机器人中的状态估计课后习题答案

完成人：高明

联系方式：

> 知乎：高明
> 微信：gaoming0901

2.概率论基础

2.5.1

假设u,v是相同维度向量, 请证明下面等式： $u^Tv = tr(vu^T)$

solution:

$u = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$

$v = (y_1, y_2, ..., y_n)^T$

$u^Tv = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$

$$uv^T = \begin{bmatrix} x_1y_1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & x_2y_2 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & x_ny_n \end{bmatrix}$$

$tr(uv^T) = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i = u^Tv$

2.5.2

如果有两个相互独立的随机变量x,y,它们的联合分布为$p(x, y)$,请证明它们概率的香浓信息等于各自独立香浓信息的和:

$H(x, y) = H(x) + H(y)$

solution:

$H(x, y)$

$= -E_{(x,y)}(ln(f(x,y)))$

$= -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)ln(f(x,y))dxdy$

因为x,y独立

$H(x,y)$
$= -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(y)[ln(f(x)) + ln(f(y))]dxdy$

$= -[\int_{-\infty}^{\infty}(f(x)ln(f(x))dx] * \int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy - [\int_{-\infty}^{\infty} f(y)ln(f(y))dy] * \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

$= -\int_{-\infty}^{\infty}(f(x)ln(f(x))dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(y)ln(f(y))dy$

$= H(x) + H(y)$

2.5.3

对于高斯分布的随机变量，x~N(μ,Σ),请证明下面的等式：

$\mu = E[xx^T] = \Sigma + \mu\mu^T$

solution:

Σ
$= E[(x-\mu)(x-\mu)^T]$

$= E(xx^T - x\mu^T - \mu x^T + \mu\mu^T)$

$= E(xx^T) - E(x)\mu^T - \mu E(x^T) + \mu\mu^T$

因为$E(x) = \mu$

$\Sigma = E(xx^T) - \mu\mu^T$

因此

$E(xx^T) = \Sigma + \mu\mu^T$

2.5.4

对于高斯分布的随机变量，x~N(μ,Σ),请证明下面的等式：

$\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$

solution:

$E(x)$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{(2\pi)^N det(\Sigma)}} exp(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu))dx$

做变换:
$y = x - \mu$

可得:
$x = y + \mu$

$E(x)$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y+\mu}{\sqrt{(2\pi)^N det(\Sigma)}} exp(-\frac{1}{2}y^T\Sigma^{-1}y)dy$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\sqrt{(2\pi)^N det(\Sigma)}} exp(-\frac{1}{2}y^T\Sigma^{-1}y)dy + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu}{\sqrt{(2\pi)^N det(\Sigma)}} exp(-\frac{1}{2}y^T\Sigma^{-1}y)dy$

上式第一项由于奇函数在关于0对称空间积分为0

上式第二项扣除μ满足概率归一化条件

$E(x) = \mu$

2.5.5

对于高斯分布的随机变量，x~$N(\mu, \Sigma)$,证明下式:

$\Sigma = E[(x-\mu)(x-\mu)^T] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)(x-\mu)^T p(x)dx$

solution:

$E[(x-\mu)(x-\mu)^T]$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)(x-\mu)^T}{\sqrt{(2\pi)^N det(\Sigma)}} exp(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu))dx$

做代换$y = x - \mu$

$E[(x-\mu)(x-\mu)^T]$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yy^T}{\sqrt{(2\pi)^N det(\Sigma)}} exp(-\frac{1}{2}(y^T\Sigma^{-1}y))dy .... < 0 >$

下面参考文献【1】中公式(108)如下式:

$\frac{\partial}{\partial X}(X^TBX) = BX + B^TX$

上式中X是矩阵，向量算特殊矩阵，直接带入，向量表达式如下:

$\frac{d}{dx}(x^TBx) = Bx + B^Tx .... < 1 >$

由于协方差矩阵是对称矩阵，根据等式$< 1 >$:

$\frac{d}{dx}(x^T\Sigma^{-1}x) = \Sigma^{-1} * x + \Sigma^{-T} * x = 2 * \Sigma^{-1} * x ..... < 2 >$

对于<2>式变换：

$\frac{d}{dx}(-\frac{1}{2}x^T\Sigma^{-1}x) = (-\frac{1}{2})(\Sigma^{-1} * x + \Sigma^{-T} * x) = \Sigma^{-1} * x$

$= x^T\Sigma^{-1} .... < 3 >$

将<3>式带入<0>式：

$E[(x-\mu)(x-\mu)^T]$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-y*\Sigma}{\sqrt{(2\pi)^N det(\Sigma)}} exp(-\frac{1}{2}(y^T\Sigma^{-1}y))d(-\frac{1}{2}(y^T\Sigma^{-1}y))$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-y*\Sigma}{\sqrt{(2\pi)^N det(\Sigma)}} d(exp(-\frac{1}{2}(y^T\Sigma^{-1}y))$

分步积分法：

$E[(x-\mu)(x-\mu)^T]$

$= \frac{y*\Sigma}{\sqrt{(2\pi)^N det(\Sigma)}} * exp(-\frac{1}{2}(y^T\Sigma^{-1}y))|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Sigma}{\sqrt{(2\pi)^N det(\Sigma)}} exp(-\frac{1}{2}(y^T\Sigma^{-1}y))dy$

$= 0 + \Sigma$

$= \Sigma$

2.5.6

对于K个相互独立的高斯变量，x_k~$N(\mu_k, \Sigma_k)$,请证明它们的归一化积仍然是高斯分布：

$$exp(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu) \equiv \eta\prod_{k=1}^{K} exp(-\frac{1}{2}(x_k-\mu_k)^T\Sigma_k^{-1}(x_k-\mu_k))$$

其中：

$$\Sigma^{-1} = \sum_{k=1}^{K}\Sigma_k^{-1}$$

$$\Sigma^{-1}\mu = \sum_{k=1}^{K}\Sigma_k^{-1}\mu_k$$

且η归一化因子。

solution:

随机变量x_k的概率密度函数如下：

$f_k(x)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{N_k}det(\Sigma_k^{-1})}}exp(-\frac{1}{2}(x-\mu_k)^T\Sigma_k^{-1}(x-\mu_k))$

$f_1(x)*f_2(x)*...*f_K(x)$

$=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{\sum_{k=1}^K N_k}\prod_{k=1}^K det(\Sigma_k)}}exp(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^K(x-\mu_k)^T\Sigma_k^{-1}(x-\mu))$

将指数部分的求和号展开：

$f_1(x)*f_2(x)*...*f_K(x)$

$=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{\sum_{k=1}^K N_k}\prod_{k=1}^K det(\Sigma_k)}}exp(-\frac{1}{2}(x^T(\sum_{k=1}^K\Sigma_k^{-1})x-(\sum_{k=1}^K\mu_k^T\Sigma_k^{-1})x-x^T\sum_{k=1}^K\Sigma_i^{-1}\mu_i+$
$\sum_{k=1}^K\mu_k^T\Sigma_k^{-1}\mu_k))..<0>$

因为协方差矩阵是对称矩阵，<0>式中
$(\sum_{k=1}^K\mu_k^T\Sigma_k^{-1})x=x^T\sum_{k=1}^K\Sigma_i^{-1}\mu_i$

因此：

$f_1(x)*f_2(x)*...*f_K(x)$

$=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{\sum_{k=1}^K N_k}\prod_{k=1}^K det(\Sigma_k)}}exp(-\frac{1}{2}(x^T(\sum_{k=1}^K\Sigma_k^{-1})x-2x^T\sum_{k=1}^K\Sigma_i^{-1}\mu_i+$
$\sum_{k=1}^K\mu_k^T\Sigma_k^{-1}\mu_k))....................<1>$

在式<1>中：
$x^T(\sum_{k=1}^K\Sigma_k^{-1})x$为二次项
$2x^T\sum_{k=1}^K\Sigma_i^{-1}\mu_i$为一次项
可以凑出“完全平方形式”

$f_1(x)*f_2(x)*...*f_K(x)$

$=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{\sum_{k=1}^K N_k}\prod_{k=1}^K det(\Sigma_k)}}exp(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)+M)$

上式中M为一个常数;

$f_1(x)*f_2(x)*...*f_K(x)$

$=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{\sum_{k=1}^K N_k}\prod_{k=1}^K det(\Sigma_k)}}exp(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu))*$
$exp(M)...<2>$

根据上式二次项一次项对应参数，可以得到：

$$\Sigma^{-1}=\sum_{k=1}^K\Sigma_k^{-1}$$

$$\Sigma^{-1}\mu = \sum_{k=1}^{K} \Sigma_k^{-1}\mu_k$$

为了满足归一化条件，需要将变量指数项外的其他常数项归一到η中，也即证明K个独立正态分布随机变量概率密度相乘归一化之后仍为正态分布

2.5.7

假设有K个互相独立的随机变量x_k,它们通过加权组成一个新的随机变量：

$$x = \sum_{k=1}^{K} \omega_k x_k$$

其中$\sum_{k=1}^{K}\omega_k = 1$且$\omega_k \geq 0$,它们的期望表示为：

$$\mu = \sum_{k=1}^{K} \omega_k \mu_k$$

其中μ_k是x_{k}的均值，请定义出一个计算方差的表达式，注意，这些随机变量并没有假设服从高斯分布

solution:

统计学上有公式：

对于独立随机变量X, Y

$D(\omega_x X + \omega_y Y) = \omega_x^2 D(X) + \omega_y^2 D(Y) ..... < 0 >$

这里假设x_k的方差为σ_k^2

则方差的计算公式为：

$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{K} \omega_k^2 \sigma_k^2$

其中 $\sum_{k=1}^{K} \omega_k = 1$

2.5.8

当K维随机变量x服从标准正态分布，即x~N(0,1),则随机变量：

$$y = x^T x$$

服从自由度为K的卡方分布，请证明该随机变量的均值为K，方差为2K(**题目条件暗含每一维度随机变量独立同分布假设，远书为准确提及**)

solution:

$$y = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_K^2$$

$$E(y) = E(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_K^2)$$

$$= E(x_1^2) + E(x_2^2) + ... + E(x_K^2)$$

根据统计学：

$$E(X^2) = D(X) + (E(X))^2$$

因此对于任意$1 \leq i \leq K$：

$$E(x_k^2) = 1 + 0 = 1$$

$$E(y) = K$$

根据Isserlis定理：

$$E\left[x_i x_j x_k x_\ell\right] = E\left[x_i x_j\right] E\left[x_k x_\ell\right] + E\left[x_i x_k\right] E\left[x_j x_\ell\right] + E\left[x_i x_\ell\right] E\left[x_j x_k\right] .... < 0 >$$

方差：

$$D(y)$$

$$= E((x_1^2 + x_2^2 + ...x_K^2)^2)$$

$$= E(\sum_{i=1}^K x_i^4) + 2E(\sum_{i=1,j=1,i \neq j}^K E(x_i^2 x_j^2))........... < 1 >$$

根据<0>,其中：

$$E(\sum_{i=1}^K x_i^4)$$

$$= \sum_{i=1}^K E(x_i^4)$$

$$= 3K$$

$$E(\sum_{i=1,j=1,i \neq j}^K E(x_i^2 x_j^2))$$

$$= \frac{K(K-1)}{2}$$

将上述两式带入<0>:

$$D(y) = 2K$$

线性高斯系统估计

3.6.1

考虑时间离散系统：

$$x_k = x_{k-1} + v_k + \omega_k, \omega\text{服从}N(0,Q)\text{正态分布}$$

$$y_k = x_k + n_k, n_k\text{服从}N(0.R)\text{正态分布}$$

这可以表达一辆沿x轴前进或者后退的汽车，初始状态$\check{x}_0$未知，请建立批量最小二乘的状态估计方程：

$$(H^T W^{-1} H)\hat{x} = H^T W^{-1} z$$

即推导出H, W, z和$\hat{x}$的详细形式。令最大时间步数为$K = 5$,并假设所有噪声互相无关，该问题存在唯一解吗？

solution:

本题思路：根据(3.40)的做法，因为没有初始状态的先验，因此将初始状态项在计算中全部略去，也就是删除矩阵中对应的行、块。

根据已知条件任意时刻$A_{k=0,1,2,3,4} = 1$，$C_{k=0,1,2,3,4,5} = 1$

根据公式(3.12)：

$$z = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$$

这里删除了初始状态项，但是保留了初始时刻的观测y_0,因为机器人可以在不知道自己初始位置的条件下，进行观测

同样的方法，根据式(3.13b):

$$W = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 \end{bmatrix}$$

也即：

$$W = diag(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, R_0, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5)$$

因此其逆矩阵：

$$W^{-1} = diag(Q_1^{-1}, Q_2^{-1}, Q_3^{-1}, Q_4^{-1}, Q_5^{-1}, R_0^{-1}, R_1^{-1}, R_2^{-1}, R_3^{-1}, R_4^{-1}, R_5^{-1})$$

根据(3.32),(3.33)---相对原书中公式需要删除初始状态对应那一列数据：

$$H = \begin{bmatrix} A^{-1} \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A_4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 \end{bmatrix}$$

因此：

$$H^T W^{-1} H = \begin{bmatrix} Q_1^{-1} + Q_2^{-1} & -Q_2^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -Q_2^{-1} & Q_2^{-1} + Q_3^{-1} + R_2^{-1} & -Q_3^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -Q_3^{-1} & Q_3^{-1} + Q_4^{-1} + R_3^{-1} & -Q_4^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -Q_4^{-1} & Q_4^{-1} + Q_5^{-1} + R_4^{-1} & -Q_5^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & -Q_5^{-1} & Q_5^{-1} + R_5^{-1} \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} 2Q^{-1} & -Q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -Q^{-1} & 2Q^{-1}+R^{-1} & -Q^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -Q^{-1} & 2Q^{-1}+R^{-1} & -Q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -Q^{-1} & 2Q^{-1}+R^{-1} & -Q^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & -Q^{-1} & Q^{-1}+R^{-1} \end{bmatrix}
$$

$Q > 0, R > 0$

W^{-1}对称且正定，根据(3.37)做修改，因为删除了初始状态，只需：
$rank(H^T H) = rank(H^T) = NK = 5$就可以构成唯一解充分条件
显然满足条件
因此，该系统存在唯一解

3.6.2

使用第一题的系统，令$Q = R = 1$,证明：

$$
\mathbf{H}^T\mathbf{W}^{-1}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}
$$

此时Cholesky因子是什么，才能满足$LL^T = H^T W^{-1} H$?

solution:

证明只需将数据代入上一题目的公式中即可

这里假设：

$$
L = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{32} & L_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_{43} & L_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{54} & L_5 \end{bmatrix}
$$

在本问题中，L矩阵的中的每一项都是标量(0维张量)，因此：

$$
L^T = \begin{bmatrix} L_1 & L_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & L_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 & L_{43} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_4 & L_{54} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_5 \end{bmatrix}
$$

将矩阵相乘：

$$LL^T=\begin{bmatrix} L_1^2 & L_1L_{21} & 0 & 0 & 0 \\ L_1L_{21} & L_2^2+L_{21}^2 & L_2L_{32} & 0 & 0 \\ 0 & L_2L_{32} & L_3^2+L_{32}^2 & L_3L_{43} & 0 \\ 0 & 0 & L_3L_{43} & L_4^2+L_{43}^2 & L_4L_{54} \\ 0 & 0 & 0 & L_4L_{54} & L_5^2+L_{54}^2 \end{bmatrix}$$

从矩阵最左边开始迭代就可以结算处L(注意这个矩阵元素的结算因为涉及多个开方，存在多个解，这里仅给出一个):

$$L=\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{5}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{5}} & \sqrt{\frac{13}{5}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{5}{13}} & \sqrt{\frac{34}{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{13}{34}} & \sqrt{\frac{55}{34}} \end{bmatrix}$$

3.6.3

使用第一题的系统，修改最小二乘解，假设噪声之间存在相关性：

$$E\left[y_k y_\ell\right]=\begin{cases} R & |k-\ell|=0 \\ R/2 & |k-\ell|=1 \\ R/4 & |k-\ell|=2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

此时存在唯一的最小二乘解吗？

solution:

$$W=\begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R & R/2 & R/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R/2 & R & R/2 & R/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R/4 & R/2 & R & R/2 & R/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R/4 & R/2 & R & R/2 & R/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R/4 & R/2 & R & R/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R/4 & R/2 & R \end{bmatrix}$$

等价于

$$W=\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R^* \end{bmatrix}$$

其中:

$$R^* = R\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

R^*可逆

因此W^{-1}存在

根据(3.37):

$$rank(H^TH) = rank(H^T) = NK = 5$$

存在唯一解

3.6.4

使用第一题的系统，推导卡尔曼滤波器的详细过程。本例的初始状态均值为$\check{x}_0$方差为$\check{P}_0$,证明：稳态时先验和后验方差$\check{P}$和$\hat{P}$,当$K \to \infty$为以下两个方程组的解：
$\check{P}^2 - Q\check{P} - QR = 0$
$\hat{P}^2 + Q\hat{P} - QR = 0$

此二式是离散Riccati方程的两个不同版本，同时，解释为什么这两个二次方程仅有一个是物理上可行的。

solution:

具有先验信息的条件下：

$$H^TW^{-1}H$$
$$=$$
$$\begin{bmatrix} \check{P}_0^{-1} + Q^{-1} + R^{-1} & -Q^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Q^{-1} & 2Q^{-1} + R^{-1} & -Q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Q^{-1} & 2Q^{-1} + R^{-1} & -Q^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Q^{-1} & 2Q^{-1} + R^{-1} & -Q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Q^{-1} & 2Q^{-1} + R^{-1} & -Q^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Q^{-1} & Q^{-1} + R^{-1} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_{10} & L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{21} & L_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_{32} & L_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{43} & L_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_{54} & L_5 \end{bmatrix}$$

$$
L^T = \begin{bmatrix} L_0^T & L_{10}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1^T & L_{21}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_2^T & L_{32}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_3^T & L_{43}^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_4^T & L_{54}^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_5^T \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} L_0 & L_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & L_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_2 & L_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_3 & L_{43} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_4 & L_{54} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_5 \end{bmatrix}
$$

对于:

$$
\begin{aligned}
&(k = 1 \ldots K) \\
\mathbf{L}_{k-1}\mathbf{L}_{k-1}^T &= \mathbf{I}_{k-1} + \mathbf{A}_{k-1}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{A}_{k-1} \\
\mathbf{L}_{k-1}\mathbf{d}_{k-1} &= \mathbf{q}_{k-1} - \mathbf{A}_{k-1}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{v}_k \\
\mathbf{L}_{k,k-1}\mathbf{L}_{k-1}^T &= -\mathbf{Q}_k^{-1}\mathbf{A}_{k-1} \\
\mathbf{I}_k &= -\mathbf{L}_{k,k-1}\mathbf{L}_{k,k-1}^T + \mathbf{Q}_k^{-1} + \mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{C}_k \\
\mathbf{q}_k &= -\mathbf{L}_{k,k-1}\mathbf{d}_{k-1} + \mathbf{Q}_k^{-1}\mathbf{v}_k + \mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{y}_k
\end{aligned}
$$

根据本系统修正:

$$
\begin{aligned}
&(k = 1 \ldots K) \\
\mathbf{L}_{k-1}\mathbf{L}_{k-1} &= \mathbf{I}_{k-1} + \mathbf{Q}^{-1} \\
\mathbf{L}_{k-1}\mathbf{d}_{k-1} &= \mathbf{q}_{k-1} - \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v}_k \\
\mathbf{L}_{k,k-1}\mathbf{L}_{k-1} &= -\mathbf{Q}^{-1} \\
\mathbf{I}_k &= -\mathbf{L}_{k,k-1}\mathbf{L}_{k,k-1} + \mathbf{Q}^{-1} + \mathbf{R}^{-1} \\
\mathbf{q}_k &= -\mathbf{L}_{k,k-1}\mathbf{d}_{k-1} + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{v}_k + \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}_k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I}_0 &= \check{\mathbf{P}}_0^{-1} + \mathbf{R}^{-1} \\
\mathbf{q}_0 &= \check{\mathbf{P}}_0^{-1}\check{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{y}_0 \\
\hat{\mathbf{x}}_K &= \mathbf{L}_K^{-1}\mathbf{d}_K
\end{aligned}
$$

卡尔曼滤波推导完毕

根据(3.28)

当$K \to \infty$处于稳态时:

$$
\check{P} = \hat{P} + Q --------------- < 0 >
$$

$$K = \check{P}(\check{P}+R)^{-1} ------------<1>$$

$$\hat{P} = (1-K)\check{P} ---------------<2>$$

将<1><2>带入<0>:

$$\check{P} = (1-K)\check{P} + Q = (1-\frac{\check{P}}{\check{P}+R})\check{P} + Q$$

整理得：

$$\check{P}^2 - Q\check{P} - QR = 0$$

将<0><1>带入<2>得：

$$\hat{P} = (1-K)(\hat{P}+Q) = (1-\frac{\hat{P}+Q}{\hat{P}+Q+R})(\hat{P}+Q)$$

整理得：

$$\hat{P}^2 + Q\hat{P} - QR = 0$$

3.6.5

使用3.3.2节的MAP方法，推导后向的卡尔曼滤波器(而非前向的)

solution:

反向卡尔曼滤波应该是在得到k时刻的控制和观测之后，对$K-1$时刻的状态进行估计

根据(3.109)式，也即计算$\hat{x}_{k-1}^{'}$

原理示意图参考书中3-4图

根据(3.110):

$$(\hat{P}_{k-1}^{-1} + A_{k-1}^T Q_k^{-1} A_{k-1})\hat{x}_{k-1}^{'} - A_{k-1}^T Q_k^{-1}\hat{x}_k = \hat{P}_{k-1}^{-1}\hat{x}_{k-1} - A_{k-1}^T Q_k^{-1} v_k -------<0>$$

根据正向卡尔曼滤波器的递推公式(3.120):

带入(3.120a)(3.120b)(3.120c)(3.120e)式：

$$(\hat{P}_{k-1}^{-1} + A_{k-1}^T Q_k^{-1} A_{k-1})\hat{x}_{k-1}^{'} = A_{k-1}^T Q_k^{-1}\hat{x}_k + \hat{P}_{k-1}^{-1}\hat{x}_{k-1} - A_{k-1}^T Q_k^{-1} v_k$$

$$= A_{k-1}^T Q_k^{-1} A_{k-1} y_k - A_{k-1}^T Q_k^{-1} A_{k-1} C_k v_k + A_{k-1}^T Q_k^{-1}(1-K_k C_k) A_{k-1}\hat{x}_{k-1}$$

令：

$$K_{k,b} = (\hat{P}_{k-1}^{-1} + A_{k-1}^T Q_k^{-1} A_{k-1})^{-1} A_{k-1}^T Q_k^{-1}$$
$$K_{k,b,y} = K_{k,b} K_k$$
$$K_{k,b,v} = -K_{k,b} K_k C_k$$
$$K_{k,b,x} = K_{k,b}(1-K_k C_k) A_{k-1}$$

由此反向卡尔曼滤波：
$\hat{x}_{k-1}^{'} = K_{k,b,y} y_k + K_{k,b,v} v_k + K_{k,b,x} \hat{x}_{k-1}$

上式中y_k, v_k融合了k时刻的观测和控制
$\hat{x}_{k-1}$融合了0 ~ k-1时刻的信息

3.5.6

证明：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & & & & & \\ \mathbf{A} & \mathbf{1} & & & & \\ \boldsymbol{A}^2 & \mathbf{A} & \mathbf{1} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \boldsymbol{A}^{K-1} & \boldsymbol{A}^{K-2} & \boldsymbol{A}^{K-3} & \cdots & \mathbf{1} & \\ \boldsymbol{A}^{K} & \boldsymbol{A}^{K-1} & \boldsymbol{A}^{K-2} & \cdots & \boldsymbol{A} & \mathbf{1} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -\boldsymbol{A} & 1 & & & & \\ & -\boldsymbol{A} & 1 & & & \\ & & -\boldsymbol{A} & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ & & & & -\boldsymbol{A} & 1 \end{bmatrix}$$

solution:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & & & & & \\ \mathbf{A} & \mathbf{1} & & & & \\ \boldsymbol{A}^2 & \mathbf{A} & \mathbf{1} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \boldsymbol{A}^{K-1} & \boldsymbol{A}^{K-2} & \boldsymbol{A}^{K-3} & \cdots & \mathbf{1} & \\ \boldsymbol{A}^{K} & \boldsymbol{A}^{K-1} & \boldsymbol{A}^{K-2} & \cdots & \boldsymbol{A} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -\boldsymbol{A} & 1 & & & & \\ & -\boldsymbol{A} & 1 & & & \\ & & -\boldsymbol{A} & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ & & & & -\boldsymbol{A} & 1 \end{bmatrix} = E$$

此处E为单位矩阵，即证

3.5.7

我们已经介绍了在批量最小二乘解中，后验协方差：

$\hat{P} = (H^T W^{-1} H)^{-1}$

同时我们也知道，Cholesky分解：

$LL^T = H^T W^{-1} H$

的计算代价$O(N(K+1))$,这是由于系统具备稀疏性，反之，我们有：

$\hat{P} = L^{-T} L^{-1}$

请说明这种计算方法计算$\hat{P}$的复杂度。

solution:

假设L逆矩阵的已经计算得到，由于LL^T矩阵相乘得到的特殊稀疏结构，

$\hat{P}$为(K+1)*(K+1)的二维矩阵

计算$\hat{P}$的复杂度：

计算频次=$N(([K+1]+[(K+1)+(K)]+...+[(K+1)+(K)+(K-1)+...+1])+([(K)]+[(K)+(K-1)]+...+[(K)+(K-1)+...+1]))$
$=N(\sum_{i=1}^{K+1} i^2+\sum_{i=1}^{K} i^2)$

$=N(\frac{(K+1)(K+2)(2K+3)}{6}+\frac{K(K+1)(2K+1)}{6})$

因此计算复杂度为$O(NK^3)$

4.非线性非高斯系统的状态估计

4.6.1

考虑如下离散时间系统：

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ \theta_k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \\ \theta_{k-1} \end{bmatrix}+T\begin{bmatrix} cos\theta_{k-1} & 0 \\ sin\theta_{k-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}(\begin{bmatrix} v_k \\ \omega_k \end{bmatrix}+\boldsymbol{\omega_k})$$

其中$\boldsymbol{\omega_k}$~$N(0,Q)$

$$\begin{bmatrix} r_k \\ \phi_k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{x_k^2+y_k^2} \\ atan2(-y_k,-x_k)-\theta_k \end{bmatrix}+\boldsymbol{n_k}$$

$\boldsymbol{n_k}$ ~ $N(0,R)$

该系统可以看做移动机器人在xy平面上移动，测量值为移动机器人距离原点的距离和方位，请建立EFK方程来估计移动机器人的位姿，并写出雅可比F_{k-1}，G_k和协方差 Q_k'，R_k'的表达式。

solution:

状态方程：

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ \theta_k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_{k-1}+Tv_kcos\theta_{k-1}+\omega_{k1} \\ y_{k-1}+T\omega_ksin\theta_{k-1}+\omega_{k1} \\ \theta_{k-1}+T\omega_k+\omega_{k2} \end{bmatrix}$$

这里(注意这里加粗符号与普通符号的区别，尤其在控制部分的ω容易跟噪声混淆)：

$$\boldsymbol{\omega_k}=\begin{bmatrix} \omega_{k1} \\ \omega_{k2} \end{bmatrix}$$

根据4-25：

$$F_{k-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -Tv_k sin\theta_{k-1} \\ 0 & 1 & Tv_k cos\theta_{k-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega_k^{'}}=\begin{bmatrix} Tcon\theta_{k-1} & 0 \\ Tsin\theta_{k-1} & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_{k1} \\ \omega_{k2} \end{bmatrix}$$

测量方程：

$$\begin{bmatrix} r_k \\ \phi_k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{x_k^2+y_k^2}+n_{rk} \\ atan2(-y_k,-x_k)-\theta_k+n_{\phi k} \end{bmatrix}$$

其中：

$$\boldsymbol{n_k}=\begin{bmatrix} n_{rk} \\ n_{\phi k} \end{bmatrix}$$

$$G_k=\begin{bmatrix} \frac{x_k}{x_k^2+y_k^2} & \frac{y_k}{x_k^2+y_k^2} & 0 \\ \frac{-y_k}{x_k^2+y_k^2} & \frac{x_k}{x_k^2+y_k^2} & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{n_k^{'}}=\boldsymbol{n_k}$$

$$Q_k^{'}=E(\omega_k^{'}\omega_k^{'T})=\begin{bmatrix} Tcos\theta_{k-1} & 0 \\ Tsin\theta_{k-1} & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}E(\omega_k\omega_k^T)\begin{bmatrix} Tcos\theta_{k-1} & 0 \\ Tsin\theta_{k-1} & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} Tcos\theta_{k-1} & 0 \\ Tsin\theta_{k-1} & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}Q\begin{bmatrix} Tcos\theta_{k-1} & 0 \\ Tsin\theta_{k-1} & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}$$

$$R_k^{'}=E(n_k^{'}n_k^{'T})=R$$

EFK计算公式将上面计算结果带入式(4.32)即可

4.6.2

考虑将高斯先验$N(\mu_x,\sigma_x^2)$传递进非线性函数$f(x)=x^3$中，请使用蒙特卡洛、线性化和sigmapoint变换方法来确定变换后的均值和协方差，并对结果进行评价，提示：使用Isserlis定理计算高阶矩。

solution:

蒙特卡洛方法：

$$x_i=\mu_x+\delta x_i$$

$\delta x_i \sim N(0, \sigma_x^2)$

$y_i = f(x_i) = (\mu_x + \delta x_i)^3 = \mu_x^3 + 3\mu_x^2 \delta x_i + 3\mu_x(\delta x_i)^2 + (\delta x_i^3)$

根据Isserlis定理：

$E(\delta x_i) = 0$

$E((\delta x_i)^2) = \sigma_x^2$

$E((\delta x_i)^3) = 0$

$E((\delta x_i)^4) = 3\sigma_x^4$

$E((\delta x_i)^5) = 0$

$(\delta x_i)^6 = 15\sigma_x^6$

$\mu_y = E(y_i) = 4\mu_x^3 + 3\mu_x \sigma_x^2 + 0 = 4\mu_x^3 + 3\mu_x \sigma_x^2$

$\sigma_y^2 = E((y_i - \mu_y)^2) = E((3\mu_x^2 \delta x_i + (\delta x_i)^3)^2)$

$= 9\mu_x^4 \sigma_x^2 + 15\sigma_x^6 + 18\mu_x^2 \sigma_x^4$

线性化方法：

$y_i = f(\mu_x + \delta x_i) \approx \mu_x^3 + 3\mu_x^2 \delta x_i$

$\mu_y = E(y_i) = \mu_x^3$

$\sigma_y^2 = E((y_i - \mu_y)^2) = 9\mu_x^4 \sigma_x^2$

$sigmapoint$方法：

L=1

$x_0 = \mu_x$

$x_1 = \mu_x + \sqrt{(1+\kappa)}\sigma_x$

$x_2 = \mu_x - \sqrt{(1+\kappa)}\sigma_x$

$y_0 = f(x_0) = \mu_x^3$

$y_1 = (\mu_x + \sqrt{(1+\kappa)}\sigma_x)^3$

$y_2 = (\mu_x - \sqrt{(1+\kappa)}\sigma_x)^3$

$\mu_y = \frac{1}{\kappa+1}(\kappa y_0 + 0.5\sum_{i=1}^{2} y_i) = \mu_x^3 + 3\mu_x \sigma_x^2$

$\sigma_y^2 = \frac{1}{1+\kappa}(\kappa(y_0 - \mu_y)^2 + 0.5\sum_{i=1}^{2}(y_i - \mu_y)^2) = 9\kappa\mu_x^2\sigma_x^4 + (3\mu_x^2\sigma_x + (1+\kappa)\sigma_x^3)^2$

4.6.3

略

4.6.4

在sigmapoint卡尔曼滤波部分，当观测模型和测量噪声线性相关时，测量协方差为：

$$\sum_{yy,k} = \sum_{j=0}^{2N} \beta_j (\check{y}_{k,j} - \mu_{y,k})(\check{y}_{k,j} - \mu_{y,k})^T + R_k$$

请验证这个方程也可以写成：

$$\sum_{yy,k} = Z_k Z_k^T + R_k$$

其中

$$col_j Z_k = \sqrt{\beta_j}(\check{y}_{k,j} - \mu_{y,k})$$

solution:

令：

$v_j = \check{y}_{k,j} - \mu_{y,k} = (x_{j0}, x_{j1}, ...x_{jM})^T$

则：

$Z = (\sqrt{\beta_0}v_0, \sqrt{\beta_1}v_1, ..., \sqrt{\beta_{2N}}v_{2N})$

因此：

$(ZZ^T)_{p,q} = \sum_{j=0}^{2N} \beta_j x_{j,p} x_{j,q}$

$\sum_{j=0}^{2N} \beta_j (\check{y}_{k,j} - \mu_{y,k})(\check{y}_{k,j} - \mu_{y,k})^T = Y$

$Y_{p,q} = \sum_{j=0}^{2N} \beta_j x_{j,p} x_{j,q}$

即证

4.6.5

不会

5.偏差、匹配和外点

5.5.1

考虑离散时间系统：

$x_k = x_{k-1} + v_k + \bar{x_k}$

$d_k = x_k$

其中$\bar{v_k}$是未知的输入偏差，请写出增广状态系统并确定该系统是否可观。

solution:

A=1,B=1,C=1

$A^{'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$B^{'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$N = 1, U = 1$

$C^{'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

$O = C^{'}A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$rank(O) = 2 = N + U$

增广系统可观测

5.5.2

考虑离散时间系统：

$x_k = x_{k-1} + v_k$

$v_k = v_{k-1} + a_k$

$d_{1,k} = x_k$

$d_{2,k} = x_k + \bar{d}_k$

其中$\bar{d}_k$是未知的输入偏差（只存在于其中一个测量方程中）。请写出增广状态系统并确定该系统是否能观。

solution:

$$x_k^{'} = \begin{bmatrix} x_k \\ v_k \\ \bar{d}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ v_{k-1} \\ \bar{d}_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} a_k$$

$$\begin{bmatrix} d_{1,k} \\ v_{2,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ v_k \\ \bar{d}_k \end{bmatrix}$$

其中$N = 2, U = 1$

$$O = \begin{bmatrix} C^{'} \\ C^{'}A^{'} \\ C^{'}A^{'2} \end{bmatrix}$$

$rank(O) = 3 = N + U$

增广系统可观测

5.5.3

假设每个点为内点的概率为$\omega = 0.1$,如果想选择一个内点子集(n=3)的概率为$p = 0.999$,需要多少次RANSAC迭代?

solution:

根据式(5.3.7)

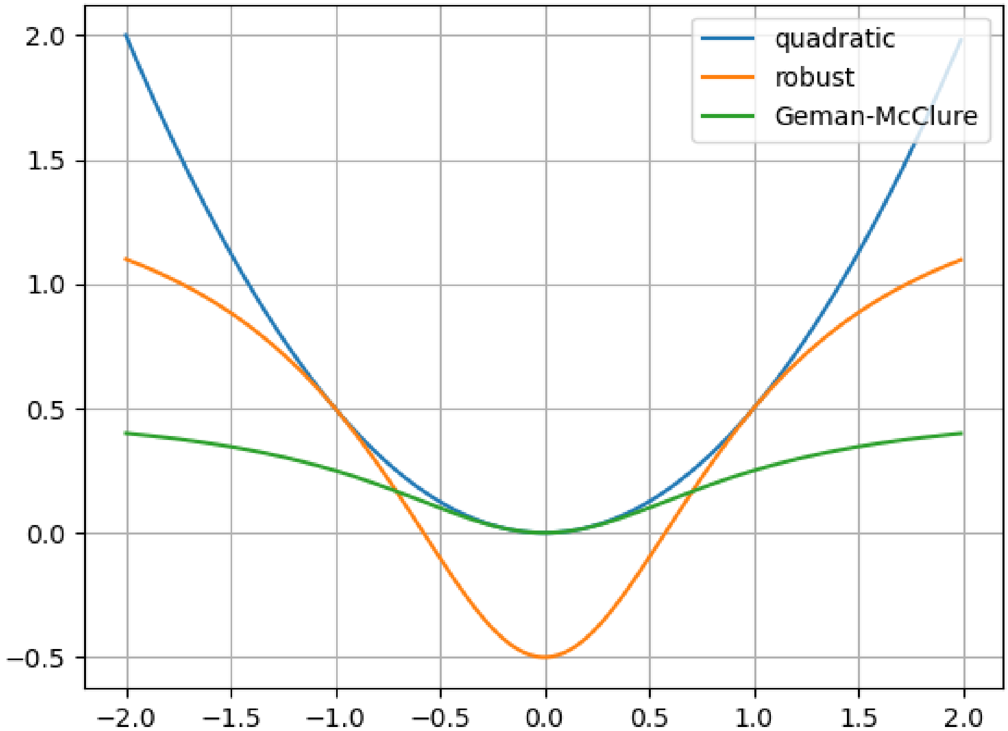
迭代次数$k \approx 6904$

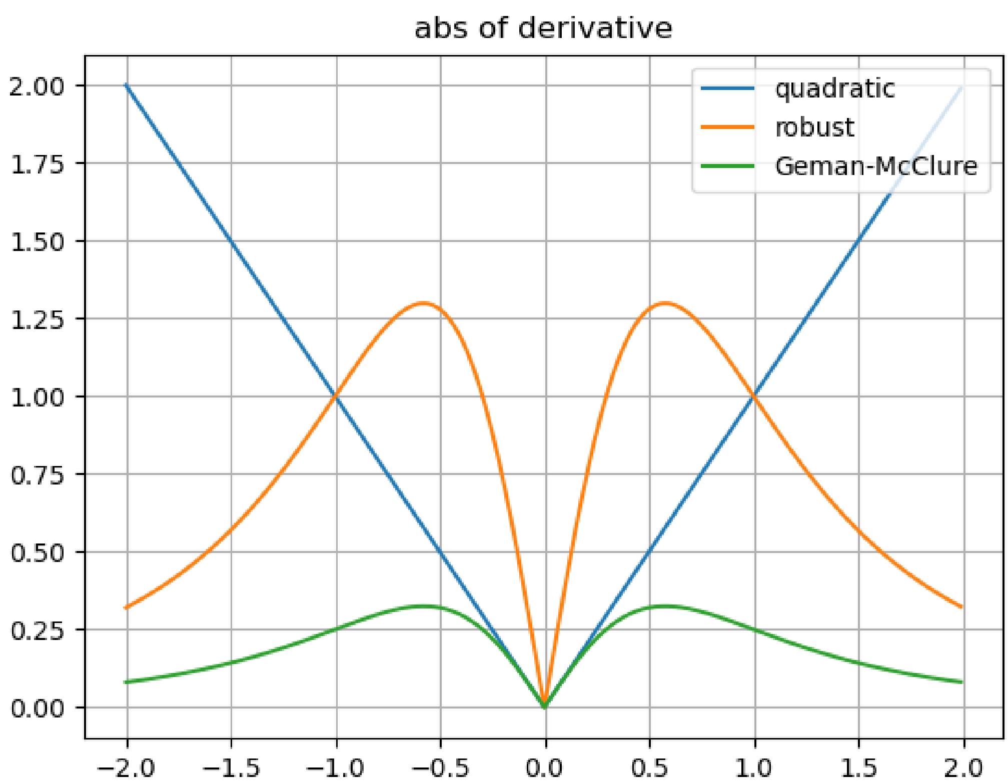
5.5.4

下面的鲁棒代价相比于German-McClure代价函数有何优势?

$\rho(u) = 0.5u^2$ ------ $u^2 \leq 1$
$\rho(u) = \frac{2u^2}{1+u^2} - 0.5$ ------ $u^2 \geq 1$

solution:

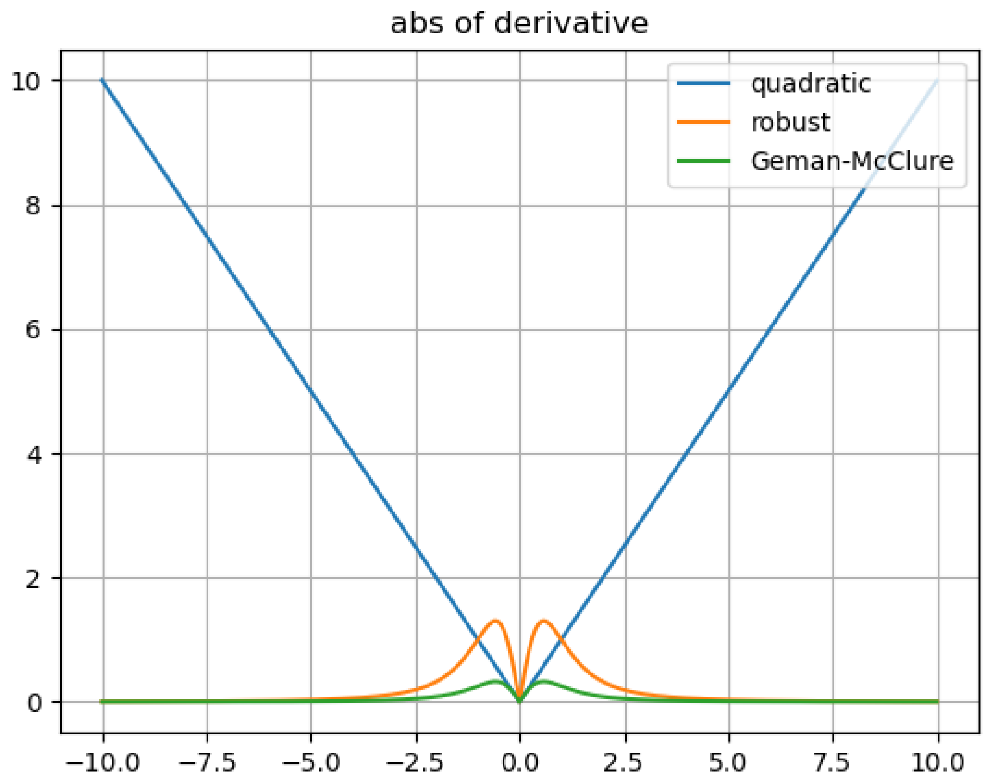




从上面第一章图可以看出，当前鲁棒函数在$u^2 \leq 1$使用平方损失函数加快收敛速度

从第二章图，代价函数的导数绝对值函数可以看出，在无外点干扰的情况下，平方代价函数收敛更快

在$u^2 \geq 1$，本鲁棒代价函数相比平方代价函数对外点的抑制作用更强，相比German-McClure代价函数在常规值的优化部分，收敛更快。当外点异常值较大时，如下图



可以看到，该算法在外点偏大区域与German-McClure代价函数具有相当的抑制作用。

总结：在非外点区域更快迭代收敛，在外点偏大区域具备相当的异常抑制作用，既鲁棒又快

6.三维几何学基础

6.6.1

证明对任意两个3×1向量u和v,都有$u^{\wedge} v \equiv -v^{\wedge} u$。

solution:

设:

$$u = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

$v=\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$

$u^{\wedge}v=\begin{bmatrix} 0 & -z_1 & y_1 \\ z_1 & 0 & -x_1 \\ -y_1 & x_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -z_1y_2+y_1z_2 \\ z_1x_2-x_1z_2 \\ -y_1x_2+x_1y_2 \end{bmatrix}$

同理:

$v^{\wedge}u=\begin{bmatrix} 0 & -z_2 & y_2 \\ z_2 & 0 & -x_2 \\ -y_2 & x_2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} -z_1y_2+y_1z_2 \\ z_1x_2-x_1z_2 \\ -y_1x_2+x_1y_2 \end{bmatrix}$

即证。

6.6.2

请用下式证明$C^{-1}=C^T$:

$$C=cos\theta\mathbf{1}+(1-cos\theta)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T+sin\theta\boldsymbol{a}^{\wedge}$$

solution:

根据式(6.87):

$C^T=cos\theta\mathbf{1}+(1-cos\theta)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T-sin\theta\boldsymbol{a}^{\wedge}$

$CC^T=cos^2\theta 1+(1-cos\theta)cos\theta aa^T-sin\theta cos\theta a^{\wedge}+cos\theta(1-cos\theta)aa^T+(1-cos\theta)^2I-sin\theta(1-cos\theta)aa^Ta^{\wedge}+sin^2a^{\wedge}+(1-cos\theta)sin\theta a^{\wedge}aa^T-sin\theta cos\theta a^{\wedge}a^{\wedge}$

因为:

$a^{\wedge}a=\mathbf{0}$

$a^{\wedge}a^{\wedge}=aa^T-\mathbf{1}$

故:

$CC^T=cos^2\theta\mathbf{1}+cos(1-cos\theta)aa^T+(1-cos\theta)^2aa^T-sin^2\theta a^{\wedge}a^{\wedge}$

$=cos^2\theta\mathbf{1}+2cos(1-cos\theta)aa^T+(1-cos\theta)^2aa^T-sin^2\theta(aa^T-\mathbf{1})$

$=\mathbf{1}-(1-cos\theta)^2aa^T+(1-cos\theta)^2aa^T=\mathbf{1}$

因此:

$C^T=C^{-1}$

6.6.3

证明对任意3×1向量v和旋转矩阵C,都有$(Cv)^\wedge \equiv Cv^\wedge C^T$

solution:

设旋转矩阵C：

旋转矩阵C：

$C = \left[c1, c2, c3\right]$

$v = \begin{bmatrix} v1 \\ v2 \\ v3 \end{bmatrix}$

$C^T(Cv)^\wedge C = C^T(v_1c_1 + v_2c_2 + v_3c_3)^\wedge C = C^Tv_1c_1^\wedge C + C^Tv_2c_2^\wedge C + C^Tv_3c_3^\wedge C$

$C^Tv_1c_1^\wedge C = v_1C^Tc_1^\wedge C = v_1 \begin{bmatrix} c_1^T \\ v_2^T \\ v_3^T \end{bmatrix} c_1^\wedge(c_1, c_2, c_3) = v_1 \begin{bmatrix} c_1^Tc_1^\wedge c_1 & c_1^Tc_1^\wedge c_1 & c_1^Tc_1^\wedge c_1 \\ c_1^Tc_1^\wedge c_1 & c_1^Tc_1^\wedge c_1 & c_1^Tc_1^\wedge c_1 \\ c_1^Tc_1^\wedge c_1 & c_1^Tc_1^\wedge c_1 & c_1^Tc_1^\wedge c_1 \end{bmatrix} =$
$v_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

因此：

$C^T(Cv)^\wedge C = v_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + v_3 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = v^\wedge$

因此：

$(Cv)^\wedge \equiv Cv^\wedge C^T$

即证

6.6.3

证明：

$$\dot{T_{iv}} = T_{iv} \begin{bmatrix} 0 & -v\kappa & 0 & v \\ v\kappa & 0 & -v\tau & 0 \\ 0 & v\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

solution:

根据式(6.77):

$$T_{iv} = \begin{bmatrix} C_{iv} & r_i^{vi} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{T}_{iv} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \dot{C}_{iv} & \dot{r}_i^{\,vi} \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} ------- < 0 >$$

根据式(6.93):

$$\frac{d}{ds}\underline{\mathcal{F}}_v = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix}\underline{\mathcal{F}}_v$$

对上式乘以$\frac{ds}{dt} = v$

$$\frac{d}{dt}\underline{\mathcal{F}}_v = \begin{bmatrix} 0 & \kappa v & 0 \\ -\kappa v & 0 & \tau v \\ 0 & -\tau v & 0 \end{bmatrix}\underline{\mathcal{F}}_v$$

对上式求转置:

$$\frac{d}{dt}\underline{\mathcal{F}}_v^T = \underline{\mathcal{F}}_v^T\begin{bmatrix} 0 & -\kappa v & 0 \\ \kappa v & 0 & -\tau v \\ 0 & \tau v & 0 \end{bmatrix}$$

对上式乘$\underline{\mathcal{F}}_i$

根据式(6.3)推断:

$$C_{iv} = \underline{\mathcal{F}}_i\underline{\mathcal{F}}_v^T$$

$$\dot{C}_{iv} = C_{iv}\begin{bmatrix} 0 & -\kappa v & 0 \\ \kappa v & 0 & -\tau v \\ 0 & \tau v & 0 \end{bmatrix} = C_{iv}M$$

因此:

$$\frac{d}{dt}(\underline{\mathcal{F}}_i\underline{\mathcal{F}}_v^T) = \dot{C}_{iv} = C_{iv}\begin{bmatrix} 0 & -\kappa v & 0 \\ \kappa v & 0 & -\tau v \\ 0 & \tau v & 0 \end{bmatrix}$$

根据式(6.96):

<0>式:

$$\dot{T}_{iv} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \dot{C_{iv}} & \dot{r_i}^{vi} \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{iv}M & C_{iv}v_v^{vi} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{iv} & r_i^{vi} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M & v_v^{vi} \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} = T_{iv}\begin{bmatrix} 0 & -v\kappa & 0 & v \\ v\kappa & 0 & -v\tau & 0 \\ 0 & v\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

即证

6.6.5

证明在二维平面(xy平面)上，Frenet Serret方程可以简化为：

$$\dot{x} = vcos(\theta)$$

$$\dot{y} = vsin(\theta)$$

$$\dot{\theta} = \omega$$

其中，$\omega = v\kappa$

solution:

根据式(6.96):

由于在二维平面中z=0：

$$\dot{r}_i^{vi} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix} = C_{iv}v_v^{vi} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = vcos(\theta)$$

$$\dot{y} = vsin(\theta)$$

根据式(6.95) $\tau = 0$:

$$\omega_v^{vi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}$$

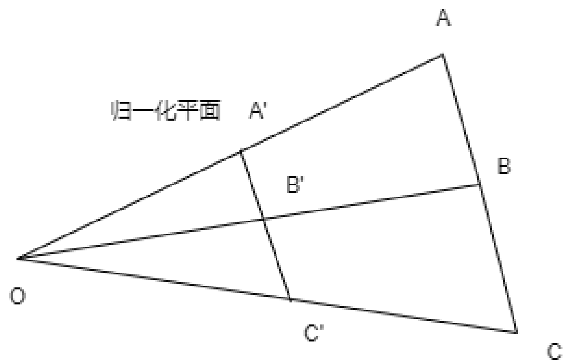
二维平面只有绕z轴一个转角：

$$\dot{\theta} = \omega$$

6.6.6

证明在单目模型中，欧氏空间的直线在投影后的图像亦是直线

solution:



如上图，三维空间点A,B,C，相机光心O，在归一化平面分别为A', B', C',图上的点均共面，易知A', B', C'共线

根据参考文献参考文献【2】定理1.10：

只要存在$3*3$非奇异矩阵，就可以保证归一化平面共线点映射到图像平面依然共线

根据(6.113):

这里的H矩阵为内参矩阵K，K非奇异。

6.6.7

证明单应矩阵：

$$H_{ba} = \frac{z_a}{z_b} C_{ba}(\mathbf{1} + \frac{1}{d_a} r_a^{ba} n_a^T)$$

的逆是：

$$H_{ba}^{-1} = \frac{z_a}{z_b} C_{ab}(\mathbf{1} + \frac{1}{d_b} r_a^{ab} n_b^T)$$

solution:

根据式(6.131)：

$q_b = K_b H_{ba} K_a^{-1} q_a$

矩阵求逆：

$q_a = K_a H_{ba}^{-1} K_b^{-1} q_b = K_a H_{ab} K_b^{-1} q_b$

因此：

$H_{ba}^{-1} = H_{ab}$

根据式(6.126):

$$\begin{bmatrix} \rho_a \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{ab} & r_a^{ba} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_b \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\rho_a = C_{ab}\rho_b + r_a^{ba}$

根据式(6.120):

$z_a K_a^{-1} q_a = C_{ab} z_b K_b^{-1} q_b + r_a^{ba}$

因此:

$q_a = \frac{z_b}{z_a} K_a C_{ab} K_b^{-1} q_b + \frac{1}{z_a} K_a r_a^{ba} - - - - - - - < 0 >$

其中:

$\frac{1}{z_a} k_a r_a^{ba} = \frac{z_b}{z_a} \frac{1}{z_b} K_a r_a^{ba}$

根据(6.124):

将z_a带入:

$\frac{1}{z_a} K_a r_a^{ba} = \frac{z_b}{z_a} K_a r_a^{ba} \frac{1}{z_b} = \frac{z_b}{z_a} K_a r_a^{ba} (\frac{n_b^T K_b^{-1} q_b}{-d_b})$

坐标之间满足如下关系:

$r_a^{ba} = -C_{ab} r_b^{ab}$ 带入上式:

$\frac{1}{z_a} K_a r_a^{ba} = \frac{z_b}{z_a} K_a C_{ab} r_b^{ab} (\frac{n_b^T K_b^{-1} q_b}{d_b}) - -- < 1 >$

将<1>带入<0>:

$q_a = K_a H_{ab} K_b^{-1} q_a = K_a \frac{z_b}{z_a} C_{ab} (1 + r_b^{ab} (\frac{n_b^T}{d_b})) K_b^{-1} q_b$

因此:

$H_{ba}^{-1} = H_{ab} = \frac{z_b}{z_a} C_{ab} (1 + r_b^{ab} (\frac{n_b^T}{d_b}))$

即证

6.6.8

请推出以右侧相机为中心为原点的立体相机模型。

solution:

根据图6-11和式(6.135),(6.136):

当采取以右侧相机为中心时:

$$\begin{bmatrix} u_l \\ v_l \end{bmatrix} = PK\frac{1}{z}\begin{bmatrix} x+b \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_r \\ v_r \end{bmatrix} = PK\frac{1}{z}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_l \\ v_l \\ u_r \\ v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_u & 0 & c_u & f_ub \\ 0 & f_v & c_v & 0 \\ f_u & 0 & c_u & 0 \\ 0 & f_v & c_v & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{z}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

根据式(6.141)引入视差:

$$\begin{bmatrix} u_r \\ v_r \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_u & 0 & c_u & 0 \\ 0 & f_v & c_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_ub \end{bmatrix}\frac{1}{z}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

6.6.9

请推出以左侧相机中心为原点的立体相机模型的逆，换句话说，就是把(u_l, v_l, d)映射到点坐标(x,y,z)的模型

solution:

根据式(6.142):

$$u_l = f_u\frac{x}{z} + c_u --- <0>$$

$$v_l = f_v\frac{y}{z} + c_v --- <1>$$

$$d = \frac{f_ub}{z}$$

可得:

$$z = \frac{f_ub}{d}$$

$$x = \frac{b(u_l - c_u)}{d}$$

$$y = \frac{f_u b(u_l - c_v)}{f_v d}$$

6.6.10

略(可参考任何一本惯性导航专著)

参考文献：

1.Matrix Cookbook---Kaare Brandt Petersen

2.计算机视觉中的多视图几何