POINTS RATIONNELS ET UNIFORMITÉ

NOTES PRISES PAR ZIYANG GAO

Première partie 1. Conséquences des conjectures de Lang sur des resultats d'uniformité des points rationnels

1. Dimension de Kodaira, Conjectures de Lang et conséquences

(15/10/2020 par Marc Hindry)

Dans cet exposé, K est toujours un corps de nombres. Les sous-variétés sont censées être irréductibles.

1.1. Points rationnels sur les courbes. Soit C une courbe algébrique définie sur K. Il existe une unique courbe projective lisse C_0 telle que C est birationelle à C_0. Dans le reste de l'exposé nous supposons donc que C est projective lisse.

Notons $g = h^0(C, \omega_C)$. Alors voici la structure des points K-rationnels de C :

— Si $g = 0$, alors $C(K) = \emptyset$ ou $C(K) \simeq \mathbb{P}^1(K)$;

— Si $g = 1$, alors $C(K) = \emptyset$ ou $C(K)$ est un groupe de type fini par le théorème de Mordell–Weil ;

— Si $g = 2$, alors $C(K)$ est fini par la conjecture de Mordell (actuellement un théorème de Faltings 1983).

Nous expliquons les démonstrations des premiers deux cas. Commençons par le rappel suivant en géométrie algébrique.

Rappel 1. *Soient X une variété projective lisse définie sur K et L un fibré en droites sur X. Si $H^0(X, L) \neq \emptyset$, alors l'on peut construire un morphisme*

$$\phi_{|L|} \colon X \setminus \mathrm{Bs}(L) \to \mathbb{P}H^0(X, L) \tag{1.1}$$

où $\mathrm{Bs}(L) = \{x \in X : s(x) = 0$ pour toute $s \in H^0(X, L)\}$. L'anneau gradué

$$R(X, L) = \oplus_{m \geq 0} H^0(X, L^{\otimes m}) \tag{1.2}$$

*est muni d'une structure de K-algèbre par l'application naturelle $H^0(X, L^{\otimes m}) \times H^0(X, L^{\otimes n}) \to H^0(X, L^{\otimes (m+n)})$. En particular l'on a l'**anneau canonique***

$$R(X) = \oplus_{m \geq 0} H^0(X, \omega_X^{\otimes m}) \tag{1.3}$$

où ω_X est le fibré des $\dim X$-formes différentielles, qui est une K-algèbre de type fini par Birkar, Cascini, Hacon et M^{c}Kernan.

Maintenant, on a

— Si $g = 0$, alors l'on a une immersion définie sur K

$$\phi_{|\omega_C^{-1}|} \colon C \hookrightarrow \mathbb{P}^2,$$

dont l'image est une conique. Si $P_0 \in C(K)$, l'on a un isomorphisme sur K entre cette conique et $\mathbb{P}^1$, en envoyant P_0 vers l'infini.

— Si $g = 1$ et $P_0 \in C(K)$, alors l'on a une immersion définie sur K

$$\phi_{|\mathcal{O}_C(3P_0)|} \colon C \hookrightarrow \mathbb{P}^2,$$

dont l'image est une cubique avec $\phi(P_0)$ un point d'inflexion.

La discussion ci-dessus indique que la structure de $C(K)$ est déterminée par le genre de la courbe selon les cas $g = 0$ ou $g = 1$ ou $g \geq 2$. Nous aimerons avoir des invariants géométriques qui classifient ces trois cas. Voici quelques exemples.

(1.4)

	ω_C	$f \colon \mathbb{C} \to C(\mathbb{C})$ holomorphe non-constante	$\kappa(C)$
$g = 0$	anti-ample	oui, et injective	-1
$g = 1$	trivial	oui, mais pas injective ($\mathbb{C}$/réseau)	0
$g \geq 2$	ample	non	1

L'invariant $\kappa(C)$ dans la dernière colonne est *la dimension de Kodaira* que nous allons définir.

1.2. La dimension de Kodaira et la conjecture de Lang.

Définition 1.1. *Soit X une variété algébrique projective lisse définie sur K. La dimension de Kodaira de X, notée $\kappa(X)$, est définie comme suit :*

— *soit* $\kappa(X) = \operatorname{trdeg}_K R(X) - 1$, *où* $R(X)$ *est l'anneau canonique* (1.3) *;*

— *soit* $\kappa(X) = \begin{cases} -1 & \text{si } h^0(X, \omega_X^{\otimes m}) = 0 \text{ pour tout } m \\ \max_{m \geq 1} \dim \phi_{|\omega_X^{\otimes m}|}(X) & \text{sinon} \end{cases}$, *où* $\phi_{|\omega_X^{\otimes m}|}$ *est défini dans* (1.1) *;*

— *soit* $\kappa(X) = \sup \frac{\log h^0(X, \omega_X^{\otimes m})}{\log m}$.

Bien entendu, ces trois définitions sont équivalentes.

Remarque 1.2. *Il est évident, par définition, que* $-1 \leq \kappa(X) \leq \dim X$. *Dans certaines littératures, l'on pose* $\kappa(X) = -\infty$ *au cas où* $\kappa(X) = -1$ *dans notre convention.*

Définition 1.3. *Soit X une variété algébrique projective lisse définie sur K. Alors X est dite* ***de type général*** *(ou « pseudo-canonique ») si* $\kappa(X) = \dim X$.

Maintenant nous sommes prêts de donner l'énoncé de la conjecture de Lang.

Conjecture 1.4 (Conjecture de Lang)**.** *Soit X une variété algébrique projective lisse définie sur K. Si X est de type général, alors $X(K)$ n'est pas Zariski dense dans X.*

Exemple 1.5. *(i) Soit X une surface de type général. La question suivante est ouverte : est-ce qu'il y a un nombre fini de courbes rationnelles $C_1, \ldots, C_s$ ou de genre 1 (même singulières) dans X tel que $(X \setminus \cup_{i=1}^s C_i)(K)$ est fini ?*

(ii) Soient $F_1, \ldots, F_r \in K[X_0, \ldots, X_n]$ avec $\deg F_i = d_i$ et $X = \{x \in \mathbb{P}^n : F_1(x) = \cdots = F_r(x) = 0\}$. Supposons que X est lisse de dimension $n - r$. Alors $\omega_X = \mathcal{O}_X(-n - 1 + d_1 + \cdots + d_r)$. Nous sommes dans l'un des trois cas suivants :

— *($n + 1 > d_1 + \cdots + d_r$) ω_X^{-1} est ample, et donc $\kappa(X) = -1$. Donc X est Fano ;*

— *($n + 1 = d_1 + \cdots + d_r$) ω_X est trivial, et donc $\kappa(X) = 0$;*

— *($n + 1 < d_1 + \cdots + d_r$) ω_X est ample, et donc $\kappa(X) = \dim X$. Donc X est de type.*

Mais la conjecture de Lang n'est même pas connue pour $X = \{x_0^5 + x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = 0\}$ *!*

Lemme 1.6. *Soit* $\phi\colon X \to Y$ *un morphisme entre deux variétés projectives lisses. Alors*

(i) Si ϕ *est dominant, alors la conjecture de Lang pour* Y *implique pour* X*.*

(ii) (Chevalley–Weil) Si ϕ *est fini et non-ramifié, alors* $\phi^{-1}(Y(K)) \subseteq X(K')$ *pour une extension finie* K' *de* K*. Par conséquent, l'énoncé suivant est vrai. Si* $X(K')$ *n'est pas dense dans* X *pour toute extension finie* K' *de* K*, alors il en est de même pour* $Y(K')$*.*

Remarquons que pour (i), il suffit que ϕ soit une application rationnelle.

La proposition suivante nous dit que la dimension de Kodaira est un invariant birationnel. De même, les morphismes birationnels ne changent pas certaines propriétés de l'ensemble des K-points (par exemple s'il est dense ou vide).

Proposition 1.7. *Soient* X *et* Y *variétés projectives lisses qui sont birationnelles entre eux. Alors*

(i) $X(K)$ *est dense si et seulement si* $Y(K)$ *est dense ;*

(ii) $X(K) \neq \emptyset \Longleftrightarrow Y(K) \neq \emptyset$ *;*

(iii) $h^0(X, \omega_X^{\otimes m}) = h^0(Y, \omega_Y^{\otimes m})$ *pour tout* m *;*

(iv) $\kappa(X) = \kappa(Y)$*.*

Démonstration. (i) est clair par la définition du morphisme birationnel. (ii) est vrai lorsque X et Y sont des courbes parce que toute application rationnelle entre deux courbes lisses s'étend en un morphisme. Le cas général peut être vérifié en prennant, pour tout $x \in X(K)$, des courbes passant par x. (iv) est une conséquence directe de (iii). Pour (iii), il suffit d'utiliser le lemme suivant. □

Lemme 1.8. *Soient* X *et* Y *variétés projectives lisses et* $f\colon X \dashrightarrow Y$ *une application rationnelle. Si* η *est une forme différentielle régulière sur* Y*, alors* $f^*\eta$ *est aussi régulière sur* X*.*

Il est évident que $\kappa(X) = \dim X$ lorsque ω_X est ample. L'énoncé réciproque est forcément faux car $\kappa(X)$ est un invariant birationnel mais le tiré-en-arrière d'un fibré en droites ample n'est en général plus ample. Ici la notion correcte est « gros ».

Lemme 1.9. *Soit* X *une variété algébrique projective lisse, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $\kappa(X) = \dim X$ *;*

(ii) ω_X *est gros ;*

(iii) $\omega_X = L \otimes \mathcal{O}(D)$*, où* L *est un fibré en droites ample et* D *est un diviseur effectif.*

Exemple 1.10. *Soient* X *une surface,* $p \in X$ *et* $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ *l'éclatement de* X *en* p *dont le diviseur exceptionnel est* E*. Alors* $\omega_{\widetilde{X}} = \pi^*\omega_X \otimes \mathcal{O}(E)$*. En particulier* $\omega_{\widetilde{X}}$ *n'est pas forcément ample même si* ω_X *est ample. Pourtant,* $\omega_{\widetilde{X}}$ *est gros si* ω_X *l'est car* E *est effectif.*

1.3. **Lieu exceptionnel.** Il y a une version forte de la conjecture de Lang.

Conjecture 1.11 (Conjecture de Lang forte)**.** *Si X est de type général, alors il existe un sous-ensemble fermé propre* sp_X *de X tel que pour toute extension finie K' de K, l'on ait* $(X \setminus \mathrm{sp}_X)(K')$ *est fini.*

Exemple 1.12. *Posons $X = C \times \mathbb{P}^1$ pour une courbe C de genre au moins 2. Alors X n'est pas de type général et X ne satisfait pas la propriété dans la conclusion de la conjecture de Lang forte. Pourtant, $X(K)$ n'est pas Zariski dense dans X.*

Voici quelques candidats pour sp_X.

Le candidat maximal : $$\mathrm{sp}_1 = \overline{\bigcup_{Y \subseteq X,\ \kappa(Y) < \dim Y} Y}^{\mathrm{Zar}}$$

Le candidat minimal : $$\mathrm{sp}_2 = \overline{\bigcup_{\substack{Y = \mathbb{P}^1 \text{ ou variété abélienne} \\ \phi\colon Y \to X \text{ non-constant}}} \phi(Y)}^{\mathrm{Zar}}$$

Green, Griffiths et Lang : $$\mathrm{sp}_3 = \overline{\bigcup_{\phi\colon \mathbb{C} \to X(\mathbb{C}) \text{ holomorphe non-constante}} \phi(\mathbb{C})}^{\mathrm{Zar}}$$

Remarquons que si la conjecture de Lang forte est vraie pour toute X, alors par récurrence nous pouvons démontrer que $\mathrm{sp}_X = \mathrm{sp}_1$ dans cette conjecture.

Étant une inspiration de ces constructions du lieu exceptionnel, *la conjecture de Lang géométrique* a été proposée comme suit.

Conjecture 1.13 (Conjecture de Lang géométrique)**.** *Posons* sp_X *en tant que* sp_1, sp_2 *ou* sp_3. *Si $\kappa(X) = \dim X$, alors $\mathrm{sp}_X \neq X$.*

Remarque 1.14 (La fibration d'Iitaka)**.** *Soit X une variété algébrique projective lisse. Alors il existe une fibration $X_\infty \to Y_\infty$ avec $\dim Y_\infty = \kappa(X)$ telle que pour tout n assez grand, l'on ait un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "\sim"] \arrow[d, dashed, "\phi_{|L^{\otimes n}|}"'] & X_\infty \arrow[d] \\ \phi_{|L^{\otimes n}|}(X) \arrow[r, dashed, "\sim"] & Y_\infty, \end{tikzcd}$$

où les applications horizontales sont birationnelles. La dimension de Kodaira d'une fibre générique de cette fibration $X_\infty \to Y_\infty$ est 0.

Un exemple : si X est une surface avec $\kappa(X) = 1$, la fibration d'Iitaka est une fibration $X \to C$ en courbes de genre 1.

1.4. **Caporaso–Harris–Mazur.**

Théorème 1.15 (Caporaso–Harris–Mazur)**.** *Si la conjecture de Lang est vraie, alors pour tout $g \geq 2$ et pour K un corps de nombres, il existe $N = N(g, K)$ tel que pour toute courbe C de genre g définie sur K, l'on ait $\#C(K) \leq N$.*

De plus si la conjecture de Lang forte est vraie, alors il existe $N = N(g)$ tel que pour tout corps de nombres K, l'on ait $\#C(K) \leq N$ pour toutes sauf un nombre fini de courbes C/K de genre g.

De plus, la borne $N = N(g, K)$ a été améliorée à $N = N(g, [K : \mathbb{Q}])$ dans la première partie du théorème par Pacelli.

La démonstration se divise en deux parties.

(1) Il existe $X \to B$ une fibration en courbes de genre g telle que pour toute courbe C/K de genre g, l'on ait $C \simeq X_b$ (défini sur K) pour un $b \in B(K)$.

Cette fibration peut être construite dans la façon suivante. Pour C une courbe de genre $g \geq 2$, il y a une immersion $\phi = \phi_{|\omega_C^{\otimes 3}|} : C \hookrightarrow \mathbb{P}^M$ où M est un entier fixe. Posons d le degré de $\phi(C)$ dans $\mathbb{P}^M$; il ne dépend pas de C. Le polynôme de Hilbert de $\phi(C)$ ne dépend que de g et d, et donc est fixe pour toute C. Nous appelons ce polynôme $h(t)$.

Prenons le schéma de Hilbert (d'après Grothendieck) $\mathcal{H}ilb_h$, qui paramétrise les sous-schémas X de $\mathbb{P}^M$ dont le polynôme de Hilbert est $h(t)$. Alors $\mathcal{H}ilb_h$ est un schéma algébrique avec une famille universelle.

Un autre candidat est la variété de Chow, qui paramétrise les sous-variétés X de $\mathbb{P}^M$ de dimension 1 et de degré d. Ceci est aussi une variété algébrique. Malheureusement l'existence de la famille universelle est plus compliquée.

(2) [CHM] Soit $X \to B$ une fibration en courbes de genre g. Posons $X_B^n = X \times_B \cdots \times_B X$ (n-fois). Alors pour n assez grand, il existe une application rationnelle dominante $\phi \colon X_B^n \dashrightarrow Y$ avec Y de type général. Nous pouvons alors conclure en appliquant la conjecture de Lang à Y.

1.5. **Sous-variétés d'une variété abélienne.** Dans cette sous-section, nous fixons une variété abélienne A et une sous-variété irréductible $X \subseteq A$. La conjecture de Lang (originale, forte, géométrique) est connue dans ce cas par Faltings (1991).

Lemme 1.16. *X est de type général si et seulement si $G_X := \{a \in A(\mathbb{C}) : a + X(\mathbb{C}) \subseteq X(\mathbb{C})\}$ est fini.*

Lemme 1.17. *L'on a*

$$\mathrm{sp}_X = \bigcup_{b\in A(\mathbb{C}),\ B \text{ sous-variété abélienne},\ \dim B>0,\ b+B\subseteq X(\mathbb{C})} (b+B).$$

De plus, si G_X est fini ($\Leftrightarrow X$ est de type général par Lemme 1.16), alors il existe des points $b_1, \ldots, b_r \in A(\mathbb{C})$ et des sous-variétés abéliennes de dimension strictement positive $B_1, \ldots, B_r$ telles que

$$\mathrm{sp}_X = \bigcup_{i=1}^{r} (b_i + B_i).$$

Théorème 1.18 (Faltings 1991)**.** *La conjecture de Lang (originale, forte, géométrique) est vraie pour toute $X \subseteq A$ de type général. Plus précisément, l'on a*

$$X(K) = \bigcup_{i=1}^{r} (b_i + B_i)(K) \bigcup S$$

où $b_i \in A(\mathbb{C})$, chaque B_i est une sous-variété abélienne avec $\dim B_i > 0$, et S est un ensemble fini.

1.6. **Application aux points de degré borné sur les courbes de grande gonalité.** Soit C une courbe de genre g. Pour tout d, notons

$$C^{(\leq d)}(K) = \{P \in C(\overline{K}) : [K(P) : K] \leq d\}.$$

Nous voulons savoir quand $C^{(\leq d)}(K)$ est fini.

Le d-ème produit symétrique de C, noté comme $\mathrm{Sym}^d(C)$, est lisse (ceci est vrai parce que C est une courbe). Observons que $\mathrm{Sym}^d(C)$ s'identifie à l'ensemble des diviseurs effectifs de degré d sur C. La question de la finitude de $C^{(\leq d)}(K)$ devient alors la question de la finitude de $\mathrm{Sym}^d(C)(K)$. En effet $C^{(\leq d)}(K)$ est fini si et seulement si $\mathrm{Sym}^d(C)(K)$ est fini.

Fixons $P_0 \in C(K)$, et posons $j\colon C \to J = \mathrm{Pic}^0(C)$, $P \mapsto \mathrm{cl}(\mathcal{O}(P - P_0))$, l'application d'Abel–Jacobi via P_0. Nous avons alors un morphisme

$$\phi\colon \mathrm{Sym}^d(C) \to J, \qquad (P_1, \ldots, P_d) \mapsto j(P_1) + \cdots + j(P_d). \tag{1.5}$$

Posons $W_d(C)$ l'image de ϕ. Alors $\dim W_d(C) = \min(d, g)$. Remarquons que le diviseur de theta Θ est W_{g-1}.

Proposition 1.19. *L'ensemble* $\mathrm{Sym}^d(C)(K)$ *(et donc* $C^{(\leq d)}(K)$*) est fini si les deux propriétés suivantes sont satisfaites.*

(i) Il n'existe pas de morphisme $\varphi\colon C \to \mathbb{P}^1$ de degré d.

(ii) W_d ne contient pas de translaté de sous-variétés abéliennes de dimension strictement positive.

Démonstration. L'on peut vérifier que, sous l'identification de $\mathrm{Sym}^d(C)$ à l'ensemble des diviseurs effectifs de degré d, les fibres de ϕ sont précisément les systèmes linéaires des diviseurs sur C. L'on peut aussi vérifier que si $P_1 + \ldots + P_d \sim Q_1 + \ldots + Q_d$ comme diviseurs sur C, alors il existe une fonction méromorphe f sur C telle que $\mathrm{div}(f) = \sum P_i - \sum Q_i$. Donc f peut se voir comme un morphisme $C \to \mathbb{P}^1$ de degré d.

Maintenant si (i) est vraie, alors le morphisme ϕ dans (1.5) est injectif. Donc $\mathrm{Sym}^d(C)(K)$ est fini si $W_d(C)(K)$ est fini.

Il n'est pas difficile de vérifier que $G_{W_d(C)}$ est trivial lorsque $d < g$. Donc par Lemme 1.16 et le théorème de Faltings ci-dessus (la conjecture de Lang pour $W_d(C)$), l'on a $W_d(C)(K) = \bigcup_{i=1}^r (b_i + B_i)(K) \bigcup S$ où S est un ensemble fini. Donc $W_d(C)(K)$ est fini si (ii) est vraie.

Maintenant l'on peut conclure. □

Théorème 1.20 (Frey)**.** *Si W_d contient un translaté d'une sous-variété abélienne de dimension strictement positive, alors il existe $\varphi\colon C \to \mathbb{P}^1$ de degré au plus $2d$.*

Théorème 1.21 (Debarre–Klassen)**.** *Soit C une courbe projective lisse plane de degré d définie sur K. Alors $C^{(\leq d-2)}(K)$ est fini lorsque $d \geq 7$, ou lorsque $d \geq 4$ sans morphisme $C \to E$ de degré au plus d vers une courbe elliptique.*