17 | Comment se prémunir contre les aléas malheureux ?

proposé par Thibaut Mastrolia

Ziyad BENOMAR
Redallah MOUHOUB

Dans ce rapport, nous n'allons traiter que les questions théoriques du sujet. Les simulations seront regroupées à part dans un autre fichier. Toutefois, nous avons mis des exemples de courbes obtenues par simulation pour mieux illustrer les résultats théoriques obtenus.

1 De la modélisation d'accidents aléatoires :

T1. Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:
Pour $n = 1$: $T_1 = \tau_1$ a pour densité $\gamma_\lambda = \gamma_{\lambda,1}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que le résultat est vrai pour n, montrons qu'il reste vrai pour $n + 1$:
Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue bornée, on a $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$, τ_{n+1} est indépendant de τ_i, donc τ_{n+1} est indépendant de $T_n = \sum_{i=0}^{i=n} \tau_i$, on a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\, h(T_{n+1})\,\right] &= \mathbb{E}\left[\, h(T_n + \tau_{n+1})\,\right] \\
&= \iint h(s+t)\gamma_{\lambda,n}(s)\gamma_\lambda(t)dtds \qquad \text{(par indépendance)} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_{\lambda,n}(s)\big(\int_{-\infty}^{+\infty} h(s+t)\gamma_\lambda(t)dt\big)ds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_{\lambda,n}(s)\big(\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\gamma_\lambda(x-s)dx\big)ds \qquad \text{(changement de variable } x = s+t) \\
&= \iint h(s+t)\gamma_{\lambda,n}(s)\gamma_\lambda(x-s)dsdx \qquad \text{(Théorème de Fubinni)} \\
&= \iint h(x)\frac{\lambda^n}{(n-1)!}s^{n-1}e^{-\lambda s}\lambda e^{-\lambda(x-s)}\mathbb{1}_{(x>s>0)}dsdx \\
&= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} h(x)e^{-\lambda x}\big(\int_0^x s^{n-1}ds\big)dx \\
&= \int_0^{+\infty} h(x)\left(\frac{\lambda^{n+1}}{n!}x^n e^{-\lambda x}\right)dx
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}\left[\, h(T_{n+1})\,\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\gamma_{\lambda,n+1}(x)dx}$$

Ceci étant vrai pour toute fonction $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue bornée, on déduit que T_{n+1} est de densité $\gamma_{\lambda,n+1}$. D'où la récurrence.

T2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\tau_n > 0$ presque sûrement, alors

$$\begin{aligned}\{\omega \in \Omega \mid (T_n(w))_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas strictement croissante}\} &= \{\omega \in \Omega \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \tau_n(\omega) \leqslant 0\} \\ &= \cup_{n\in\mathbb{N}}\{\omega \in \Omega \mid \tau_n(\omega) \leqslant 0\}\end{aligned}$$

est un ensemble négligeable comme réunion d'ensembles négligeables, On note Ω' son complémentaire.
Soit $t \in]0, +\infty[$,
soit $\omega \in \Omega'$, $((T_n(w))_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante,

- Si $\{n \in \mathbb{N}^* \mid T_n(\omega) \leqslant t\}$ est infini, alors sa borne supérieure est infinie, et il existe une infinité d'entiers vérifiant $\mathbb{1}_{T_n(\omega)\leqslant t} = 1$, alors $N_t(\omega) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{T_n(\omega)\leqslant t} = +\infty$.
- Sinon, soit $m = \sup\{n \in \mathbb{N}^* \mid T_n(\omega) \leqslant t\} < +\infty$ (avec la convention $\sup \emptyset = 0$), comme $(T_n(\omega))_n$ est strictement croissante, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad (\mathbb{1}_{T_n(\omega)\leqslant t} = 1) \iff (T_n(\omega) \leqslant t) \iff (n \leqslant m)$$

Donc $N_t(\omega) = \sum_{n=1}^{m} 1 = m$.

Ainsi, on a bien $\boxed{N_t = \sup\{n \in \mathbb{N}^* \mid T_n \leqslant t\}}$
N_t peut être interprété comme le nombre d'événements ayant eu lieu avant l'instant t.

T3. N est à valeurs dans $\mathbb{N}$ donc elle ne fait que des sauts entiers.

$$\begin{aligned}N \text{ fait des sauts de taille } {>}1 &\iff \exists n, k \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } k \geqslant 2 \text{ et } T_n = T_{n+1} = \ldots = T_{n+k-1} \\ &\iff \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } T_n = T_{n+1}\end{aligned}$$

Donc par contraposée

$$\begin{aligned}N \text{ ne fait que des sauts de taille 1} &\iff \forall n \in \mathbb{N}^* : T_n < T_{n+1} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N} \text{ avec } n \geqslant 2 : \tau_n > 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N \text{ ne fait que des sauts de taille 1}) &= \mathbb{P}(\bigcap_{n=2}^{+\infty}\{\tau_n > 0\}) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\bigcap_{k=2}^{n}\{\tau_k > 0\}) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=2}^{n} \mathbb{P}(\tau_k > 0) \quad (\text{ par indépendance des } \tau_k\ ) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\tau_1 > 0)^{n-1} \quad ((\tau_k)_k \text{ est identiquement distribuée })\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{P}(\tau_1 > 0) \in [0, 1]$, on déduit que

$$\boxed{\mathbb{P}(N \text{ ne fait que des sauts de taille 1}) = 1 \quad \iff \quad \mathbb{P}(\tau_1 > 0) = 1}$$

τ_1 suit une loi exponentielle de paramètre λ, donc on a effectivement $\mathbb{P}(\tau_1 > 0) = 1$, et suite à l'équivalence que nous avons établie, on a aussi :

$$\boxed{\mathbb{P}(N \text{ ne fait que des sauts de taille 1}) = 1}$$

T4. Soit $t \in]0, +\infty[$, on a démontré dans **T2** que $(T_k)_k$ est strictement croissante presque sûrement, on alors

$$\begin{array}{rrcl}
\forall n \in \mathbb{N}^* : & N_t = n & \iff & \sup\{k \in \mathbb{N}^* \mid T_k \leqslant t\} = n \\
& & \iff & T_n \leqslant t < T_{n+1}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\text{Donc} \quad \boxed{\{N_t = n\} \;=\; \{T_n \leqslant t < T_{n+1}\}} \\
\mathbb{P}(N_t = n) &= \mathbb{P}(T_n \leqslant t < T_{n+1}) \\
&= \mathbb{P}(\{T_n \leqslant t\} \setminus \{T_{n+1} \leqslant t\}) \\
&= \mathbb{P}(T_n \leqslant t) - \mathbb{P}(T_{n+1} \leqslant t) \\
\mathbb{P}(N_t = n) &= \int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} dx - \int_0^t \frac{\lambda^{n+1}}{n!} x^n e^{-\lambda x} dx \qquad (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^t x^n e^{-\lambda x} dx &= \left[x^n \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^t + \int_0^t n x^{n-1} \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} dx \\
\frac{\lambda^{n+1}}{n!} \int_0^t x^n e^{-\lambda x} dx &= \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} + \int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} dx
\end{aligned}$$

En projetant ce résultat dans l'équation (1), on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad \mathbb{P}(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}}$$

Donc N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt.

T5. On note U le vecteur $(U_{(i)})_{1 \leq i \leq n}$, il est à valeurs presque sûrement dans

$$D = \{(x_i)_{1 \leq i \leq n} \mid 0 < x_1 < \ldots < x_n < t\}$$

Si U admet une densité, elle serait nulle à l'extérieur de D, on ne s'intéressera donc à la calculer que pour les éléments de D :

Soit $(a_1, \ldots a_n) \in D, \forall b_1, \ldots, b_n \in [0, t]$ tels que $a_1 < b_1 < a_2 < \ldots < b_{n-1} < a_n < b_n$, on a

$$\begin{aligned}
U \in \prod_{i=0}^n [a_i, b_i] &\iff \forall 1 \leq i \leq n,\ U_{(i)} \in [a_i, b_i] \\
&\iff \exists \sigma \in \mathcal{S}_n,\ \forall 1 \leq i \leq n,\ U_{\sigma(i)} \in [a_i, b_i] \\
\{U \in \prod_{i=0}^n [a_i, b_i]\} &= \bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \bigcap_{i=1}^n \{U_{\sigma(i)} \in [a_i, b_i]\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(U \in \prod_{i=0}^{n}[a_i, b_i]) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} U_{\sigma(i)} \in [a_i, b_i]) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(U_{\sigma(i)} \in [a_i, b_i]) \quad (2) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(U_1 \in [a_i, b_i]) \\
&= n! \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(U_1 \in [a_i, b_i]) \\
&= n! \prod_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} \frac{dx_i}{t} \\
\mathbb{P}(U \in \prod_{i=0}^{n}[a_i, b_i]) &= \frac{n!}{t^n} \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)
\end{aligned}
$$

L'égalité (2) résulte de l'indépendance des $(U_{\sigma(i)})_i$.
Alors $\frac{\mathbb{P}(U \in \prod_{i=0}^{n}[a_i,b_i])}{\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)}$ tend vers $\frac{n!}{t^n}$ lorsque $b_i \longrightarrow a_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.
Ce qui prouve que U est un vecteur aléatoire à densité donnée par :

$$
\boxed{f^{(U)}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{n!}{t^n} \mathbb{1}_{0 \leq x_1 < \ldots < x_n < t}}
$$

T6. On note T le vecteur $(T_1, \ldots, T_n)$. On a démontré dans dans **T2** que $(T_k)_k$ est presque sûrement strictement croissante, elle est donc à valeurs dans D presque sûrement.
Comme dans la questions précédente, nous ne nous intéresserons qu'au calcul de la densité de T sur D, car si elle existe, elle sera nulle ailleurs.
Soit $(a_1, \ldots a_n) \in D, \forall b_1, \ldots, b_n \in [0, t]$ tels que $a_1 < b_1 < a_2 < \ldots < b_{n-1} < a_n < b_n$, on a

$$
\mathbb{P}(T \in \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i] \mid N_t = n) = \mathbb{P}(\{T \in \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]\} \cap \{N_t = n\}) / \mathbb{P}(N_t = n)
$$

$$
\begin{aligned}
N_t = n \text{ et } T \in \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i] &\Longleftrightarrow N_t = n \text{ et } \forall 1 \leq i \leq n \ : \ a_i \leq T_i \leq b_i \quad (a_1 < b_1 < a_2 < \ldots) \\
&\Longleftrightarrow N_t = n \text{ et } \forall 1 \leq i \leq n \ : \ \begin{cases} N_{a_i} & = \sup\{k \in \mathbb{N} \mid T_k < a_i\} = i - 1 \\ N_{b_i} & = \sup\{k \in \mathbb{N} \mid T_k < b_i\} = i \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow N_{a_1} = 0 \text{ et } \forall 1 \leq i \leq n \ : \ \begin{cases} N_{b_i} - N_{a_i} & = 1 \\ N_{a_{i+1}} - N_{b_i} & = 0 \end{cases} \quad \text{où } a_{n+1} = t
\end{aligned}
$$

En utilisant les propriétés d'indépendance et de stationnarité admises, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T \in \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i] \mid N_t = n) &= \frac{1}{\mathbb{P}(N_t = n)}\mathbb{P}\left(\{N_{a_1} = 0\} \cap (\bigcap_{i=1}^{n}\{N_{b_i} - N_{a_i} = 1\} \cap \{N_{a_{i+1}} - N_{b_i} = 0\}\right) \\
&= \frac{\mathbb{P}(N_{a_1} = 0)}{\mathbb{P}(N_t = n)} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(N_{b_i} - N_{a_i} = 1)\mathbb{P}(N_{a_{i+1}} - N_{b_i} = 0) \\
&= \frac{\mathbb{P}(N_{a_1} = 0)}{\mathbb{P}(N_t = n)} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(N_{b_i - a_i} = 1)\mathbb{P}(N_{a_{i+1} - b_i} = 0) \\
&= \frac{n!}{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n} e^{-\lambda a_1} \prod_{i=1}^{n} \left(e^{-\lambda(b_1 - a_1)}\lambda(b_1 - a_1)e^{-\lambda(a_{i+1} - b_i)}\right) \\
&= \frac{n!}{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n} e^{-\lambda a_1} \lambda^n e^{-\lambda \sum\limits_{i=1}^{n}(a_{i+1} - a_i)} \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \\
&= \frac{n!}{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n} e^{-\lambda a_1} \lambda^n e^{-\lambda(t - a_1)} \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \\
&= \frac{n!}{t^n} \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)
\end{aligned}$$

Alors $\frac{\mathbb{P}(T \in \prod_{i=0}^{n}[a_i, b_i])}{\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)}$ tend vers $\frac{n!}{t^n}$ lorsque $b_i \longrightarrow a_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

La loi conditionnelle de $T = (T_1, \ldots, T_n)$ sachant que $N_t = n$ est alors la loi du vecteur $U = (U_{(i)}, \ldots, U_{(n)})$:

$$\boxed{f^{(T \mid N_t = n)}(x_1, \ldots, x_n) = f^{(U)}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{n!}{t^n} \mathbb{1}_{0 \leq x_1 < \ldots < x_n < t}}$$

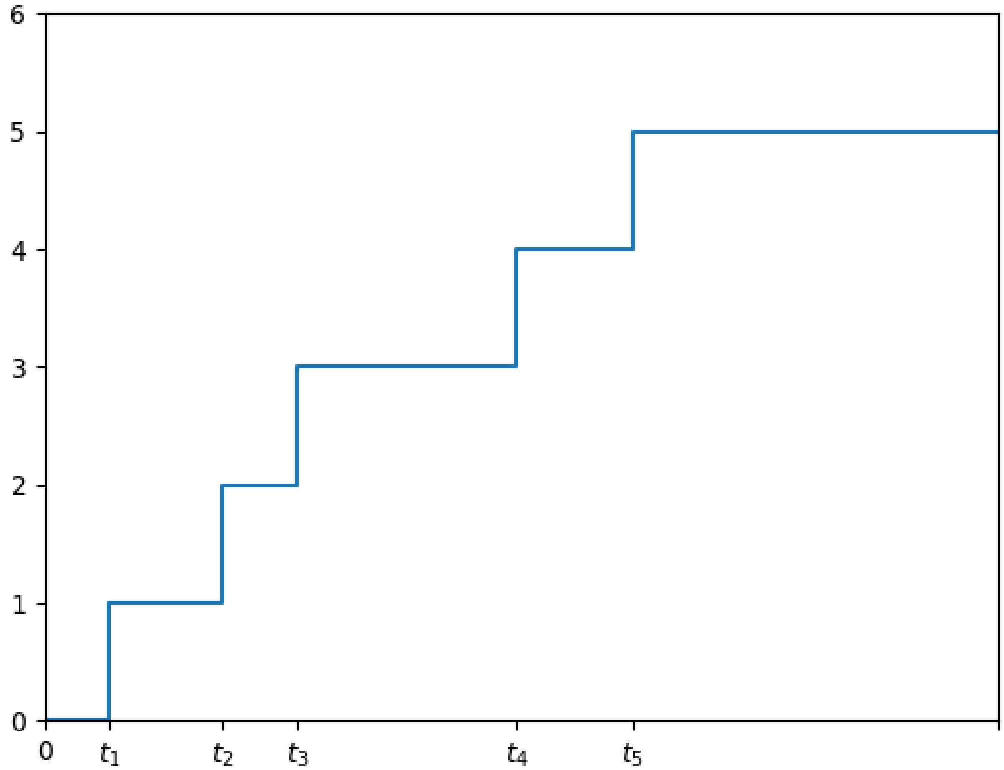

FIGURE 1 – S1 : Simulation d'un processus de Poisson avec $t = 1$, $\lambda = 5$

2 Coût des indemnités :

T7. Les variables J_i représentent des sauts de hauteur aléatoire, qui peuvent être dans notre modèle le montant de l'indemnité du i^{me} accident ayant lieu à l'instant T_i. Quant aux variables C_t elles représentent la somme des sauts aléatoires ayant eu lieu avant l'instant t. Cela modélise le coût total des indemnités à verser par l'assureur entre les instants 0 et t.

T8. Soit l'événement $A = \{\ C$ ne fait que des sauts de tailles 0 ou 1 $\}$.
Les tailles des sauts de C_t sont les J_i où $0 \leq i \leq N_t$, donc $A = \{\, \forall i \in \mathbb{N}, J_i = 0$ ou $J_i = 1\,\}$, donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) = 1 &\iff \forall i \in \mathbb{N},\ J_i \in \{0,1\} \ \text{ presque-sûrement} \\
&\iff \forall i \in \mathbb{N}, J_i \sim \mathcal{B}(p) \text{ avec } p = \mathbb{P}(J_i = 1) \\
&\iff J_1 \sim \mathcal{B}(p) \text{ avec } p = \mathbb{P}(J_1 = 1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = 1 \iff J_1 \sim \mathcal{B}(p),\ p \in [\,0,1\,]}$$

T9. Commençons par calculer la fonction caractéristique de C_t. On a $\forall u \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\phi_{C_t}(u) &= \mathbb{E}(e^{iuC_t}) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}(e^{iuC_t} | N_t = n)\mathbb{P}(N_t = n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}(e^{iu\sum_{i=1}^{N_t} J_i} | N_t = n) e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}(e^{iu\sum_{i=1}^{n} J_i}) e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad \text{(Par indépendance des } J_i \text{ et } N_t) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}(\prod_{i=1}^{n} e^{iuJ_i}) e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(e^{iuJ_i}) e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad \text{(Par indépendance des } J_i) \\
&= e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{i=1}^{n} \phi_{J_1}(u) \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\phi_{J_1}(u)\lambda t)^n}{n!}
\end{aligned}$$

On a donc : $\quad \phi_{C_t}(u) = e^{\lambda t(\phi_{J_1}(u) - 1)}$

Or, on sait que pour toute variable aléatoire X admettant des moments d'ordre 1 et 2, on a

$$\begin{cases}
\mathbb{E}(X) &= -i\phi_X^{'}(0) \\
Var(X) &= -\phi_X^{''}(0) + (\phi_X^{'}(0))^2
\end{cases}$$

Il suffit donc de calculer $\phi^{'}_{C_t}(0)$ et $\phi^{''}_{C_t}(0)$.

$$\forall u \in \mathbb{R} : \qquad \begin{aligned} \phi^{'}_{C_t}(u) &= \lambda t \phi^{'}_{J_1}(u)\phi_{C_t}(u) \\ \phi^{''}_{C_t}(u) &= \lambda t[\phi^{''}_{J_1}(u)\phi_{C_t}(u) + \phi^{'}_{J_1}(u)\phi^{'}_{C_t}(u)] \end{aligned}$$

En particulier en 0, on trouve

$$\begin{aligned} \phi^{'}_{C_t}(0) &= \lambda t \phi^{'}_{J_1}(0) \\ \phi^{''}_{C_t}(0) &= \lambda t[\phi^{''}_{J_1}(0) + (\phi^{'}_{J_1}(0))^2] \end{aligned}$$

Ce qui nous donne : $\quad \mathbb{E}(C_t) = \lambda t \mathbb{E}(J_1) \quad$ et $\quad \mathbb{E}(C_t^2) = \lambda t[\mathbb{E}(J_1^2) + \lambda t \mathbb{E}(J_1)^2]$.

C'est à dire : $\quad \boxed{\mathbb{E}(C_t) = \mu\lambda t} \quad$ et $\quad \boxed{Var(C_t) = \lambda t(\mu^2 + \sigma^2)}$

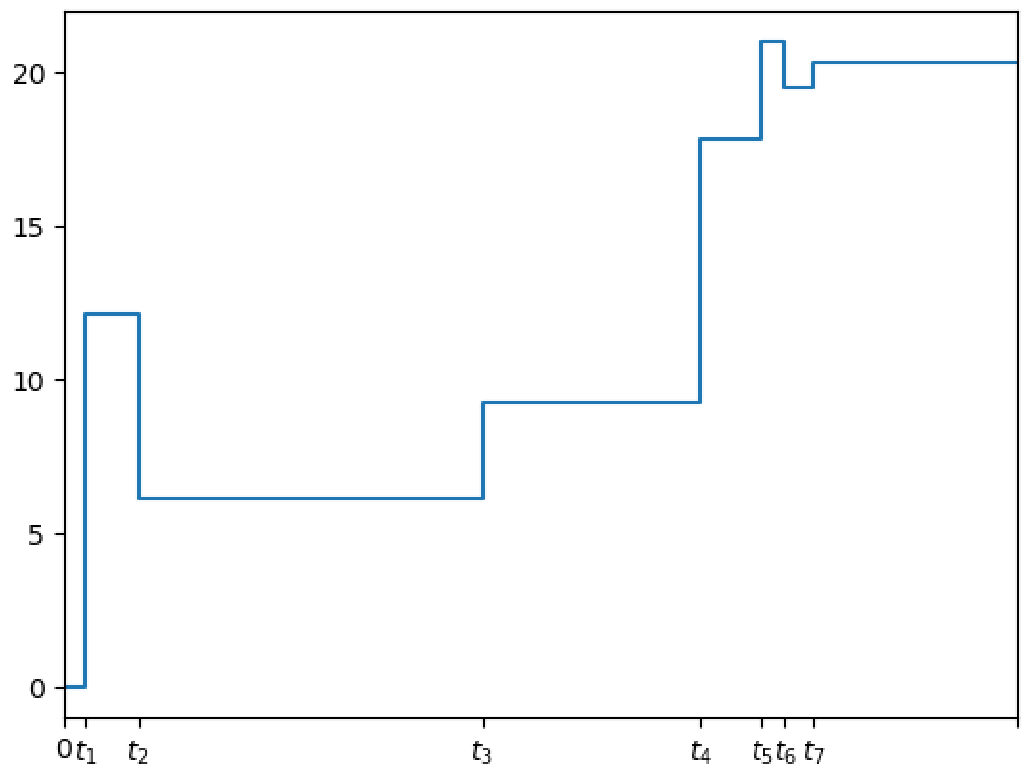

FIGURE 2 – S2 : Simulation de la trajectoire de C_t lorsque J_1 suit une loi normale centrée de variance 5, avec $t = 1$, $\lambda = 5$

3 Probabilité de ruine :

T10. Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une de réels qui tend vers $+\infty$, quitte à extraire une sous suite, on peut supposer que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'ensemble $A_n = \{\, \exists s \in [0, t_n];\ R_s < 0\,\}$.
La suite $(A_n)_n$ est croissante et vérifie

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{\, \exists s > 0;\ R_s < 0\,\}$$

De la croissance des A_n on déduit que $\mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$, autrement dit, $\varphi(u) = \lim_{n\to+\infty} \varphi(u, t_n)$.
Ceci étant pour toute suite de réels qui tend vers $+\infty$, on déduit par la caractérisation séquentielle de la limite que

$$\boxed{\varphi(u) = \lim_{t\to+\infty} \varphi(u, t)}$$

T11. Pour évaluer la limite de R_t on s'intéresse à $\frac{R_t}{t}$:

$$R_t = u + ct + C_t \implies \frac{R_t}{t} = c + \frac{u}{t} + \frac{C_t}{t} = c + \frac{C_t}{t} + o(1)$$

Il suffit donc d'étudier $\frac{C_t}{t}$.
On écrit alors $\frac{C_t}{t} = \frac{C_t}{N_t}\frac{N_t}{t}$. Montrons tout d'abord que $\frac{N_t}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$ presque-sûrement.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_k = N_k - N_{k-1}$. Les variables aléatoires Y_k sont indépendantes et suivent la loi de Poisson de paramètre λ d'après les propriétés admises, donc par la loi forte des grands nombres, on a presque sûrement

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} Y_k = \lambda$$

Or $\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} Y_k = \frac{N_m}{m}$, donc

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{N_m}{m} = \lambda \ \text{ presque-sûrement}$$

N_t est croissante en t : en effet, si $s, t \in [\,0, +\infty\,[$ tels que $s < t$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{1}_{T_n \leqslant s} \ \leq\ \mathbb{1}_{T_n \leqslant t}$$

et donc

$$N_s = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{T_n \leqslant s} \ \leq\ \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{T_n \leqslant t} = N_t$$

On a alors pour tout $t > 1$:

$$N_{[t]} \leq N_t \leq N_{[t]+1}$$
$$\frac{N_{[t]}}{[t]}\frac{[t]}{t} \leq \frac{N_t}{t} \leq \frac{N_{[t]+1}}{[t]+1}\frac{[t]+1}{t}$$

Ce qui assure que presque-sûrement $\lim_{m\to+\infty} \frac{N_t}{t} = \lambda$.

Montrons maintenant que $\lim_{m\to+\infty} \frac{C_t}{N_t} = \mu$:
Par la loi des grands nombres on a presque sûrement $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} J_k = \mu$.
Soit $\mathcal{O} = \{\omega \in \Omega;\ \frac{N_t(\omega)}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda\} \cap \{\omega \in \Omega; \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} J_k(\omega) = \mu\}$,
$\mathcal{O}$ est un ensemble presque sûr car c'est la réunion de deux ensembles presque sûrs.

$$\forall \omega \in \mathcal{O},\ \text{on a :}\ \lim_{t\to+\infty} \frac{C_t(\omega)}{N_t(\omega)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{N_t(\omega)} \sum_{k=1}^{N_t(\omega)} J_k(\omega) = \mu \qquad (\,N_t(\omega) \longrightarrow +\infty)$$

On déduit que $\frac{C_t}{N_t}$ tend presque-sûrement vers μ et que finalement,

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} \frac{R_t}{t} = c - \lambda\mu \quad p.s.}$$

Ainsi, si $c - \lambda\mu > 0$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} R_t = +\infty \quad p.s.$

Commentaire S3. Avec les valeurs $\mu = 1$, $\lambda = 5$ et $c = 7$, on a $c - \lambda\mu = 2 > 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} R_t = +\infty \quad p.s.$, et par suite, on n'est pas sûrs qu'une ruine totale aura lieu.
On ne peut donc pas prendre $R_t < 0$ comme condition d'arrêt de notre programme, car rien ne garantit sa réalisation.

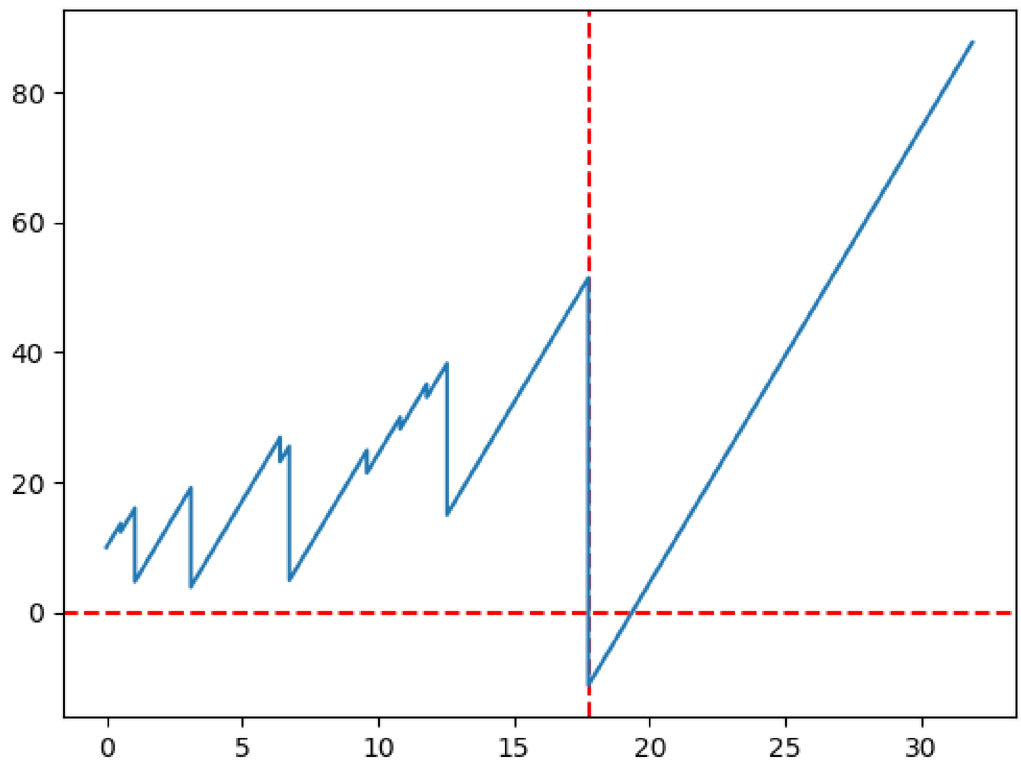

FIGURE 3 – S3. Exemple de simulation d'une courbe de richesse dans un cas de ruine, avec $\mu = 1$, $\lambda = 5$, $c = 7$ et $u = 10$

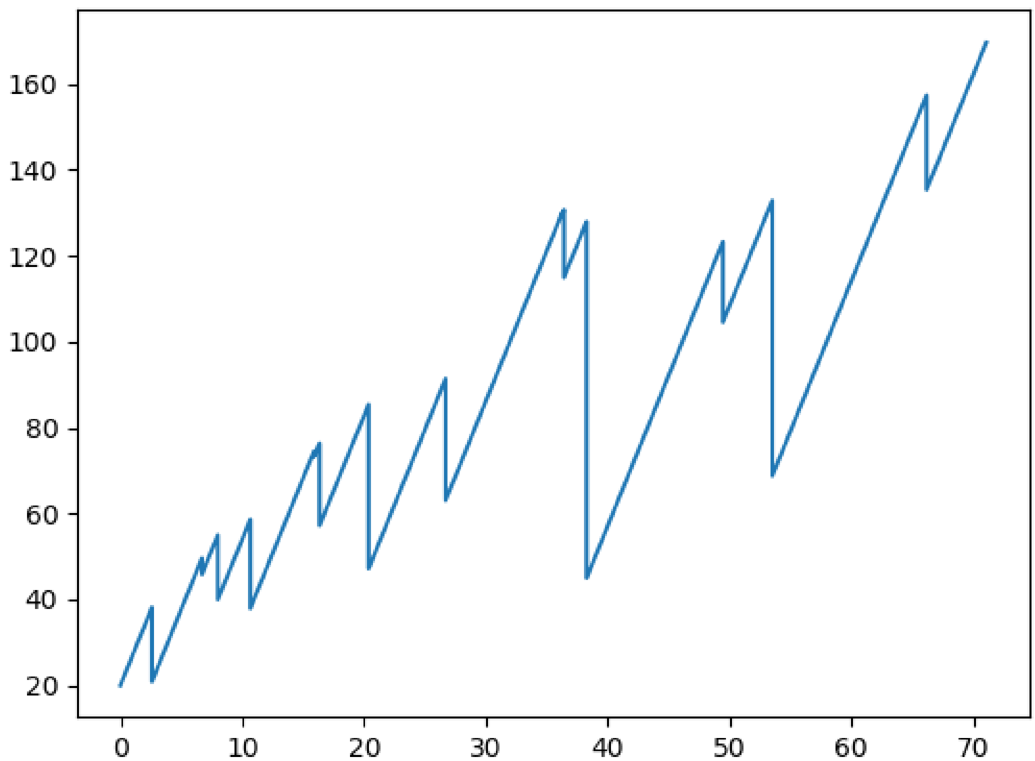

FIGURE 4 – S3. Exemple de simulation d'une courbe de richesse dans un cas sans ruine, avec $\mu = 1$, $\lambda = 5$, $c = 7$ et $u = 15$