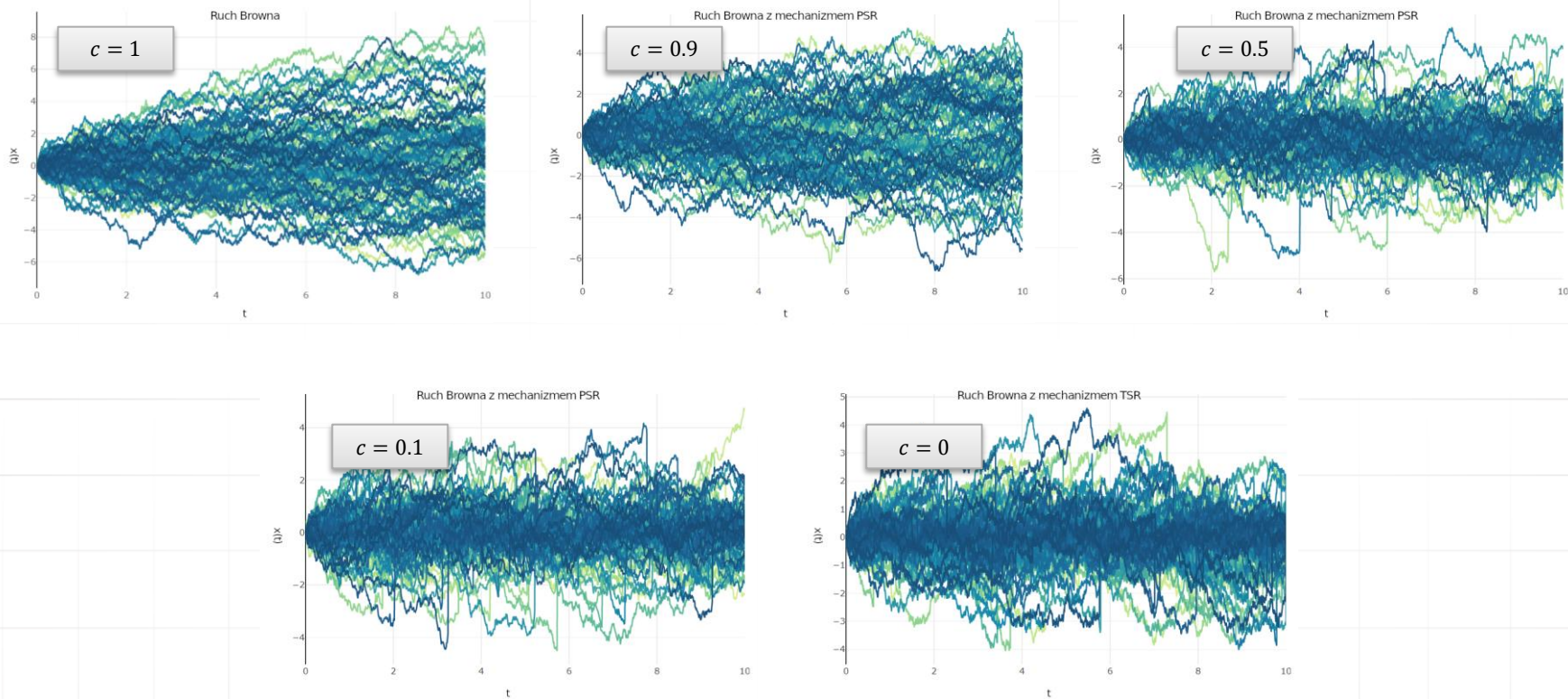
[3] T. Grzywny, Z. Palmowski, K. Szczypkowski, B. Trojan (2023) Stationary states for stable processes with partial resetting. Złożone do publikacji.

Algorytmy generowania wybranych procesów

```
apply_PSR <- function(xs, c, lbd, t, dt){  
  #Set PSR moments  
  steps <- HPP(t, lbd);  
  #Attract to the nearest points on a lattice  
  mask <- unique(floor(steps / dt) + 1);  
  ends <- c(mask -1, length(xs))[-1];  
  if(mask[1] != 1){  
    begs <- c(1, mask);  
    ends <- c( begs[2] -1, ends);}  
  else{  
    begs <- mask;}  
  sr_proc <- c();  
  for(i in 1:length(ends)){  
    sr_proc <- c(sr_proc, cumsum(xs[begs[i]:ends[i]]));  
    xs[ends[i] + 1] <- xs[ends[i] + 1] + c * sr_proc[length(sr_proc)];}  
  return(sr_proc)  
}
```

Symulacje Monte Carlo

Ruch Browna



Rys.: Wykresy 100 trajektorii Ruchu Browna (od lewej do prawej) bez SR, z mechanizmem PSR $c = 0.9$, $c = 0.5$, $c = 0.1$, z mechanizmem TSR.

Symulacje Monte Carlo

Ruch Browna: rozkład dla $T = 10$

c	$Var(X)$	κ	SW	KS
0.0	1.004	5.979	0.0000	0.1059
0.1	0.993	5.828	0.0000	0.5360
0.5	1.359	4.851	0.0000	0.1155
0.9	4.417	3.319	0.0001	0.0003
0.95	6.539	2.974	0.9138	0.0000

Tabela: Zestawienie wariancji ($Var(X)$) kurtozy (κ), skośności (β) oraz p-wartości dla testu Shapiro-Wilka (SW) i Kołmogorowa-Smirnova (KS) dla różnych parametrów c oraz $\lambda_r = 1$.

Symulacje Monte Carlo

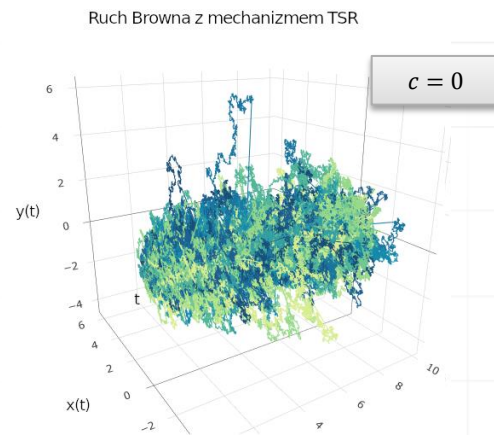
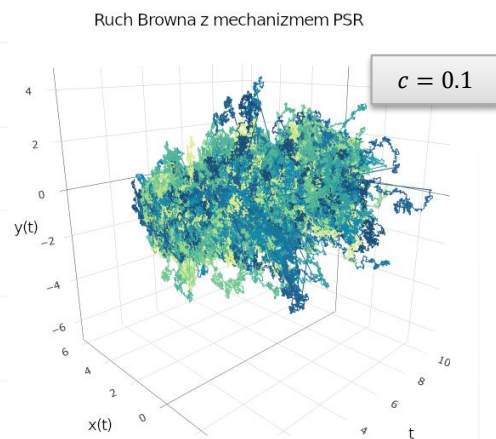
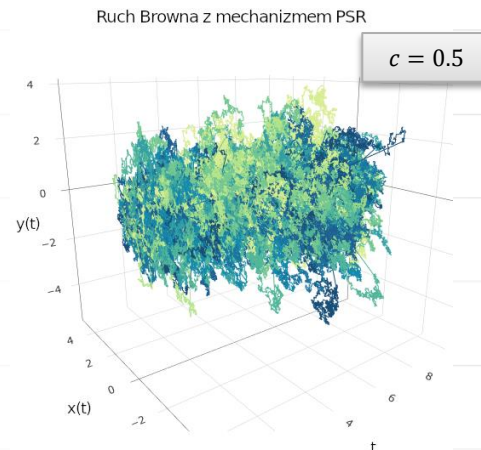
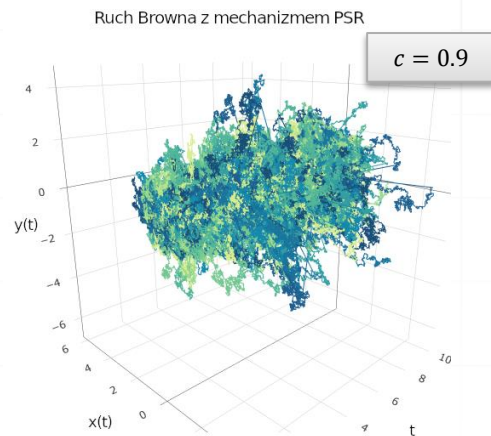
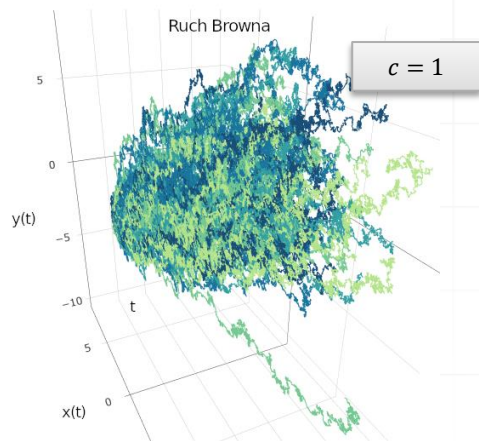
Ruch Browna: rozkład dla $T = 10$

λ_r	$Var(X)$	κ	SW	KS
$c = 0.9$				
0.5	6.412	3.109	0.5663	0.0131
1	4.417	3.319	0.0001	0.0003
2	2.637	3.241	0.0368	0.0010
5	1.089	3.319	0.0183	0.0004
$c = 0.5$				
0.5	2.540	4.637	0.0000	0.0190
1	1.359	4.851	0.0000	0.1155
2	0.676	4.879	0.0000	0.5556
5	0.267	4.417	0.0000	0.3906
$c = 0$				
0.5	1.926	5.812	0.0000	0.1659
1	1.004	5.979	0.0000	0.1059
2	0.512	6.553	0.0000	0.5805
5	0.203	6.033	0.0000	0.0797

Tabela: Zestawienie wariancji ($Var(X)$) kurtozy (κ), skośności (β) oraz p-wartości dla testu Shapiro-Wilka (SW) i Kołmogorowa-Smirnova (KS) dla różnych parametrów λ_r i ustalonych c .

Symulacje Monte Carlo

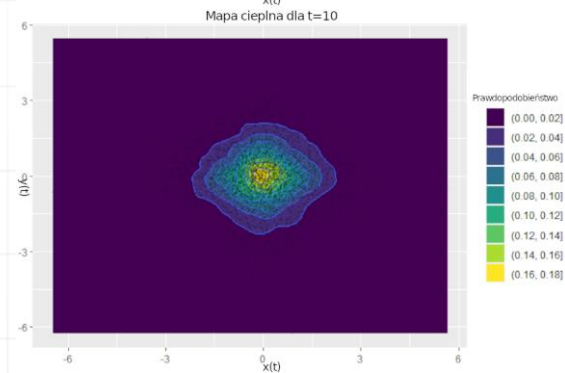
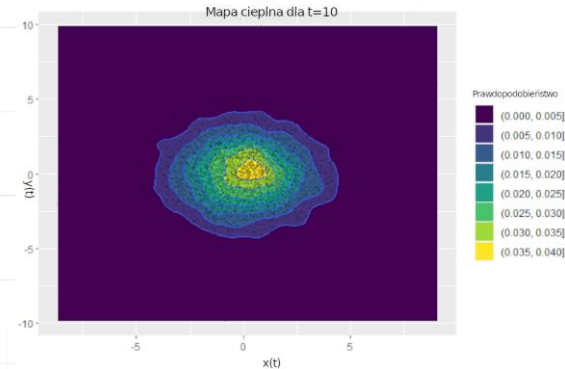
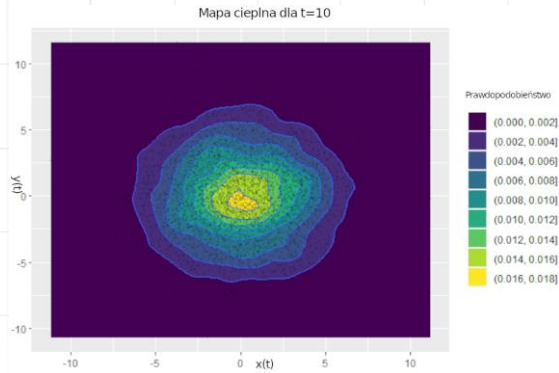
Ruch Browna w przestrzeni dwuwymiarowej



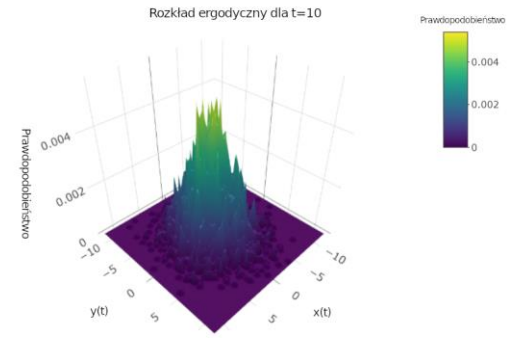
Rys.: Wykresy 100 trajektorii Ruchu Browna (od lewej do prawej) bez SR, z mechanizmem PSR $c = 0.9$, $c = 0.5$, $c = 0.1$, z mechanizmem TSR.

Symulacje Monte Carlo

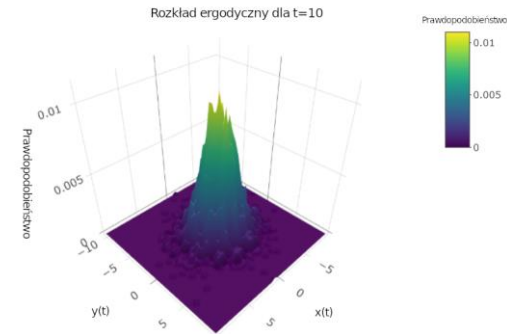
Ruch Browna w przestrzeni dwuwymiarowej: rozkład w chwili $T = 10$



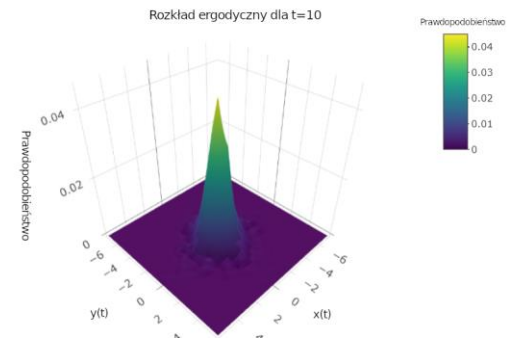
$c = 1$



$c = 0.9$

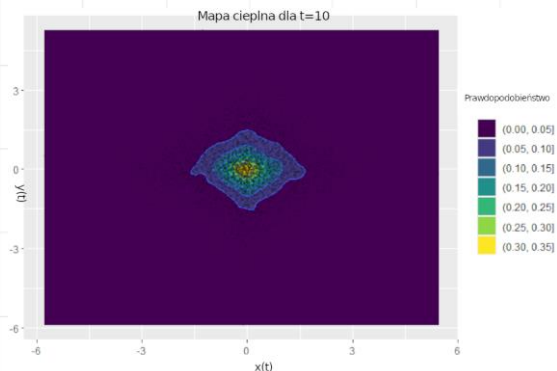


$c = 0.5$

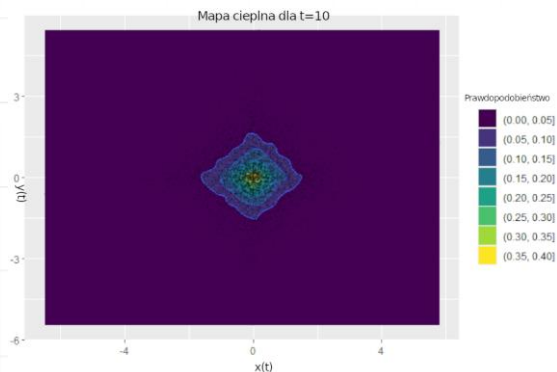
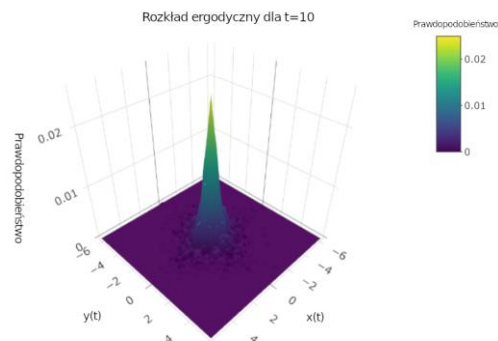


Symulacje Monte Carlo

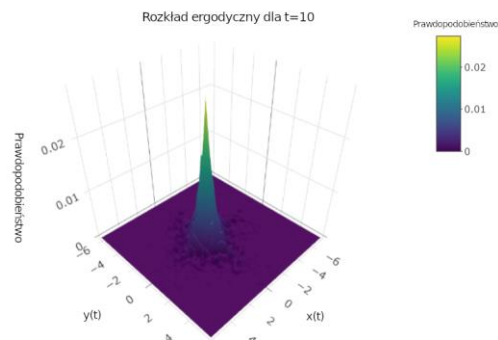
Ruch Browna w przestrzeni dwuwymiarowej



$c = 0.1$



$c = 0$



Rys.: Wykresy map cieplnych (pierwsza kolumna), wykresy powierzchniowe (druga kolumna) kolejno dla (od góry do dołu): brak SR, PSR $c = 0.9$, $c = 0.5$, $c = 0.1$, z mechanizmem TSR.

Podsumowanie

Wnioski:

- ☐ Wpływ c na rozkład ergodyczny
- ☐ Wpływ λ_r

Bibliografia

- [1] Patrick Billingsley. Probability and measure. 3. ed. A @Wiley-Interscience publication. Literaturverz. S. 581 - 583. New York, NY [u.a.]: *Wiley*, 1995. 593 pp. *isbn: 9780471007104*.
- [2] Sheldon M. Ross. Simulation. 4th ed. Statistical Modeling and Decision Science Ser. Description based on publisher supplied metadata and other sources. San Diego: Elsevier Science & Technology, 2006. 1313 pp. *isbn: 9780080517223*.
- [3] T. Grzywny, Z. Palmowski, K. Szczypkowski, B. Trojan (2023) Stationary states for stable processes with partial resetting. Złożone do publikacji.

Dziękuję za uwagę!