MÉTHODE DE PÉNALISATION

Projet MAP412

1er mars 2020

Z. BENOMAR et G. ZHANG

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

1
MÉTHODE DE PÉNALISATION : DESCRIPTION ET TEST

1.1 Cherchons la formulation variationnelle associée à $(\mathcal{P}_\epsilon^{stat})$:
Si T_ϵ une fonction vérifiant $(\mathcal{P}_\epsilon^{stat})$, alors pour toute fonction v dans $H_0^1(\Omega)$ on a :

$$\int_\Omega -\Delta T_\epsilon v \mathrm{d}x + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega (T_\epsilon - T_B)\mathbf{1}_B v \mathrm{d}x = 0$$
$$\int_\Omega \nabla T_\epsilon . \nabla v \mathrm{d}x + \frac{1}{\epsilon}\int_B (T_\epsilon - T_B) v \mathrm{d}x = 0 \qquad \text{(Formule de Green)}$$
$$\int_\Omega \nabla T_\epsilon . \nabla v \mathrm{d}x + \frac{1}{\epsilon}\int_B T_\epsilon v \mathrm{d}x = \frac{1}{\epsilon}\int_B T_B v \mathrm{d}x$$
$$a_\epsilon(T_\epsilon, v) = l_\epsilon(v)$$

[Formulation variationnelle de $(\mathcal{P}_\epsilon^{stat})$]

Trouver T_ϵ dans $H_0^1(\Omega)$ vérifiant $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ $a_\epsilon(T_\epsilon, v) = l_\epsilon(v)$, avec

$$a_\epsilon(u, v) := \int_\Omega \nabla u . \nabla v \mathrm{d}x + \frac{1}{\epsilon}\int_B uv \mathrm{d}x$$

$$l_\epsilon(v) := \frac{T_B}{\epsilon}\int_B v \mathrm{d}x$$

1.2 (Voir la page suivante) En comparant les fonctions T_ϵ obtenues pour les valeurs 10^{-2} et 10^{-3} de ϵ on remarque effectivement que notre suite de fonctions converge vers la solution espérée.

— Pour $\epsilon = 10^{-2}$, bien que la fonction T_ϵ est loin d'être constante sur B, on voit bien que la chaleur atteint son maximum dans B et l'allure globale est correcte.

— Pour $\epsilon = 10^{-3}$ ressemble beaucoup plus à une fonction plateau constante sur B, le résultat obtenu est déjà satisfaisant.

1.3 (Voir la page suivante) On remarque que la norme L^2 de l'erreur sur B (prise en compte de la contrainte) et sur Ω (convergence) tendent vers 0 lorsque $\epsilon \longrightarrow 0$.
On voit bien que les deux courbes ne sont pas croissantes, c'est à dire qu'on ne s'approche pas nécessairement de la solution en passant de ϵ_1 à $\epsilon_2 < \epsilon_1$, ce qui nous pousse à nous demander si toute la suite $(T_\epsilon)_\epsilon$ va converger vers la solution ou bien seulement une sous suite de celle-ci le fera ?
Nous verrons dans la partie suivante qu'on a bien convergence de $(T_\epsilon)_\epsilon$ toute entière vers T^{stat}. Nous allons même traiter un problème plus général en remplacant T_B par une fonction quelconque dans $H_0^1(\Omega)$.

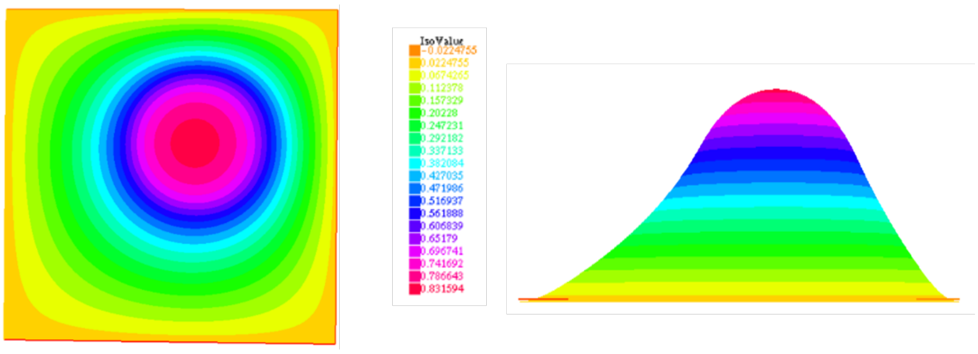


Figure 1 – T_ϵ^{stat} pour $\epsilon = 10^{-2}$

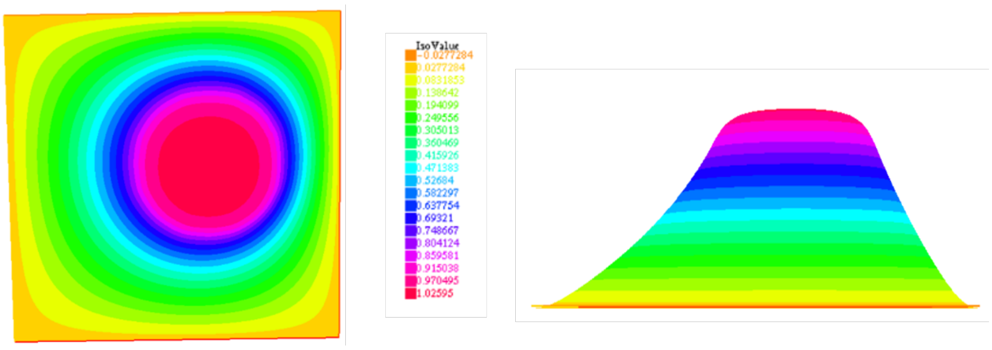
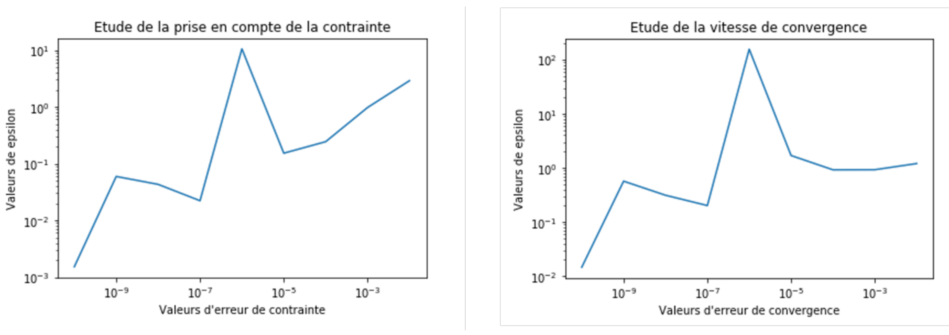


Figure 2 – T_ϵ^{stat} pour $\epsilon = 10^{-3}$



2
CADRE THÉORIQUE

2.1 Le problème $(\mathcal{P}^\epsilon)$ est similaire à $(\mathcal{P}_\epsilon^{stat})$, la seule différence est que la fonction constante T_B est remplacée par la fonction $f \in H_0^1(\Omega)$. La formulation variationnelle de $(\mathcal{P}^\epsilon)$ est donc la suivante :

[Formulation variationnelle de $(\mathcal{P}^\epsilon)$**]**

Trouver u_ϵ dans $H_0^1(\Omega)$ vérifiant $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ $a_\epsilon(u_\epsilon, v) = l_\epsilon(v)$, avec

$$a_\epsilon(u,v) := \int_\Omega \nabla u . \nabla v \mathrm{d}x + \frac{1}{\epsilon}\int_B uv \mathrm{d}x$$

$$l_\epsilon(v) := \frac{1}{\epsilon}\int_B fv \mathrm{d}x$$

Pour montrer l'unicité de la solution de ce problème, nous allons utiliser le théorème de Lax-Millgram, vérifions que ses hypothèses sont satisfaites :

— $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert

— l_ϵ est linéaire par linéarité de l'intégrale, et elle est continue par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et en remarquant que $||v||_{L^2(B)} \leq ||v||_{L^2(\Omega)} \leq ||v||_{H^1(\Omega)}$:

$$|l_\epsilon(v)| \leq ||f||_{L^2(B)}||v||_{L^2(B)} \leq ||f||_{L^2(B)}||v||_{H^1(\Omega)}$$

On peut utiliser la norme H^1 pour montrer la continuité car Ω est un borné régulier, et donc est équivalente à la norme H_0^1 sur $H_0^1(\Omega)$ (résultat de l'inégalité de Poincaré).

— a_ϵ est bilinéaire par linéarité de l'intégrale, et continue car

$$\begin{aligned}|a_\epsilon(u,v)| &\leq ||\nabla v||_{L^2(\Omega)}||\nabla u||_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\epsilon}||v||_{L^2(B)}||u||_{L^2(B)} \\ &\leq (||\nabla v||_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\epsilon}||v||_{L^2(\Omega)})||u||_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \max(1, \frac{1}{\epsilon})||v||_{H^1(\Omega)}||u||_{H^1(\Omega)}\end{aligned}$$

— a_ϵ est coercive car pour tout v dans $H_0^1(\Omega)$

$$a_\epsilon(v,v) = ||\nabla v||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\epsilon}||v||^2_{L^2(B)} \geq ||\nabla v||^2_{L^2(\Omega)} = ||\nabla v||^2_{H_0^1(\Omega)}$$

Par le théorème de Lax-Millgram, on déduit que $(\mathcal{P}^\epsilon)$ admet une unique solution.

a_ϵ est symétrique, donc le problème admet une formulation énergétique : Trouver u_ϵ dans $H_0^1(\Omega)$ minimisant l'énergie définie sur $H_0^1(\Omega)$ par :

$$\begin{aligned} J_\epsilon(v) &:= \frac{1}{2}a_\epsilon(v,v) - l_\epsilon(v) \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2\epsilon}\int_B (v^2 - 2vf)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

La solution de ce problème de minimisation ne change pas si on ajoute à la définition de J_ϵ une constante, on peut donc changer la définition de notre énergie en rajoutant $\frac{1}{2\epsilon}\int_B f^2 \mathrm{d}x$

[Formulation énergétique de $(\mathcal{P}^\epsilon)$]

Trouver u_ϵ dans $H_0^1(\Omega)$ minimisant l'énergie

$$J_\epsilon(v) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2\epsilon}\int_B |v-f|^2 \mathrm{d}x$$

2.2 On a pour tout v dans $H_0^1(\Omega)$: $a_\epsilon(u_\epsilon, v) = l_\epsilon(v)$, en particulier pour $v = f - u_\epsilon$, qui est bien un élément de $H_0^1(\Omega)$ car $u_\epsilon, f \in H_0^1(\Omega)$, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u_\epsilon . \nabla(f - u_\epsilon)\mathrm{d}x &= \frac{1}{\epsilon}\int_B |f-u_\epsilon|^2 \mathrm{d}x \\ \frac{1}{\epsilon}\int_B |f-u_\epsilon|^2\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^2 \mathrm{d}x &= \int_\Omega \nabla u_\epsilon . \nabla f \mathrm{d}x \\ \frac{1}{\epsilon}||u_\epsilon - f||^2_{L^2(B)} + ||u_\epsilon||^2_{H_0^1(\Omega)} &\leq ||u_\epsilon||_{H_0^1(\Omega)}||f||_{H_0^1(\Omega)} \\ \frac{||u_\epsilon - f||^2_{L^2(B)}}{\epsilon||u_\epsilon||_{H_0^1(\Omega)}} + ||u_\epsilon||_{H_0^1(\Omega)} &\leq ||f||_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

La première inégalité est celle de Cauchy-Schwarz, ensuite on a divisé par $||u_\epsilon||_{H_0^1(\Omega)}$ qui est non nul sauf dans le cas où f est nulle presque partout, et dans ce cas le problème perd son intérêt car $u_\epsilon = 0$ est une solution triviale. On peut donc supposer dans toute la suite que $f \neq 0$ presque partout.

Dans la dernière inégalité obtenue, on a une sommes de deux termes positifs majorée par $||f||_{H_0^1(\Omega)}$, donc chacun de ces deux termes est majoré par $||f||_{H_0^1(\Omega)}$:

— $||u_\epsilon||_{H_0^1(\Omega)} \leq ||f||_{H_0^1(\Omega)}$

— On a $\frac{||u_\epsilon - f||^2_{L^2(B)}}{\epsilon||u_\epsilon||_{H_0^1(\Omega)}} \leq ||f||_{H_0^1(\Omega)}$ et donc $\frac{1}{\epsilon}||u_\epsilon - f||^2_{L^2(B)} \leq ||u_\epsilon||_{H_0^1(\Omega)}||f||_{H_0^1(\Omega)} \leq ||f||^2_{H_0^1(\Omega)}$

Donc les deux constantes positives $C_1 = ||f||_{H_0^1(\Omega)}$ et $C_2 = ||f||^2_{H_0^1(\Omega)}$ positives vérifient

$$||u_\epsilon||_{H_0^1(\Omega)} \leq C_1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\epsilon}\int_B |u_\epsilon - f|^2 \leq C_2$$

2.3 On a montré dans la question précédente que $(u_\epsilon)_\epsilon$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et donc elle l'est aussi dans $H^1(\Omega)$ par équivalence des deux normes.
Ω étant un ouvert borné régulier, le théorème de Rellich garantit qu'à une extraction près, on peut supposer que $(u_\epsilon)_\epsilon$ converge dans $L^2(\Omega)$ vers un certain élément u dans $L^2(\Omega)$.
D'autre part, $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire associé à sa norme, et $(u_\epsilon)_\epsilon$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, donc à une extraction près, on peut supposer $(u_\epsilon)_\epsilon$ converge faiblement vers un élément $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$.
Montrons que $u = \tilde{u}$:
Soit w dans $L^2(\Omega)$, et considérons l'application

$$\Phi_w : v \in H_0^1(\Omega) \longmapsto < w, v >_{L^2(\Omega)}$$

Φ_w est une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$. En effet, Φ est linéaire par linéarité de l'intégrale, et elle continue car pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\Phi_w(v) \leq ||w||_{L^2(\Omega)}||v||_{L^2(\Omega)} \leq ||w||_{L^2(\Omega)}||v||_{H^1(\Omega)}$$

et la norme H^1 est équivalente à la norme H_0^1 sur Ω.

$H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, donc par le théorème de Riez, il existe $b \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\Phi_w(v) =< b, v >_{H_0^1(\Omega)}$ pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$.

— $(u_\epsilon)_\epsilon$ converge vers u dans $L^2(\Omega)$, donc

$$\Phi_w(u_\epsilon) =< w, u_\epsilon >_{L^2(\Omega)} \longrightarrow < w, u >_{L^2(\Omega)} = \Phi_w(u)$$

— $(u_\epsilon)_\epsilon$ converge faiblement vers $\tilde{u}$ dans $H_0^1(\Omega)$, donc

$$\Phi_w(u_\epsilon) =< b, u_\epsilon >_{H_0^1(\Omega)} \longrightarrow < b, \tilde{u} >_{H_0^1(\Omega)} = \Phi_w(\tilde{u})$$

Par unicité de la limite on déduit que $\Phi_w(u) = \Phi_w(\tilde{u})$, et par conséquent

$$\forall w \in L^2(\Omega) \quad < w, u - \tilde{u} >_{L^2(\Omega)} = 0$$

Donc $u = \tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$.
La démonstration qu'on vient de faire reste valable en remplaçant $H_0^1(\Omega)$ par $H^1(\Omega)$, car $(u_\epsilon)_\epsilon$ est aussi une suite d'éléments de $H^1(\Omega)$. Ainsi, à une extraction près on peut aussi supposer que $u_\epsilon \rightharpoonup u$ faiblement dans $H^1(\Omega)$

il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que, à l'extraction d'une sous suite près

$$u_\epsilon \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } H^1$$

$$u_\epsilon \longrightarrow u \text{ fortement dans } L^2$$

2.4 On considère ici la sous suite extraite de la question précédente. Pour tout $\epsilon > 0$ on a

$$\begin{aligned} ||u - f||_{L^2(B)} &\leq ||u - u_\epsilon||_{L^2(B)} + ||u_\epsilon - f||_{L^2(B)} \\ &\leq ||u - u_\epsilon||_{L^2(\Omega)} + \sqrt{\epsilon C_2} \end{aligned}$$

La première inégalité est l'inégalité triangulaire, et la deuxième est due au résultat de **2.2** et au fait que $||.||_{L^2(B)} \leq ||.||_{L^2(\Omega)}$
Lorsque ϵ tend vers 0, $\sqrt{\epsilon C_2} \longrightarrow 0$, et $||u - u_\epsilon||_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0$ car $(u_\epsilon)_\epsilon$ converge vers u dans L^2.
En faisant tendre ϵ vers 0 dans l'inégalité précédente, on constate que $||u - f||_{L^2(B)} = 0$, donc

$$\boxed{u = f \text{ presque partout sur } B}$$

2.5 Soit $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega \setminus \overline{B})$. Pour tout $x \notin \Omega \setminus \overline{B}$ on a $v(x) = 0$, en particulier $\overline{B} \cap (\Omega \setminus \overline{B}) = \emptyset$, donc $v = 0$ sur $\overline{B}$.
On considère la sous suite extraite de **2.3**.
Soit $\epsilon > 0$, on a $a_\epsilon(u_\epsilon, v) = l_\epsilon(v)$, donc

$$\int_\Omega \nabla u_\epsilon . \nabla v = \frac{1}{\epsilon} \int_B (f - u_\epsilon) v = 0 \quad (\text{ car } v = 0 \text{ sur } \overline{B})$$

Et on a $u_\epsilon \rightharpoonup u$ faiblement dans H_0^1, donc $\int_\Omega \nabla u . \nabla v = \lim\limits_{\epsilon \longrightarrow 0} \int_\Omega \nabla u_\epsilon . \nabla v = 0$, c'est à dire

$$\int_{\Omega \setminus \overline{B}} \nabla u . \nabla v + \int_{\overline{B}} \nabla u . \nabla v = 0$$

$$\int_{\Omega \setminus \overline{B}} \nabla u . \nabla v = 0$$

$$\boxed{\forall v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega \setminus \overline{B}), \quad \int_{\Omega \setminus \overline{B}} \nabla u . \nabla v = 0}$$

Montrons maintenant que toute la suite $(u_\epsilon)_\epsilon$ converge vers u.
Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas, alors

$$\exists \delta > 0, \quad \forall \epsilon_0 > 0, \quad \exists \epsilon \in]0, \epsilon_0[, \quad ||u - u_\epsilon|| \geq \delta$$

On peut donc extraire une sous suite $(u_{\sigma(\epsilon)})_\epsilon$ telle que $\forall \epsilon > 0$, $||u - u_{\sigma(\epsilon)}|| \geq \delta$, où σ est une fonction définie sur $]0, +\infty[$ strictement croissante à valeurs strictement positives et qui tend vers 0 au voisinage de 0.
En utilisant les résultats des questions précédentes à $(u_{\sigma(\epsilon)})_\epsilon$ à la place de $(u_\epsilon)_\epsilon$, on déduit qu'il existe une nouvelle sous suite $(u_{\sigma \circ \nu(\epsilon)})_\epsilon$ extraite de $(u_{\sigma(\epsilon)})_\epsilon$ et $u' \in H_0^1(\Omega)$ tels que

$$\begin{aligned} &u_{\sigma \circ \nu(\epsilon)} \rightharpoonup u' \text{ dans } H^1 \\ &u_{\sigma \circ \nu(\epsilon)} \longrightarrow u' \text{ dans } L^2 \\ &u' = f \text{ presque partout sur } B \\ &\forall v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega \setminus \overline{B}), \quad \int_{\Omega \setminus \overline{B}} \nabla u' . \nabla v = 0 \end{aligned}$$

On a alors

$$\forall v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega \setminus \overline{B}), \quad \int_{\Omega\setminus\overline{B}} \nabla u.\nabla v = \int_{\Omega\setminus\overline{B}} \nabla u'.\nabla v = 0$$

$$\forall v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega \setminus \overline{B}), \quad \int_{\Omega\setminus\overline{B}} \nabla (u-u').\nabla v = 0$$

Or $u - u' \in H_0^1(\Omega \setminus \overline{B})$ car $u, u' \in H_0^1(\Omega)$ et $u - u' = 0$ presque partout sur B (car $u = u' = f$ presque partout sur B), l'équation précédente peut donc s'écrire :

$$\forall v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega \setminus \overline{B}), \quad < (u-u'), v >_{H_0^1(\Omega\setminus\overline{B})} = 0$$

Et $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega \setminus \overline{B})$ est dense dans $H_0^1(\Omega \setminus \overline{B})$ qui est un espace de Hilbert, donc $u - u' = 0$ presque partout sur $\Omega \setminus \overline{B}$, mais $u = u'$ presque partout sur B, donc $u = u'$ presque partout sur Ω, et par conséquent $u_{\sigma o \nu(\epsilon)} \longrightarrow u$ dans L^2, ce qui est absurde car $\forall \epsilon > 0,\ ||u - u_{\sigma(\epsilon)}|| \geq \delta$.

Pour conclure, en admettant que $u \in H^2(\Omega)$ et en utilisant la formule de Green, on trouve

$$\forall v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega \setminus \overline{B}), \quad \int_{\Omega\setminus\overline{B}} -v\Delta u = 0$$

En effet, le terme du bord est nul car $\Omega \setminus \overline{B}$ est un ouvert (c'est un ouvert de Ω qui est lui même un ouvert), et $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega \setminus \overline{B})$ donc v est est nul sur le bord de $\Omega \setminus \overline{B}$.
Ceci nous permet de déduire que $-\Delta u = 0$ sur Ω. (c'est aussi vrai sur B car u est constante sur B)
On a donc $u \in H_0^1(\Omega)$, $u = f$ dans B, et $-\Delta u = 0$ sur Ω. u est donc solution du problème $(\mathcal{P})$.

Si w est une autre solution de $(\mathcal{P})$, alors $u = w$ sur $B \cup \partial\Omega$, et par suite $u - w \in H_0^1(\Omega \setminus \overline{B})$ $\Delta(u - w) = 0$ sur $\Omega \setminus \overline{B}$, en multipliant par une fonction test de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega \setminus \overline{B})$, en intégrant sur $\Omega \setminus \overline{B}$ et en utilisant la formule de Green, on trouve

$$\forall v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega \setminus \overline{B}), \quad < (u-w), v >_{H_0^1(\Omega\setminus\overline{B})} = 0$$

Donc $u = w$ sur $\Omega \setminus \overline{B}$, et donc sur Ω tout entier. D'où l'unicité de la solution de $(\mathcal{P})$.

[**Conclusion**]
Le problème $(\mathcal{P})$ admet une unique solution, qui est la limite forte dans L^2 et faible dans H^1 lorsque ϵ tend vers 0 de la suite des solutions des problèmes $\mathcal{P}^\epsilon$.

3
CHAUFFAGE D'UNE PIÈCE, PROBLÈME STATIONNAIRE, ÉTUDE DES CONDITIONS AUX LIMITES

3.1

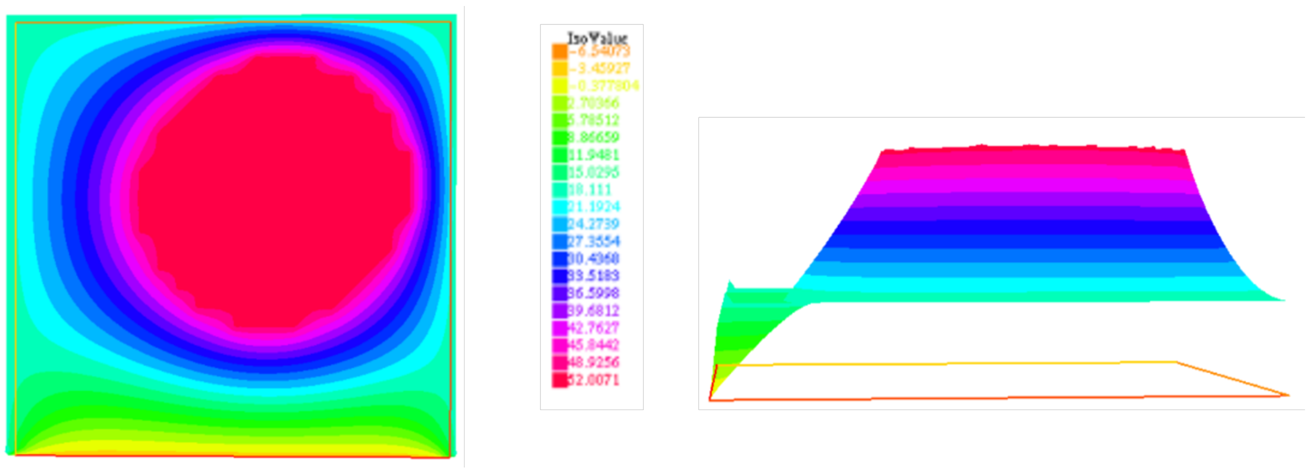


Figure 3 – Condition sur la baie vitrée de type Dirichlet

3.2 On cherche dans cette question la solution du problème

$$(\mathcal{P}^{D,N}) : \begin{cases} -\Delta T = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{B} \\ T = T_B & \text{sur } B \\ T = T_M & \text{sur } \Gamma_1 \\ \dfrac{\partial T}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

où

$$\Gamma_1 = [0,1[\times\{0,1\} \cup \{0\} \times [0,1]$$
$$\Gamma_2 = \{1\} \times [0,1]$$

(Γ_1, Γ_2) est une partition de $\partial\Omega$.
On se permet de considérer $\Omega \setminus \overline{B}$ à la place de $\Omega \setminus B$ car ∂B est de mesure nulle.

Si T est une solution de ce problème, alors $T - T_M$ vérifie

$$\begin{cases} -\Delta(T - T_M) = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{B} \\ T - T_M = T_B - T_M & \text{sur } B \\ T - T_M = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \dfrac{\partial (T - T_M)}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

Soit T_0 la solution du problème $(\mathcal{P})$ traité dans la partie **2**, avec $f = T_B - T_M$, on a

$$\begin{cases} -\Delta T_0 = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{B} \\ T_0 = T_B - T_M & \text{sur } B \\ T_0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Soit alors $\tilde{T} = T - T_M - T_0$, on a

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{T} = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{B} \\ \tilde{T} = 0 & \text{sur } B \\ \tilde{T} = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \dfrac{\partial(\tilde{T} + T_0)}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

Considérons l'ouvert $\Omega \setminus \overline{B}$, comme $\overline{B}$ est inclus dans Ω, on a $\partial(\Omega \setminus \overline{B}) = \partial\Omega \cup \partial B$, et $\tilde{T}$ vérifie

$$(\tilde{\mathcal{P}}^{D,N}) \begin{cases} -\Delta \tilde{T} = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{B} \\ \tilde{T} = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \cup \partial B \\ \dfrac{\partial \tilde{T}}{\partial n} = -\dfrac{\partial T_0}{\partial n} & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

$(\Gamma_1 \cup \partial B, \Gamma_2)$ est une partition de $\partial\Omega \setminus \overline{B}$.

Le théorème 3.19 du cours (deuxième théorème de trace) assure que $\dfrac{\partial T_0}{\partial n}$ est dans $L^2(\Gamma_2)$ car T_0 est dans $H^2(\Omega)$ comme admis dans la fin de la partie 2.

Cherchons à présent la formulation variationnelle de $(\tilde{\mathcal{P}}^{D,N})$
Si $\tilde{T} \in H^1_{0,\Gamma_1 \cup \partial B}(\Omega \setminus \overline{B})$ est solution de $(\tilde{\mathcal{P}}^{D,N})$, alors pour tout $v \in H^1_{0,\Gamma_1 \cup \partial B}(\Omega \setminus \overline{B})$

$$\int\limits_{\Omega \setminus \overline{B}} -\Delta \tilde{T} v = \int\limits_{\Omega \setminus \overline{B}} \nabla \tilde{T}.\nabla v - \int\limits_{\partial(\Omega \setminus \overline{B})} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} v = 0$$

et

$$\int\limits_{\partial(\Omega \setminus \overline{B})} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} v = \int\limits_{\Gamma_2} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} = -\int\limits_{\Gamma_2} \frac{\partial T_0}{\partial n} v$$

Donc

$$\int\limits_{\Omega \setminus \overline{B}} \nabla \tilde{T}.\nabla v = -\int\limits_{\Gamma_2} \frac{\partial T_0}{\partial n} v$$

[Formulation variationnelle de $(\tilde{\mathcal{P}}^{D,N})$]

Trouver $\tilde{T} \in H^1_{0,\Gamma_1\cup\partial B}(\Omega \setminus \overline{B})$ vérifiant $\forall v \in H^1_{0,\Gamma_1\cup\partial B}(\Omega \setminus \overline{B})$ $\tilde{a}(\tilde{T}, v) = \tilde{l}(v)$, avec

$$\tilde{a}(u,v) = \int\limits_{\Omega\setminus\overline{B}} \nabla u.\nabla v \quad \text{ et } \quad \tilde{l}(v) = -\int\limits_{\Gamma_2} \frac{\partial T_0}{\partial n} v$$

Où T_0 est la solution de $(\mathcal{P})$ introduit dans la partie **2** avec $f = T_B - T_M$.
La solution de $(\mathcal{P}^{D,N})$ est donnée par $T = \tilde{T} + T_0 + T_M$.

Le problème qui se pose lorsqu'on veut passer sur FreeFem++ est que les deux fonctions T_0 et $\tilde{T}$ se calculent sur des maillages différents, on ne peut donc pas résoudre directement le problème variationnel précédent. Nous allons alors tenter une méthode de pénalisation :
Pour $\epsilon > 0$, on considère le problème :

$$(\mathcal{P}^{D,N}_\epsilon) : \begin{cases} -\Delta T_\epsilon + \dfrac{1}{\epsilon}(T_\epsilon - T_B + T_M) = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{B} \\ T_\epsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \dfrac{\partial T_\epsilon}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

On s'attend à ce que la suite des solutions de ces problèmes converge lorsque ϵ tend vers 0 vers $T - T_M$, où T la solution de $(\mathcal{P}^{D,N})$

En multipliant par $v \in H^1_{0,\Gamma_1\cup\partial B}(\Omega\setminus\overline{B})$, puis en utilisant la formule de Green et les conditions aux bords, on trouve

[Formulation variationnelle de $(\mathcal{P}^{D,N}_\epsilon)$]

Trouver T_ϵ dans $H^1_{0,\Gamma_1\cup\partial B}(\Omega \setminus \overline{B})$ vérifiant $\forall v \in H^1_{0,\Gamma_1\cup\partial B}(\Omega \setminus \overline{B})$ $a_\epsilon(T_\epsilon, v) = l_\epsilon(v)$, avec

$$a_\epsilon(u,v) := \int_\Omega \nabla u.\nabla v \mathrm{d}x + \frac{1}{\epsilon}\int_B uv\mathrm{d}x$$

$$l_\epsilon(v) := \frac{T_B - T_M}{\epsilon}\int_B v\mathrm{d}x$$

3.3 On cherche dans cette question la solution du problème

$$(\mathcal{P}^{D,FR}_\alpha) : \begin{cases} -\Delta T = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{B} \\ T = T_B & \text{sur } B \\ T = T_M & \text{sur } \Gamma_1 \\ \dfrac{\partial T}{\partial n} + \alpha T = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

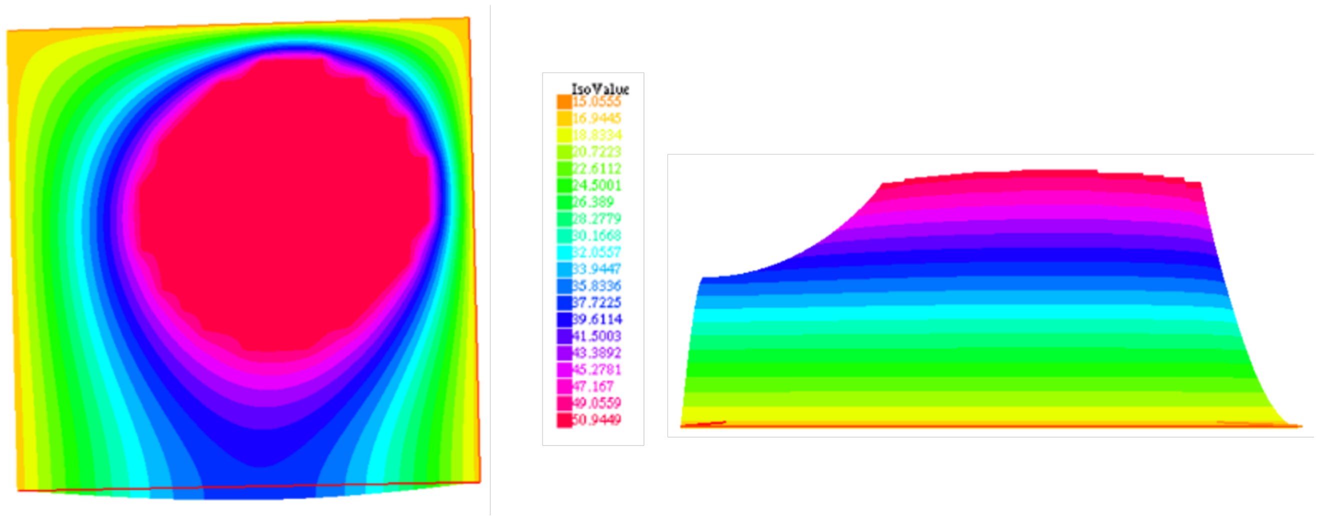


FIGURE 4 – Condition sur la baie vitrée de type Neumann

En prenant encore T_0 la solution de $(\mathcal{P})$ avec $f = T_B - T_M$, et $\tilde{T} = T - T_M - T_0$, on a sur Γ_2

$$\frac{\partial T}{\partial n} + \alpha T = \frac{\partial(\tilde{T} + T_0 + T_M)}{\partial n} + \alpha(\tilde{T} + T_0 + T_M) = 0$$

T_M est une constante et $T_0 = 0$ sur Γ_2 donc le problème que doit vérifier $\tilde{T}$ est

$$(\tilde{\mathcal{P}}^{D,FR}) \begin{cases} -\Delta\tilde{T} = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{B} \\ \tilde{T} = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \cup \partial B \\ \dfrac{\partial \tilde{T}}{\partial n} + \dfrac{\partial T_0}{\partial n} + \alpha(\tilde{T} + T_M) = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

Cherchons à présent la formulation variationnelle de $(\tilde{\mathcal{P}}^{D,FR})$
Si $\tilde{T} \in H^1_{0,\Gamma_1\cup\partial B}(\Omega \setminus \overline{B})$ est solution de $(\tilde{\mathcal{P}}^{D,FR})$, alors pour tout $v \in H^1_{0,\Gamma_1\cup\partial B}(\Omega \setminus \overline{B})$

$$\int_{\Omega\setminus\overline{B}} -\Delta\tilde{T}v = \int_{\Omega\setminus\overline{B}} \nabla\tilde{T}.\nabla v - \int_{\partial(\Omega\setminus\overline{B})} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} v = 0$$

et

$$\int_{\partial(\Omega\setminus\overline{B})} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} v = \int_{\Gamma_2} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} v = -\frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} v - \int_{\Gamma_2} \alpha(\tilde{T} + T_M) v$$

Donc

$$\int_{\partial\Omega\setminus\overline{B}} \nabla\tilde{T}.\nabla v + \alpha \int_{\Gamma_2} \tilde{T} v = -\int_{\Gamma_2} (\alpha T_M + \frac{\partial \tilde{T}}{\partial n}) v$$

[Formulation variationnelle de $(\tilde{\mathcal{P}}^{D,FR})$]

Trouver $\tilde{T} \in H^1_{0,\Gamma_1\cup\partial B}(\Omega \setminus \overline{B})$ vérifiant $\forall v \in H^1_{0,\Gamma_1\cup\partial B}(\Omega \setminus \overline{B})$ $\tilde{a}(\tilde{T}, v) = \tilde{l}(v)$, avec

$$\tilde{a}(u,v) = \int_{\Omega\setminus\overline{B}} \nabla u.\nabla v + \alpha \int_{\Gamma_2} uv \quad \text{et} \quad \tilde{l}(v) = -\int_{\Gamma_2} (\alpha T_M + \frac{\partial \tilde{T}}{\partial n})v$$

Où T_0 est la solution de $(\mathcal{P})$ introduit dans la partie **2** avec $f = T_B - T_M$.
La solution de $(\mathcal{P}^{D,FR})$ est donnée par $T = \tilde{T} + T_0 + T_M$.

De même, on considère la suite de problèmes

$$(\mathcal{P}^{D,FR}_{\alpha,\epsilon}) : \begin{cases} -\Delta T_\epsilon + \dfrac{1}{\epsilon}(T_\epsilon - T_B + T_M) = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{B} \\ T_\epsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \alpha(T_\epsilon + T_M) + \dfrac{\partial T_\epsilon}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

Et on s'attend à ce que la suite des solutions de ces problèmes converge lorsque ϵ tend vers 0 vers $T - T_M$, où T la solution de $(\mathcal{P}^{D,FR})$

En multipliant par $v \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$, puis en utilisant la formule de Green et les conditions aux bords, on trouve

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \Delta T_\epsilon v &= \int_\Omega \nabla T_\epsilon \nabla v - \int_{\Gamma_2} \frac{\partial T_\epsilon}{\partial n} v \\ &= \int_\Omega \nabla T_\epsilon \nabla v + \alpha \int_{\Gamma_2} T_\epsilon v + \alpha T_M \int_{\Gamma_2} v = 0 \end{aligned}$$

Ainsi

[Formulation variationnelle de $(\tilde{\mathcal{P}}^{D,FR}_{\alpha,\epsilon})$]

Trouver $T \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$ vérifiant $\forall v \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$ $a_\epsilon(T_\epsilon, v) = l_\epsilon(v)$, avec

$$a_\epsilon(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v + \alpha \int_{\Gamma_2} uv \quad l_\epsilon(v) = \alpha T_M \int_{\Gamma_2} v$$

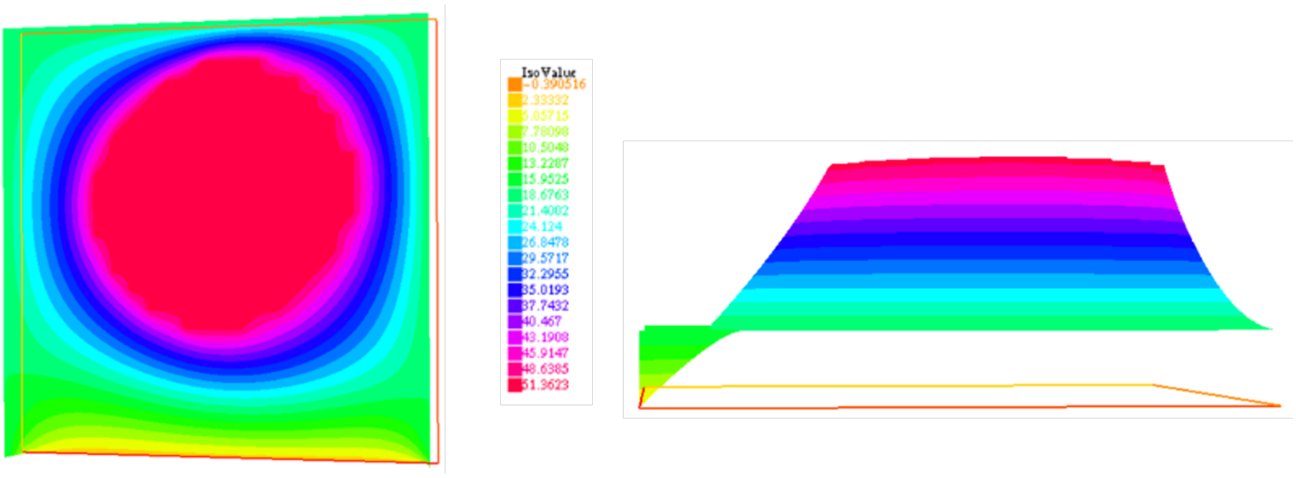


Figure 5 – Condition sur la baie vitrée de type Fourier-Robin

4
CHAUFFAGE D'UNE PIÈCE, PROBLÈME TRANSITOIRE

4.2

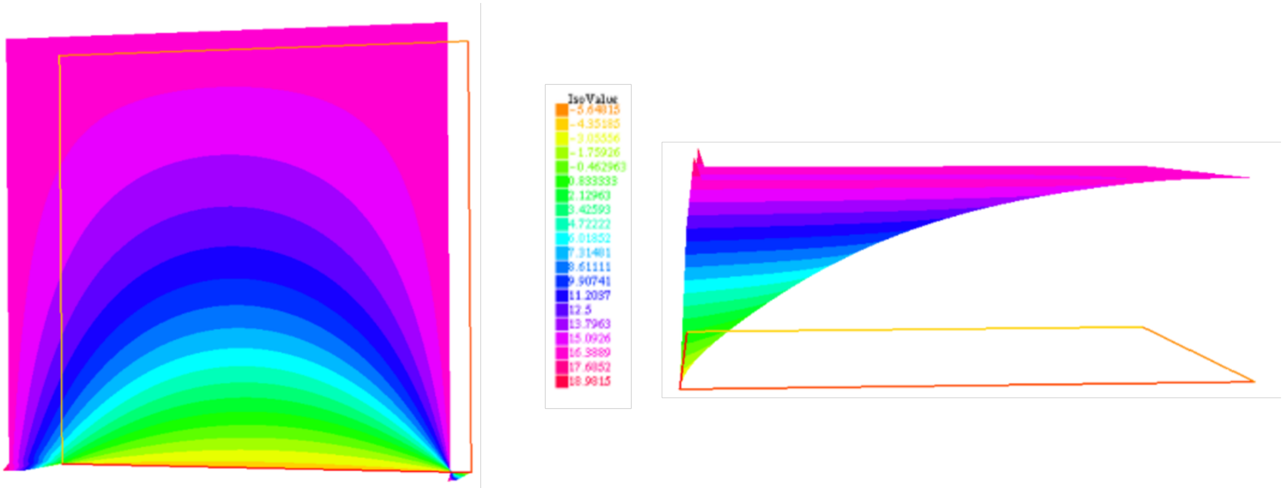


FIGURE 6 – Température T^{init} à l'arrivée des occupants

4.2 En utilisant la méthode de pénalisation, on est ramené à résoudre les problèmes

$$(\mathcal{P}_\epsilon^{n+1}) : \begin{cases} \dfrac{T_\epsilon^{n+1} - T_\epsilon^n}{\Delta t} - \Delta T_\epsilon^{n+1} + \dfrac{1}{\epsilon}(T_\epsilon^{n+1} - T_B)\mathbf{1}_B = 0 & \text{dans } \Omega \\ T_\epsilon^{n+1} = T_B & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Pour $\epsilon > 0$, on calcule la suite de fonctions $(T_\epsilon^n)_n$ par récurrence, comme solutions de $(\mathcal{P}_\epsilon^{n+1})$ avec $T_\epsilon^0 = T^{init}$, et on espère que T_ϵ^n converge vers T^{stat} quand $n \longrightarrow +\infty$ et $\epsilon \longrightarrow 0$.

On sait que T_ϵ^{stat} converge vers T^{stat} lorsque $\epsilon \longrightarrow 0$. Donc si $\delta > 0$, pour ϵ suffisamment petit on a $||T_\epsilon^{stat} - T^{stat}||_{L^2(\Omega)} < \delta/2$ et

$$\begin{aligned} ||T_\epsilon^n - T^{stat}||_{L^2(\Omega)} &\leq ||T_\epsilon^n - T_\epsilon^{stat}||_{L^2(\Omega)} + ||T_\epsilon^{stat} - T^{stat}||_{L^2(\Omega)} \\ &\leq ||T_\epsilon^n - T_\epsilon^{stat}||_{L^2(\Omega)} + \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

Il suffit donc de vérifier que $||T_\epsilon^n - T_\epsilon^{stat}||_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$ pour ϵ fixé, ce que nous allons vérifier numériquement.
Cherchons d'abord la formulation variationnelle de $(\mathcal{P}_\epsilon^{n+1})$ En multipliant par $v \in H_0^1(\Omega)$ et en intégrant sur Ω on trouve

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{\mathbf{1}_B}{\epsilon}\right) T_\epsilon^{n+1} v - \int_\Omega \Delta T_\epsilon^{n+1} v = \int_\Omega \left(\frac{1}{\Delta t} T_\epsilon^n + \frac{T_B}{\epsilon}\mathbf{1}_B\right) v$$

Or

$$\int_\Omega -\Delta T_\epsilon^{n+1} v = \int_\Omega \nabla T_\epsilon^{n+1}.\nabla v \qquad \text{car } v \in H_0^1(\Omega)$$

d'où

[Formulation variationnelle de $(\tilde{\mathcal{P}}_\epsilon^{n+1})$]

Trouver $T_\epsilon^{n+1} \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant $\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad a_\epsilon^{n+1}(T_\epsilon, v) = l_\epsilon^{n+1}(v)$, avec

$$a_\epsilon^{n+1}(u,v) = \int_\Omega (\frac{1}{\Delta t} + \frac{\mathbf{1}_B}{\epsilon}) u_\epsilon v + \int_\Omega \nabla u.\nabla v$$

$$l_\epsilon^{n+1}(v) = \int_\Omega (\frac{1}{\Delta t} T_\epsilon^n + \frac{T_B}{\epsilon}\mathbf{1}_B) v$$

4.3

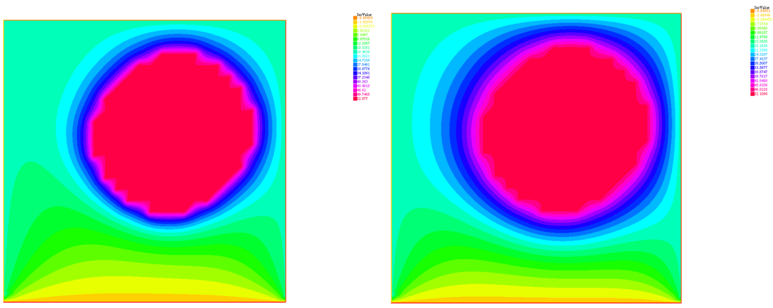


FIGURE 7 – T^{stat} à gauche et T_ϵ^n à droite pour $\epsilon = 10^{-7}$, $n = 3$ avec $\Delta t = 10^{-3}$

Pour $n = 3$ le résultat est satisfaisant et la différence entre les deux fonctions en norme L^2 est inférieure à 10^{-2}.

REPARTITION DU TRAVAIL :

— La partie théorique a été traitée par les deux membres du binôme,

— Le code FreeFem++ a majoritairement été fait par Jean Baptiste ZHANG,

— La rédaction du rapport a majoritairement été faite par Ziyad BENOMAR.

REFERENCES

— "Analyse variationnelle des équations aux dérivées partielles", MAP431 école polytechnique, François ALOUGES

Tous les théorèmes que nous avons utilisé proviennent du livre de cours, certaines de nos démonstrations s'y inspirent aussi.