二分、高精度

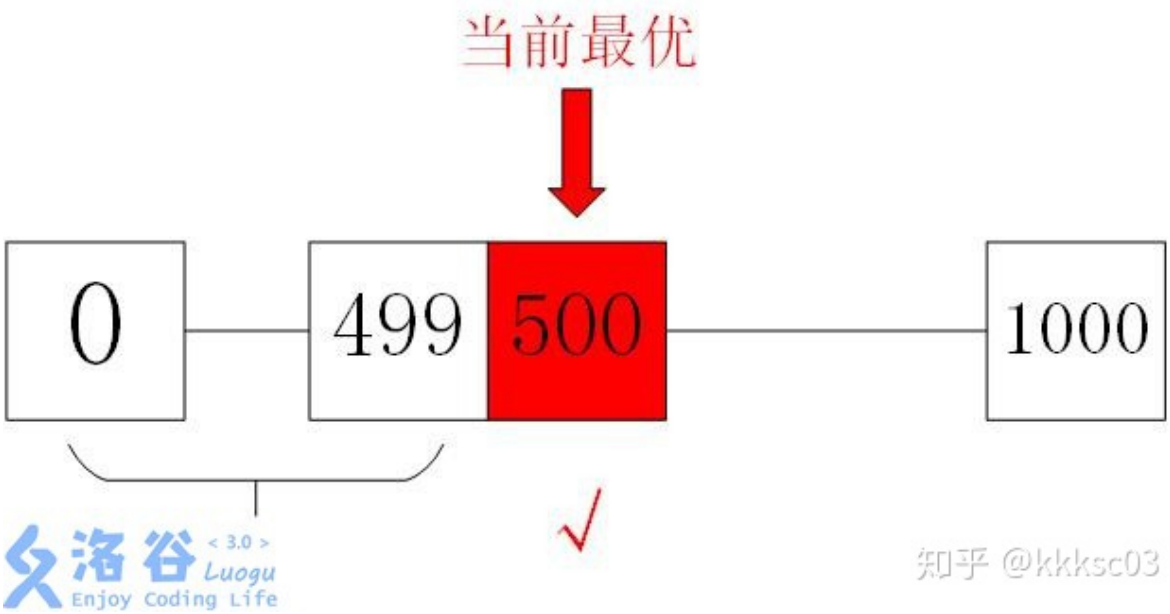
提示：以下全部图片均由Visio出品

前言：二分简介

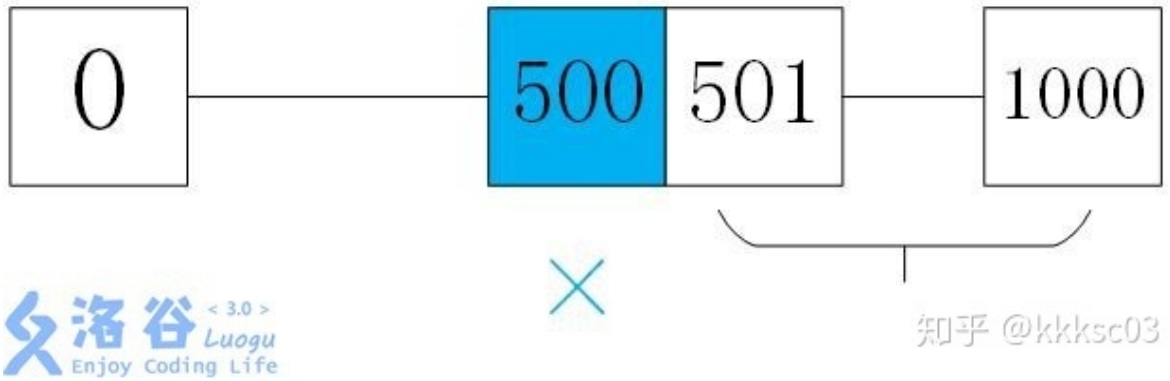
二分，是一种求极值的算法，通常已知答案的取值范围，然后每次取取值范围的中点，判断之是否可行，然后找可行的一半处理。
上面这段话比较难懂，那么我们举个栗子：

比如，我们要求使得革命能够成功的最低成本。

那么，此时这个成本的取值范围就是0~你所拥有的全部银子（假设为1000）。然后，我们取这个区间的中点（500），计算500块可不可以让革命成功，如果可以，那么我们下一步就要检查0~499元这个区间（因为500可以，那么比500元更多的钱必然可以），对0~499这个区间做同样处理的同时记录当前最优的500元。



反过来，如果500元不能让革命成功，那么0~499元更不可以，所以我们下一步就对501~1000这个区间做检查



最终，我们记录下的最优答案就是能让革命成功的最低成本

当然，二分要满足单调性：你用500块办不成，那么0499块也办不成，你用500大洋办得成，那么501inf大洋一定也办得成
一般是用l和r代表当前答案可能所在区间，然后每次取mid=(l+r)/2，判断mid是否可行，然后取lmid-1区间或者mid+1r区间

Part1：二分的中心思想

这是一个杯具，当你将二分的l+1<r写成l<r时，相信很多人都讨厌二分的边界，每次都弄不清楚二分的l和r要等于mid，还是mid-1，又或者是mid+1，这导致了很多人因此失分，那么，到底要怎么做才能区分二分的边界呢?

二分的思想主要分三种：

1. l和r代表的“成本值”均可行，且有一个ans变量记录当前的最优
2. l和r代表的“成本值”均可行，最后的答案是l或r
3. l代表的“成本值”可行，r不可行，最后的答案是l

下面我们将依次讲解1、2两种，第三种不推荐使用，比较容易出错

注：下面的全部模板都是求最小的满足指定条件的数（例如洛谷P2370）

Part2：写法一——记录答案法

话不多说，先上模板：

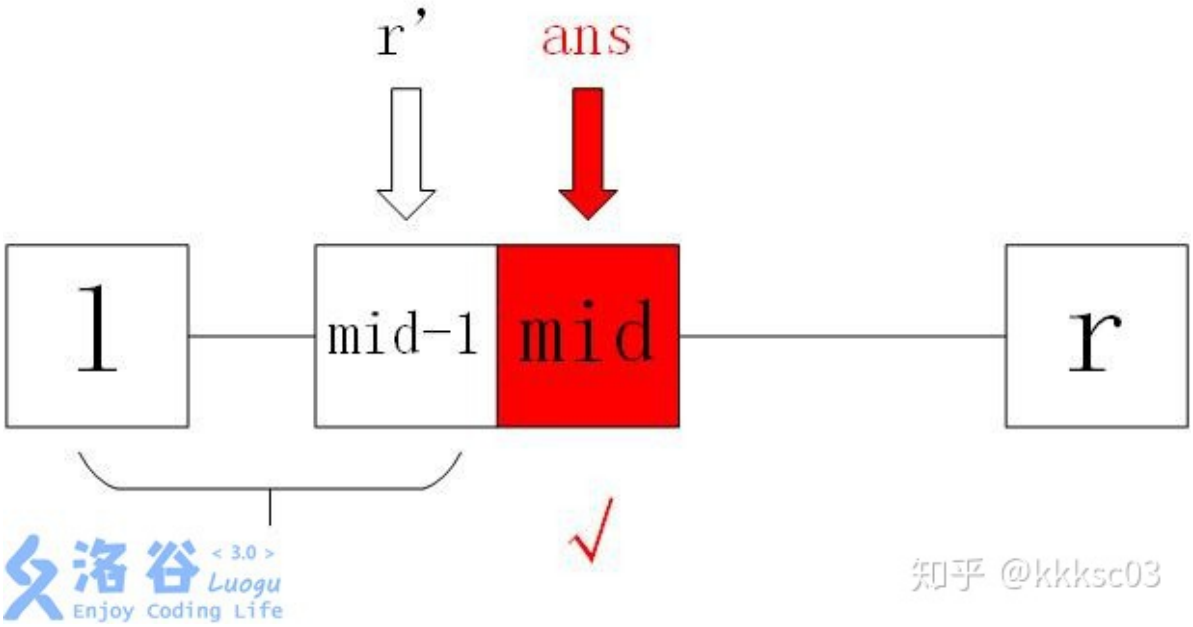
```
while (l<=r)
{
    int mid=(l+r)/2;
    if (check(mid))
    {
        ans=mid;
        r=mid-1;
    }
    else l=mid+1;
}printf("%d",ans);
```

首先，限制条件为l小于等于r，也就意味着结束需要l>r

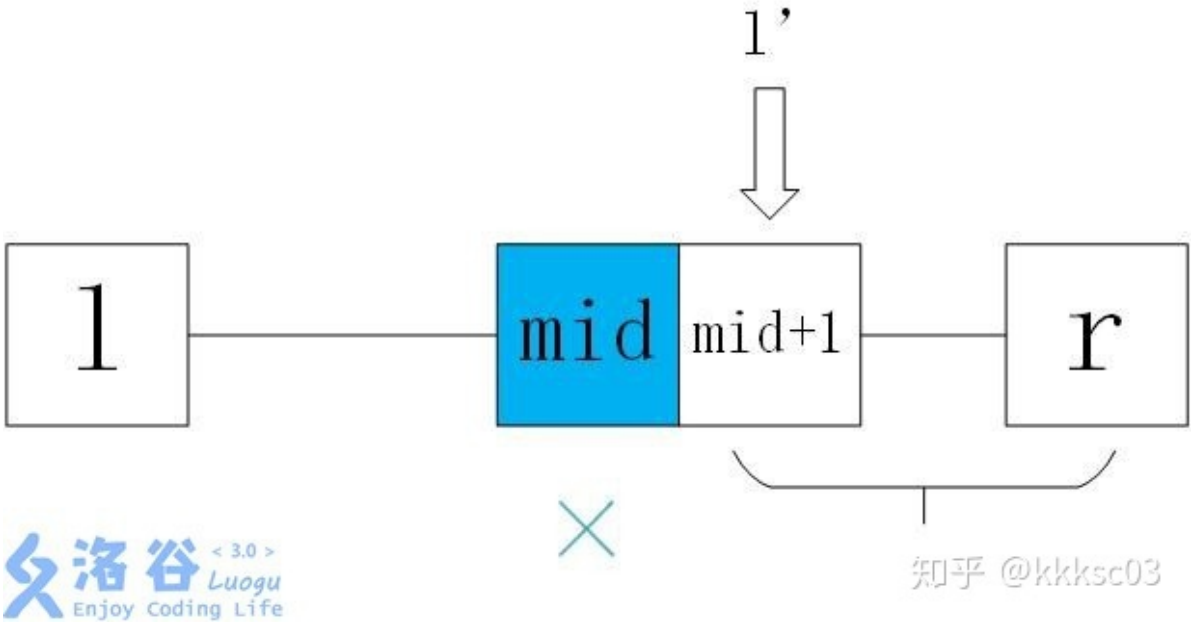
第一步显然就是找区间中点

check(mid)是一个bool函数，返回mid是否可行，下面就是分情况讨论

1. mid可行，此时**记录ans=mid**，也就是mid是目前最优解，然后缩小查找范围：r=mid-1，寻找有没有更小的解



1. mid不可行，此时令l=mid+1，找更大的解来满足条件



也就是说，当mid可行，就记录mid，然后找有没有更优的，否则就退而求其次，牺牲数据的优秀度来满足条件

例如：要找出能够当飞行员的成绩最差的候选人，测试成绩居中的人，看他能不能胜任。

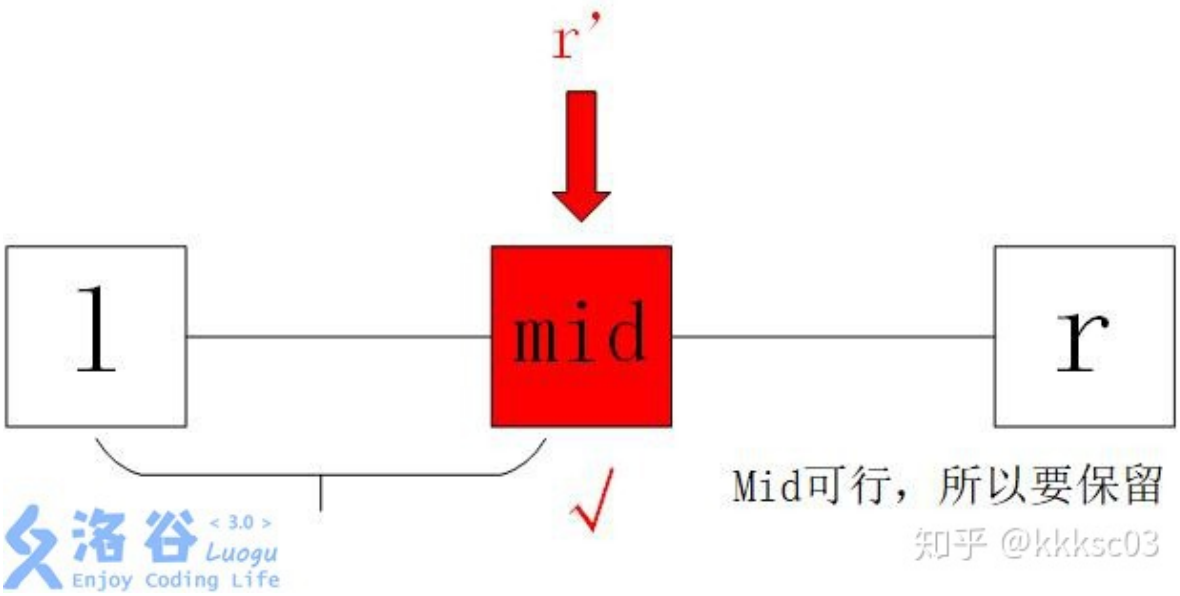
1. 可以，记下他，然后对比他弱的人进行测试（ans=mid r=mid-1）
2. 不行，对比他强的人进行上述操作（l=mid+1）

Part3：写法二——不记录法

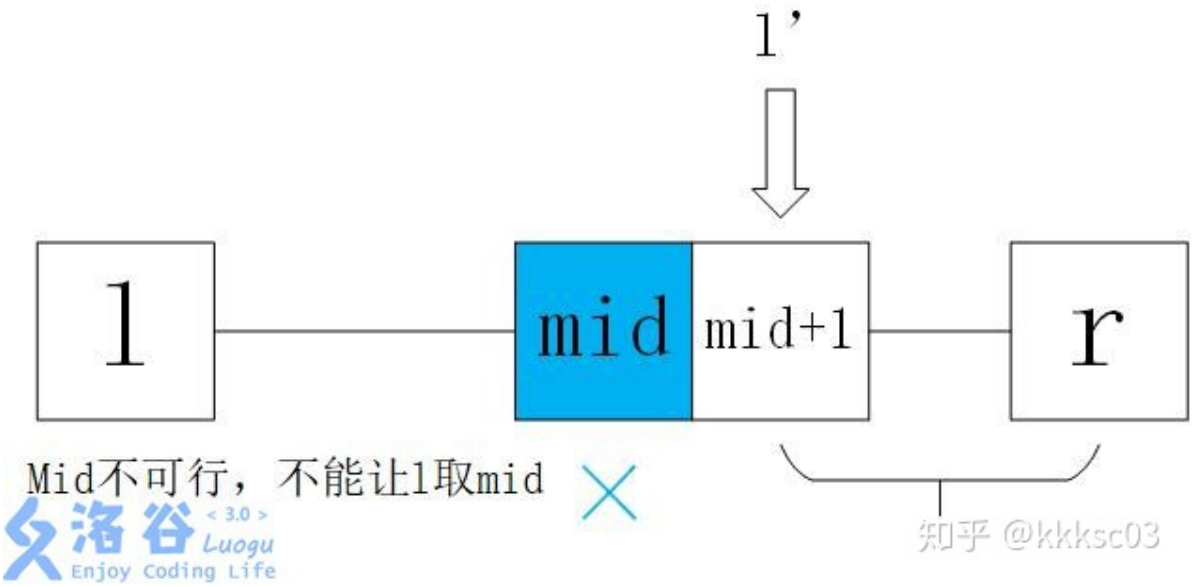
先上模板：

```
while (l<r)
{
    int mid=(l+r)/2;
    if (check(mid)) r=mid
    else l=mid+1;
}
printf("%d",l); //r也可以
```

这里，当l==r时循环停止，此时无论输出l还是输出r都可以。取中点不讲。这里我们要保证l和r都是暂时可行的（没有证明不可行）的，所以**当mid被判定为可行时，r应该取到mid而不是mid-1，因为这里没有ans来记录，如果r取了mid-1，我们就永远丢失了mid这个可行解（mid永远取不到了），从而导致答案错误**



如果mid不可行，仍然取l=mid+1，因为mid是不可行的，而我们要保证l可行



这里就是说，当mid可行，就在l$_{mid区间里面找（往小了找），否则就在mid+1}$r来找，始终要保证l、r均可行且尽量靠近

这里的重点：l和r都要暂时可行且l要极小，r要极大

前方高能，划重点：

打个比方：一群选手按实力顺序排好，然后我们要找出能够AK IOI的实力最差的选手，那么我们选实力居中的那个，测试他能不能AK IOI：

1. 可以（check(mid)=true）。那么实力比他更强的选手可以回去了，因为他们一定能AK IOI，而且实力比刚刚测试的那位要高。但是那个测试过的就可以"暂时安全"，因为他是目前最优解（能AK且实力最差），这一个操作就是r=mid
2. 不能（check(mid)=false）。那么他以及实力比他弱的全部淘汰，这个操作是l=mid+1
   然后用新的区间不断重复即可

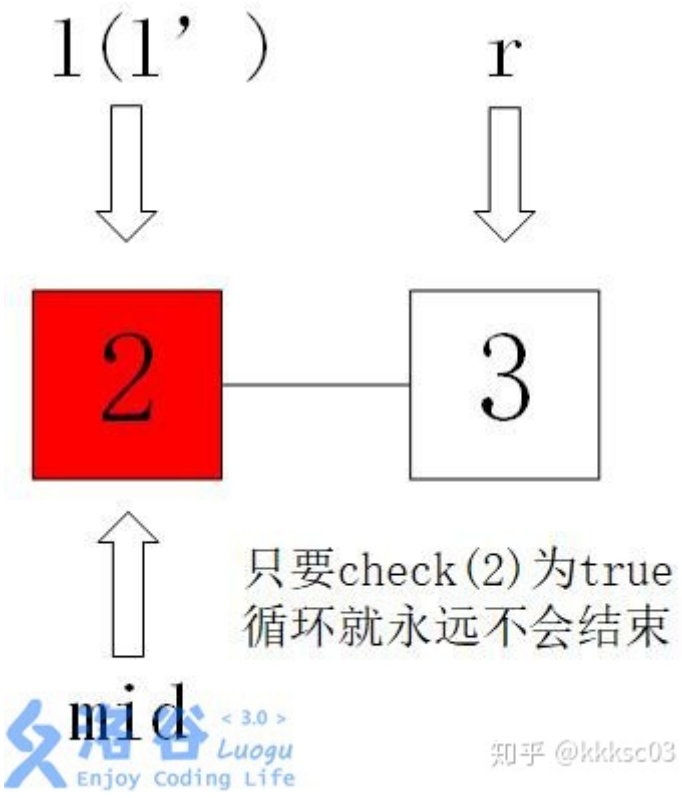
注：此处满足单调性，就是说如果X能AK IOI，那么比他强的也一定能，否则比他弱的一定不能

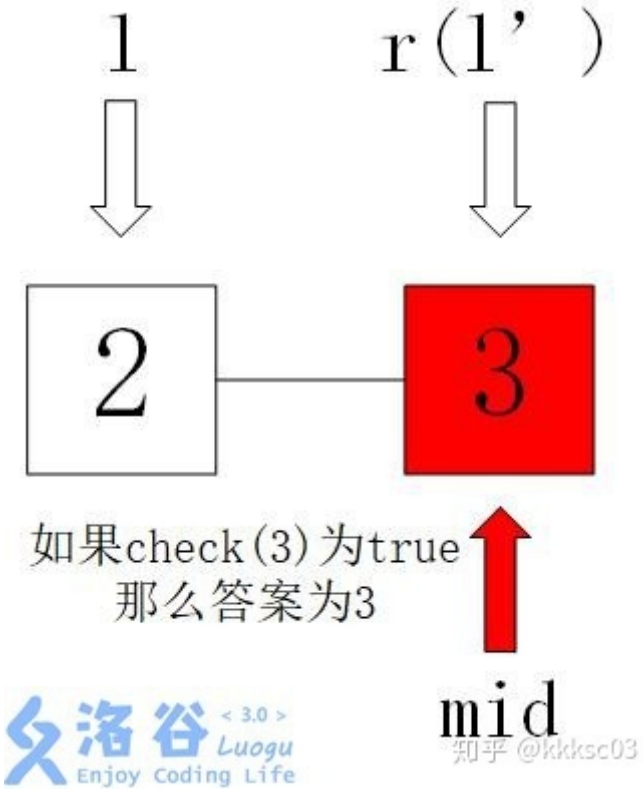
再举个例子：

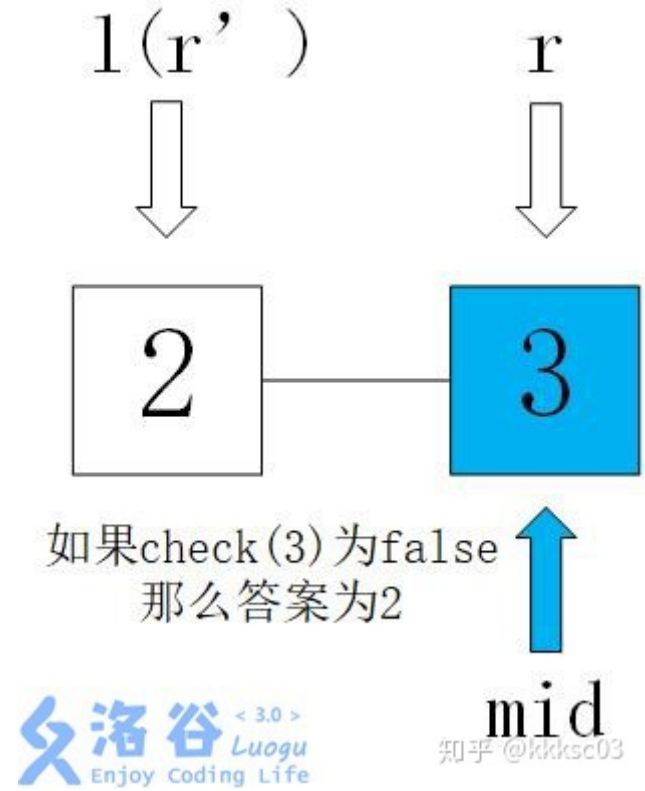
要找不能AK IOI的最强选手（注意，题设相反），那么照样按实力排好，测试居中的那个：

1. 可以（check(mid)=false）。此时他以及比他更强的都不能符合要求（我们要找不能AK的，不是AKer），所以r=mid-1
2. 不能（check(mid)=true）。此时比他弱的人全部淘汰（比他弱的更不能，而且实力比他弱），这个操作是l=mid
   之后就是对新的区间进行一样的操作

但是这个例子要注意一个特殊情况，如果l=2，r=3，mid=5/2=2，此时测试的check(mid)如果为true，那么l和r将永远卡在2和3，所以在此处，我们取的中点要靠右，也就是(l+r+1)/2，这样就能保证l和r不死循环







通过上述几个例子，应该能够比较直观的认识到这个不记录式的用法

Part4：二分查找

二分查找是利用二分的思想，在一个有序递增数列中查找某个值的算法。

例子：猜数游戏，老少咸宜，在1~100中想一个数key，然后让别人猜，每猜一次，就会告诉别人是大了还是小了。这个很经典了，先猜中间那个，然后如果大了就猜更小的，否则猜更大的，如果直接猜中就结束——与二分思想不谋而合

1. 查找值为key的元素下标，不存在返回-1

首先我们看看模板

```
int l=1,r=n;while (l<=r)
{
    int mid=(l+r)/2;
    if (a[mid]==key) return mid;
    else if (a[mid]>key) r=mid-1;
    else l=mid+1;
}
return -1;
```

这里增加了一种情况，那就是a[mid]key的情况，因为此处我们要精确地查找key，所以在发现a[mid]key的时候立刻返回mid。
其它的情况都很好理解，如果偏大就在左半边找，否则在右半边找。
这个二分查找看上去很简单，但是，凶险的在后面。

1. 查找大于等于/大于key的第一个元素

```
int l=1,r=n;while (l<r)
{
    int mid=(l+r)/2;
    if (a[mid]>=key) r=mid; //如果要求大于，可以将=去掉
    else l=mid+1;
}
return l;
```

怎么样，似曾相识对不对?

我们其实就是在找水平最差的能AK的人，只要把大于等于key第一个元素看做找水平最差的能AK的人，就很好理解了吧?
大于等于可以视为能够AK。那么，我们按照之前讲到的，如果一个人可以AK（a[mid]>=key），那么比这个人强的人必然可以AK（对于所有i>mid，a[i]>=key），而且不会更优，所以不要，就让r=mid

如果这个人不可以AK（a[mid]<key），那么比他弱的更不行（对于所有i<mid，a[i]<key），就令l=mid+1

只要我们拿之前讲过的找AK的例子来类比一下，一下子就理解了

\2. 查找小于等于/小于key的最后一个元素

```
int l=1,r=n;while (l<r)
{
    int mid=(l+r)/2;
    if (a[mid]<=key) l=mid; //如果求小于，可以去掉=
else r=mid-1;
}return l;
```

这里也是一个类比：就是上面讲过的，不能AK的最强选手，这里的"不能AK"指的是小于等于key。

这里，如果一个人可以AK（a[mid]>key，注意，没有等于，因为这里算的是小于等于），那么他和比他强的都不符合条件，此处是r=mid-1

如果他不能AK，那么留下他和比他水平更高的（l=mid）

总结一下，我们只需要把二分查找与之前的AK例子结合起来看，就不会写错边界了

Part5：二分答案例题——丢瓶盖（洛谷P1316）

简述：地上丢了A个瓶盖，为了简化问题，我们可以当作这A个瓶盖丢在一条直线上，现在要从这些瓶盖里找出B个，使得距离最近的2个距离最大

对应关系：

- 问题——不能AK的最强选手（可以选出B个瓶盖的最大距离）
- 不能AK——可以选出B个瓶盖符合条件
- 水平——最大距离
- 如果居中的那个人不能AK（当前的距离限制可以选出B个瓶盖满足条件），那么令l=mid，留下他和水平更高的（往大了找）
- 如果居中的那个人可以AK（当前的距离限制不允许选出B个瓶盖满足条件），那么令r=mid-1，留下水平更低的

只要能对应起来就很好理解了，下面是示例代码：

```
#define maxn 100000+500
#include<cstdio>
#include<algorithm>
using namespace std;
int n,k;int a[maxn];
int check(int m){
    int tmp=a[1]+m,cnt=1;
    for (int i=2;i<=n;++i)
        if (a[i]>=tmp)
        {
            cnt++;
            tmp=a[i]+m;
        }
    return cnt>=k;
}
int main(){
    scanf("%d%d",&n,&k);
    int l=1,r=1000000000;
    for (int i=1;i<=n;++i)
        scanf("%d",&a[i]);
    sort(a+1,a+1+n);//  for (int i=1;i<=n;++i) printf("%d ",a[i]);
printf("\n");
    int ans=0;
    while (l<r)
    {
        int mid=(l+r+1)/2;
        if (check(mid)) l=mid;
        else r=mid-1;
    }
    printf("%d",l);
    return 0;
}
```

只要能找出对应关系，就一定能理解二分答案的精髓

结语

二分就是这样，维护一个当前可行区间，然后，尽量地取到更优，在当前值不可行的情况下牺牲优秀程度。诚心希望大家已经大概明白了二分的边界取值方法。

就像生活一样，在能够吃饱穿暖的情况下去旅行、去滑雪、去享受大自然、去为每一件小事感动……

高精度

加

```cpp
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;

string a, b;
vector<int> A, B;

vector<int> add(vector<int> &A, vector<int> &B){
    if (A.size() < B.size()) return add(B, A);

    vector<int> C;
    int t = 0;
    for (int i = 0; i < A.size(); i ++ ){
        t += A[i];
        if (i < B.size()) t += B[i];
        C.push_back(t % 10);
        t /= 10;
    }

    if (t) C.push_back(t);
    return C;
}

void del(vector<int> &v){
    auto re = v.begin();
    for(auto i = v.begin(); i != v.end(); i++){
        if(*i != 0) re = i;
    }

    v.erase(re + 1, v.end());
}

int main(){
    ios::sync_with_stdio(false); cin.tie(0); cout.tie(0);

    cin >> a >> b;
    for (int i = a.size() - 1; i >= 0; i -- ) A.push_back(a[i] - '0');
    for (int i = b.size() - 1; i >= 0; i -- ) B.push_back(b[i] - '0');

    del(A), del(B);

    auto C = add(A, B);

    for (int i = C.size() - 1; i >= 0; i -- ) cout << C[i];
    cout << endl;

    return 0;
```

```
}
```

减

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

bool cmp(vector<int> &A, vector<int> &B)
{
    if (A.size() != B.size()) return A.size() > B.size();

    for (int i = A.size() - 1; i >= 0; i -- )
        if (A[i] != B[i])
            return A[i] > B[i];

    return true;
}

vector<int> sub(vector<int> &A, vector<int> &B)
{
    vector<int> C;
    for (int i = 0, t = 0; i < A.size(); i ++ )
    {
        t = A[i] - t;
        if (i < B.size()) t -= B[i];
        C.push_back((t + 10) % 10);
        if (t < 0) t = 1;
        else t = 0;
    }

    while (C.size() > 1 && C.back() == 0) C.pop_back();
    return C;
}

int main()
{
    string a, b;
    vector<int> A, B;
    cin >> a >> b;
    for (int i = a.size() - 1; i >= 0; i -- ) A.push_back(a[i] - '0');
    for (int i = b.size() - 1; i >= 0; i -- ) B.push_back(b[i] - '0');

    vector<int> C;

    if (cmp(A, B)) C = sub(A, B);
    else C = sub(B, A), cout << '-';

    for (int i = C.size() - 1; i >= 0; i -- ) cout << C[i];
    cout << endl;

    return 0;
}

```

乘

```cpp
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;


vector<int> mul(vector<int> &A, int b)
{
    vector<int> C;

    int t = 0;
    for (int i = 0; i < A.size() || t; i ++ )
    {
        if (i < A.size()) t += A[i] * b;
        C.push_back(t % 10);
        t /= 10;
    }

    while (C.size() > 1 && C.back() == 0) C.pop_back();

    return C;
}


int main()
{
    string a;
    int b;

    cin >> a >> b;

    vector<int> A;
    for (int i = a.size() - 1; i >= 0; i -- ) A.push_back(a[i] - '0');

    auto C = mul(A, b);

    for (int i = C.size() - 1; i >= 0; i -- ) printf("%d", C[i]);

    return 0;
}
```

除

```cpp
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>

using namespace std;

vector<int> div(vector<int> &A, int b, int &r)
{
    vector<int> C;
    r = 0;
    for (int i = A.size() - 1; i >= 0; i -- )
```

```cpp
    {
        r = r * 10 + A[i];
        C.push_back(r / b);
        r %= b;
    }
    reverse(C.begin(), C.end());
    while (C.size() > 1 && C.back() == 0) C.pop_back();
    return C;
}

int main()
{
    string a;
    vector<int> A;

    int B;
    cin >> a >> B;
    for (int i = a.size() - 1; i >= 0; i -- ) A.push_back(a[i] - '0');

    int r;
    auto C = div(A, B, r);

    for (int i = C.size() - 1; i >= 0; i -- ) cout << C[i];

    cout << endl << r << endl;

    return 0;
}

```