实变函数简明教程

June 22, 2021

0、前言——如何阅读这份讲义

这是一份关于实变函数的讲义，简洁明了地介绍了初等的实变函数理论. 因为我们学校该课程选用的参考教材为 [1]，所以我主要按照 [1] 的顺序来写.

读者可以先浏览一下这份讲义的大概内容，它应该是实变函数论最重要的部分. 作者为求精简，略去了一些不是很重要的东西. 作者相信这份讲义作为应付考试的参考资料应该是足够的. 但是如果是想从事实分析领域研究的读者，作者本人建议应该仔细翻阅分析方向的入门教材. 本讲义中的一些定义，作者将不再按照书上作冗余的陈述，更多地则是融入了更高的观点. 作者力求写得通俗易懂，但是毕竟是抽象的数学课程，要在极短的篇幅内完全没有门槛地介绍完整的理论是不大可能的. 因此，阅读本讲义需要有基础的数学分析和集合论作为预备知识，了解点集拓扑的话会更有帮助.

在大概浏览内容之后，作者提倡读者先尝试仔细阅读这份讲义，遇到不懂的地方再去翻书，这样节省时间. 笔者保证这份讲义的理论体系是自洽的，读者无需翻阅其他乱七八糟的教辅用书. 本讲义每部分结束的时候会提供少量习题 (绝大部分是 [1] 的作业题)，如果读者有时间，还是应该做一下的.

考虑到本人的分析水平有限，讲义中难免会有纰漏和不当之处，欢迎各位读者给予批评指正.

参考文献

[1] 程其襄，张奠宙，魏国强，胡善文，王漱石. 实变函数与泛函分析基础 (第三版). 高等教育出版社.

[2] W. Rudin. Real and Complex Analysis. McGraw-Hill Education.

[3] 张玉琦. $\mathbb{R}^n$ 空间中的 Lebesgue 不可测集和 Lebesgue 可测的非 Borel 集的几个性质. 内蒙古师大学报.

朱子阳[1]，2018 年 12 月于南京信息工程大学

[1]邮箱 zhuziyang98@163.com

1、集合论

定义 1(集列的上、下极限) 上极限：$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n=\{x|\forall N>0,\exists n\geq N,x\in A_n\}=\bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=N}^{\infty}A_n$；

下极限：$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n=\{x|\exists N>0,\forall n\geq N,x\in A_n\}=\bigcup\limits_{N=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=N}^{\infty}A_n$.

定理 2 集列的极限存在当且仅当其上极限 = 下极限.

定理 3 集合 $A=B$ 当且仅当 $A\subseteq B$ 且 $A\supseteq B$；势 $|A|=|B|$ 当且仅当 $|A|\leq|B|$ 且 $|A|\geq|B|$.

定理 4 设 A、B 集合，则势 $|A|\leq|B|$ 当且仅当存在嵌入 (即单射)$A\rightarrowtail B$，当且仅当存在满射 $B\twoheadrightarrow A$. 因此 $A\sim B$ 当且仅当存在嵌入 $A\rightarrowtail B$ 和嵌入 $B\rightarrowtail A$，当且仅当存在嵌入 $A\rightarrowtail B$ 和满射 $A\twoheadrightarrow B$，当且仅当存在满射 $A\twoheadrightarrow B$ 和满射 $B\twoheadrightarrow A$，当且仅当存在双射 $A\leftrightarrow B$.

定理 5 可数个可数集之并仍然可数，任意不可数集之并仍然不可数.

注意 可数意味着“能数出来”，例如 $\mathbb{Q}$ 可以通过 $1,1/2,1/3,2/3,\cdots$ 的方式计数；不可数意味着“不可以找到后继”，例如 $[0,1]$ 中 0 的后继没有办法确定.

定义 6(基数或势) 直接给个描述：$0<1<2<\cdots<$ 任意有限基数 $<\cdots<\underbrace{\aleph_0<\aleph_1<\cdots}_{\text{无穷势}}$. 关于这方面具体的介绍还是以参考严肃的集合论教材为准.

定义 7 集合 A 的**幂集**为 A 所有子集构成的集合，记为 2^A.

定理 8 $|2^A|>|A|$.

例 设集列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$，对任意 $n\geq 1$，$A_n=\{0,1\}$，则 $|\prod_{n=1}^{\infty}A_n|=\aleph_1$. 注意 n 次直积后集合中有 2^n 个元素.

习题 第 29 页，6，7.

2、点集拓扑

定义 9(度量) 设 X 是集合，若映射 $\rho:X\times X\to\mathbb{R}$，满足：

(正定性)$0\leq\rho(x,y)<\infty$ 恒成立，并且 $\rho(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$；

(三角不等式) 对任意 $z\in X$，$\rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(y,z)$.

则称映射 ρ 是一个**度量**，$\rho(x,y)$ 称为 x、y 之间的**距离**，(X,ρ) 称为是**度量空间**.

注意 由三角不等式中取 $z=x$，可以证得 $\rho(x,y)=\rho(y,x)$(对称性).

例 $\Big(\mathbb{R},\rho:(x,y)\mapsto|x-y|\Big)$ 是一个度量空间.

定义 10(集合距离) 设 A、B 是度量空间 (X,ρ) 的非空子集，则 A、B 的**距离**定义为 $\inf\limits_{a\in A,b\in B}\rho(a,b)$. 非空子集 A 的**直径**定义为 $\sup\limits_{a,b\in A}\rho(a,b)$.

定义 11(聚点、内点、边界) 考虑集合 $E\subseteq\mathbb{R}^n$，设 $x\in E$，则

(聚点) 若 x 的任意 (去心) 邻域内有 E 的无穷多个点，则称 x 为 E 的**聚点**.

(孤立点) 不是聚点的点称为**孤立点** (存在 x 的去心邻域内没有 E 的点，则称 x 为 E 的孤立点).

(内点) 若存在邻域 $x\in U(x)$，使得 $U(x)\subseteq E$，则称 x 为 E 的**内点**.

(外点) 若 x 是 E^c 的内点，则称 x 为 E **外点**.

(边界点) 若 x 的任意邻域内既有属于 E 的点，也有属于 E^c 的点，则称 x 是 E 的**边界点**.

定义 12(开集、闭集) 集合 $E\subseteq\mathbb{R}^n$ 称为**开集**如果 E 中的点都是内点；$F\subseteq\mathbb{R}^n$ 称为**闭集**如果 F 的每个聚点属于 F(对于求极限封闭). 开集的补集一定是闭集，反之亦然.

定义 13(内部、导集、闭包) 考虑集合 $E\subseteq\mathbb{R}^n$，记 E 的**内部**$\operatorname{int}E=\{E$ 的所有内点组成的集合$\}$；E 的**导集**$E'=\{E$ 的所有聚点组成的集合$\}$；E 的**边界**$\partial E=\{E$ 的所有边界点组成的集合$\}$；E 的**闭包**$\bar{E}=$ 包含 E 的所有闭集的交 $=E\cup E'=E\cup\partial E=E'\cup\{E$ 的孤立点$\}=\operatorname{int}E\cup\partial E$.

注意 E 的内部一定是开集，E 的导集、边界、闭包一定是闭集.

定理 14(拓扑) 开集的有限交、任意并仍为开集；闭集的有限并，任意交仍为闭集. 特别地，空集 $\varnothing$、全空间 $\mathbb{R}^n$ 既是开集又是闭集.

注意 称形如 $(a,b)\subseteq\mathbb{R}$(其中 $a<b$) 的开区间为**拓扑基**. 则 $\mathbb{R}$ 中的任意一个非空开集都可以表成至多可数个互不相交的拓扑基的并.

习题 第 51 页，3，7，9.

3、测度论

定义 15(Lebesgue 外测度) 设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$，则称 $\inf\limits_{E\subset\cup I_i}\sum|I_i|$ 为 E 的**外测度** [其中 $I_i(i=1,2,\cdots)$ 为开矩体，可以是空集]，记为 m^*E. 注意，$m^*:2^{\mathbb{R}^n}\to[0,+\infty]$ 是一个函数，满足：(1)$m^*(\varnothing)=0$，(2) 单调性：若 $A\subseteq B$，则 $m^*A\le m^*B$，(3) 次可数可加性：$m^*(\bigcup A_i)\le\sum m^*A_i$.

定义 16(Sigma 代数) 设 X 是一个集合，$\mathfrak{M}$ 是由 X 的子集组成的集合，满足：

(1)$\varnothing$、$X\in\mathfrak{M}$；

(2) 若 $A\in\mathfrak{M}$，则 $A^c\in\mathfrak{M}$；

(3) 若 $A_i\in\mathfrak{M}$，则至多可数并 $\bigcup A_i\in\mathfrak{M}$；

则称 $\mathfrak{M}$ 是一个 **Sigma-代数** (或可测集类)，$(X,\mathfrak{M})$ 称为**可测空间**，$\mathfrak{M}$ 中的元素称为**可测集**，不在 $\mathfrak{M}$ 中的元素称为**不可测集**.

例 取 $X=\{1,2\}$，可以验证 $\{\varnothing,X\}$ 是一个 Sigma-代数. 在这个 Sigma-代数中的 $\varnothing$、X 是可测集，而 $\{1\}$、$\{2\}$ 是不可测集.

定理 17(封闭性) 由 Sigma-代数运算的性质立即可以推出：若 $S_i(i=1,2,\cdots)$ 是可测集，则 S_i^c、$\bigcup S_i$、$\bigcap S_i$、S_1-S_2 均可测.

定义 18(测度) 设 $(X,\mathfrak{M})$ 是可测空间，称函数 $m:\mathfrak{M}\to[0,+\infty]$ 是可测空间 $(X,\mathfrak{M})$ 上的一个**测度**，如果满足：(可数可加性) 若 $\{A_n\}$ 是一列**互不相交**的可测集，则 $m(\bigcup_{n=1}^\infty A_n)=\sum_{n=1}^\infty m(A_n)$. 这个赋予了测度 m 的可测空间称为**测度空间**，记为 $(X,\mathfrak{M},m)$.

定理 19(测度的性质) 设 $(X,\mathfrak{M},m)$ 是测度空间，m 是其上的测度，则

(1)$m(\varnothing)=0$；

(2) 若 $A_1,\cdots,A_n\in\mathfrak{M}$ 互不相交，则 $m(\bigcup_{i=1}^n A_i)=\sum_{i=1}^n m(A_i)$；

(3) 若 A、$B\in\mathfrak{M}$ 且 $A\subseteq B$，则 $m(A)\le m(B)$；

(4) 若 $A_n\in\mathfrak{M}$，且 $A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}m(A_n)=m(\bigcup_{n=1}^\infty A_n)$；

(5) 若 $A_n\in\mathfrak{M}$，且 $A_1\supseteq A_2\supseteq\cdots$，则当 $m(A_1)<+\infty$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}m(A_n)=m(\bigcap_{n=1}^\infty A_n)$.

例 (概率测度) 取定义 18 中 X 为**样本空间**，其中 Sigma-代数 $\mathfrak{M}$ 为**事件域** (其中的可测集称为**可测事件**)，$m:\mathfrak{M}\to[0,1]$ 为概率密度函数 (满足定义 18)，且规定 $m(X)=1$. 则 $(X,\mathfrak{M},m)$ 叫**概率空间**，m 称为**概率**.

定义 20(Borel 代数) 记 $\mathbb{R}^n$ 中的全体开集为 $\tau(\mathbb{R}^n)$，取定义 16 中 $X=\mathbb{R}^n$，$\mathfrak{B}$ 为包含 $\tau(\mathbb{R}^n)$ 的所有的 Sigma-代数的交 (这仍然是 Sigma-代数)，则 $(\mathbb{R}^n,\mathfrak{B})$ 是一个可测空间，称此时的 Sigma-代数 $\mathfrak{B}$ 为 **Borel-代数**，其中的元素称为 **Borel 集**. 它是包含 $\mathbb{R}^n$ 所有开集的最小的 Sigma-代数，因此是唯一的.

例 $\mathbb{Q}\in\mathfrak{B}$，这是因为 $\mathbb{Q}$ 是单点闭集的可数并，其补集又是可数多个开集的交，而开集 $\in\mathfrak{B}$，根据定理 17(封闭性)，$\mathbb{Q}$ 是 Borel 集.

注意 有一个很自然的约定，外测度为 0 的集合一定是可测的. 参考文献 [4] 中给出了一些集合，它们不在 Sigma-代数 $\mathfrak{B}$ 之中，所以在之前 Borel-代数的意义下它们不可测. 但是根据定义 15 我们又可以确定它们的外测度为 0，因而它们实际上是可测的. 因此用 Borel-代数来描述我们需要的可测集类还是嫌小，所以我们要找一个更大、更好的 Sigma- 代数.

定理 21(完备化) 这实际上是个习题，目标是把一些可以确定测度 (例如上述 [4] 中的) 但并不在 Borel-代数 $\mathfrak{B}$ 中的集合加进 Borel-代数去得到一个更大的 Sigma-代数 ([1] 第 75 页第 9 题). 更一般地，对任意 E 是测度空间 $(X,\mathfrak{M},m)$ 的子集，若存在两列可测集 $\{A_n\}$、$\{B_n\}\subseteq\mathfrak{M}$，使得 $A_n\subseteq E\subseteq B_n$，且

$m(B_n - A_n) \to 0 (n \to \infty)$，则 E 可测. 定义 E 的测度等于 $\lim_{n\to\infty} m(A_n)$.

证明思路 令 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 可测，证明 $m(E-A)=0$，因为 A 可测、0 测集可测，故 E 可测 [这里可测性用 Sigma-代数的封闭性 (定理 17) 来判断].■

定义 22(Lebesgue 可测集) [1] 中第 62 页的定义并不重要，而且不直观，现在给出国际上通用的定义. 给定 $\mathbb{R}^n$ 上的 Borel-代数 $\mathfrak{B}$，取定理 21 中 $X=\mathbb{R}^n$，$\mathfrak{M}=\mathfrak{B}$，$m=m^*$ 为外测度，则在定理 21 意义下得到的所有可测集 E 组成的集合构成一个 Sigma-代数 $\mathfrak{L}$(证明略). 称 $\mathfrak{L}$ 中的元素为 **Lebesgue 可测集**，或简称为 **L-可测**的.

注意 根据定理 21 应该有 $\tau(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{L} \subseteq 2^{\mathbb{R}^n}$，因此 Borel 集都是 L-可测的. 在 $2^{\mathbb{R}^n} \setminus \mathfrak{L}$ 中的元素称为 **L-不可测**的.

定义 23(Lebesgue 测度) 书上说若 E 是 L-可测的，则外测度 m^*E 自动地变为测度，记为 mE. 我们换一种说法. 根据定义 18，**Lebesgue 测度**应该是函数 $m : \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$，$E \mapsto m^*E = \inf\limits_{E\subset\cup I_i} \sum |I_i|$，它满足可数可加性. 因此，定理 19 全部适用.

总的来说，$\mathbb{R}^n$ 上的 Borel-代数 $\mathfrak{B}$ 是由 $\mathbb{R}^n$ 上所有开集 (拓扑) 生成的最小 Sigma-代数；Lebesgue 可测集类 $\mathfrak{L}$ 是由 $\mathbb{R}^n$ 上 Borel-代数 $\mathfrak{B}$“完备化”得到的.

注意 0 测集、开区间、闭区间都是 L-可测的.Lebesgue 测度就是我们直观通常意义下的“长度”，例如 $m[1,2]=1$.

定理 24(限制) 设 $(X, \mathfrak{M})$ 是可测空间，给定 $E \in \mathfrak{M}$. 对任意 $A \in \mathfrak{M}$，作集合 $A' = E \cap A$，则所有得到的 A' 构成一个新的 Sigma-代数，记为 $\mathfrak{M}_E$.

证明思路 验证定义.■

习题 第 75 页，10，11.

4、可测函数

定义 25(可测函数) 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 的 L-可测子集，函数 $f : E \to \mathbb{R}$ 称为**可测函数**，如果对任意 $\mathbb{R}$ 中开集 U，$f^{-1}(U)$ 均是 L-可测集 (以后不加声明，提到可测集都理解为是 L-可测集，即 $\mathfrak{L}_E$ 中的元素). 通俗点说，就是 f 将开集拉回成可测集.

注意 $\mathbb{R}$ 上的开集太多了，不好全部验证. 因此我们需要一个稍微简单一点可以拿来判断函数可测性的等价命题：函数 $f : E \to \mathbb{R}$ 可测当且仅当对任意 $a \in \mathbb{R}$，$E[f > a] = \{x | f(x) > a, x \in E\}$ 是可测集.

例 概率分布函数是可测函数.

定义 26(连续性) 函数 $f : E \to \mathbb{R}$ 连续当且仅当任意开集的原像仍然为开集.

命题 27 由定义立即得到，所有连续函数是可测的，因为 $\tau(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathfrak{L}$.

定义 28(示性函数) 设定义域 $E \subseteq \mathbb{R}^n$，可测集 $E' \subseteq E$. 则函数 $\chi_{E'}(x) = \begin{cases} 1, x \in E' \\ 0, x \notin E' \end{cases}$ 称为可测集 E' 的**示性函数**.

定义 29(简单函数) 若函数 φ 的定义域 E 可以分为**有限个互不相交**的可测集 $E_1, \cdots, E_n$ 的并 $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$，且 φ 在每个 E_i 上等于常数 c_i，则称 φ 为**简单函数**. 因此，函数 φ 可表成 $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}(x)$. 换句话说，简单函数是取得有限个值的实值可测函数.

注意 由上述表示立即得到简单函数加简单函数仍然是简单函数.

定理 30(函数可测性) 设 f, g 在 E 上可测，则 $f+g$、fg、$|f|$、$1/f$ 也是可测函数.

证明思路 验证定义.■

定理 31 设 $\{f_n\}$ 是 E 上一列可测函数，则函数 $\inf\limits_{n\geq 1} f_n : E \to \mathbb{R}$ 与 $\sup\limits_{n\geq 1} f_n : E \to \mathbb{R}$ 都在 E 上可测.

注意 这里映射 $\inf\limits_{n\geq 1} f_n$ 的意思是：取定点 $x \in E$，然后取关于 n 的数列 $\{f_n(x)\}$ 的确界 $\inf\limits_{n\geq 1} f_n(x)$. 这其实就是**点态**映射 $\inf\limits_{n\geq 1} f_n : x \mapsto \inf\limits_{n\geq 1} f_n(x)$.

定义 32(点列的上、下极限) 上极限：$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ a_n=\inf\limits_{n\geq1}\Big(\sup\limits_{k\geq n}a_n\Big)$；下极限:$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ a_n=\sup\limits_{n\geq1}\Big(\inf\limits_{k\geq n}a_n\Big)$. 点列的极限存在当且仅当其上极限 = 下极限.

注意 点列的极限不一定存在，但上极限、下极限一定存在 (包括 ∞). 直观上，上极限是当点列趋于无穷时最大的聚点；下极限是当点列趋于无穷时最小的聚点. 例如考虑 $\{(-1)^n\}$，则它的上极限是 1，下极限是 -1. 注意其与集列上、下极限的区别.

定理 33 设 $\{f_n\}$ 是 E 上一列可测函数，则函数 $F(x)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ f_n(x)$，$G(x)=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ f_n(x)$ 在 E 上也可测. 特别当极限 $H(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ 存在时，H 在 E 上可测. 注意，这里 F、G、H 也是点态的.

证明思路 定义 32 和定理 31.■

定理 34(可测函数与简单函数的关系) (1) 若 f 在 E 上非负可测，则存在可测简单函数列 $\{\varphi_k(x)\}$，使得对任意 $x\in E$，$\varphi_k(x)\leq\varphi_{k+1}(x)$ 点态单调递增 $(k=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x)$；

(2) 若 f 在 E 上可测，则存在可测简单函数列 $\{\varphi_k(x)\}$，使得对任意 $x\in E$，有点态收敛 $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x)$. 若 f 还在 E 上有界，则上述收敛是一致的.

证明思路 (1) 用直线 $y=n(n=0,1,\cdots)$ 依次自下而上扫过函数 f 的下方，每抬高一步的同时也要进一步细分定义域 E. (2) 由 (1) 可证.■

定义 35(几乎处处) 设 E 是集合，P 是与 E 中的点有关的命题. 如果存在 E 的子集 M，$mM=0$，使得 P 在 $E\setminus M$ 上恒成立，则称 P 在 E 上**几乎处处**成立，记为 P a.e. 于 E. 也就是说，所有使 P 不成立的点作成的集合测度为 0.

定理 36(Egorov) 设 $mE<\infty$，$\{f_n\}$ 是 E 上一列几乎处处收敛于一个几乎处处有限函数 f 的可测函数，则对任意 $\varepsilon>0$，总存在与 ε 有关的子集 $E(\varepsilon)\subseteq E$，使得在新定义域 $E(\varepsilon)$ 上 $f_n\rightrightarrows f$ 且 $m[E\setminus E(\varepsilon)]<\varepsilon$.

例 取 $E=[0,1]$，可测函数列 $\{x^n\}$. 容易验证极限函数 $f(x)=\begin{cases}0,x\in[0,1)\\1,x=1\end{cases}$. 注意到 $\{x^n\}$ 在 $x=1$ 附近点态收敛但不是一致收敛的 (因为在 1 附近当 n 充分大时 x^n 很陡). 根据 Egorov 定理，任给 $\varepsilon>0$，存在 $E(\varepsilon)=[0,1-\varepsilon]$，在 $[0,1-\varepsilon]$ 上 $\{x^n\}$ 一致收敛于 $f(x)$.

定理 37(Luzin) 设 f 是 E 上几乎处处有限的可测函数，则对任意 $\varepsilon>0$，总存在与 ε 有关的闭子集 $F(\varepsilon)\subseteq E$，使得 f 限制在新定义域 $F(\varepsilon)$ 上连续且 $m[E\setminus F(\varepsilon)]<\varepsilon$.

证明思路 (第一步，证明对简单函数成立) 如果简单函数 f 有间断点，则把间断点处的小开邻域挖掉即可，由此 f 限制在剩下的闭集上连续；(第二步，证明对有界可测函数成立) 先把简单函数项级数 $\{\varphi_n\}$ 各项间断点处的小开邻域取并集 E，容易证明这个 E 的测度可以充分小. 可以证明 $\{\varphi_n\}$ 的每一项在挖掉上述不好的 E 之后的定义域上连续. 注意定理 34(2) 暗含一致收敛，而一致收敛是保持连续的；(第三步，证明对一般可测函数成立) 取辅助函数 $g(x)=\frac{f(x)}{1+|f(x)|}$.■

定义 38(依测度收敛) 设 $\{f_n\}$ 是 $E\subseteq\mathbb{R}^n$ 上的一列 a.e. 有限的可测函数，若有 E 上 a.e. 有限的可测函数 f，满足：对任意 $\sigma>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}mE[|f_n-f|\geq\sigma]=0$，则称 $\{f_n\}$ **依测度收敛**于 f，记为 $f_n\Rightarrow f$.

注意 一般地，依测度收敛 $\not\Leftrightarrow$ 几乎处处收敛，但是我们却有如下结果：

定理 39(Riesz) 设在 E 上 $\{f_n\}$ 依测度收敛于 f，则存在子列 $\{f_{n_i}\}\subseteq\{f_n\}$，使得该子列在 E 上 a.e. 收敛于 f.

定理 40(Lebesgue) 设 (1)$mE<\infty$；(2)$\{f_n\}$ 是 E 上 a.e. 有限的可测函数列；(3)$\{f_n\}$ 在 E 上 a.e. 收敛于 a.e. 有限的函数 f，则 $f_n\Rightarrow f$.

习题 第 94 页，5，11.

5、积分论

本章不再通篇叙述定义、定理 (因为它们几乎都是积分的性质，例如线性性质、单调性、绝对值放缩等，抄写一遍并没什么意义，相信读者理解这些应该没有难度)，以翻阅教材 [1] 为准. 本人仅强调一些比较重要的内容，主要帮助读者理解 Lebesgue 积分.

定义 41(简单函数的 Lebesgue 积分) 依照定义 28、定义 29，称 $\sum_{i=1}^{n} c_i m(E_i)$ 为简单函数 φ 的 **Lebesgue 积分**，记为 $\int_E \varphi(x)dx$. 给定可测子集 $A \subseteq E \in \mathfrak{L}$，可以定义简单函数 φ 在 A 上的 Lebesgue 积分：$\int_A \varphi|_A(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i m(A \cap E_i)$.

例 考虑 $\mathbb{R}$ 上的 Dirichlet 函数 $D(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$. 之前已经说明了 $\mathbb{Q}$ 是 Borel 集，因此可测. 所以 $D(x)$ 是简单函数，根据定义，其 Lebesgue 积分为 $\int_{\mathbb{R}} D(x)dx = 1 \cdot m(\mathbb{Q}) + 0 \cdot m(\mathbb{Q}^c) = 0$.

定理 34 的出现使得定义一般非负可测函数的 Lebesgue 积分成为了可能. 我们的思路是用简单函数来逼近可测函数：

定义 42(非负可测函数的 Lebesgue 积分) 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 是可测集，f 是 E 上的一个非负可测函数，则 f 在 E 上的 **Lebesgue 积分**定义为 $\int_E f(x)dx = \sup\{\int_E \varphi(x)dx | \varphi$ 是 E 上的简单函数，$0 \le \varphi \le f\}$. 若 $\int_E f(x)dx < +\infty$，则称 f 在 E 上 **Lebesgue 可积**.

由定义可得非负可测函数 Lebesgue 不可积当且仅当该函数的 Lebesgue 积分为 $+\infty$. 与 Riemann 积分不同，Lebesgue 积分一般是算不出来的，我们如果想要计算 Lebesgue 积分几乎只能通过转化为 Riemann 积分的方式 (如果可以的话，见定理 44). Lebesgue 积分只是为 Riemann 积分提供理论上的推广，后者可以非常具体地算出，而前者只是建立起一般的抽象理论体系，也在理论上覆盖了前者.

定义 43(一般可测函数的 Lebesgue 积分) 设 $E \subseteq \mathbb{R}$ 是可测集，f 是 E 上的一般可测函数. 则 f 可以表为正部和负部之差：$f = f^+ - f^-$，其中 f^+、f^- 均为非负可测函数. 利用定义 42，可以定义一般可测函数 f 的 **Lebesgue 积分**为 $\int_E f(x)dx = \int_E f^+(x)dx - \int_E f^-(x)dx$. 若 f^+ 和 f^- 在 E 上均 Lebesgue 可积 (定义 42 中的)，则称 f 在 E 上 **Lebesgue 可积**. E 上全体 Lebesgue 可积的函数所构成的集合记为 $L^1(E)$，以后将介绍这是一个**赋范线性空间**.

定理 44(Lebesgue 积分和 Riemann 积分的联系) (1) 设 f 是 $[a,b]$ 上的一个有界函数，则 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积当且仅当 f 在 $[a,b]$ 上 a.e. 连续；

(2) 设 f 是 $[a,b]$ 上的一个有界函数，若 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，则 f 在 $[a,b]$ 上 Lebesgue 可积，且

$$\underbrace{\int_{[a,b]} f(x)dx}_{\text{Lebesgue 积分}} = \underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\text{Riemann 积分}}.$$

6、比较重要的几个定理

Levi 定理 ([1] 104 页定理 3，非负可测函数版本的交换极限)、逐项积分定理 ([1] 106 页定理 5，非负可测函数版本的交换求和)、Lebesgue 控制收敛定理 ([1] 114 页定理 5，交换极限)、[1] 116 页定理 7(交换求和)、Fatou 引理 ([1] 107 页)、积分的绝对连续性 ([1] 113 页)、Fubini 定理 ([1] 130 页)、Vitali 定理 ([1] 139 页)、可微性 ([1] 141 页)、有界变差函数 ([1] 148 页)、不定积分 ([1] 155 页)、分部积分与换元积分 ([1] 162 页) 等. 这部分某些内容大多数高校是不会讲到的，所以我也懒得写了.