#机器人中的状态估计课后习题答案

**完成人：高明**

**联系方式：**

```
知乎：高明
微信：gaoming0901
```


# 2.概率论基础

## 2.5.1

假设$u$,$v$是相同维度向量, 请证明下面等式： $u^{T}v=tr(vu^{T})$

**solution:**
$u=(x_{1},x_{2},...,x_{n})^{T}$

$v=(y_{1},y_{2},...,y_{n})^{T}$

$u^{T}v=x_{1}y_{1}+x_{2}y_{2}+...+x_{n}y_{n}$ $=\sum_{i=1}^{n}{x_{i}y_{i}}$

$uv^{T}=$$ \left[ \begin{matrix} x_{1}y_{1} & \cdots & \cdots & \cdots \ \cdots & x_{2}y_{2} & \cdots & \cdots \ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \ \cdots & \cdots & \cdots & x_{n}y_{n} \ \end{matrix} \right]$

$tr(uv^{T})=\sum_{i=1}^{n}x_{i}y_{i}=u^{T}v$

## 2.5.2

如果有两个相互独立的随机变量$x$,$y$,它们的联合分布为$p(x,y)$,请证明它们概率的香浓信息等于各自独立香浓信息的和:

$H(x,y)=H(x)+H(y)$

**solution:**

$H(x,y)$

$=-E_{(x,y)}(ln(f(x,y)))$

$=-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)ln(f(x,y))dxdy$

因为$x$,$y$独立

$H(x,y)$
$=-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)f(y)[ln(f(x))+ln(f(y))]dxdy$

$=-[\int_{-\infty}^{\infty}(f(x)ln(f(x))dx]\int_{-\infty}^{\infty}f(y)dy-[\int_{-\infty}^{\infty}f(y)ln(f(y))dy]\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$

$=-\int_{-\infty}^{\infty}(f(x)ln(f(x))dx-\int_{-\infty}^{\infty}f(y)ln(f(y))dy$

$=H(x)+H(y)$

# 2.5.3

对于高斯分布的随机变量，$x$~N($\mu$,$\Sigma$),请证明下面的等式：

$\mu=E[xx^{T}]=\Sigma+\mu\mu^{T}$

**solution:**

$\Sigma$
$=E[(x-\mu)(x-\mu)^{T}]$

$=E(xx^{T}-x\mu^{T}-\mu x^{T}+\mu\mu^{T})$

$=E(xx^{T})-E(x)\mu^{T}-\mu E(x^{T})+\mu \mu^{T}$

因为$E(x)=\mu$

$\Sigma=E(xx^{T})-\mu \mu^{T}$

因此

$E(xx^{T})=\Sigma+\mu \mu^{T}$

# 2.5.4

对于高斯分布的随机变量，x~N($\mu$,$\Sigma$),请证明下面的等式：

$\mu=E(x)=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx$

**solution:**

$E(x)$

$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{{\sqrt{(2 \pi)^{N}}det(\Sigma)}}exp(-\frac{1}{2}(x-\mu)^{T}\Sigma^{-1}(x-\mu))dx$

做变换：
$y=x-\mu$

可得: $x=y+\mu$

$E(x)$

$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y+ \mu}{\sqrt{(2\pi)^{N}det(\Sigma)}}exp(-\frac{1}{2}y^{T}\Sigma^{-1}y)dy$

$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{\sqrt{(2\pi)^{N}det(\Sigma)}}exp(-\frac{1}{2}y^{T}\Sigma^{-1}y)dy +\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu}{\sqrt{(2\pi)^{N}det(\Sigma)}}exp(-\frac{1}{2}y^{T}\Sigma^{-1}y)dy$

上式第一项由于奇函数在关于0对称空间积分为0

上式第二项扣除$\mu$满足概率归一化条件

$E(x)=\mu$

## 2.5.5

对于高斯分布的随机变量，$x$~$N(\mu,\Sigma)$,证明下式：

$\Sigma=E[(x-\mu)(x- \mu)^{T}]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)(x-\mu)^{T}p(x)dx$

**solution:**

$E[(x-\mu)(x- \mu)^{T}]$

$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-\mu)(x-\mu)^{T}}{\sqrt{(2 \pi)^{N}}det(\Sigma)}}exp(-\frac{1}{2}(x-\mu)^{T}\Sigma^{-1}(x-\mu))dx$

做代换$y=x-\mu$

$E[(x-\mu)(x- \mu)^{T}]$

$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yy^{T}}{\sqrt{(2 \pi)^{N}}det(\Sigma)}}exp(-\frac{1}{2}(y^{T}\Sigma^{-1}y))dy..................<0>$

下面参考文献【1】中公式(108)如下式：

$\frac{\partial}{\partial{X}}(X^{T}BX)=BX+B^{T}X$

上式中X是矩阵，向量算特殊矩阵，直接带入，向量表达式如下：

$\frac{d}{d{x}}(x^{T}Bx)=Bx+B^{T}x.........................................<1>$

由于协方差矩阵是对称矩阵，根据等式$<1>$:

$\frac{d}{d{x}}(x^{T}\Sigma^{-1} x)=\Sigma^{-1}*x+\Sigma^{-T}x=2\Sigma^{-1} *x.....<2>$

对于<2>式变换：

$\frac{d}{d{x}}(-\frac{1}{2}x^{T}\Sigma^{-1} x)=(-\frac{1}{2})(\Sigma^{-1}*x+\Sigma^{-T}*x)=\Sigma^{-1} *x$

$=x^{T}\Sigma^{-1}.................................................................<3>$

将<3>式带入<0>式：

$E[(x-\mu)(x- \mu)^{T}]$

$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-y*\Sigma}{\sqrt{(2 \pi)^{N}}det(\Sigma)}}exp(-\frac{1}{2}(y^{T}\Sigma^{-1}y))d(-\frac{1}{2}(y^{T}\Sigma^{-1}y))$

$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-y*\Sigma}{\sqrt{(2 \pi)^{N}}det(\Sigma)}}d(exp(-\frac{1}{2}(y^{T}\Sigma^{-1}y))$

分步积分法：

$E[(x-\mu)(x- \mu)^{T}]$

$=\frac{y*\Sigma}{\sqrt{(2 \pi)^{N}}det(\Sigma)}}*exp(-\frac{1}{2}(y^{T}\Sigma^{-1}y))|{-\infty}^{+\infty}+\int{-\infty}^{\infty}\frac{\Sigma}{\sqrt{(2 \pi)^{N}}det(\Sigma)}}exp(-\frac{1}{2}(y^{T}\Sigma^{-1}y))dy$

$=0+ \Sigma$

$=\Sigma$

## 2.5.6

对于K个相互独立的高斯变量，$x_{k}$~$N(\mu_{k},\Sigma_{k})$,请证明它们的归一化积仍然是高斯分布：

$$exp(-\frac{1}{2}(x-\mu)^{T}\Sigma^{-1}(x-\mu)\equiv \eta \prod_{k=1}^{K}exp(-\frac{1}{2}(x_{k}-\mu_{k})^{T}\Sigma_{k}^{-1}(x_{k}-\mu_{k})) $$

其中：
$$\Sigma^{-1}=\sum_{k=1}^{K}\Sigma_{k}^{-1}$$
$$\Sigma^{-1} \mu=\sum_{k=1}^{K} \Sigma_{k}^{-1} \mu_{k}$$

且$\eta$归一化因子。

**solution:**

随机变量$x_{k}$的概率密度函数如下：

$f_{k}(x)=\frac{1}{\sqrt{(2 \pi)^{N_{k}}}det(\Sigma_{k}^{-1})}exp(-\frac{1}{2}(x-\mu_{k})^{T}\Sigma_{k}^{-1}(x-\mu_{k}))$

$f_{1}(x)f_{2}(x)...*f_{K}(x)$

$=\frac{1}{\sqrt{(2 \pi)^{\sum_{k=1}^{K}N_{k}}}\prod_{k=1}^{K}det(\Sigma_{k})}exp(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{K}(x-\mu_{k})^{T}\Sigma_{k}^{-1}(x-\mu))$

将指数部分的求和号展开：

$f_{1}(x)f_{2}(x)...*f_{K}(x)$

$=\frac{1}{\sqrt{(2 \pi)^{\sum_{k=1}^{K}N_{k}}}\prod_{k=1}^{K}det(\Sigma_{k})}exp(-\frac{1}{2} (x^{T}(\sum_{k=1}^{K}\Sigma_{k}^{-1})x-(\sum_{k=1}^{K}\mu_{k}^{T}\Sigma_{k}^{-1})x-x^{T}\sum_{k=1}^{K}\Sigma_{i}^{-1}\mu_{i}+\sum_{k=1}^{K}\mu_{k}^{T}\Sigma_{k}^{-1}\mu_{k}))..................................................<0>$

因为协方差矩阵是对称矩阵，<0>式中
$(\sum_{k=1}^{K}\mu_{k}^{T}\Sigma_{k}^{-1})x=x^{T}\sum_{k=1}^{K}\Sigma_{i}^{-1}\mu_{i}$

因此：

$f_{1}(x)f_{2}(x)...*f_{K}(x)$

$=\frac{1}{\sqrt{(2 \pi)^{\sum_{k=1}^{K}N_{k}}}\prod_{k=1}^{K}det(\Sigma_{k})}exp(-\frac{1}{2} (x^{T}(\sum_{k=1}^{K}\Sigma_{k}^{-1})x-2x^{T}\sum_{k=1}^{K}\Sigma_{i}^{-1}\mu_{i}+\sum_{k=1}^{K}\mu_{k}^{T}\Sigma_{k}^{-1}\mu_{k}))....................<1>$

在式<1>中： $x^{T}(\sum_{k=1}^{K}\Sigma_{k}^{-1})x$为二次项
$2x^{T}\sum_{k=1}^{K}\Sigma_{i}^{-1}\mu_{i}$为一次项
可以凑出“完全平方形式”

$f_{1}(x)f_{2}(x)...*f_{K}(x)$

$=\frac{1}{\sqrt{(2 \pi)^{\sum_{k=1}^{K}N_{k}}}\prod_{k=1}^{K}det(\Sigma_{k})}exp(-\frac{1}{2}(x-\mu)^{T}\Sigma^{-1}(x-\mu)+M)$

上式中M为一个常数;

$f_{1}(x)f_{2}(x)...*f_{K}(x)$

$=\frac{1}{\sqrt{(2 \pi)^{\sum_{k=1}^{K}N_{k}}}\prod_{k=1}^{K}det(\Sigma_{k})}exp(-\frac{1}{2}(x-\mu)^{T}\Sigma^{-1}(x-\mu))*exp(M)......................................................................<2>$

根据上式二次项一次项对应参数，可以得到：

$$\Sigma^{-1}=\sum_{k=1}^{K}\Sigma_{k}^{-1}$$
$$\Sigma^{-1} \mu=\sum_{k=1}^{K} \Sigma_{k}^{-1} \mu_{k}$$

为了满足归一化条件，需要将变量指数项外的其他常数项归一到$\eta$中，也即证明K个独立正态分布随机变量概率密度相乘归一化之后仍为正态分布

## 2.5.7

假设有K个互相独立的随机变量$x_{k}$,它们通过加权组成一个新的随机变量：
$$x=\sum_{k=1}^{K}\omega_{k}x_{k}$$

其中$\sum_{k=1}^{K}\omega_{k}=1$且$\omega_{k}\geq 0$,它们的期望表示为：
$$\mu=\sum_{k=1}^{K}\omega_{k}\mu_{k}$$
其中$\mu_{k}$是x_{k}的均值，请定义出一个计算方差的表达式，注意，这些随机变量并没有假设服从高斯分布

**solution:**

统计学上有公式：

对于独立随机变量$X,Y$

$D(\omega_{x}X+\omega_{y}Y)=\omega_{x}^{2}D(X)+\omega_{y}^{2}D(Y).....<0>$

这里假设$x_{k}$的方差为$\sigma_{k}^{2}$

则方差的计算公式为：

$\sigma^{2}=\sum_{i=1}^{K}\omega_{k}^{2} \sigma_{k}^{2}$

$其中\sum_{k=1}^{K}\omega_{k}=1$

## 2.5.8

当K维随机变量x服从标准正态分布，即x~N($0$,$1$),则随机变量：
$$y=x^{T}x$$ 服从自由度为K的卡方分布，请证明该随机变量的均值为K，方差为2K(**题目条件暗含每一维度随机变量独立同分布假设，远书为准确提及**)

**solution:**

$y=x_{1}^{2}+x_{2}^{2}+...+x_{K}^{2}$

$E(y)=E(x_{1}^{2}+x_{2}^{2}+...+x_{K}^{2})$

$=E(x_{1}^{2})+E(x_{2}^{2})+...+E(x_{K}^{2})$

根据统计学：

$E(X^{2})=D(X)+(E(X))^{2}$

因此对于任意$1 \leq i\leq K:$

$E(x_{k}^{2})=1+0=1$

$E(y)=K$

根据Isserlis定理： $E\left[x_{i} x_{j} x_{k} x_{\ell}\right]=E\left[x_{i} x_{j}\right] E\left[x_{k} x_{\ell}\right]+E\left[x_{i} x_{k}\right] E\left[x_{j} x_{\ell}\right]+E\left[x_{i} x_{\ell}\right] E\left[x_{j} x_{k}\right]..............................<0>$

方差：

$D(y)$

$=E((x_{1}^{2}+x_{2}^{2}+...x_{K}^{2})^{2})$

$=E(\sum_{i=1}^{K}x_{i}^{4})+2E(\sum_{i=1,j=1,i \ne j}^{K}E(x_{i}^{2}x_{j}^{2}))............<1>$

根据<0>,其中：

$E(\sum_{i=1}^{K}x_{i}^{4})$

$=\sum_{i=1}^{K}E(x_{i}^{4})$

$=3K$

$E(\sum_{i=1,j=1,i \ne j}^{K}E(x_{i}^{2}x_{j}^{2}))$

$=\frac{K(K-1)}{2}$

将上述两式带入<0>:

$D(y)=2K$

# 线性高斯系统估计

## 3.6.1

考虑时间离散系统：
$$x_{k}=x_{k-1}+v_{k}+\omega_{k},\omega服从N(0,Q)正态分布$$

$$y_{k}=x_{k}+n_{k},n_{k}服从N(0.R)正态分布$$

这可以表达一辆沿x轴前进或者后退的汽车，初始状态$\check{x}_{0}$未知，请建立批量最小二乘的状态估计方程： $$(H^{T}W^{-1}H) \hat{x}=H^{T}W^{-1}z$$

即推导出$H,W,z$和$\hat{x}$的详细形式。令最大时间步数为$K=5$,并假设所有噪声互相无关，该问题存在唯一解吗？

**solution:**

本题思路：根据(3.40)的做法，因为没有初始状态的先验，因此将初始状态项在计算中全部略去，也就是删除矩阵中对应的行、块。

根据已知条件任意时刻$A_{k=0,1,2,3,4}=1，  C_{k=0,1,2,3,4,5}=1$

根据公式(3.12)：

$$z= \left[ \begin{matrix} v_{1} \ v_{2} \ v_{3} \ v_{4} \ v_{5} \ y_{0} \ y_{1} \ y_{2} \ y_{3} \ y_{4} \ y_{5} \ \end{matrix} \right]$$

这里删除了初始状态项，但是保留了初始时刻的观测$y_{0}$,因为机器人可以在不知道自己初始位置的条件下，进行观测

同样的方法，根据式(3.13b):

$$W= \left[ \begin{matrix} &Q_{1} &0 &0 &0 &0 &0 &0 &0 &0 &0 &0 \ &0 &Q_{2} &0 &0 &0 &0 &0 &0 &0 &0 &0 \ &0 &0 &Q_{3} &0 &0 &0 &0 &0 &0 &0 &0 \ &0 &0 &0 &Q_{4} &0 &0 &0 &0 &0 &0 &0 \ &0 &0 &0 &0 &Q_{5} &0 &0 &0 &0 &0 &0 \ &0 &0 &0 &0 &0 &R_{0} &0 &0 &0 &0 &0 \ &0 &0 &0 &0 &0 &0 &R_{1} &0 &0 &0 &0 \ &0 &0 &0 &0 &0 &0 &0 &R_{2} &0 &0 &0 \ &0 &0 &0 &0 &0 &0 &0 &0 &R_{3} &0 &0 \ &0 &0 &0 &0 &0 &0 &0 &0 &0 &R_{4} &0 \ &0 &0 &0 &0 &0 &0 &0 &0 &0 &0 &R_{5} \ \end{matrix} \right]$$

也即：

$W=diag(Q_{1},Q_{2},Q_{3},Q_{4},Q_{5},R_{0},R_{1},R_{2},R_{3},R_{4},R_{5})$

因此其逆矩阵：

$W^{-1}=diag(Q_{1}^{-1},Q_{2}^{-1},Q_{3}^{-1},Q_{4}^{-1},Q_{5}^{-1},R_{0}^{-1},R_{1}^{-1},R_{2}^{-1},R_{3}^{-1},R_{4}^{-1},R_{5}^{-1})$

根据(3.32),(3.33)---相对原书中公式需要删除初始状态对应那一列数据:

$H$ $ =$$ \left[ \begin{matrix} &A^{-1}\ &C \end{matrix} \right]$

$ =$$ \left[ \begin{matrix} &1 &0 &0 &0 &0 \ &-A_{1} &1 &0 &0 &0 \ &0 &-A_{2} &1 &0 &0 \ &0 &0 &-A_{3} &1 &0 \ &0 &0 &0 &-A_{4} &1 \ &0 &0 &0 &0 &0 \ &R_{1} &0 &0 &0 &0 \ &0 &R_{2} &0 &0 &0 \ &0 &0 &R_{3} &0 &0 \ &0 &0 &0 &R_{4} &0 \ &0 &0 &0 &0 &R_{5} \ \end{matrix} \right]$

因此：

$H^{T}W^{-1}H$ $= $$ \left[ \begin{matrix} &Q_{1}^{-1}+Q_{2}^{-1} &-Q_{2}^{-1} &0 &0 &0 \ &-Q_{2}^{-1} &Q_{2}^{-1}+Q_{3}^{-1}+R_{2}^{-1} &-Q_{3}^{-1} &0 &0 \ &0 &-Q_{3}^{-1} &Q_{3}^{-1}+Q_{4}^{-1}+R_{3}^{-1} &-Q_{4}^{-1} &0 \ &0 &0 &-Q_{4}^{-1} &Q_{4}^{-1}+Q_{5}^{-1}+R_{4}^{-1} &-Q_{5}^{-1} \ &0 &0 &0 &-Q_{5}^{-1} &Q_{5}^{-1}+R_{5}^{-1} \ \end{matrix} \right]$

$= $$ \left[ \begin{matrix} &2Q^{-1} &-Q^{-1} &0 &0 &0 \ &-Q^{-1} &2Q^{-1}+R^{-1} &-Q^{-1} &0 &0 \ &0 &-Q^{-1} &2Q^{-1}+R^{-1} &-Q^{-1} &0 \ &0 &0 &-Q^{-1} &2Q^{-1}+R^{-1} &-Q^{-1} \ &0 &0 &0 &-Q^{-1} &Q^{-1}+R^{-1} \ \end{matrix} \right]$

$Q>0,R>0$

$W^{-1}$对称且正定，根据(3.37)做修改，因为删除了初始状态，只需： $rank(H^{T}H)=rank(H^{T})=NK=5就可以构成唯一解充分条件$ 显然满足条件
因此，该系统存在唯一解

## 3.6.2

使用第一题的系统，令$Q=R=1$,证明： $$\mathbf{H}^{T} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{H}=\left[\begin{array}{rrrrr} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$$
此时Cholesky因子是什么，才能满足$LL^{T}=H^{T}W^{-1}H$?

**solution:**

证明只需将数据代入上一题目的公式中即可

这里假设：

$L= $$ \left[ \begin{matrix} &L_{1} &0 &0 &0 &0 \ &L_{21} &L_{2} &0 &0 &0 \ &0 &L_{32} &L_{3} &0 &0 \ &0 &0 &L_{43} &L_{4} &0 \ &0 &0 &0 &L_{54} &L_{5} \ \end{matrix} \right]$

在本问题中，L矩阵的中的每一项都是标量(0维张量)，因此：

$L^{T}= $$ \left[ \begin{matrix} &L_{1} &L_{21} &0 &0 &0 \ &0 &L_{2} &L_{32} &0 &0 \ &0 &0 &L_{3} &L_{43} &0 \ &0 &0 &0 &L_{4} &L_{54} \ &0 &0 &0 &0 &L_{5} \ \end{matrix} \right]$

将矩阵相乘：

$LL^{T}= $$ \left[ \begin{matrix} &L_{1}^{2} &L_{1}L_{21} &0 &0 &0 \ &L_{1}L_{21} &L_{2}^{2}+L_{21}^{2} &L_{2}L_{32} &0 &0 \ &0 &L_{2}L_{32} &L_{3}^{2}+L_{32}^{2} &L_{3}L_{43} &0 \ &0 &0 &L_{3}L_{43} &L_{4}^{2}+L_{43}^{2} &L_{4}L_{54} \ &0 &0 &0 &L_{4}L_{54} &L_{5}^{2}+L_{54}^{2} \ \end{matrix} \right]$

从矩阵最左边开始迭代就可以结算处$L$(注意这个矩阵元素的结算因为涉及多个开方，存在多个解，这里仅给出一个):

$L= $$ \left[ \begin{matrix} &\sqrt{2} &0 &0 &0 &0 \ &-\sqrt{\frac{1}{2}} &\sqrt{\frac{5}{2}} &0 &0 &0 \ &0 &-\sqrt{\frac{2}{5}} &\sqrt{\frac{13}{5}} &0 &0 \ &0 &0 &-\sqrt{\frac{5}{13}} &\sqrt{\frac{34}{13}} &0 \ &0 &0 &0 &-\sqrt{\frac{13}{34}} &\sqrt{\frac{55}{34}} \ \end{matrix} \right]$

## 3.6.3

使用第一题的系统，修改最小二乘解，假设噪声之间存在相关性：

$$E\left[y_{k} y_{\ell}\right]=\left{\begin{array}{l} R \quad|k-\ell|=0 \ R / 2|k-\ell|=1 \ R / 4|k-\ell|=2 \ 0 \quad \text { otherwise } \end{array}\right.$$

此时存在唯一的最小二乘解吗？

**solution:**

$$W= \left[ \begin{matrix} &Q &0 &0 &0 &0 &0 &0 &0 &0 &0 &0 \ &0 &Q &0 &0 &0 &0 &0 &0 &0 &0 &0 \ &0 &0 &Q &0 &0 &0 &0 &0 &0 &0 &0 \ &0 &0 &0 &Q &0 &0 &0 &0 &0 &0 &0 \ &0 &0 &0 &0 &Q &0 &0 &0 &0 &0 &0 \ &0 &0 &0 &0 &0 &R &R/2 &R/4 &0 &0 &0 \ &0 &0 &0 &0 &0 &R/2 &R &R/2 &R/4 &0 &0 \ &0 &0 &0 &0 &0 &R/4 &R/2 &R &R/2 &R/4 &0 \ &0 &0 &0 &0 &0 &0 &R/4 &R/2 &R &R/2 &R/4 \ &0 &0 &0 &0 &0 &0 &0 &R/4 &R/2 &R &R/2 \ &0 &0 &0 &0 &0 &0 &0 &0 &R/4 &R/2 &R \ \end{matrix} \right]$$

等价于

$W= \left[ \begin{matrix} &Q &0\ &0 &R^{*} \end{matrix} \right]$

其中：

$R^{*}=R\left[ \begin{matrix} &1 &1/2 &1/4 &0 &0 &0 \ &1/2 &1 &1/2 &1/4 &0 &0 \ &1/4 &1/2 &1 &1/2 &1/4 &0 \ &0 &1/4 &1/2 &1 &1/2 &1/4 \ &0 &0 &1/4 &1/2 &1 &1/2 \ &0 &0 &0 &1/4 &1/2 &1 \ \end{matrix} \right]$

$R^{*}$可逆

因此$W^{-1}$存在

根据(3.37):

$rank(H^{T}H)=rank(H^{T})=NK=5$

存在唯一解

## 3.6.4

使用第一题的系统，推导卡尔曼滤波器的详细过程。本例的初始状态均值为$\check{x}{0}$方差为$\check{P}{0}$,证明：稳态时先验和后验方差$\check{P}$和$\hat{P}$,当$K \rightarrow \infty$为以下两个方程组的解：$\check{P}^{2}-Q \check{P}-QR=0$ $\hat{P}^{2}+Q\hat{P}-QR=0$

此二式是离散Riccati方程的两个不同版本，同时，解释为什么这两个二次方程仅有一个是物理上可行的。

**solution:**

具有先验信息的条件下：

$H^{T}W^{-1}H$ $= $$ \left[ \begin{matrix} &\check{P}_{0}^{-1}+Q^{-1}+R^{-1} &-Q^{-1} &0 &0 &0 &0\ &-Q^{-1} &2Q^{-1}+R^{-1} &-Q^{-1} &0 &0 &0\ &0 &-Q^{-1} &2Q^{-1}+R^{-1} &-Q^{-1} &0 &0\ &0 &0 &-Q^{-1} &2Q^{-1}+R^{-1} &-Q^{-1} &0 \ &0 &0 &0 &-Q^{-1} &2Q^{-1}+R^{-1} &-Q^{-1} \ &0 &0 &0 &0 &-Q^{-1} &Q^{-1}+R^{-1} \ \end{matrix} \right]$

$L= $$ \left[ \begin{matrix} &L_{0} &0 &0 &0 &0 &0 \ &L_{10} &L_{1} &0 &0 &0 &0 \ &0 &L_{21} &L_{2} &0 &0 &0 \ &0 &0 &L_{32} &L_{3} &0 &0 \ &0 &0 &0 &L_{43} &L_{4} &0 \ &0 &0 &0 &0 &L_{54} &L_{5} \ \end{matrix} \right]$

$L^{T}= $$ \left[ \begin{matrix} &L_{0}^{T} &L_{10}^{T} &0 &0 &0 &0 \ &0 &L_{1}^{T} &L_{21}^{T} &0 &0 &0 \ &0 &0 &L_{2}^{T} &L_{32}^{T} &0 &0 \ &0 &0 &0 &L_{3}^{T} &L_{43}^{T} &0 \ &0 &0 &0 &0 &L_{4}^{T} &L_{54}^{T} \ &0 &0 &0 &0 &0 &L_{5}^{T} \ \end{matrix} \right]$

$= $$ \left[ \begin{matrix} &L_{0} &L_{10} &0 &0 &0 &0 \ &0 &L_{1} &L_{21} &0 &0 &0 \ &0 &0 &L_{2} &L_{32} &0 &0 \ &0 &0 &0 &L_{3} &L_{43} &0 \ &0 &0 &0 &0 &L_{4} &L_{54} \ &0 &0 &0 &0 &0 &L_{5} \ \end{matrix} \right]$

对于：

$\begin{aligned} (k=1 \ldots K) & \ \mathbf{L}{k-1} \mathbf{L}{k-1}^{T}=& \mathbf{I}{k-1}+\mathbf{A}{k-1}^{T} \mathbf{Q}{k}^{-1} \mathbf{A}{k-1} \ \mathbf{L}{k-1} \mathbf{d}{k-1}=& \mathbf{q}{k-1}-\mathbf{A}{k-1}^{T} \mathbf{Q}{k}^{-1} \mathbf{v}{k} \ \mathbf{L}{k, k-1} \mathbf{L}{k-1}^{T}=&-\mathbf{Q}{k}^{-1} \mathbf{A}{k-1} \ \mathbf{I}{k}=&-\mathbf{L}{k, k-1} \mathbf{L}{k, k-1}^{T}+\mathbf{Q}{k}^{-1}+\mathbf{C}{k}^{T} \mathbf{R}{k}^{-1} \mathbf{C}{k} \ \mathbf{q}{k}=&-\mathbf{L}{k, k-1} \mathbf{d}{k-1}+\mathbf{Q}{k}^{-1} \mathbf{v}{k}+\mathbf{C}{k}^{T} \mathbf{R}{k}^{-1} \mathbf{y}_{k} \end{aligned}$

根据本系统修正：

$\begin{aligned} (k=1 \ldots K) & \ \mathbf{L}{k-1} \mathbf{L}{k-1}=& \mathbf{I}{k-1}+ \mathbf{Q}^{-1} \ \mathbf{L}{k-1} \mathbf{d}{k-1}=& \mathbf{q}{k-1}-\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v}{k} \ \mathbf{L}{k, k-1} \mathbf{L}{k-1}=&-\mathbf{Q}^{-1} \ \mathbf{I}{k}=&-\mathbf{L}{k, k-1} \mathbf{L}{k, k-1}+\mathbf{Q}^{-1}+ \mathbf{R}^{-1} \ \mathbf{q}{k}=&-\mathbf{L}{k, k-1} \mathbf{d}{k-1}+\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v}{k}+\mathbf{C}^{T} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}_{k} \end{aligned}$

$\begin{aligned} \mathbf{I}{0} &=\check{\mathbf{P}}{0}^{-1}+ \mathbf{R}^{-1} \ \mathbf{q}{0} &=\check{\mathbf{P}}{0}^{-1} \check{\mathbf{x}}{0}+\mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}{0} \ \hat{\mathbf{x}}{K} &=\mathbf{L}{K}^{-1} \mathbf{d}_{K} \end{aligned}$

卡尔曼滤波推导完毕

根据(3.28)

当$K \rightarrow \infty$处于稳态时：

$\check{P} = \hat{P} + Q -------------<0>$

$K =\check { P } (\check{P} +R)^{-1}----------<1>$

$\hat{P} = (1-K) \check{P} -------------<2>$

将<1><2>带入<0>:
$\check{P}=(1-K)\check{P}+Q=(1-\frac{\check{P}}{\check{P}+R})\check{P}+Q$

整理得：
$\check{P}^{2}-Q \check{P}-QR=0$

将<0><1>带入<3>得：
$\hat{P}=(1-K)(\hat{P}+Q)=(1-\frac{\hat{P}+Q}{\hat{P}+Q+R})(\hat{P}+Q)$

整理得：
$\hat{P}^{2}+Q\hat{P}-QR=0$

# 3.6.5

使用3.3.2节的MAP方法，推导后向的卡尔曼滤波器(而非前向的)

**solution:**

反向卡尔曼滤波应该是在得到$k$时刻的控制和观测之后，对$K-1$时刻的状态进行估计

根据(3.109)式，也即计算$\hat{x}_{k-1}^{'}$

原理示意图参考书中3-4图

根据(3.110):

$(\hat{P}{k-1}^{-1}+A{k-1}^{T}Q_{k}^{-1}A_{k-1}) \hat{x}{k-1}^{'} -A{k-1}^{T}Q_{k}^{-1} \hat{x}{k} =\hat{P}{k-1}^{-1} \hat{x}{k-1}-A{k-1}^{T}Q_{k}^{-1}v_{k} ------<0>$

根据正向卡尔曼滤波器的递推公式(3.120):

带入(3.120a)(3.120b)(3.120c)(3.120e)式：

$(\hat{P}{k-1}^{-1}+A{k-1}^{T}Q_{k}^{-1}A_{k-1}) \hat{x}{k-1}^{'} =A{k-1}^{T}Q_{k}^{-1} \hat{x}{k} +\hat{P}{k-1}^{-1} \hat{x}{k-1}-A{k-1}^{T}Q_{k}^{-1}v_{k} $

$=A_{k-1}^{T}Q_{k}^{-1}A_{k-1}y_{k}-A_{k-1}^{T}Q_{k}^{-1}A_{k-1}C_{k}v_{k}+A_{k-1}^{T}Q_{k}^{-1}(1-K_{k}C_{k})A_{k-1}\hat{x}_{k-1}$

令：

$K_{k,b}=(\hat{P}{k-1}^{-1}+A{k-1}^{T}Q_{k}^{-1}A_{k-1})^{-1}A_{k-1}^{T}Q_{k}^{-1}$
$K_{k,b,y}=K_{k,b}K_{k}$
$K_{k,b,v}=-K_{k,b}K_{k}C_{k}$
$K_{k,b,x}=K_{k,b}(1-K_{k}C_{k})A_{k-1}$

由此反向卡尔曼滤波：
$\hat{x}{k-1}^{'}=K{k,b,y}y_{k}+K_{k,b,v}v_{k}+K_{k,b,x} \hat{x}_{k-1}$

上式中$y_{k},v_{k}$融合了k时刻的观测和控制
$\hat{x}_{k-1}$融合了0 ~ k-1时刻的信息

# 3.5.6

证明：
$\left[\begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & & & & & \ \mathbf{A} & \mathbf{1} & & & & \ \boldsymbol{A}^{2} & \mathbf{A} & \mathbf{1} & & & \ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \ \boldsymbol{A}^{K-1} & \boldsymbol{A}^{K-2} & \boldsymbol{A}^{K-3} & \cdots & \mathbf{1} & \ \boldsymbol{A}^{K} & \boldsymbol{A}^{K-1} & \boldsymbol{A}^{K-2} & \cdots & \boldsymbol{A} & \mathbf{1} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cccccc} 1 & & & & & \ \boldsymbol{-A} & 1 & & & & \ & \boldsymbol{-A} & 1 & & & \ & & \boldsymbol{-A} & \ddots & & \ & & & \ddots & 1 & \ & & & & \boldsymbol{-A} & 1 \end{array}\right]$

**solution:**

$\left[\begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & & & & & \ \mathbf{A} & \mathbf{1} & & & & \ \boldsymbol{A}^{2} & \mathbf{A} & \mathbf{1} & & & \ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \ \boldsymbol{A}^{K-1} & \boldsymbol{A}^{K-2} & \boldsymbol{A}^{K-3} & \cdots & \mathbf{1} & \ \boldsymbol{A}^{K} &

\boldsymbol{A}^{K-1} & \boldsymbol{A}^{K-2} & \cdots & \boldsymbol{A} & \mathbf{1} \end{array}\right]\left[\begin{array}{cccccc} 1 & & & & & \ \boldsymbol{-A} & 1 & & & & \ & \boldsymbol{-A} & 1 & & & \ & & \boldsymbol{-A} & \ddots & & \ & & & \ddots & 1 & \ & & & & \boldsymbol{-A} & 1 \end{array}\right]=E$

此处$E$为单位矩阵，即证

## 3.5.7

我们已经介绍了在批量最小二乘解中，后验协方差：

$\hat{P}=(H^{T}W^{-1}H)^{-1}$

同时我们也知道，Cholesky分解：

$LL^{T}=H^{T}W^{-1}H$

的计算代价$O(N(K+1))$,这是由于系统具备稀疏性，反之，我们有：

$\hat{P}=L^{-T}L^{-1}$

请说明这种计算方法计算$\hat{P}$的复杂度。

**solution:**

假设$L$逆矩阵的已经计算得到，由于$LL^{T}$矩阵相乘得到的特殊稀疏结构，

$\hat{P}$为(K+1)*(K+1)的二维矩阵

计算$\hat{P}$的复杂度：

计算频次=$N(([K+1]+[(K+1)+(K)]+...+[(K+1)+(K)+(K-1)+...+1])+([(K)]+[(K)+(K-1)]+...+[(K)+(K-1)+...+1]))$
$=N(\sum_{i=1}^{K+1}{i^{2}}+\sum_{i=1}^{K}{i^{2}})$

$=N(\frac{(K+1)(K+2)(2K+3)}{6}+\frac{K(K+1)(2K+1)}{6})$

因此计算复杂度为$O(NK^{3})$

# 4.非线性非高斯系统的状态估计

## 4.6.1

考虑如下离散时间系统：
$ \left[ \begin{matrix} x_{k} \ y_{k} \ \theta_{k} \ \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} x_{k-1} \ y_{k-1} \ \theta_{k-1} \ \end{matrix} \right] + T\left[ \begin{matrix} &cos \theta_{k-1} &0 \ &sin \theta_{k-1} &0 \ &0 &1 \ \end{matrix}\right](\left[ \begin{matrix} v_{k} \ \omega_{k} \ \end{matrix}\right]+\omega_{k})$

其中$\omega$~$N(0,Q)$

$\left[ \begin{matrix} &r_{k} \ &\phi_{k} \ \end{matrix}\right]=\left[ \begin{matrix} &\sqrt{x_{k}^{2}+y_{k}^{2}} \ &atan2(-y_{k},-x_{k})-\theta_{k} \ \end{matrix}\right]+n_{k}$

$n_{k}$~$N(0,R)$

该系统可以看做移动机器人在xy平面上移动，测量值为移动机器人距离原点的距离和方位，请建立EFK方程来估计移动机器人的位姿，并写出雅可比$F_{k-1}$，$G_{k}$和协方差$Q_{k}^{'}$,$R_{k}^{'}的表达式。

**solution:**

# 参考文献：

**1.Matrix Cookbook---Kaare Brandt Petersen**