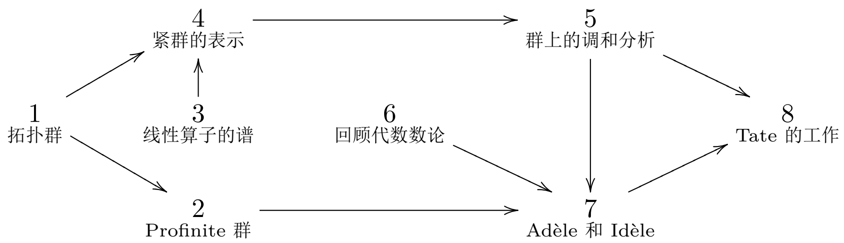
# Tate 的论文——代数数论专题 III

December 30, 2023

## 0、前言

本文非常详细地介绍了 Tate 博士期间工作的来龙去脉，这些工作是数论发展过程中一次里程碑式的飞跃. 可以毫不避讳地说，Tate 的工作直接导致了代数数论、算术几何、调和分析和自守表示理论的交叉和爆发式前进. 基于此，笔者将尽力在本文中展示这些学科在 Tate 博士论文中的体现.

本文含有很多复杂而又无聊的证明，其中有些命题的证明系笔者牛刀小试，换言之可能有错，请读者仔细甄别 (勘误的联系方式见页脚). 当然，本文的重点是第 8 节，之前的内容都是铺垫，理论上是可以跳过一些不要紧的证明的. 为方便阅读，本文的行文框架大致如下，供读者参考：




感谢邱德荣、唐舜、方江学、康天赐、吴兴楠、周潇翔、邹瑞等人对笔者的支持，也感谢首师大数科院 2021 年春季学期《算术几何》课程上的各位听众. 网站 http://www.lmfdb.org/ 上收集了许多数据，这些数据会为本文提供大量的例子.

**参考文献**

[1] D. Ramakrishnan, R.J. Valenza. Fourier Analysis on Number Fields(GTM186). Springer

[2] J. Neukirch. Algebraic Number Theory. Springer.

[3] W. Rudin. Real and Complex Analysis. McGraw-Hill Education.

[4] 熊金城. 点集拓扑讲义. 高等教育出版社.

[5] J.J. Rotman. An Introduction to Homological Algebra. Springer.

[6] B.D. MacCluer. Elementary Functional Analysis(GTM253). Springer.

[7] 朱子阳. 有限群的复表示论概览——表示论专题. https://www.cnblogs.com/zhuziyangcnu.

[8] 刘浩浩. Tate 的论文. 中国科学技术大学学士学位论文.

[9] E. Hewitt, K.A. Ross. Abstract Harmonic Analysis. Springer.

[10] 黎景辉, 冯绪宁. 拓扑群引论. 科学出版社.

[11] G.B. Folland. A Course in Abstract Harmonic Analysis(2ed). CRC Press.

[12] A. Deitmar. Automorphic Forms. Springer.

[13] M. Stroppel. Locally Compact Groups. European Mathematical Society.

[14] 梅加强. 数学分析讲义. 高等教育出版社.

[15] J. Tate. Fourier Analysis in Number Fields and Hecke's Zeta Function. Thesis, Princeton University, 1950.

[16] S. Lang. Algebraic Number Theory(GTM110). Springer.

[17] A. Weil. Basic Number Theory(3ed). Springer-Verlag.

[18] W. Stein. A Brief Introduction to Classical and Adelic Algebraic Number Theory.

[19] S.S. Gelbart. Automorphic Forms on Adele Groups. Princeton University Press, University of Tokyo Press.

[20] M. Escardó, R. Heckmann. Topologies on Spaces of Continuous Functions. Topology Proc, 26(2):545-564, 2001.

[21] E. Colebunders, G. Richter. An Elementary Approach to Exponential Spaces. Applied Categorical Structures, 9:303-310, 2001.

[22] 冯克勤. 代数曲线的算术理论. 中国科学技术大学出版社.

[23] C.J. Bushnell, G. Henniart. The Local Langlands Conjecture for GL(2). Springer.

[24] L. Corwin. Some Remarks on Self-dual Locally Compact Abelian Groups. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 148, 1970.

[25] R. Hartshorne. Algebraic Geometry(GTM52). Springer.

[26] 李文威. 模形式初步. 高等教育出版社. https://www.wwli.asia/index.php/zh/books-item-zh.

[27] L.W. Tu. Differential Geometry-Connections, Curvature, and Characteristic Classes(GTM275). Springer.

[28] J.P. Serre. A Course in Arithmetic(GTM7). Springer.

[29] P. Guillot. A Gentle Course in Local Class Field Theory-Local Number Fields, Brauer Groups, Galois Cohomology. Cambridge University Press.

[30] J.S. Milne. Modular Functions and Modular Forms-Elliptic Modular Curves. http://www.jmilne.org/math/.

[31] O. Forster. Lectures on Riemann Surfaces(GTM81). Springer.

[32] J.M. Lee. Introduction to Smooth Manifolds(GTM218). Springer.

[33] G. Tenenbaum. Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory. Cambridge University Press.

[34] M.E. Kazaryan, S.K. Lando, V.V. Prasolov. Algebraic Curves-Towards Moduli Spaces. Springer.

[35] M.S. Viazovska. The Sphere Packing Problem in Dimension 8. Ann. Math. arXiv:1603.04246.

[36] 田一超. Notes on Tate's Thesis. http://www.mcm.ac.cn/faculty/tianyichao.

[37] N. Oliver. On Klein's Icosahedral Solution of the Quintic. arXiv:1308.0955v1.

[38] P. Sarnak. Some Applications of Modular Forms. Cambridge University Press.

[39] D. Zagier. The 1-2-3 of Modular Forms. Springer.

[40] F. Diamond, J. Shurman. A First Course in Modular Forms(GTM228). Springer.

[41] M.B. Nathanson. Elementary Methods in Number Theory(GTM195). Springer.

朱子阳[1]，2020 年 10 月于首都师范大学

[1]邮箱 zhuziyang@cnu.edu.cn

# 1、拓扑群

本节主要介绍拓扑群及其上的初等分析，以 Haar 测度的存在唯一性定理为最终目标给出一些必要的内容. 关于拓扑群的大部分命题由于太过基础因而仅陈述结论，略去的证明可在 [1]Chapter1 中找到.

**定义 1.1(拓扑群)** 群 $G$ 称为是一个**拓扑群**，如果 $G$ 上配备了一个拓扑结构使得映射 $G\times G$(积拓扑) $\to G,(g,h)\mapsto gh$ 和 $G\to G, g\mapsto g^{-1}$ 连续. 可以验证，所有拓扑群关于连续同态作成一个范畴，记作 LCG.

环 $R$ 称为是一个**拓扑环**，如果 $R$ 上配备了一个拓扑结构使得映射 $R\times R$(积拓扑) $\to R,(r,s)\mapsto r+s$、$R\to R, r\mapsto -r$ 和 $R\times R$(积拓扑) $\to R,(r,s)\mapsto rs$ 均连续. 也就是说，拓扑环关于加法是一个拓扑 Abel 群，关于乘法是一个拓扑半群. 特别地，如果 $R$ 还是一个域，并且要求 $R^\times\to R^\times, r\mapsto r^{-1}$ 也连续，则此时的 $R$ 是一个**拓扑域**.

**注意 1.2** 群上有我们熟知的**平移变换**，即对任意 $g\in G$，$g$ 诱导左 (右) 平移 $G\to G, x\mapsto gx (x\mapsto xg)$. 在拓扑群的范畴中，显然这些平移变换均是同胚. 我们称这种性质为**平移不变**性. 同样地，由于有同胚映射 $G\to G, x\mapsto x^{-1}$，故 $U\subseteq G$ 是开集当且仅当 $U^{-1}:=\{x : x^{-1}\in U\}$ 是开集.

**例** $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},+)$ 配备了拓扑 $\big\{\varnothing, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \{[0],[2]\}, \{[1],[3]\}\big\}$ 之后是一个非平凡且非连通的拓扑群；$(\mathbb{R},+)$ 在配备了欧氏拓扑之后也是一个拓扑群.

**定义 1.2(拓扑预备知识)** **邻域**：设 $X$ 是拓扑空间，$x\in U\subseteq X$. 如果 $x\in U^\circ$，则称 $U$ 是 $x$ 的**邻域**.

**对称**：设 $G$ 是群. 集合 $S\subseteq G$ 称为是**对称**的，如果 $S=S^{-1}$.

**分离性**：拓扑空间 $X$ 称为是 $T_1$ 的，如果任意 $x\neq y\in X$，存在 $x$ 的开邻域 $U$ 使得 $y\notin U$；拓扑空间 $X$ 称为是 $T_2$(或 **Hausdorff**) 的，如果任意 $x\neq y\in X$，分别存在 $x,y$ 的开邻域 $U,V$ 使得 $U\cap V=\varnothing$.

**局部紧**：拓扑空间 $X$ 称为是**局部紧**的，如果任意 $X$ 中的点均有一个紧的邻域.

**命题 1.3** 设 $G$ 是拓扑群，则有：

(1) 单位元 $\mathfrak{i}$ 的任意邻域 $U$ 总包含了一个 $\mathfrak{i}$ 的邻域 $V$，满足 $VV\subseteq U$.

(2) 单位元 $\mathfrak{i}$ 的任意邻域 $U$ 总包含了一个 $\mathfrak{i}$ 的对称邻域 $V$.

(3) 若 $H$ 是 $G$ 的子群，则其闭包 $\overline{H}$ 也是 $G$ 的子群.

(4)$G$ 的任意开子群也是闭的.

(5) 若 $K_1,K_2$ 是 $G$ 的紧子集，则 $K_1K_2$ 亦紧.

受经典分析学的启发，下面考虑拓扑群 $G$ 上的函数及其 (一致) 连续性.

**定义 1.4(一致连续性)** 设 $f: G\to\mathbb{R}$(也可以是 $\mathbb{C}$) 是一个函数，定义 $f$ 关于 $h\in G$ 的**左 (右) 平移**为 $L_hf(g):=f(h^{-1}g)\big($或 $R_hf(g):=f(gh)\big)$. 称 $f$ 是**左一致连续**的，如果对任意 $\epsilon>0$，总存在 $\mathfrak{i}$ 的邻域 $V_\epsilon$，使得对任意 $h\in V_\epsilon$，均有 $\sup_{g\in G}|L_hf-f|<\epsilon$. 同样也可以定义右一致连续.

**命题 1.5** 设 $G$ 是拓扑群，记 $\mathcal{C}_c(G)$ 为 $G$ 上所有的紧支撑连续函数作成的集合. 若 $f\in\mathcal{C}_c(G)$，则 $f$ 是左、右一致连续的.

**例** 考虑拓扑群 $(\mathbb{R},+)$，定义 1.4 中的左、右一致连续性可以解释为：对任意 $\epsilon>0$，总存在邻域 $(-\delta,\delta)$，使得对任意 $h\in(-\delta,\delta)$，均有 $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x\pm h)-f(x)|<\epsilon$ 成立. 此即经典微积分中一致连续的定义. 这就是说，命题 1.5 可以看作是 $\mathbb{R}$ 上的微积分中“闭区间上的连续函数一定一致连续”这个事实的推广.

**命题 1.6(分离性)** 设 $G$ 是拓扑群，则下述断言等价：(1)$G$ 是 $T_1$ 的；(2)$G$ 是 $T_2$ 的；(3)$\{\mathfrak{i}\}$ 在 $G$ 中是闭集；(4)$G$ 中的任何单点集均是闭集.

**定义 1.7(商拓扑)** 设 $H$ 是拓扑群 $G$ 的子群，$\rho: G\to G/H, g\mapsto gH$，则陪集空间 $G/H$ 上带有一个自然的商拓扑结构：$U$ 在 $G/H$ 中开当且仅当 $\rho^{-1}(U)$ 在 $G$ 中开，即 $G/H$ 上的拓扑是使 $\rho$ 连续的最细的拓扑. 特别地，如果 $H$ 是 $G$ 的正规子群，则 $G/H$ 还带有商群结构. 可以验证此时 $G/H$ 是一个拓扑群. 关于商拓扑群的性质我们有如下描述：

**命题 1.8** 设 $G$ 是拓扑群，$H$ 是 $G$ 的子群，则有：

(1) 商映射 $\rho: G\to G/H, g\mapsto gH$ 是开映射；

(2)$G/H$ 是 $T_1$ 的当且仅当 $H$ 是闭集；

(3)$G/H$ 是离散的当且仅当 $H$ 是开集. 此外，若 $G$ 紧，则 $H$ 开当且仅当 $G/H$ 是配备了离散拓扑的有限

集；

(4)$\overline{\{\mathrm{i}\}}$ 是 $G$ 的正规子群，且商群 $G/\overline{\{\mathrm{i}\}}$ 在商拓扑下是 $T_2$ 的.

**命题 1.9** 设 $G$ 是 $T_2$ 拓扑群，$F\subseteq G$ 是闭集，$K\subseteq G$ 是紧集，则 $FK$ 是闭集. 因此，如果 $H$ 是 $G$ 的紧子群，则 $\rho: G\to G/H$ 是闭映射.

**定义 1.10(局部紧群)** 局部紧的 $T_2$ 拓扑群称为**局部紧群**. 根据命题 1.8(2)，局部紧群中的所有单点集均是闭集.

**命题 1.11** 设 $G$ 是 $T_2$ 拓扑群，若 $G$ 的某个子群 $H$ 在子空间拓扑下局部紧，则 $H$ 是闭的. 特别，$G$ 的每个离散子群均是闭的.

接下来介绍局部紧群上的测度.

**定义 1.12(测度)** 设 $X$ 是局部紧 $T_2$ 空间，其配备了 Borel 代数 $\mathcal{B}_X$ 之后成为一个可测空间. 该可测空间上的一个 **Borel 测度**是指一个满足可数可加性的映射 $\mu: \mathcal{B}_X\to\mathbb{R}_{\geq 0}\sqcup\{\infty\}$. 类似地，一个**复 Borel 测度**就是指一个满足可数可加性的映射 $\mu:\mathcal{B}_X\to\mathbb{C}\sqcup\{\infty\}$.

设 $E\in\mathcal{B}_X$，$\mu$ 是 $X$ 上的某个 Borel 测度. 称 $\mu$ 在 $E$ 处**外正则**，如果 $\mu(E)=\inf\{\mu(U):\text{开集}U\supseteq E\}$；称 $\mu$ 在 $E$ 处**内正则**，如果 $\mu(E)=\sup\{\mu(K):\text{紧集}K\subseteq E\}$. 所谓 $X$ 上的一个 **Radon 测度**，是指一个在任意开集处内正则、在任意 Borel 集处外正则，且在紧集处取值有限的 Borel 测度. 特别的，称一个复 Borel 测度 $\mu$ 是**正则**的，如果**全变差测度**$|\mu|(E):=\sup\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|\mu(E_i)| : E=\bigsqcup E_i, E_i\in\mathcal{B}_X\right\}$ 是 Radon 测度 (见 [3]Chapter6).

下面将上述定义搬运到群上. 设 $G$ 是局部紧群，$\mu$ 是 $G$ 上的一个 Borel 测度. 称 $\mu$ 具有**左 (右) 平移不变性**，如果对任意 $E\in\mathcal{B}_G$，$\mu(sE)=\mu(E)\big(\text{或 }\mu(Es)=\mu(E)\big)$对任意 $s\in G$ 均成立.

**定义 1.13(Haar 测度)** 设 $G$ 是局部紧拓扑群，$G$ 上的一个**左 (右)Haar 测度**是一个满足左 (右) 平移不变性的非平凡的 Radon 测度. 所谓**双不变 Haar 测度**就是指同时满足左、右平移不变性的非平凡的 Radon 测度.

**命题 1.14** 设 $G$ 是一个局部紧群，其上有一个非平凡的 Radon 测度 $\mu$. 若记 $\mathcal{C}_c^+(G):=\{f\in\mathcal{C}_c(G):\forall s\in G, f(s)\geq 0, \text{且}\sup_{x\in G}|f(x)|>0\}$，则：

(1)$\mu$ 是左 Haar 测度当且仅当 $\widetilde{\mu}\big(\widetilde{\mu}(E):=\mu(E^{-1})\big)$ 是右 Haar 测度；

(2)$\mu$ 是左 Haar 测度当且仅当对任意 $f\in\mathcal{C}_c^+(G)$，对任意 $s\in G$，$\int_G L_s f d\mu=\int_G f d\mu$；

(3) 若 $\mu$ 是 $G$ 上的左 Haar 测度，则 $\mu$ 在 $G$ 的任何非空开集处取值为正，且对任意 $f\in\mathcal{C}_c^+(G)$，均有 $\int_G f d\mu>0$；

(4) 若 $\mu$ 是 $G$ 上的左 Haar 测度，则 $\mu(G)<\infty$ 当且仅当 $G$ 紧.

当然，之前说了这么多，最重要的还是如下定理，这是 Fourier 分析中的一个大定理：

**定理 1.15(Haar 测度的存在唯一性)** 设 $G$ 是局部紧群，则 $G$ 上带有一个左 (因此右)Haar 测度，并且这个测度在不区分数乘的意义下唯一.

**证明 I、存在性. Step1：** 引入 Haar 覆盖数. 设 $f,\varphi\in\mathcal{C}_c^+(G)$，又设 $U=\{s\in G:\varphi(s)>\sup_{x\in G}|\varphi(x)|/2\}$ 是 $G$ 中的开集. 由于 $\mathrm{supp}(f)$ 紧，所以 $\{gU\}_{g\in G}$ 中可取出有限多个：$s_1U,\cdots,s_nU$ 覆盖 $\mathrm{supp}(f)$. 此时有不等式 $f\leq 2\sum_{i=1}^n\frac{\sup_{x\in G}|f(x)|}{\sup_{x\in G}|\varphi(x)|}L_{s_i}\varphi$，这意味着 $f$ 一定可被 $\{L_{s_i}\varphi\}$ 的某个线性组合控制. 我们当然关心最优的控制，这就有了 Haar 覆盖数的概念：$f$ 关于 $\varphi$ 的 **Haar 覆盖数**是指 $(f:\varphi):=\inf\left\{\sum_{i=1}^n c_i : c_i>0;\text{存在}s_i\in G,\text{使}f\leq\sum_{i=1}^n c_iL_{s_i}\varphi\right\}$. 由于 $\sup_{x\in G}|f(x)|>0$，Haar 覆盖数 $(f:\varphi)$ 一定大于 0.

**Step2：** Haar 覆盖数的相关性质：(1) 任意 $s\in G$，$(f:\varphi)=(L_sf:\varphi)$；(2)$(f_1+f_2:\varphi)\leq(f_1:\varphi)+(f_2:\varphi)$；(3) 任意 $c>0$，$(cf:\varphi)=c(f:\varphi)$；(4)$f_1\leq f_2$ 蕴含 $(f_1:\varphi)\leq(f_2:\varphi)$；(5)$(f:\varphi)\geq\frac{\sup_{x\in G}|f(x)|}{\sup_{x\in G}|\varphi(x)|}$；(6)$(f_1:\varphi)\leq(f_1:f_2)(f_2:\varphi)$.

**Step3：** 任意取定 $f_0\in\mathcal{C}_c^+(G)$，定义 $I_\varphi(f):=\frac{(f:\varphi)}{(f_0:\varphi)}$. 我们要证明，$I_\varphi$ 近乎是线性的：任给 $f_1,f_2\in\mathcal{C}_c^+(G)$，对于任意 $\epsilon>0$，存在 i 的邻域 $V$ 使得对任意 $\varphi$，只要 $\mathrm{supp}(\varphi)\subseteq V$，就有 $I_\varphi(f_1)+I_\varphi(f_2)\leq I_\varphi(f_1+f_2)+\epsilon$. **证：** 由 Urysohn 引理，存在 $g\in\mathcal{C}_c^+(G)$，使得 $g$ 在 $\mathrm{supp}(f_1+f_2)$ 处取值为 1. 任意 $\delta>0$，定义连续函数 $h=f_1+f_2+\delta g$. 显然 $h_i:=f_i/h\in\mathcal{C}_c^+(G)$ 在 $\mathrm{supp}(f_i)$ 之外为 $0(i=1,2)$，且 $h_1+h_2\leq 1$. 由命题 1.5，$h_i$ 一致连续，故存在 i 的邻域 $U_\delta$，使得当 $t^{-1}s\in U_\delta$ 时，$|h_i(s)-h_i(t)|<\delta(i=1,2)$. 因此当 $\mathrm{supp}(\varphi)\subseteq U_\delta$ 时，若设 $h\leq\sum_j c_jL_{s_j}\varphi$，我们有 $f_i(s)=h(s)h_i(s)\leq\sum_j c_j\varphi(s_j^{-1}s)h_i(s)\leq\sum_j c_j\varphi(s_j^{-1}s)[h_i(s_j)+\delta]\Rightarrow(f_i:\varphi)\leq\sum_j c_j[h_i(s_j)+\delta]$，其中 $s_j^{-1}s\in\mathrm{supp}(\varphi)\subseteq U_\delta, i=1,2$. 将两式相加，由 $h_1+h_2\leq 1$ 知 $(f_1:\varphi)+(f_2:\varphi)\leq(1+2\delta)\sum_j c_j$，这里 $\sum_j c_j$ 可

任意接近 $(h:\varphi)$. 再结合 Step2 中的结论知 $I_\varphi(f_1)+I_\varphi(f_2)\le(1+2\delta)I_\varphi(h)\le I_\varphi(f_1+f_2)+2\delta[I_\varphi(f_1+f_2)+\delta I_\varphi(g)]$. 显然 $(f_0:f)^{-1}\le I_\varphi(f)\le(f:f_0)$，即 $I_\varphi(f)$ 能被 $f,f_0$ 控制，因此上述中括号内的式子可被依赖于 $f_1,f_2$ 的数 $M$ 控制. 取 $\delta=\epsilon/2M$，即得 $I_\varphi(f_1)+I_\varphi(f_2)\le I_\varphi(f_1+f_2)+\epsilon$.

**Step4**：由 Step3 中定义的 $I_\varphi$ 的某个合理极限构造 $I$：存在定义域为 $\mathcal{C}_c^+(G)$ 的函数 $I$，使得任给 $\mathfrak{i}$ 的开邻域 $U_j$ 以及给定任意有限多个 $\{f_i\}\subseteq\mathcal{C}_c^+(G)$，任意 $\epsilon>0$，总存在满足 $\mathrm{supp}(\varphi)\subseteq U_j$ 的 $\varphi\in\mathcal{C}_c^+(G)$，对任意 $i$ 均有 $|I(f_i)-I_\varphi(f_i)|<\epsilon$. **证**：设 $X:=\prod_{f\in\mathcal{C}_c^+(G)}[(f_0:f)^{-1},(f:f_0)]$，记 $K_U:=\bigcup_{\mathrm{supp}(\varphi)\subseteq U}\left[\prod_{f\in\mathcal{C}_c^+(G)}I_\varphi(f)\right]$. 验证 $\bigcap_{j=1}^n\overline{K_{U_j}}\supseteq\overline{K_{\bigcap_{j=1}^n U_j}}\neq\varnothing$ 知闭集族 $\left\{\overline{K_U}\right\}$ 满足有限交性质 (见 [4] 定义 7.1.3)，又由 $X$ 紧知 $\bigcap K_U\neq\varnothing$(见 [4] 定理 7.1.2)，因此必包含了某个 $I\in X$(不必唯一)，$I$ 可看成映射 $\mathcal{C}_c^+(G)\to\mathbb{R}_{>0}$. 此外，$I$ 在 $X$ 中的任意开邻域与每个 $K_U$ 交非空，此即 Step4 中的结论.

**Step5**：$I$ 是线性的. **证**：由 Step4，对 $f\in\mathcal{C}_c^+(G),c>0$，可以使 $I(cf),cI(f)$ 分别充分接近 $I_\varphi(cf),cI_\varphi(f)$，由 Step2(3)，即 $I(cf)=cI(f)$. 又由 Step3，可选取 $\mathfrak{i}$ 的邻域 $U_\epsilon$ 使得当 $\mathrm{supp}(\varphi)\subseteq U_\epsilon$ 时，$I_\varphi(f_1)+I_\varphi(f_2)\le I_\varphi(f_1+f_2)+\epsilon/4$. 又由 Step4，总能做到 $I(f_1),I(f_2),I(f_1+f_2)$ 分别充分接近 $I_\varphi(f_1),I_\varphi(f_2),I_\varphi(f_1+f_2)$. 因此由 $\epsilon$ 的任意性，有 $I(f_1)+I(f_2)=I(f_1+f_2)$.

**Step6**：Step4 中的线性映射 $I$ 诱导 $\mathcal{C}_c(G)$ 上的正线性泛函 $\widetilde{I}$，由 Step2(1) 知该泛函是平移不变的. 应用 Riesz 表示定理 ([3] 定理 2.14) 即可断言左 Haar 测度存在. **证**：对于 $F\in\mathcal{C}_c(G)$，定义 $\widetilde{I}(F):=I(F^+)-I(F^-)$.

**II、唯一性**. 设 $\mu,\nu$ 是 $G$ 上的两个左 Haar 测度. 我们的目标是证 $\frac{\int_G f(x)d\mu}{\int_G f(x)d\nu}$ 的值不依赖于 $f\in\mathcal{C}_c^+(G)$.

**Step7**：设 $g\in\mathcal{C}_c^+(G)$. 取 $\mathfrak{i}\in G$ 的一个紧邻域 $K$，由命题 1.3(2)，$K$ 包含了一个 $\mathfrak{i}$ 的开对称邻域 $U_0$. 显然 $\overline{U_0}\subseteq K$ 是紧且对称的. 依照命题 1.3(5)，定义紧集 $K_g:=\mathrm{supp}(g)\cdot\overline{U_0}\cup\overline{U_0}\cdot\mathrm{supp}(g)$. 记 $\gamma_t g:=R_t g-L_{t^{-1}}g$. 对任意 $t\in\overline{U_0}$，显然有 $\mathrm{supp}(\gamma_t g)\subseteq K_g$. 注意到 $\gamma_{\mathfrak{i}}g=0$，因此对任意 $\epsilon>0$，由命题 1.5，存在 $\mathfrak{i}$ 的开邻域 $U_\epsilon\subseteq\overline{U_0}$，使得对任意 $t\in U_\epsilon$，$|\gamma_t g(s)|<\epsilon$ 对任意 $s\in G$ 成立. 此时 $U_\epsilon$ 仍然可以包含一个对称开邻域 $U'_\epsilon\ni\mathfrak{i}$，使其闭包 $\overline{U'_\epsilon}\subsetneq U_\epsilon$ 也是紧且对称的. 由 Urysohn 引理，存在连续函数 $\widetilde{h}:G\to\mathbb{R}$ 在 $\overline{U'_\epsilon}$ 取 1，在 $U_\epsilon^c$ 取 0. 定义 $h:G\to\mathbb{R},h(s):=\widetilde{h}(s)+\widetilde{h}(s^{-1})\in\mathcal{C}_c^+(G)$，它显然满足 $h(s)=h(s^{-1})$ 并且 $\mathrm{supp}(h)\subseteq\overline{U'_\epsilon}\subseteq\overline{U_0}$.

**Step8**：任给 $f\in\mathcal{C}_c^+(G)$. 对于 Step7 中的 $g,h\in\mathcal{C}_c^+(G)$，由 Haar 测度的定义，有 $\int_G f(s)d\mu\int_G h(t)d\nu=\iint_{G^2}f(ts)h(t)d\mu_s d\nu_t$；另一方面，由 Step7 中函数 $h$ 的性质知 $\int_G h(s)d\mu\int_G f(t)d\nu=\iint_{G^2}h(t)f(st)d\mu_s d\nu_t$，因此 $\left|\iint_{G^2}h(t)[f(st)-f(ts)]d\mu_s d\nu_t\right|\le\epsilon\mu(K_f)\int_G hd\nu$. 两边同除 $\int_G hd\nu\int_G fd\nu>0$ 得 $\left|\frac{\int_G hd\mu}{\int_G hd\nu}-\frac{\int_G fd\mu}{\int_G fd\nu}\right|\le\frac{\epsilon\mu(K_f)}{\int_G fd\nu}$，同理 $\left|\frac{\int_G hd\mu}{\int_G hd\nu}-\frac{\int_G gd\mu}{\int_G gd\nu}\right|\le\frac{\epsilon\mu(K_g)}{\int_G gd\nu}$. 这等价于是说 $\frac{\int_G fd\mu}{\int_G fd\nu}$ 的值趋于某个给定的 $\frac{\int_G gd\mu}{\int_G gd\nu}$，从而不依赖于 $f$.■

**例** $(\mathbb{R},+)$ 上的双不变 Haar 测度在不区分数乘的意义下即通常的 Lebesgue 测度 (限制到 $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ 上)，满足命题 1.14(1),(2),(3).

**注意 1.16** 定理 1.15 的证明本质上非构造性证明. 实际上任给一个局部紧群，并没有好的办法可以直接显式地写出其上的某个 Haar 测度. 换言之，定理 1.15 长篇大论的证明其实很鸡肋.

为求完整，作为本节的结束我们陈述一下之后会用到多次的 Fubini-Tonelli 定理 (以 2 维为例) 及其注意事项. 该定理描述了乘积空间上实分析的行为.

**定理 1.17(Fubini-Tonelli，[3] 定理 8.8)** 设 $(X_1,\mathfrak{M}_1,\mu_1),(X_2,\mathfrak{M}_2,\mu_2)$ 是 $\sigma$-有限的测度空间(测度空间 $(X,\mathfrak{M},\mu)$ 称为是**$\sigma$-有限的**，如果 $X$ 可以被至多可数个测度有限的可测集覆盖住). 记 $X_1\times X_2$ 上由集合 $\{A_1\times A_2:A_i\in\mathfrak{M}_i,i=1,2\}$ 生成的 $\sigma$-代数为 $\mathfrak{M}_1\otimes\mathfrak{M}_2$. 则：

(1)**乘积测度的存在唯一性**：可测空间 $(X_1\times X_2,\mathfrak{M}_1\otimes\mathfrak{M}_2)$ 上存在唯一的测度 $\mu_1\times\mu_2$(称为**乘积测度**)，使得对任意 $A_i\in\mathfrak{M}_i,i=1,2$，$(\mu_1\times\mu_2)(A_1\times A_2)=\mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$.

(2)**重积分和累次积分的关系**：若 $f$ 是测度空间 $(X_1\times X_2,\mathfrak{M}_1\otimes\mathfrak{M}_2,\mu_1\times\mu_2)$ 上的非负可测函数，则函数 $x\mapsto\int_{X_2}f(x,t)d\mu_2(t)$ 在 $X_1$ 上可测；$y\mapsto\int_{X_1}f(t,y)d\mu_1(t)$ 在 $X_2$ 上可测. 并且还有

$$\int_{X_1\times X_2}fd(\mu_1\times\mu_2)=\int_{X_1}\left(\int_{X_2}fd\mu_2\right)d\mu_1=\int_{X_2}\left(\int_{X_1}fd\mu_1\right)d\mu_2.$$

**注意 1.18** 定义乘积测度时是需要“$\sigma$-有限”这个条件的 (但定义乘积 $\sigma$-代数时不需要)，不然连使用 Fubini-Tonelli 定理的机会都不一定会有. 遗憾的是，不是所有的局部紧群配上它的 Haar 测度作为测度空间都是 $\sigma$-有限的. 例如考虑测度空间 $\big((\mathbb{R},+),\text{离散拓扑},\mathcal{B},\text{计数测度}\big)$，显然这里的 $\mathbb{R}$ 不可能被至多可数个测度有限的可测集盖住. 不幸中的万幸是，我们碰到的函数大都支撑集很小 (譬如在某个 $\sigma$-紧集外消没. 拓扑空间 $X$ 中的子集 $E$ 称为是**$\sigma$- 紧**的，如果 $E$ 是可数多个紧集的并. 此时再注意到 Haar 测度在紧集处取值有限即可)，大

部分情况下是可以使用 Fubini-Tonelli 定理的 (具体见 [11]Chapter2.2). 至于大基数可测拓扑空间的乘积会出现病态现象 (乘积 $\sigma$-代数与积拓扑生成的 $\sigma$-代数不一致)，我们有如下命题：

**命题 1.19(Nedoma 病态)** 设 $(X,\mathfrak{M})$ 是可测空间，$|X|>2^{\aleph_0}$，那么集合 $\Delta:=\{(x,x):x\in X\}\subseteq X\times X$ 不会落在 $\sigma$- 代数 $\mathfrak{M}\otimes\mathfrak{M}$ 之中. 特别地，如果 $X$ 是 $T_2$ 空间，那么 $\Delta\notin\mathfrak{M}\otimes\mathfrak{M}$ 是积拓扑中的一个闭集.

## 2、Profinite 群

作为拓扑群的例子，本节介绍 Profinite 群，为之后给出 Adele 和 Idele 的定义作铺垫. 所谓 Profinite 群，就是指 Projective limits of finite groups. 为了引入 Profinite 群，我们首先要介绍反向极限 (inverse limit).

**定义 2.1(反向极限)** 设 $I$ 是**定向集**(即 $(I,\leq)$ 中的 $\leq$ 满足自反性和传递性，且 $I$ 的任何有限子集均有一个上界)，$(G_{i\in I},\varphi_{ij})$ 是集范畴 $\mathsf{Sets}$中关于 $I$ 的一个**反向系统** (见 [5]Chapter5.2). 定义该反向系统的**反向极限**为 $\varprojlim G_i:=\left\{(g_i)\in\prod_i G_i : i\leq j\Rightarrow\varphi_{ij}(g_j)=g_i\right\}$. 实际上，反向极限是由如下泛性质给出的：

$$
\begin{tikzcd}
\varprojlim G_i \arrow[d] \arrow[drr] & & \forall G \arrow[ll, dashed, "\exists 1"'] \arrow[d] \arrow[dll] & \in \mathrm{obj}(\mathsf{Sets}) \\
G_i & & G_j \arrow[ll, "i\leq j"', "\varphi_{ij}"] &
\end{tikzcd}
$$

不难发现如果这里的 $G_i$ 均非空，那么 $\varprojlim G_i$ 一定不是空集 (因为没有箭头指向空集，所以上图中的虚箭头不会存在). 正是因为有泛性质的存在，我们可以十分轻松地将反向极限的定义推广到任何范畴上，例如群范畴、拓扑空间范畴等. 在群范畴上任何反向极限的单位元均形如 $(\cdots,\mathsf{i},\mathsf{i},\cdots)$；而在拓扑空间范畴上某个反向系统 $(X_i,f_{ij})$ 的反向极限上的拓扑被定义为 $(\prod_i X_i,积拓扑)$ 的子空间拓扑 $\varprojlim X_i\hookrightarrow\prod X_i$. 由上述描述，容易知道由拓扑群构成的反向系统的反向极限仍是一个拓扑群.

**例** 容易发现有典范投射 $p_j:\varprojlim G_i\to G_j$，它取出 $(g_i)\in\varprojlim G_i\subseteq\prod G_i$ 中的第 $j$ 个分量 $g_j$. 这个投射不一定是满的：设有群的反向系统 $(G_{i\geq 1},\varphi_{ij})$，其中 $G_1=\mathbb{Z},G_i=\{\mathsf{i}\}(\forall i\geq 2),\varphi_{ij}=0$. 容易计算 $\varprojlim G_i=\{\mathsf{i}\}$，此时 $p_1$ 不是满射.

以下列出一个之后我们会常常用到的事实：

**命题 2.2** 设 $I$ 定向集，$(G_i,\varphi_{ij})$ 是有限集构成的反向系统，则任意 $i\in I$，$p_i(\varprojlim G_i)=\bigcap_{i\leq j}\varphi_{ij}(G_j)$.(直接验证两者互相包含即可)

**定义 2.3(Profinite 群)** 考虑由有限群构成的反向系统，每个有限群配备了离散拓扑之后变成一个拓扑群的反向系统，指定其反向极限上的拓扑为积拓扑的子空间拓扑，俗称 **Profinite 拓扑**. 此时反向极限也是一个拓扑群. 如果一个拓扑群同构于某个由有限群 (配备离散拓扑) 构成的反向系统的反向极限 (配备 Profinite 拓扑)，则称该拓扑群为一个 **Profinite 群**.

下述命题列出了一些关于 Profinite 群的基本性质.

**命题 2.4** 设 $G$ 是 Profinite 群，由反向系统 $(G_i,\varphi_{ij})$ 给出，那么：(1)$G$ 在 Profinite 拓扑下是 $T_2$ 的；(2)$G$ 是 $\prod G_i$ 在积拓扑下的闭集；(3)$G$ 紧 (因此是局部紧群).

**证明** (1) 注意到 $T_2$ 空间的乘积空间、子空间也是 $T_2$ 空间即可；(2) 容易发现 $G^c=\bigcup_i\bigcup_{j\geq i}p_j^{-1}(G_j)$，而 $p_j^{-1}(G_j)=\left\{(g_k)\in\prod G_k:\varphi_{ij}(g_j)=g_i\right\}$ 显然是开集；(3) 由 Tychonoff 定理知 $\prod G_i$ 紧，依此由 (2) 知 $G$ 紧.■

**例** (1)$\Big(\big(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},离散拓扑,下同\big)_{n\geq 1},\varphi_{mn}:\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},[k]_n\mapsto[k]_m(m|n)\Big)$ 是一个拓扑环的反向系统，其反向极限记作 $\varprojlim\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}:=\widehat{\mathbb{Z}}$，这仍是一个拓扑环. 类似地，$\big((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times_{n\geq 1},\varphi_{mn}同上\big)$ 是一个拓扑群的反向系统，其反向极限记作 $\varprojlim(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times:=\widehat{\mathbb{Z}}^\times$. 这是一个 Profinite 群，且它就是 $\widehat{\mathbb{Z}}$ 中所有乘法单位作成的群.

(2) 设 $p$ 素数，则 $\big((\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})_{m\geq 1},\varphi_{mn}同上\big)$ 是一个拓扑环的反向系统，其反向极限记作 $\varprojlim\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}:=\mathbb{Z}_p$，这是一个拓扑环，称为 **$p$- 进整数环**. 类似地，$\big((\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^\times_{m\geq 1},\varphi_{mn}同上\big)$ 是一个拓扑群的反向系统，其反向极限记作 $\varprojlim(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^\times:=\mathbb{Z}_p^\times$. 这是 Profinite 群，且它就是 $\mathbb{Z}_p$ 中所有乘法单位作成的群，称为 **$p$-进单位群**.

此外，由**中国剩余定理**(设 $R$ 是交换幺环，理想 $I_1,\cdots,I_n$ 两两互素，则 $R/(\bigcap_{i=1}^n I_i)\cong\prod_{i=1}^n(R/I_i)$) 知若 $N=p_1^{t_1}\cdots p_n^{t_n}$，则 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\cong\prod_i\mathbb{Z}/p_i^{t_i}\mathbb{Z}$. 故 $\widehat{\mathbb{Z}}=\varprojlim_N\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\cong\varprojlim(\prod_i\mathbb{Z}/p_i^{t_i}\mathbb{Z})\cong\prod_{p_i}\varprojlim_{t_i}\mathbb{Z}/p_i^{t_i}\mathbb{Z}\cong\prod_p\mathbb{Z}_p$.

**定义 2.5(完全不连通)** 记拓扑群 $G$ 中 $\mathsf{i}$ 所在的连通分支为 $G^{\odot}$. 一个拓扑空间 $X$ 称为**完全不连通**的，如

果对任意 $x \in X$，$\{x\}$ 均是 $x$ 的连通分支. 显然，拓扑群 $G$ 完全不连通当且仅当 $G^{\odot} = \{\mathfrak{i}\}$.

**命题 2.6** $G^{\odot} \lhd G$. 因此 $G/G^{\odot}$ 是完全不连通的.

**证明** 设 $x \in G^{\odot}$，由于平移变换是同胚，故 $x^{-1}G^{\odot}$ 连通且 $\mathfrak{i} \in x^{-1}G^{\odot}$. 因此 $x^{-1}G^{\odot} \subseteq G^{\odot}$，所以 $x^{-1}y \in G^{\odot}$. 正规性验证定义即可. 至于后半部分，若 $a \notin G^{\odot}$，则 $a$ 与 $\mathfrak{i}$ 不连通，因此 $aG^{\odot} \notin (G/G^{\odot})^{\odot}$.■

**命题 2.7** 设 $G$ 是拓扑群，则 $G$ 是 Profinite 群当且仅当 $G$ 紧且完全不连通.

**证明** 必要性. 由命题 2.4(3)，仅需证 $G$ 完全不连通，即 $G^{\odot} = \{\mathfrak{i}\}$. 任取 $G$ 的开子群 $U$，$U \cap G^{\odot}$ 自然是子空间 $G^{\odot}$ 中的非空开集. 考虑另一开集 $V := \bigcup_{x \in G^{\odot} \setminus U} x(U \cap G^{\odot}) \subseteq G^{\odot}$，显然 $U \cap V = \varnothing$，故 $G^{\odot} = (U \cap G^{\odot}) \sqcup V$. 由于 $G^{\odot}$ 连通，因此只能有 $V = \varnothing$ 而 $U \cap G^{\odot} = G^{\odot}$，这意味着 $G^{\odot} \subseteq U$. 根据 $U$ 的任意性，$G^{\odot} \subseteq \bigcap_{U\text{是}G\text{的开子群}} U$. 任取 $(\mathfrak{i}) \neq (y_i) \in G := \varprojlim G_i$，一定存在某个 $i_0$ 使 $y_{i_0} \neq \mathfrak{i}$. 考虑开集 $U_0 := p_{i_0}^{-1}(\mathfrak{i})$，它是同态 $p_{i_0}$ 的核，因此是 $G$ 的开子群. 但是 $(y_i) \notin U_0$，这蕴含 $(y_i) \notin G^{\odot}$，故 $G^{\odot} = \{\mathfrak{i}\}$.

充分性. 分如下几步证明.**Step1**：令 $\mathcal{N}$ 为 $G$ 的所有开正规子群作成的集合，规定 $M \leq N \Leftrightarrow N \subseteq M$ 之后诱导有限离散拓扑群 (命题 1.8.3) 的反向系统 $\big((G/N)_{N \in \mathcal{N}}, \varphi_{MN} : G/N \twoheadrightarrow G/M, xN \mapsto xM\big)$. 由泛性质知存在连续同态 $\alpha : G \to \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} G/N := G'$ 使得 $p_N \circ \alpha = \alpha_N : G \twoheadrightarrow G/N, x \mapsto xN$，下证该同态 $\alpha$ 还是满的. **证**：先证明 $G'$ 的任何开集均与 $\mathrm{Im}(\alpha)$ 有交. 注意到 $G'$ 中的任何开集均形如 $\bigcup\big(\bigcap^{<\infty} p_N^{-1}(S_N)\big)$，其中 $S_N \subsetneq G/N$ 是开集 ($G/N$ 离散). 而开集 $U := \bigcap^{<\infty} p_N^{-1}(S_N)$ 中的元素形如 $(x_N)_{N \in \mathcal{N}}$，其中至多只有有限多个 $x_N \in S_N \subseteq G/N$，不妨设对应的 $N$ 为 $N_1, \cdots, N_r$. 令 $M = \bigcap_{j=1}^r N_i$，我们有 $p_M((x_N)) = x_M \in G/M$，而 $x_M$ 确定了这些 $x_{N_j \leq M}$. 由于 $\alpha_M$ 满，存在 $t \in G$ 使得 $\alpha_M(t) = p_M \circ \alpha(t) = x_M$. 当然对任意 $j = 1, \cdots, r$，$\alpha_{N_j}(t) = x_{N_j}$. 因此若 $(x_N) \in U$，则 $\alpha(t) \in U$，即 $U \cap \mathrm{Im}(\alpha) \neq \varnothing$(即 $\mathrm{Im}(\alpha)$ 在 $G'$ 中稠密). 此时，由于 $G$ 紧且 $G'$ 是 $T_2$ 的，$\mathrm{Im}(\alpha)$ 是 $G'$ 中的闭集 (紧 $T_2$ 空间中紧 $\Leftrightarrow$ 闭). 依据上面证明的稠密性，自然有 $\mathrm{Im}(\alpha) = G'$.

**Step2**：设 $X$ 是紧 $T_2$ 空间. 任意 $p \in X$，记 $\mathcal{U}_p := \{K : K\text{是}p\text{的紧开邻域}\} \neq \varnothing$. 定义 $Y := \bigcap_{K \in \mathcal{U}_p} K \subseteq X$，则 $Y$ 连通. **证**：设 $Y = Y_1 \sqcup Y_2$ 为两个闭集的并，下证它们必有一个是空集. 由于 $X$ 是紧 $T_2$ 空间，存在无交的开集 $U_1 \supseteq Y_1, U_2 \supseteq Y_2$. 记闭集 $Z = X \setminus (U_1 \cup U_2)$，这还是一个紧集. 由 $Y \subseteq U_1 \cup U_2$ 知 $Z \subseteq Y^c$. 此时开覆盖 $Z \subseteq \bigcup_{K \in \mathcal{U}_p} K^c$ 有子覆盖：$Z \subseteq \bigcup_{j=1}^r K_j^c = \big(\bigcap_{j=1}^r K_j\big)^c := W^c$ 使得 $Z \cap W = \varnothing$. 易见 $W$ 是 $p$ 的紧开邻域，故 $W \in \mathcal{U}_p$. 注意到 $W = (W \cap U_1) \sqcup (W \cap U_2)$，这里 $W \cap U_i$ 均是 $X$ 的紧开子集，且 $p$ 只能属于其一 (不妨 $p \in W \cap U_1$)，因此 $W \cap U_1 \in \mathcal{U}_p$ 且 $Y_2 \subseteq Y \subseteq W \cap U_1$. 又因为 $Y_2 \cap U_1 = \varnothing$，这蕴含 $Y_2 = \varnothing$，故 $Y$ 连通.

**Step3**：设 $G$ 紧且完全不连通，则 $\mathfrak{i}$ 的任何开邻域 $U$ 均包含了一个开正规子群. **证**：易见 $G$ 是 $T_2$ 的 (因为任意 $\{x, y\}$ 在子空间拓扑下不连通). 取 Step2 中 $p = \mathfrak{i}$，有 $Y = \bigcap_{K \in \mathcal{U}_{\mathfrak{i}}} K$ 连通. 但 $G$ 完全不连通，故 $Y = \{\mathfrak{i}\}$. 对任何开邻域 $U \ni \mathfrak{i}$，$G \setminus U$ 闭且紧，因此存在 $K_1, \cdots, K_r \in \mathcal{U}_{\mathfrak{i}}$ 使 $G \setminus U \subseteq \bigcup_{j=1}^r K_j^c = \big(\bigcap_{j=1}^r K_j\big)^c := W^c$. 显然 $W \subseteq U$ 且 $W \in \mathcal{U}_{\mathfrak{i}}$. 考虑由群乘法自然限制得到的连续映射 $\varphi : W \times W \to G$. 显然对任意 $w \in W$，存在开邻域 $w \in U_w$ 以及对称开邻域 $\mathfrak{i} \in V_w$(命题 1.3.2) 使 $U_w \times V_w \subseteq \varphi^{-1}(W)$. 由于 $W$ 紧，开覆盖 $W \subseteq \bigcup_{w \in W} U_w$ 存在有限子覆盖 $W \subseteq \bigcup_{j=1}^r U_j$. 不妨记与 $U_j$ 对应的 $V_w$ 为 $V_j$，定义 $\mathfrak{i}$ 的开邻域 $V := \bigcap_{j=1}^r V_j \subseteq W$，显然 $WV \subseteq W$，并且归纳可得 $WV^n \subseteq W (n \geq 0)$. 特别地，$V^n \subseteq W (n \geq 0)$. 根据 $V$ 及 $V_j$ 的对称性，定义开子群 $O := \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n \subseteq W$. 由于商集 $G/O$ 配备的是紧且离散的拓扑 (命题 1.8.3)，故 $G/O$ 只能是有限集，即 $[G : O] < \infty$，这意味着 $O$ 在 $G$ 中只能有有限多个共轭类 $x_j O x_j^{-1} (j = 1, \cdots, s)$. 定义 $N := \bigcap_{j=1}^s x_j O x_j^{-1}$，易证它是 $G$ 的开正规子群，并且 $N \subseteq O \subseteq W \subseteq U$.

**Step4**：根据 Step1，由于从紧空间打到 $T_2$ 空间的连续双射还是同胚，故只要验证 Step1 中的 $\ker(\alpha) = \{\mathfrak{i}\}$ 即可. **证**：显然 $\ker(\alpha) = \bigcap_{N \in \mathcal{N}} N$，由 Step3，$\ker(\alpha)$ 在 $\mathfrak{i}$ 的任何一个开邻域当中. 又因为 $G$ 是 $T_2$ 的，故只能有 $\ker(\alpha) \subseteq \{\mathfrak{i}\}$.■

**推论 2.8** 设 $G$ 是 Profinite 群，$H$ 是 $G$ 的子群，则下述说法等价：(1)$H$ 闭 (紧)、(2)$H$ 是 Profinite 群、(3)$H$ 是一族开子群的交.

**证明** 注意到 $G$ 是 $T_2$ 的，因此容易验证 (1) $\Leftrightarrow$ (2). 由命题 1.3(4) 立得 (3) $\Rightarrow$ (1)，故仅剩 (1) $\Rightarrow$ (3). 令 $\mathcal{N}$ 如命题 2.7 的证明 Step1 中所示. 设 $N \in \mathcal{N}$，由 $N$ 正规知 $NH = \bigcup_{h \in H} Nh$ 是 $G$ 的开子群，所以有 $[G : NH] < [G : N] < \infty$. 显然 $H \subseteq \bigcap_{N \in \mathcal{N}} NH$，问题是“$\supseteq$”. 设 $x$ 落在所有 $NH$ 中，$U$ 是 $x$ 的任给邻域，则 $Ux^{-1}$ 是 $\mathfrak{i}$ 的邻域. 利用命题 2.7 的 Step3，存在 $N_0 \in \mathcal{N}$ 使 $N_0 \subseteq Ux^{-1}$. 此时 $x \in N_0H \cap N_0x$，故存在某个 $h \in H$ 使陪集 $N_0x = N_0h$，这蕴含 $h \in N_0x \subseteq U$. 由于 $U$ 是任意的，故 $x$ 的任何邻域与 $H$ 有交，即 $x \in \overline{H}$. 根据 (1)，$H$ 是闭的，因此 $x \in H$.■

## 3、线性算子的谱

本节还是介绍预备知识，主要引入一些泛函分析中常用的概念. 我们的目标是证明谱定理 (定理 3.26)，并给出一些有趣的应用.

**定义 3.1** 设 $A, B$ 是 Banach 空间，一个线性映射 $T : A \to B$ 称为是**有界算子**，如果存在实数 $c$ 使 $\|Ta\| \le c\|a\|$ 对任意 $a \in A$ 成立 (我们知道 $T$ 是有界算子当且仅当 $T$ 是连续算子). 记 $\mathrm{Hom}(A, B)$ 为所有从 $A$ 到 $B$ 的有界算子作成的集合(特别地，$\mathrm{Hom}(A, A) := \mathrm{End}(A)$)，对任意 $T \in \mathrm{Hom}(A, B)$，使上面不等式成立的最小的 $c$ 称为算子 $T$ 的**范数**，记作 $\|T\|$. 由泛函分析的常识，$\mathrm{Hom}(A, B)$ 在该范数下作成一个 Banach 空间.

一个 **Banach 代数**是指一个兼容 $\mathbb{C}$-Banach 空间结构的 $\mathbb{C}$- 代数，并且对任意 $a, b$ 均有 $\|ab\| \le \|a\|\|b\|$. 我们规定在本节中如无特别声明，所涉及的 Banach 代数均是**酉**的 (即它有乘法幺元). 例如，对于 Banach 空间 $A$ 而言，$\mathrm{End}(A)$ 就是一个 Banach 代数.

**命题 3.2(规范化)** Banach 代数 $(A, \|\cdot\|)$ 上总存在一个新的与 $\|\cdot\|$ 等价的范数 $\|\cdot\|'$，使得对于乘法幺元 $1_A$ 而言，$\|1_A\|' = 1$. 因此对于一个 Banach 代数 $A$ 我们总可以规定 $\|1_A\| = 1$.

**证明** 定义 $\|a\|' := \sup_{b\in A} \frac{\|ab\|}{\|b\|} = \|T_a\|$，其中 $T_a : A \to A, x \mapsto ax$ 是有界算子. 由于有界算子满足不等式 $\|T_1T_2\| \le \|T_1\|\|T_2\|$，故 $A$ 在新范数下仍是 Banach 代数. 验证不等式 $\frac{1}{\|1_A\|}\|a\| \le \|a\|' \le \|a\|$ 知新旧范数等价.■

**引理 3.3** 设 $A$ 是 Banach 代数，$a \in A$ 且 $\|a\| < 1$. 此时 $1_A - a$ 可逆：$(1_A - a)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} a^j$(收敛). 若以 $A^\times$ 记 $A$ 中所有乘法单位作成的群，那么 $A^\times$ 是 $A$ 的开子集，并且映射 $A^\times \to A^\times, a \mapsto a^{-1}$ 是同胚.

**证明** 设 $a \in A^\times$. 取 $b \in A$ 满足 $\|a-b\| < \|a^{-1}\|^{-1}$，则 $\|a^{-1}(a-b)\| < 1$，因此 $a(1_A - a^{-1}(a-b)) = b \in A^\times$. 这意味着 $A^\times$ 是开集.■

接下来我们要“推广”线性代数中特征值的概念.

**定义 3.4(谱)** 设 $A$ 是 Banach 代数，$a \in A$. 元素 $a$ 的**谱**是指集合 $\mathrm{spec}(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \cdot 1_A - a \notin A^\times\}$(可以将 $\mathrm{spec}(a)$ 看成是特征值的某种“推广”，但是要注意，$\mathrm{spec}(a)$ 中的元素并不一定都是通常意义下的特征值，这是因为不可逆的元素或算子并不一定总会杀掉某个非零元，从而给定 $\lambda \in \mathrm{spec}(a)$ 不一定会存在属于 $\lambda$ 的“特征向量”. 例如将无穷维空间的坐标后移一位这个不可逆线性操作就不会将某个非零元变成零. 此现象导致寻找真正特征值的过程将比经典线性代数中的操作更加繁琐，例如命题 3.29 的证明会显得较为复杂). 定理 3.7 断言 $\mathrm{spec}(a)$ 不会是空集. 为此我们还可以定义元素 $a$ 的**谱半径**为实数 $r(a) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \mathrm{spec}(a)\}$. 此外，元素 $a$ 的**预解集**定义为 $\mathrm{spec}(a)$ 在 $\mathbb{C}$ 中的补集. 所以，$\lambda$ 落在 $a$ 的预解集当中意味着 $(\lambda \cdot 1_A - a)^{-1}$ 存在.

**命题 3.5** 设 $A$ 是 Banach 代数，$f(x) \in \mathbb{C}[x]$. 任取 $a \in A$，如果 $\lambda \in \mathrm{spec}(a)$，那么 $f(\lambda) \in \mathrm{spec}(f(a))$.(这在线性代数中就相当于：若 $\lambda$ 是矩阵 $A$ 的特征值，根据 Jordan 标准型立知 $f(\lambda)$ 是 $f(A)$ 的特征值. 事实上这个结论可以推广为：如果 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上全纯，则 $\lambda \in \mathrm{spec}(a)$ 可以推出 $f(\lambda) \in \mathrm{spec}(f(a))$. 此外，我们还有更精确的**谱映射定理** ([6] 定理 5.52)：设 $A$ 是 Banach 代数，$a \in A$，$f$ 为某个包含了 $\mathrm{spec}(a)$ 的邻域上的全纯函数，则 $\mathrm{spec}(f(a)) = f(\mathrm{spec}(a))$.)

**证明** 仅证最简单的情况. 设 $f(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j x^j$，那么 $f(\lambda)\cdot 1_A - f(a) = \sum_{j=1}^{n} f_j(\lambda^j \cdot 1_A - a^j) = (\lambda \cdot 1_A - a)b$ 可逆蕴含 $\lambda \cdot 1_A - a$ 可逆，这与 $\lambda \in \mathrm{spec}(a)$ 矛盾.■

**引理 3.6** 设 $A$ 是 Banach 代数，$a \in A$，则 $r(a) \le \inf_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

**证明** 由引理 3.3，$\|\lambda^{-1}a\| < 1$(即 $\|a\| < |\lambda|$) 意味着 $\lambda \cdot 1_A - a$ 可逆 ($\lambda \neq 0$)，故 $\mathrm{spec}(a) \subseteq D_{\|a\|} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \le \|a\|\}$. 根据命题 3.5 知 $\lambda \in \mathrm{spec}(a)$ 蕴含 $\lambda^n \in \mathrm{spec}(a^n) \subseteq D_{\|a^n\|}$，因此 $|\lambda|^n \le \|a^n\|$.■

现在可以给出下述定理，它完全回答了如何计算谱半径的问题.

**定理 3.7** 设 $A$ 是 Banach 代数，$a \in A$，则 $\mathrm{spec}(a) \subseteq \mathbb{C}$ 是非空紧集，并且 $\|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ 收敛于 $r(a)$.

**证明** **Step1**：$\mathrm{spec}(a)$ 紧. **证**：考虑连续映射 $f : \mathbb{C} \to A, \lambda \mapsto (\lambda \cdot 1_A - a)$，开集 $A^\times \subseteq A$ 的原像 $\mathrm{spec}(a)^c$ 仍是开集，故 $\mathrm{spec}(a)$ 是闭的，并且有界 (引理 3.6)，因此紧.

**Step2**：$\mathrm{spec}(a)$ 非空. **证**：任取 $\varphi \in A^* := \mathrm{Hom}(A, \mathbb{C})$. 定义亚纯函数 $f_\varphi : \mathrm{spec}(a)^c \to \mathbb{C}, \lambda \mapsto \varphi\big((\lambda \cdot 1_A -$

$a)^{-1}\big)$，则当 $x\to 0$ 时，由引理 3.3，在每个 $\lambda$ 处有局部 Laurent 展开 (以 $\lambda$ 为中心)

$$f_\varphi(\lambda-x)=\varphi\bigg(\Big((\lambda\cdot 1_A-a)\big(1_A-x(\lambda\cdot 1_A-a)^{-1}\big)\Big)^{-1}\bigg)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi\big((\lambda\cdot 1_A-a)^{-n-1}\big)x^n,$$

这意味着 $f_\varphi$ 在 $\lambda$ 附近全纯. 同理，若 $|\lambda|>\|a\|$，有 $f_\varphi(\lambda)=\varphi\big(\lambda^{-1}(1_A-a\lambda^{-1})^{-1}\big)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi(a^n)\lambda^{-n-1}$(以 0 为中心)，这意味着 $|f_\varphi(\lambda)|\le\sum_{n=0}^{\infty}\|\varphi\|\cdot\|a\|^n\cdot|\lambda|^{-n-1}=\frac{\|\varphi\|}{|\lambda|-\|a\|}$. 此时若假设 $\mathrm{spec}(a)=\varnothing$，则对任意 $\varphi$，$f_\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是一个全纯函数，而且由上面的估计它在 $\mathbb{C}$ 上有界并在无穷远处趋于 0，根据 Liouville 定理 $f_\varphi\equiv 0$，即 $\varphi\big((\lambda\cdot 1_A-a)^{-1}\big)\equiv 0$. 由于这里 $\varphi\in A^*$ 是任意的，根据 Hahn-Banach 定理$\big($任意 $0\neq x_0\in A$，总存在 $\varphi\in A^*$ 使 $\|\varphi\|=1$ 且 $\varphi(x_0)=\|x_0\|\big)$，$(\lambda\cdot 1_A-a)^{-1}=0$，矛盾.

**Step3**：引理 3.6 已证得 $r(a)\le\liminf\limits_{n\to\infty}\|a^n\|^{\frac{1}{n}}$，剩下只需证：对任意 $\epsilon>0$，$\limsup\limits_{n\to\infty}\|a^n\|^{\frac{1}{n}}\le r(a)+\epsilon$. **证：** 当 $|\lambda|>r(a)$ 时，由于 $(\lambda\cdot 1_A-a)^{-1}$ 存在且关于 $\lambda$ 连续，若取逆时针围道 $C_\epsilon:=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|=r(a)+\epsilon\}$，则 $M_\epsilon:=\max\limits_{\lambda\in C_\epsilon}\|(\lambda\cdot 1_A-a)^{-1}\|<\infty$. 由 Step2，有展开式 $f_\varphi(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi(a^n)\lambda^{-n-1}$. 根据 Laurent 定理，$\varphi(a^n)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\epsilon}\varphi\big((\lambda\cdot 1_A-a)^{-1}\big)\lambda^n d\lambda$，于是对任意 $\varphi\in A^*$，$|\varphi(a^n)|\le\|\varphi\|M_\epsilon(r(a)+\epsilon)^{n+1}$，根据 [6] 推论 3.5$\Big(\|x_0\|=\sup\limits_{\varphi\in A^*,\|\varphi\|=1}|\varphi(x_0)|\Big)$有 $\|a^n\|\le M_\epsilon(r(a)+\epsilon)^{n+1}$，开 $n$ 次根并取上极限有 $\limsup\limits_{n\to\infty}\|a^n\|^{\frac{1}{n}}\le r(a)+\epsilon$.■

下面是泛函分析中一个比较著名的结论，它断言可除的 Banach 代数只有一个：

**推论 3.8(Gelfand-Mazur)** 可除的 Banach 代数 $A$ 必定等距 $\mathbb{C}$-代数同构于 $\mathbb{C}$.

**证明** 对任意 $a\in A$，总存在唯一 $\lambda_a\in\mathrm{spec}(a)$ 使 $\lambda_a\cdot 1_A-a$ 不可逆，即 $\lambda_a\cdot 1_A=a$. 定义 $A\to\mathbb{C},a\mapsto\lambda_a$，验证这是等距同构 (因此是同胚)、$\mathbb{C}$-代数同构即可.■

**定义 3.9(商代数)** 设 $A$ 是 Banach 代数，$J$ 既是 $A$ 的 (双边，下同) 理想，又是 $A$ 的线性子空间.**商代数**$A/J$ 是指由所有陪集 $\{a+J:a\in A\}$ 按自然的运算 (即代表元的运算) 作成的代数. 定义 $A/J$ 上的半范数为 $\|a+J\|:=\inf_{x\in J}\|a\pm x\|$(读者自行验证). 如果还能做到 $\|a+J\|=0\Rightarrow a\in J$，这个半范数便能成为一个范数.

**命题 3.10** 若要求理想 $J$ 在 $A$ 中闭，则上面定义的半范数是范数，且 $A/J$ 在这个范数下是 Banach 代数. 此时典范同态 $A\to A/J,a\mapsto a+J$ 是连续映射. 该命题的证明方法无非是逐条验证定义.

**定义 3.11(特征)** 交换 Banach 代数 $A$ 上的一个**特征**是指一个保持乘法幺元的非零 $\mathbb{C}$-代数同态 $A\to\mathbb{C}$(这一定是满的). 以 $\widehat{A}$ 记 $A$ 的所有特征作成的集合 (注意，这只是一个集合，其上没有运算).

**命题 3.12** 设 $A$ 是交换 Banach 代数，则：

(1)$A$ 的每个极大理想一定是闭的.

(2) 有 1-1 对应 $\widehat{A}\longleftrightarrow\{A\text{的所有极大理想}\},\gamma\longleftrightarrow\ker(\gamma)$.

(3)$\widehat{A}$ 中每个元素均是连续的.

(4) 对任意 $a\in A$，$\mathrm{spec}(a)=\{\gamma(a):\gamma\in\widehat{A}\}$. 利用这个等式，可以将谱的概念用特征转述，从而便于推广到无幺元的交换 Banach 代数上去 (见 [9] 定理 C.20).

**证明** (1) 设 $J$ 是 $A$ 的极大理想，下证 $\overline{J}\supseteq J$ 仍是一个非平凡理想. 根据命题 1.3(3)，$(\overline{J},+)$ 自然是 $A$ 的加法子群；并且对任意 $a\in A,x\in\overline{J}$，存在 $\{x_n\}\subseteq J$ 以 $x$ 为极限，使得 $\{ax_n\}\subseteq J$ 以 $ax$ 为极限 (这里要用到 $J$ 是理想且映射 $A\to A,x\mapsto ax$ 连续). 因此 $\overline{J}$ 是理想. 倘若 $1_A\in\overline{J}$，则 $1_A$ 的任何邻域与 $J$ 交非空. 由于 $A^\times$ 开，故存在邻域 $1_A\in U\subseteq A^\times$ 使 $U\cap J\neq\varnothing$，这意味着 $J$ 中有单位，矛盾. 因此 $\overline{J}$ 非平凡.

(2) 设 $J$ 是极大理想，则有交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & A/J \arrow[dl, "\theta,\cong(\text{推论 3.8})"] \\ & \mathbb{C} & \end{tikzcd}$$

这里 $\gamma$ 是一个特征，反之亦然. 注意到 $\gamma=\theta\circ q$ 连续，故 (3) 也由上述交换图得到.

(4)$\lambda\in\mathrm{spec}(a)$ 当且仅当 $x=\lambda\cdot 1_A-a$ 不可逆，当且仅当 $x$ 落在某个极大理想 $J$ 中，当且仅当 $x$ 落在某个 $\gamma$ 的核中，当且仅当存在某个 $\gamma$ 使 $\gamma(a)=\lambda$.■

现赋予 $\widehat{A}$ 拓扑结构.

**定义 3.13(Gelfand 拓扑)** 任取 $a\in A$，它诱导 $\mathbb{C}$- 线性映射 $\widehat{a}:A^*\to\mathbb{C},\varphi\mapsto\varphi(a)$. 定义 $A^*$ 上的 $w^*$**-拓扑** (weak-star topology) 为使所有 $\widehat{a}$ 都连续的最粗的拓扑. 容易验证 $A^*$ 在这个拓扑下是一个 $T_2$ 的局部凸拓扑线性空间 (见定义 4.1). 可以按子空间拓扑赋予集合 $\widehat{A}\subseteq A^*$ 拓扑结构，称之为 $\widehat{A}$ 上的 **Gelfand 拓扑**.

**引理 3.14** $\widehat{A}$ 落在 $A^*$ 的闭单位球 $D_1$ 中. 此外，$\widehat{A}$ 配备了 Gelfand 拓扑之后是一个紧 $T_2$ 空间.

**证明** 对任意 $\gamma \in \widehat{A}$，任意 $a \in A$，由命题 3.12(4) 得 $\gamma(a) \in \operatorname{spec}(a) \subseteq D_{\|a\|}$，因此 $|\gamma(a)| \leq \|a\|$. 故 $\|\gamma\| = \sup_a \frac{|\gamma(a)|}{\|a\|} \leq 1$. 关于 $\widehat{A}$ 的 Gelfand 拓扑，$T_2$ 是显然的，下证 $\widehat{A}$ 紧. 由 Banach-Alaoglu 定理 ([6] 定理 5.41) 知 $A^*$ 中的闭单位球是紧的，故只要证明其子集 $\widehat{A}$ 闭即可，而这直接由定义 3.11 得到.■

**定义 3.15(Gelfand 变换)** 任取 $a \in A$ 及 $\gamma \in \widehat{A}$，将定义 3.13 中的 $\widehat{a}$ 限制到 $\widehat{A}$ 上 (仍记作 $\widehat{a}$)，按之前的构造，$\widehat{A}$ 配备了 Gelfand 拓扑之后所有的 $\widehat{a}$ 都是连续的. 记 $\mathcal{C}(\widehat{A})$ 为 $\widehat{A}$ 上所有连续复值函数按通常加法和逐点相乘作成的 $\mathbb{C}$-代数，定义 $\mathcal{C}(\widehat{A})$ 上的范数为所谓的无穷范数 $\|f\|_\infty := \sup_{x\in\widehat{A}} |f(x)|$. 这时候我们有映射 $\Gamma : A \to \mathcal{C}(\widehat{A}), a \mapsto \left[\widehat{a} : \widehat{A} \to \mathbb{C}, \gamma \mapsto \gamma(a)\right]$，称之为 **Gelfand 变换**.

**命题 3.16** 以下列出一些关于 Gelfand 变换的事实. 设 $A$ 是交换 Banach 代数，则：

(1) 验证定义知 Gelfand 变换 $\Gamma$ 是一个 $\mathbb{C}$-代数同态 (因此是线性算子).

(2) 对任意 $a \in A$，利用命题 3.12(4) 有 $\widehat{a}(\widehat{A}) = \operatorname{spec}(a)$，且 $\|\Gamma(a)\|_\infty = \|\widehat{a}\|_\infty = \sup\{|\gamma(a)| : \gamma \in \widehat{A}\} = r(a) \leq \|a\|$. 因此 Gelfand 变换 $\Gamma$ 在两边范数诱导的拓扑下是连续的.

(3)$\ker(\Gamma) = \operatorname{Jac}(A)$，这里 $\operatorname{Jac}(A)$ 指环 $A$ 的 Jacobson 根. 此外，利用上述 (2) 还可以得到 $\ker(\Gamma) = \{a \in A : r(a) = 0\}$. 作为一个推论，$\Gamma$ 是单射当且仅当 $A$ 半单 (即 Jacobson 根平凡).

**证明** 仅证 (3)，其余显然. 根据命题 3.12，$\Gamma(a) = 0$ 当且仅当对任意 $\gamma$ 均有 $a \in \ker(\gamma)$，当且仅当 $a$ 落在所有极大理想当中.■

**定义 3.17(Hermit 形式、Hilbert 空间)** 设 $H$ 是一个 $\mathbb{C}$- 线性空间，$H$ 上的一个**正定 Hermit 形式**是一个映射 $H \times H \to \mathbb{C}, (v, w) \mapsto \langle v|w\rangle$，它满足：(1) 正定性：对任意 $u \in H$，$\langle u|u\rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，且 $\langle u|u\rangle = 0$ 当且仅当 $u = 0$；(2) 共轭对称性：对任意 $u, v \in H$，$\langle u|v\rangle = \overline{\langle v|u\rangle}$；(3) 关于第一个变量线性 (或关于第二个变量共轭线性)：对任意 $u, v, w \in H$ 及 $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$，$\langle \lambda u + \mu v|w\rangle = \lambda\langle u|w\rangle + \mu\langle v|w\rangle$. 此外，由条件 (1)，$\langle\cdot|\cdot\rangle$ 还诱导了 $H$ 上的范数 $\|u\| := \sqrt{\langle u|u\rangle}$. 为此，如果一个配备了正定 Hermit 形式的 $\mathbb{C}$-线性空间 $H$ 在这个范数下完备，则称 $H$ 是一个 **Hilbert 空间**.

**命题 3.18(伴随算子的存在唯一性)** 设 $H$ 是一个 Hilbert 空间. 容易验证 $\operatorname{End}(H)$ 是一个 Banach 代数，并且对任意 $T \in \operatorname{End}(H)$，总存在唯一的 $T^* \in \operatorname{End}(H)$(称其为 $T$ 的**伴随算子**)，使得 $\langle Tx|y\rangle = \langle x|T^*y\rangle$ 对任意 $x, y \in H$ 均成立 (证明见 [6] 定理 2.12). 此外，这个伴随算子还满足如下性质：

(1) 对任意 $T \in \operatorname{End}(H)$，$T^{**} = T$. 这是因为 $\langle Tx|y\rangle = \langle x|T^*y\rangle = \overline{\langle T^*y|x\rangle} = \overline{\langle y|T^{**}x\rangle} = \langle T^{**}x|y\rangle$.

(2) 对任意 $T_1, T_2 \in \operatorname{End}(H)$ 及 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$，$(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)^* = \overline{\lambda_1}T_1^* + \overline{\lambda_2}T_2^*$；$(T_1T_2)^* = T_2^*T_1^*$.

(3) 对任意 $T \in \operatorname{End}(H)$，$\|T\| = \|T^*\|$，$\|TT^*\| = \|T\|^2 = \|T^*\|^2$.

**证明** 仅证 (3). 利用 Cauchy 不等式有 $\|T(x)\|^2 = \langle T(x)|T(x)\rangle = \langle x|T^*Tx\rangle \leq \|T^*T\|\|x\|^2$，这意味着 $\|T\|^2 \leq \|T^*T\| \leq \|T^*\|\|T\|$，即 $\|T\| \leq \|T^*\|$. 同理 $\|T^*\| \leq \|T\|$.■

**例** 设 $A \in \operatorname{Mat}(n, \mathbb{C})$. 定义 $\mathbb{C}^n$ 上的正定 Hermit 形式为 $\langle u|v\rangle := u^T\overline{v}$. 此时，矩阵 $A$ 可以自然地给出 $\mathbb{C}^n$ 上的线性变换，它满足 $\langle Au|v\rangle = (Au)^T\overline{v} = u^TA^T\overline{v} = \langle u|\overline{A^T}v\rangle$. 因此 $A$ 的伴随算子就是 $A^* = \overline{A^T}$.

**定义 3.19(自伴算子、正规算子)** 设 $H$ 是 Hilbert 空间. 称 $T \in \operatorname{End}(H)$ 是**正规算子**，如果 $T^*T = TT^*$；称 $T$ 是**自伴算子**，如果 $T = T^*$；称 $T$ 是**酉算子**，如果 $T^{-1} = T^*$. 显然，自伴算子和酉算子一定是正规算子，反之不然. 此外，正规算子 $T$ 还满足对任意 $x \in H$，$\|T(x)\| = \|T^*(x)\|$. 特别地，一个自伴算子 $T$ 称为是**正算子**，如果对任意 $x \in H$，$\langle T(x)|x\rangle \geq 0$. 例如，对任意 $T \in \operatorname{End}(H)$，算子 $TT^*$ 均是正算子.

**命题 3.20** 设 $H$ 是 Hilbert 空间，$T \in \operatorname{End}(H)$ 是一个正规算子，则 $r(T) = \|T\|$.

**证明** 由命题 3.18(3) 知 $\|T\|^{2^n} = \|TT^*\|^{2^{n-1}} = \|T^{2^n}(T^*)^{2^n}\|^{\frac{1}{2}} = \|T^{2^n}(T^{2^n})^*\|^{\frac{1}{2}} = \|T^{2^n}\|$，故 $\|T^{2^n}\|^{2^{-n}} = \|T\|$. 再利用定理 3.7 计算即可.■

**引理 3.21** 设 $H$ 是 Hilbert 空间，$T \in \operatorname{End}(H)$，则 $T$ 可逆当且仅当 $T^*$ 可逆. 此外，$\lambda \in \operatorname{spec}(T)$ 当且仅当 $\overline{\lambda} \in \operatorname{spec}(T^*)$，当且仅当 $\lambda^{-1} \in \operatorname{spec}(T^{-1})$(如果 $\lambda \neq 0$、$T$ 可逆的话).

**证明** 第一步：$\lambda\cdot 1_H - T$ 可逆当且仅当 $\overline{\lambda}\cdot 1_H - T^*$ 可逆. 第二步：$\lambda^{-1}(\lambda\cdot 1_H - T)T^{-1} = -(\lambda^{-1}\cdot 1_H - T^{-1})$.■

**命题 3.22** 设 $H$ 是 Hilbert 空间，$T \in \operatorname{End}(H)$. 若 $T$ 是酉算子，则 $\operatorname{spec}(T) \subseteq D_1 = S^1$(在线性代数中对应的结论：正交矩阵的特征值一定取于 $\pm 1$)；若 $T$ 是自伴算子，则 $\operatorname{spec}(T) \subseteq \mathbb{R}$、$\langle T(x)|x\rangle \in \mathbb{R}(\forall x \in H)$(在线性代数中对应的结论：实对称矩阵的特征值一定是实数).

更确切地，下述说法互相等价：(1)$T$ 自伴；(2)$T$ 正规且 $\operatorname{spec}(T) \subseteq \mathbb{R}$；(3) 对任意 $x \in H$，$\langle T(x)|x\rangle \in \mathbb{R}$.

**证明** 设 $T$ 是酉算子，则 $TT^*=1_H$，即 $\|T\|=\sqrt{\|TT^*\|}=1$. 根据命题 3.20，$r(T)=1$. 由引理 3.21 知 $\lambda\in\mathrm{spec}(T)$ 当且仅当 $\overline{\lambda}^{-1}\in\mathrm{spec}((T^*)^{-1})=\mathrm{spec}(T)$，因此 $|\lambda|\le 1,|\lambda^{-1}|\le 1$，故只能有 $|\lambda|=1$. 设 $T$ 是自伴算子，考虑收敛级数 $e^{iT}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iT)^n}{n!}$，由命题 3.18 知 $(e^{iT})^*=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iT)^n}{n!}=e^{-iT}$，故 $e^{iT}$ 是酉算子. 利用命题 3.5，任意 $\lambda\in\mathrm{spec}(T)$ 均有 $e^{i\lambda}\in\mathrm{spec}(e^{iT})\subseteq S^1$，因此 $|e^{i\lambda}|=1$，即 $\mathrm{Re}(i\lambda)=0$，故只能有 $\lambda\in\mathbb{R}$.

接下来证明说法等价.(1) $\Rightarrow$ (2) 已证，(2) $\Rightarrow$ (1) 则要用到谱定理 (定理 3.26)：$T^*=\widetilde{\Gamma}^{-1}(\overline{i_T})=\widetilde{\Gamma}^{-1}(i_T)=T$；(1) $\Rightarrow$ (3) 由 $\overline{\langle T(x)|x\rangle}=\langle T^*(x)|x\rangle=\langle T(x)|x\rangle$ 立即得到，仅剩 (3) $\Rightarrow$ (1). 由于对任意 $x,y\in H$，均有恒等式 $\langle x|y\rangle=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2)$，故 $\langle T(x)|y\rangle=\overline{\langle T(y)|x\rangle}$，因此 $T=T^*$.■

以 Hilbert 空间上算子的伴随关系为原型，我们可以抽象出 $C^*$-代数的概念：

**定义 3.23($C^*$-代数)** 设 $A$ 是 $\mathbb{C}$-代数. 一个自伴算符 $*:A\to A,a\mapsto a^*$ 如果满足：$a^{**}=a$、$(\lambda a+\mu b)^*=\overline{\lambda}a^*+\overline{\mu}b^*$ 和 $(ab)^*=b^*a^*$，则称其为**对合算符** (involution). 该定义提取于伴随算子的性质 (命题 3.18). 此外，如果 $A$ 还是一个 Banach 代数，且对合算符 $*$ 满足对任意 $a\in A$ 均有 $\|aa^*\|=\|a\|^2$(此式蕴含 $\|a\|=\|a^*\|$)，则称这时候配备了算符 $*$ 的 Banach 代数 $A$ 是一个**$C^*$-代数**. 例如 $\mathrm{End}(H)$ 就是一个 $C^*$-代数.

**命题 3.24** 设 $H$ 是一个 Hilbert 空间，$A$ 是 $\mathrm{End}(H)$ 的一个闭、自伴 (所谓自伴是指：对任意 $a\in A$，由命题 3.18 给出的 $a^*\in A$)、酉交换子代数 (因此是交换 $C^*$-代数)，则 Gelfand 变换 $\Gamma:A\to\mathcal{C}(\widehat{A})$ 是一个 $\mathbb{C}$-代数的等距 $*$-同构$\big(*$- 同构是指在本来的 $\mathbb{C}$- 代数同构基础上还要求对任意 $T\in A$，$\Gamma(T^*)=\overline{\Gamma(T)}\big)$.

**证明** 由于 $A$ 交换，故任意 $T\in A$ 正规. 由命题 3.16 和命题 3.20 得 $\|T\|=r(T)=\|\widehat{T}\|_\infty$，因此 $\Gamma$ 是等距的 (因而也是单射. 由命题 3.16.3 还能知道 $A$ 半单). 任意 $T\in A$，记自伴算子 $T_0=\frac{T+T^*}{2},T_1=\frac{T-T^*}{2i}$，计算可得 $T=T_0+iT_1,T^*=T_0-iT_1$. 由命题 3.22 知对任意 $\gamma\in\widehat{A}$，$\widehat{T_j}(\gamma)=\gamma(T_j)\in\mathrm{spec}(T_j)\subseteq\mathbb{R}(j=0,1)$，因此 $\Gamma(T^*)=\Gamma(T_0-iT_1)=\Gamma(T_0)-i\Gamma(T_1)=\overline{\Gamma(T_0+iT_1)}=\overline{\Gamma(T)}$. 最后证 $\Gamma$ 满. 注意到 $\mathrm{Im}(\Gamma)$ 是 $\mathcal{C}(\widehat{A})$ 中关于共轭封闭$\big($因为 $A$ 自伴且 $\Gamma(T^*)=\overline{\Gamma(T)}\big)$的闭 (因为 $\Gamma$ 等距且 $A$ 闭) 子代数且包含所有常值函数，根据 Stone-Weierstrass 定理 ([6] 定理 A.9)，$\mathrm{Im}(\Gamma)=\mathcal{C}(\widehat{A})$.■

一般地，$\mathrm{End}(H)$ 的每个关于 $*$ 运算封闭的闭子代数都是 $C^*$-代数 (不一定交换). 反过来则有如下定理：

**定理 3.25(Gelfand-Naimark)** 每个 $C^*$-代数都等距 $*$- 同构于某个 Hilbert 空间 $H$ 之 $\mathrm{End}(H)$ 中的某个闭自伴子代数.

值得一提的是，透过 Gelfand-Naimark 定理我们希望把具有某种性质的 $C^*$-代数看成是某个空间 (即谱) 上的连续函数所作成的代数. 这个想法在代数几何当中也有体现：交换环 $A$ 中的元素可以视为素谱 $\mathrm{spec}(A)$ 上的函数. 如果一个拓扑空间来自于某个交换环的素谱，则称这个拓扑空间是一个**仿射概型** (affine scheme). 有了这样的观点，我们便可从代数的观点看几何，从几何的观点看代数. 而在此处，有如下重要定理：

**定理 3.26(正规算子的谱定理)** 设 $H$ 是 Hilbert 空间，$T\in\mathrm{End}(H)$ 是正规算子，记 $\mathrm{End}(H)$ 中由 $T$ 生成的 $C^*$-代数为 $A_T$，则 $A_T$ 是交换的，且 $\widehat{A}_T$ 同胚于 $\mathrm{spec}(T)$(这里的谱基于 $A_T$). 因此，Gelfand 变换诱导 $\mathbb{C}$- 代数的等距 $*$-同构 $\widetilde{\Gamma}:A_T\xrightarrow{\Gamma}\mathcal{C}(\widehat{A}_T)\xrightarrow{\sim}\mathcal{C}(\mathrm{spec}(T))$，特别地有 $\widetilde{\Gamma}(T)=(\mathrm{spec}(T)\overset{i_T}{\hookrightarrow}\mathbb{C},\lambda\mapsto\lambda)$.

**证明** 由于 $T$ 正规，故由 $1_H,T,T^*$ 生成的 $\mathbb{C}$-代数 $\mathbb{C}[1_H,T,T^*]$ 交换. 因此，$C^*$-代数 $A_T:=\overline{\mathbb{C}[1_H,T,T^*]}\subseteq\mathrm{End}(H)$ 也交换. 定义映射 $\Phi_T:\widehat{A}_T\to\mathrm{spec}(T),\gamma\mapsto\widehat{T}(\gamma)=\gamma(T)$，这显然是连续的. 由命题 3.12(4) 知 $\Phi_T$ 满；而 $\Phi_T(\gamma_1)=\Phi_T(\gamma_2)$ 可以推出在生成元 $1_H$、$T$、$T^*$ 上有 $\gamma_1(T)=\gamma_2(T)$ 和 $\gamma_1(T^*)=\Gamma(T^*)(\gamma_1)=\overline{\Gamma(T)(\gamma_1)}=\overline{\Gamma(T)(\gamma_2)}=\gamma_2(T^*)$(命题 3.24)，这蕴含 $\gamma_1=\gamma_2$，即 $\Phi_T$ 单. 因此 $\Phi_T$ 是同胚$\big($从紧空间 (引理 3.14) 打到 $T_2$ 空间的连续双射还是同胚$\big)$，再次利用命题 3.24 知结论成立. 特别地，$\widetilde{\Gamma}(T)(\lambda)=\widehat{T}\circ\Phi_T^{-1}(\lambda)=\lambda$.■

定理 3.26 告诉我们，$A_T$ 中的算子可以看成是谱 $\mathrm{spec}(T)$ 上的某个连续函数，具体地，$\widetilde{\Gamma}:U\mapsto\widehat{U}\circ\Phi_T^{-1}$；反过来 $f\in\mathcal{C}(\mathrm{spec}(T))$ 也可唯一地代表一个算子. 容易验证有运算法则：$(\widetilde{\Gamma}^{-1}f)^*=\widetilde{\Gamma}^{-1}\overline{f}$，$\widetilde{\Gamma}^{-1}(\overline{i_T})=T^*$ 等. 在泛函分析中这些运算法则被称为**泛函演算** (functional calculus). 利用泛函演算可以方便地解决一些问题，例如证明 Hilbert 空间上最简单版本的谱映射定理 (请与命题 3.5 比较)：设 $T\in\mathrm{End}(H)$ 是正规算子，由于 $\widetilde{\Gamma}$ 是同态，若 $f(x)\in\mathbb{C}[x]$，则 $\widetilde{\Gamma}f(T)=f\widetilde{\Gamma}(T)$. 不难发现等式两边的值域分别为 $\mathrm{spec}(f(T))=f(\mathrm{spec}(T))$.

**例** 谱定理在线性代数中的体现就是将一个正规算子 (特别地，自伴算子) 按特征值分解成一些算子的倍数之和，而这些算子可由 $\mathcal{C}(\mathrm{spec}(T))$ 中的函数确定. 例如利用自伴算子 $T$ 的特征值 $\lambda$ 可以将 $T$ 限制到 $\lambda$-特征子空间，而 $T$ 本身就是所有的这些限制映射的加和 (见 [12] 定理 2.8.12).

此外，定理 3.26 中由 $A_T$ 确定的谱 $\mathrm{spec}(T)$，可以放到 $\mathrm{End}(H)$ 上来确定，相应的同构也可以移植过去. 我们将其表述为如下命题：

**推论 3.27** 设 $T$ 是 Hilbert 空间 $H$ 上的正规算子，$A_T$ 如定理 3.26，则 $T$ 作为 $A_T$ 中元素的谱 $\mathrm{spec}(T)$ 与 $T$ 作为 $\mathrm{End}(H)$ 中元素的谱 $\mathrm{spec}(T)^\sharp$ 相同. 因此定理 3.26 中的同构可改良为 $\widetilde{\Gamma}: A_T \to \mathcal{C}\big(\mathrm{spec}(T)^\sharp\big)$.

**证明** 只需证"$\subseteq$". 设 $\lambda \in \mathrm{spec}(T)$，取 $f \in \mathcal{C}(\mathrm{spec}(T))$ 使得 $|f| \leq 1$，$f(\lambda) = 1$，而当 $|\lambda - z| \geq \epsilon$ 时 $f(z) = 0$. 由定理 3.26 知 $\widetilde{\Gamma}$ 等距，故 $\|(T - \lambda \cdot 1_H)\widetilde{\Gamma}^{-1}(f)\| = \|\widetilde{\Gamma}\big((T - \lambda \cdot 1_H)\widetilde{\Gamma}^{-1}(f)\big)\|_\infty = \|(i_T - \lambda)f\|_\infty = \sup_z |z-\lambda||f(z)| \leq \epsilon$. 如果 $T-\lambda\cdot 1_H$ 可逆，此时有 $1 = \|f\|_\infty = \|\widetilde{\Gamma}^{-1}(f)\| = \|(T-\lambda\cdot 1_H)^{-1}(T-\lambda\cdot 1_H)\widetilde{\Gamma}^{-1}(f)\| \leq \|(T - \lambda \cdot 1_H)^{-1}\| \cdot \epsilon$. 由于 $\epsilon$ 可以任意小，故 $\|(T - \lambda \cdot 1_H)^{-1}\| = \infty$，与有界算子矛盾. 因此 $\lambda \in \mathrm{spec}(T)^\sharp$.■

**推论 3.28** 设 $T$ 是 Hilbert 空间上的正规算子，$A_T$ 如定理 3.26，则下述说法等价：(1)$\mathrm{spec}(T)$ 是单点集；(2)$A_T \cong \mathbb{C}$；(3) 存在唯一 $\alpha \in \mathbb{C}$ 使得 $T = \alpha \cdot 1_H$. 由谱定理 3.26，该命题是显然的.

作为本节的结束，我们介绍一个应用谱定理的例子.

**命题 3.29** 设 $H$ 是 Hilbert 空间，$T \in \mathrm{End}(H)$ 是正规算子，$\lambda \in \mathrm{spec}(T)$. 则对任意 $\epsilon > 0$，存在单位向量 $x \in H$ 使得 $\|T(x) - \lambda x\| < \epsilon$. 因此，如果 $\lambda$ 在 $\mathrm{spec}(T)$ 中孤立，那么 $\lambda$ 就是 $T$ 的一个特征值.

**证明** **Step1**：设 $H$ 是 Hilbert 空间，$T \in \mathrm{End}(H)$，则下述说法等价：(1)$T$ 在 $\mathrm{End}(H)$ 中可逆；(2)$T^*$ 在 $\mathrm{End}(H)$ 中可逆；(3)$T, T^*$ 均**嫌弃 0**(所谓嫌弃 0 是指：存在 $\epsilon > 0$ 使得对任意 $x \in H$，$\|T(x)\| \geq \epsilon\|x\|$)；(4)$T, T^*$ 均是单的，且 $\mathrm{Im}(T)$ 是 $H$ 中的闭集；(5)$T$ 是双射. **证**：(1) $\Leftrightarrow$ (2) 显然；(1) $\Rightarrow$ (3)：由于对任意 $x \in H$，$T^{-1}T(x) = x$，故取 $\epsilon = \|T^{-1}\|^{-1}$ 时发现 $T$ 嫌弃 0，同理 $T^*$ 也嫌弃 0；(3) $\Rightarrow$ (4)：单射显然，只需证 $\mathrm{Im}(T)$ 闭. 由于 $T$ 连续，故只要注意到 $\mathrm{Im}(T)$ 中的 Cauchy 序列 $\{T(x_n)\}$ 总能控制 $H$ 中对应的序列 $\{x_n\}$ 即可；(4) $\Rightarrow$ (5)：由于任意 $x, y \in H$，$\langle T(x)|y\rangle = \langle x|T^*(y)\rangle$，故容易验证 $\mathrm{Im}(T)^\perp = \ker(T^*) = 0$. 因为 $\mathrm{Im}(T)$ 闭，所以 $\mathrm{Im}(T) = 0^\perp = H$；(5) $\Rightarrow$ (1)：由开映射定理立得.

**Step2**：设 $H$ 是 Hilbert 空间，$T \in \mathrm{End}(H)$，$\lambda \in \mathrm{spec}(T)$，则存在一列单位向量 $\{x_n\} \subseteq H$，使得要么 $\|T(x_n) - \lambda x_n\| \to 0$，要么 $\|T^*(x_n) - \overline{\lambda} x_n\| \to 0$. **证**：如果这两种情况均不发生，那么 $T - \lambda \cdot 1_H$ 和 $(T - \lambda \cdot 1_H)^*$ 均嫌弃 0，故由 Step1 知它们可逆，而这与 $\lambda \in \mathrm{spec}(T)$ 矛盾.

**Step3**：命题 3.29 成立. **证**：由 Step2，必有 $\|T(x)-\lambda x\| < \epsilon$ 或 $\|T^*(x)-\overline{\lambda}x\| < \epsilon$ 之一成立. 由于 $T$ 正规，故 $T-\lambda\cdot 1_H$ 也正规，因此根据定义 3.19 知上两式其实相等. 对于非空紧集 $\mathrm{spec}(T)$ 中的孤立点 $\lambda$ 而言，定义连续函数 $f: \mathrm{spec}(T) \to \mathbb{C}$，除 $f(\lambda) = 1$ 外其余全为 0. 由谱定理 3.26 知 $0 = \|(\lambda - i_T)f\|_\infty = \|(\lambda\cdot 1_H - T)\widetilde{\Gamma}^{-1}(f)\|$，即 $(\lambda \cdot 1_H - T)\widetilde{\Gamma}^{-1}(f) = 0$. 而 $f \neq 0$ 蕴含 $\widetilde{\Gamma}^{-1}(f) \neq 0$，因此存在 $x \in H$ 使 $0 \neq \widetilde{\Gamma}^{-1}(f)(x)$ 是 $T$ 的特征向量.■

**例** 若取 $H = \mathbb{C}^n$，$T \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$，则 $\mathrm{spec}(T)$ 就由 $T$ 的 $n$ 个特征值组成，而上述 Step2 中的 $\{x_n\}$ 则可取自于 $T$ 的属于 $\lambda$ 的那些单位特征向量. 于是，我们可以认为命题 3.29 是线性代数中相应概念的一种推广.

## 4、紧群的表示

本节主要参考 [10]Chapter4 和 [11]Chapter3、Chapter5，介绍拓扑群的表示论. 在紧或局部紧群的表示论中，大部分结论均与复表示论平行. 本节中的一些命题为求简短我们会略去证明 (参考文献均有详细证明).

**定义 4.1(拓扑线性空间)** 拓扑域 $k$ 上的一个**拓扑线性空间**$V$ 是指配备了一个拓扑结构的 $k$-线性空间，满足：(1)$(V, +)$ 是拓扑群；(2) 数乘映射 $k \times V \to V, (\lambda, v) \mapsto \lambda v$ 在相应的积拓扑上连续.

**定义 4.2(表示)** 设 $V$ 是 $k$-拓扑线性空间. 记 $\mathrm{Aut}(V)$ 为 $V$ 上所有纯代数意义下的自同构作成的群；记 $\mathrm{Aut}_{\mathrm{top}}(V)$ 为 $\mathrm{Aut}(V)$ 中那些连续、逆也连续的自同构作成的子群.

现设 $G$ 是局部紧群，$V$ 是**局部凸** (即 $V$ 上的拓扑可由一族凸集生成) 的 $\mathbb{C}$-拓扑线性空间.$G$ 的一个**抽象表示**是指群同态 $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V), g \mapsto \rho_g$. 特别地，称抽象表示 $\rho$ 是一个**拓扑表示**，如果映射 $G \times V \to V, (g, x) \mapsto \rho_g(x)$ 在相应的积拓扑上连续. 显然对拓扑表示 $\rho$ 而言，$\rho(G) \subseteq \mathrm{Aut}_{\mathrm{top}}(V)$.

**命题 4.3(拓扑表示的判定)** 抽象表示 $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ 是拓扑表示当且仅当 $\rho$ 满足：(1) 对任意紧集 $K \subseteq G$，函数集 $\rho(K)$ 在 $V$ 上**等度连续**(称函数集 $\{f_\lambda : E \to V\}$ 在 $E$ 上等度连续，如果对任意 $0 \in V$ 的邻域 $U$，总存在 $0 \in E$ 的邻域 $D$，使得对任意 $x \in D$，均有 $f_\lambda(x) \in U$ 对任意 $\lambda$ 成立. 这个定义可由经典实分析中的等度连续类比到拓扑群上)；(2) 对任意 $x \in V$，映射 $G \to V, g \mapsto \rho_g(x)$ 连续. 特别地，[1] 推论 2.2(Banach-Steinhaus 定理) 表示，如果 $V$ 还要求是 Banach 空间，那么等度连续的条件自然满足，因此抽象表示 $\rho$ 是拓扑表示当且仅当上述条件 (2) 成立.

**证明** 必要性. 显然 (2) 成立，只证 (1). 任取 $0\in V$ 的邻域 $U$，由 $G\times V\to V$ 在 $(g,0)$ 处连续知存在 $g\in G,0\in V$ 的邻域 $H_g,W_g$ 使 $\rho_{H_g}(W_g)\subseteq U$. 因为 $K$ 紧，上述 $g$ 跑遍 $G$ 之后可取出有限多个 $H_1,\cdots,H_n$ 覆盖 $K$，对应地取出 $W_1,\cdots,W_n$. 令 $D=\bigcap_{i=1}^n W_i$(有限交保证 $D$ 非平凡)，按上面的构造，任意 $k\in K,w\in D$，均有 $\rho_k(w)\in U$，即函数集 $\rho(K)$ 在 $V$ 上等度连续.

充分性. 目标是证 $\rho_g(x)$ 连续. 固定 $(g,x)\in G\times V$，任取 $0\in V$ 的邻域 $U$. 由于 $G$ 是局部紧群，故可取定 $K\subseteq G$ 是 $g$ 的某个紧邻域. 由条件 (1)，存在 $0\in V$ 的邻域 $D$ 使得 $\rho_K(D)\subseteq U/2$. 由条件 (2)，存在邻域 $g\in H\subseteq K$ 使得 $\rho_H(x)-\rho_g(x)\subseteq U/2$. 因此找到了 $g,x$ 的邻域 $H,x+D(D$ 是 $0\in V$ 的邻域)，使得 $\rho_H(x+D)-\rho_g(x)=\rho_H(D)+(\rho_H(x)-\rho_g(x))\subseteq\rho_K(D)+U/2\subseteq U/2+U/2=U$(右边的等号用到了局部凸).■

**定义 4.4(不可约)** 设 $\rho:G\to\mathrm{Aut}(V)$ 是一个抽象表示，子空间 $W\subseteq V$ 称为**$G$-不变子空间**，如果 $\rho_G(W)\subseteq W$. 一个抽象表示称为**代数不可约**的，如果它没有非平凡 $G$-不变子空间；称为**拓扑不可约**的，如果它没有闭的非平凡 $G$- 不变子空间. 显然一个代数不可约表示一定是拓扑不可约的.

**定义 4.5(等价表示)** 称两个 (拓扑) 表示 $\rho:G\to\mathrm{Aut}(V),\rho:G\to\mathrm{Aut}(V')$ **等价** (记作 $[\rho]=[\rho']$)，如果存在同构、同胚 $T:V\to V'$ 使得对任意 $g\in G$，均有 $T\circ\rho_g=\rho'_g\circ T$ 成立，也就是说有交换图：

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\rho_g"'] & V' \arrow[d, "\rho'_g"] \\ V \arrow[r, "T"] & V' \end{tikzcd}$$

**定义 4.6(酉表示及其等价)** 设 $H$ 是 Hilbert 空间，$T\in\mathrm{End}(H)$. 我们已经知道 $T$ 是酉算子当且仅当 $TT^*=1_H$，而这等价于任意 $x,y\in H$ 均有 $\langle x|y\rangle=\langle T(x)|T(y)\rangle$. 为此，若设 $G$ 是局部紧群，称一个拓扑表示 $\rho:G\to\mathrm{Aut}(H)\subseteq\mathrm{End}(H)$ 为**酉表示**，如果任意 $\rho_g(g\in G)$ 均是酉算子. 我们定义两个线性同构的 Hilbert 空间 $H,H'$ 为**酉同构**的当且仅当存在 $T:H\to H'$ 使得任意 $x,y\in H$ 均有 $\langle x|y\rangle=\langle T(x)|T(y)\rangle$. 基于此，称两个酉拓扑表示 $\rho:G\to\mathrm{Aut}(H),\rho':G\to\mathrm{Aut}(H')$ 是**酉等价**的 (记作 $[\rho]_U=[\rho']_U$)，如果存在酉同构、同胚 $T:H\to H'$，使得对任意 $g\in G$，$T\circ\rho_g=\rho'_g\circ T$(即定义 4.5 中的图表交换).

**例** (1)$\mathbb{R}\to\mathrm{Aut}(\mathbb{C}),x\mapsto e^{2\pi ix}$ 是 $(\mathbb{R},+)$ 的一维酉拓扑表示.

(2) 设 $G$ 是配备了左 Haar 测度 $\mu$ 的局部紧群，则 $L^2(G)$ 是 Hilbert 空间，其 Hermit 内积形式为 $\langle f|g\rangle:=\int_G f\overline{g}d\mu$. 可以验证 (命题 4.3) 此时 $\rho:G\to\mathrm{Aut}(L^2(G)),g\mapsto\left[\rho_g:L^2(G)\to L^2(G),f(s)\mapsto f(g^{-1}s)\right]$ 是酉拓扑表示.

**命题 4.7** 设 $H,H'$ 是两个 Hilbert 空间. 如果两个酉拓扑表示 $\rho:G\to\mathrm{Aut}(H),\rho':G\to\mathrm{Aut}(H')$ 等价 (定义 4.5 中的)，那么它们还酉等价. 换言之，$[\rho]=[\rho']$ 蕴含 $[\rho]_U=[\rho']_U$.

**证明** 由定义 4.5 知存在同构且同胚的 $T:H\to H'$ 使 $\rho'_gT=T\rho_g$. 利用关系 $\langle T^*(x)|y\rangle=\langle x|T(y)\rangle(\forall x\in H',y\in H)$ 定义 $T^*:H'\to H$，易见 $TT^*$ 是 $H'$ 上的正算子. 根据 [6] 定理 5.55，存在唯一的正 (自伴) 算子 $U\in\mathrm{End}(H')$ 使得 $U^2=TT^*$ 且 $U$ 与任何与 $TT^*$ 交换的算子交换 ($U^{-1}$ 也是). 由计算 $(U^{-1}T)(U^{-1}T)^*=U^{-1}TT^*U^{-1}=1_{H'}$ 知算子 $U^{-1}T$ 是酉同构. 又由 $\rho'_gT=T\rho_g$ 两边取伴随再左乘 $T$ 知 $TT^*\rho'_g=T\rho_gT^*=\rho'_gTT^*$，即 $TT^*$ 与 $\rho'_g$ 交换，故 $U^{-1}$ 与 $\rho'_g$ 交换，因此 $\rho'_gU^{-1}T=U^{-1}T\rho_g$ 成立.■

**定义 4.8(直和)** 设 $G$ 是局部紧群. 称 $G$ 的拓扑表示 $\rho:G\to\mathrm{Aut}(V)$ 是一族拓扑表示 $\rho_i:G\to\mathrm{Aut}(V_i)$ 的**直和** (记作 $\rho:=\bigoplus_i\rho_i:G\to\mathrm{Aut}(\bigoplus_i V_i)$)，如果：(1)$V_i$ 是 $V$ 的闭 $G$-不变子空间，使得 $\sum_i V_i$ 是直和且 $\sum_i V_i$ 在 $V$ 中稠密；(2)$\rho|_{V_i}=\rho_i$.

如果拓扑表示 $\rho$ 等于一些拓扑不可约表示 $\rho_i$ 的直和，则称 $\rho$ 是**完全可约**的.

另设 $\rho:G\to\mathrm{Aut}(H)$ 是酉拓扑表示. 称 $\rho$ 是一族酉拓扑表示 $\rho_i:G\to\mathrm{Aut}(H_i)$ 的 **Hilbert 直和**，如果：(1)$\rho$ 是 $\rho_i$ 的直和 (即 $\rho=\bigoplus_i\rho_i$)；(2) 若 $i\neq j$，则 $H_i\perp H_j$.

此时，任意 $x\in H$ 可表为 $x=\sum_i x_i(x_i\in H_i)$，且 $\|x\|^2=\sum_i\|x_i\|^2$(这意味着至多可数个 $x_i\neq 0$).

**命题 4.9(局部紧群表示的一些基本性质)** 此处列出了一些常用的结论以及它们在复表示论中对应的情形. 设 $G$ 是**局部紧群**，则：

(1)**Maschke 定理**：有限维酉拓扑表示是完全可约的 (类比 [7] 定理 11，证明方法也是作归纳法).

(2) 有了命题 4.7 的保证，我们可以给出**局部紧群的 Schur 引理**：(i) 酉拓扑表示 $\rho:G\to\mathrm{Aut}(H)$ 拓扑不可约当且仅当 $\mathrm{End}_G(\rho):=\{T\in\mathrm{End}(H):\forall g\in G,\rho_gT=T\rho_g\}=\{\alpha\cdot 1_H:\alpha\in\mathbb{C}\}$. (ii) 设 $\rho:G\to\mathrm{Aut}(H)$ 和 $\rho':G\to\mathrm{Aut}(H')$ 是两个拓扑不可约酉拓扑表示. 若 $[\rho]=[\rho']$，则 $\mathrm{Hom}_G(\rho,\rho'):=\{T\in\mathrm{Hom}(H,H'):\forall g\in$

$G, \rho'_g T = T\rho_g\}$ 是 1 维 $\mathbb{C}$-线性空间；若 $[\rho] \neq [\rho']$，则 $\mathrm{Hom}_G(\rho, \rho') = \{0\}$(类比 [7] 引理 15).

(3) 若 $G$ 还是 Abel 群，酉拓扑表示 $\rho : G \to \mathrm{Aut}(H)$ 拓扑不可约，则 $\dim_{\mathbb{C}}(H) = 1$(类比 [7] 推论 16).

**证明** 这是谱定理 3.26 的另一个应用. 见 [11]Chapter3.1，证明要用到自伴算子 (正规算子) 理论.■

以上所讨论的都是局部紧群的表示论. 作为一个特殊情形 (紧群一定是局部紧的)，我们更关注紧群的表示论，它有很多局部紧群表示所没有的性质. 本节剩余的篇幅均集中于紧群的表示.

**命题 4.10(紧群表示的一些基本性质)** 此处列出了一些常用的结论以及它们在复表示论中对应的情形. 设 $G$ 是**紧群** (带有**标准的** Haar 测度：$\mu(G) = 1$)，则：

(1)$G$ 的酉拓扑表示是若干有限维不可约拓扑表示的直和 (即酉拓扑表示完全可约. 证明见 [10] 命题 4.2.1).

(2)$G$ 的拓扑不可约酉拓扑表示均是有限维的 (这是上一条的直接推论).

(3) 若 $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ 是有限维拓扑表示，则可在赋予了欧氏内积 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ 的 $\mathbb{C}$-线性空间 $V$ 上引入新的正定 Hermit 形式 $[u|v] := \int_G \langle\rho_x(u)|\rho_x(v)\rangle dx$ 使 $\rho$ 是酉拓扑表示 (类比 [7] 定理 10).

(4)$G$ 的有限维拓扑表示是完全可约的 (利用 (3) 转化成酉拓扑表示再结合 (1) 即可).

(5)**紧群的 Schur 正交关系**：(i) 设 $\rho : G \to \mathrm{Aut}(H)$ 和 $\rho' : G \to \mathrm{Aut}(H')$ 是两个不等价且拓扑不可约的酉拓扑表示，则对任意 $v_1, v_2 \in H$ 及 $v'_1, v'_2 \in H'$，有 $\int_G \langle\rho_x v_1|v_2\rangle_H \overline{\langle\rho'_x v'_1|v'_2\rangle_{H'}} dx = 0$. (ii) 设酉拓扑表示 $\rho : G \to \mathrm{Aut}(H)$ 拓扑不可约，则任意 $v_1, v_2, v_3, v_4 \in H$，有 $\int_G \langle\rho_x v_1|v_2\rangle \overline{\langle\rho_x v_3|v_4\rangle} dx = \frac{1}{\dim_{\mathbb{C}}(H)} \langle v_1|v_3\rangle \overline{\langle v_2|v_4\rangle}$(类比 [7] 定理 19).

(6)**紧群特征标的正交关系**：设 $\rho : G \to \mathrm{Aut}(H)$ 是一个有限维酉拓扑表示. 若取 $H$ 的一组基为 $\{e_i\}$，则 $\rho_y$ 在这组基下可表成一个矩阵 $\big(\langle\rho_y(e_i)|e_j\rangle\big)_{i,j}$，定义 $\rho$ 的**特征标**为一个相似不变量 $\chi_\rho : G \to \mathbb{C}, y \mapsto \mathrm{tr}(\rho_y)$. 显然等价的拓扑表示诱导相同的特征标 (类比 [7] 命题 21).

设 $\chi_1, \chi_2$ 分别是紧群 $G$ 的两个有限维不可约酉拓扑表示 $\rho_1, \rho_2$ 的特征标，则 (类比 [7] 定理 24，证明可立即由 (5) 导出)：

$$\int_G \chi_1(y)\overline{\chi_2(y)} dy = \begin{cases} 0, & [\rho_1] \neq [\rho_2] \\ \frac{1}{\dim_{\mathbb{C}}(H)}, & [\rho_1] = [\rho_2] \end{cases}.$$

**证明** 仅证 (5). 对于 $\mathbb{C}$-线性映射 $L : H \to H'$，定义 $\mathbb{C}$- 线性映射 $\widetilde{L} : H \to H', h \mapsto \int_G \rho'_{x^{-1}}\big(L(\rho_x h)\big) dx$. 容易验证对任意 $y \in G$，有 $\widetilde{L}\rho_y = \int_G \rho'_{x^{-1}} L\rho_{xy} dx = \int_G \rho'_{yx^{-1}} L\rho_x dx = \rho'_y \widetilde{L}$，即 $\widetilde{L} \in \mathrm{Hom}_G(\rho, \rho')$. 注意到拓扑不可约酉拓扑表示的维数有限，我们有：

(5.i) 若取上述 $L : H \to H', h \mapsto \langle h|v_2\rangle_H \cdot v'_2$，由命题 4.9(2)Schur 引理知 $\widetilde{L} = 0$. 此时

$$0 = \langle\widetilde{L}(v_1)|v'_1\rangle_{H'} = \left\langle \int_G \rho'_{x^{-1}} L\rho_x(v_1) dx \middle| v'_1 \right\rangle_{H'} = \int_G \langle L\rho_x(v_1)|\rho'_x(v'_1)\rangle_{H'} dx = \int_G \langle\rho_x(v_1)|v_2\rangle_H \overline{\langle\rho'_x(v'_1)|v'_2\rangle_{H'}} dx.$$

(5.ii) 令 (5.i) 中 $\rho = \rho'$，取 $L : H \to H, h \mapsto \langle h|v_2\rangle \cdot v_4$. 再次由 Schur 引理，存在 $\alpha \in \mathbb{C}$ 使 $\widetilde{L} = \alpha \cdot 1_H$. 易见 $\alpha \dim_{\mathbb{C}}(H) = \mathrm{tr}(\widetilde{L}) = \int_G \mathrm{tr}[\rho_{x^{-1}} L\rho_x] dx = \int_G \mathrm{tr}(L) dx = \mathrm{tr}(L) \cdot \mu(G) = \langle v_4|v_2\rangle$(注意 Haar 测度 $\mu$ 是标准的)，于是

$$\frac{1}{\dim_{\mathbb{C}}(H)} \langle v_1|v_3\rangle \overline{\langle v_2|v_4\rangle} = \frac{\mathrm{tr}(L)}{\dim_{\mathbb{C}}(H)} \langle v_1|v_3\rangle = \langle\widetilde{L}(v_1)|v_3\rangle = \int_G \langle\rho_x(v_1)|v_2\rangle \overline{\langle\rho_x(v_3)|v_4\rangle} dx.$$

在这里，我们有必要解释一下证明中出现的积分的合理性. 设 $V, W$ 是局部凸拓扑线性空间，$(X, \mu)$ 是测度空间. 映射 $F : X \to V$ 称为**弱可积**的，如果对任意 $\varphi \in V^*$，均有 $\varphi \circ F \in L^1(X)$. 此时，存在 $v_F := \int_X F d\mu \in V$ 使得 $\varphi(v_F) = \int_X \varphi \circ F d\mu$. 如果还有连续线性映射 $T : V \to W$，由于任意 $\psi \in W^*$ 均有 $\psi \circ T \in V^*$，故 $T \circ F$ 弱可积，且 $\psi \circ T\big(\int_X F d\mu\big) = \int_X \psi \circ T \circ F d\mu$. 换言之，$T \int_X F d\mu = \int_X TF d\mu$.■

**定理 4.11(Gelfand-Raikov)** 设 $G$ 的局部紧群，$x \neq y \in G$，则存在 $G$ 的拓扑不可约酉拓扑表示 $\rho$ 使得 $\rho(x) \neq \rho(y)$.

**证明** 见 [11] 定理 3.34.■

**定理 4.12(Peter-Weyl)** 设 $G$ 是紧群，记 $\mathrm{Rep}(G) := \big\{[\rho]_U : G \xrightarrow{\rho} \mathrm{Aut}(H_\rho)$ 是拓扑不可约的有限维酉拓扑表示$\big\}$，$\mathcal{E}_\rho := \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\langle\rho(\cdot)u|v\rangle : u, v \in H_\rho\} \subseteq \mathcal{C}(G)$. 则 $\mathbb{C}$-代数 $\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\big\{\bigcup_{[\rho]_U \in \mathrm{Rep}(G)} \mathcal{E}_\rho\big\}$ 在 $\mathcal{C}(G)$ 中稠密且 $L^2(G) = \bigoplus_{[\rho]_U \in \mathrm{Rep}(G)} \mathcal{E}_\rho$. 此外，若记 $H_\rho$ 的一组正交基为 $\{e_{\rho,i}\}$，则 $\Big\{\sqrt{\dim_{\mathbb{C}}(H_\rho)} \cdot \langle\rho(\cdot)e_{\rho,j}|e_{\rho,i}\rangle : i, j = 1, \cdots, \dim_{\mathbb{C}}(H_\rho), [\rho]_U \in \mathrm{Rep}(G)\Big\}$ 构成 $L^2(G)$ 的一组 (标准) 正交基.

**证明** 见 [11]Chapter5.2.■

我们之后研究的大都是拓扑 Abel 群的表示，这是因为非 Abel 群的 Pontryagin 对偶群 (见定义 5.1) 按构造却是 Abel 群，这样之后的讨论还是避免不了交换性.

## 5、群上的调和分析

本节的任务是介绍局部紧群 $G$ 的 Pontryagin 对偶群 $\widehat{G}$ 并且赋予其拓扑群结构，研究它的性质以及 $G,\widehat{G}$ 在代数、拓扑之间的联系. 此外，在这个抽象的背景下，$G$ 上的复值函数与 $\widehat{G}$ 上的复值函数之间可以用 Fourier 变换或 Fourier 逆变换相关联，这与经典表示论中的处理是类似的 (见 [7] 定理 45). 最后，我们证明 Pontryagin 对偶定理并给出相关应用.

在有限群的复表示论中，1 维群表示 $\rho: G \to \mathrm{GL}(1,\mathbb{C}), g \mapsto \rho_g$ 和其特征标 $\chi_\rho : G \mapsto \mathbb{C}, g \mapsto \mathrm{tr}(\rho_g) = \rho_g$ 是一致的. 注意到有限 Abel 群的不可约复表示都是 1 维的，类比此观察便可给出如下拓扑群版本的定义：

**定义 5.1(Pontryagin 对偶)** 设 $G$ 是拓扑 Abel 群. 集合 $\widehat{G} := \{G \xrightarrow{\chi} S^1 : \chi\text{是连续群同态}\}$ 配备了逐点相乘的运算之后作成一个 Abel 群，称为 $G$ 的 **Pontryagin 对偶群** (或简称对偶群)，其中的元素叫作 $G$ 的 **(连续酉) 特征标**. 注意，根据命题 3.22、命题 4.9(3) 和命题 4.10(6)，在各条件都满足的情况下，这里的对偶群 $\widehat{G}$ 相当于是由拓扑 Abel 群 $G$ 的所有拓扑不可约 1 维酉拓扑表示 (或这些拓扑表示的特征标) 组成.

接下来赋予 $\widehat{G}$ 拓扑结构：

**定义 5.2(紧开拓扑)** 任给拓扑 Abel 群 $G$ 的紧子集 $K$ 以及 $1 \in S^1$ 的邻域 $V$，定义 $\widehat{G}$ 的子集 $W_{K,V} := \{\chi \in \widehat{G} : \chi(K) \subseteq V\}$. 此时所有的 $W_{K,V}$ 构成了 $\widehat{G}$ 中平凡特征标 $\chi_{\mathrm{tri}} : G \mapsto 1$ 的一个邻域基结构，因此确定了 $\widehat{G}$ 上的一个拓扑，称为**紧开拓扑** (compact-open topology). 不难验证群 $\widehat{G}$ 配备了该拓扑之后是一拓扑 Abel 群.

**命题 5.3** 设 $G_1, G_2$ 是局部紧 Abel 群，容易验证有拓扑群的同构 $\theta : \widehat{G_1} \times \widehat{G_2} \xrightarrow{\sim} \widehat{G_1 \times G_2}, (\chi_1,\chi_2) \mapsto \big[G_1 \times G_2 \xrightarrow{\theta(\chi_1,\chi_2)} S^1, (g_1,g_2) \mapsto \chi_1(g_1)\chi_2(g_2)\big]$.

**例** 参考 [13]Chapter F 和 [24]：(1)$(\mathbb{Z},+)$ 的对偶群是 $(\mathbb{R}/\mathbb{Z},+)$；$(\mathbb{R}/\mathbb{Z},+)$ 的对偶群是 $(\mathbb{Z},+)$.

(2) 对于局部域 $K$ 而言 (见定义 6.10)，Tate 在 [15] 定理 2.2.1 证明了 $(K,+)$ 的对偶群还是它自己 (即 $K$ 和 $\widehat{K}$ 是同构的拓扑 Abel 群. 称这样的性质为**自对偶**，self-dual). 我们将在定理 8.2 给出该事实的证明.

(3) 拓扑群 $\{\mathfrak{i}\}$、$(\mathbb{R}^n,+)$、$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ 是自对偶的.

(4) 设 $G$ 是局部紧 Abel 群，则命题 5.3 告诉我们 $G \oplus \widehat{G}$ 是自对偶的. 一般地，有限多个自对偶群的直和还是自对偶的.

(5) 设 $G_i(i \in I)$ 是一族自对偶群，即有拓扑群的同构 $f_i : G_i \xrightarrow{\sim} \widehat{G_i}$. 另设 $H_i \subseteq G_i(i \in I)$ 是紧开子群，满足 $H_i^{\perp} := \{\chi \in \widehat{G_i} : \chi(H_i) = 1\} = f_i(H_i)$，则 $\hat{\prod}_{i\in I}^{H_i} G_i$ 是自对偶的 (见定义 7.1、定理 7.7 和推论 8.4).

**引理 5.4** 设 $X$ 是拓扑 Abel 群 $G$ 的子集，$n$ 是正整数，记 $X^{(n)} := \big\{\prod_{j=1}^n x_j : x_j \in X, j = 1,\cdots,n\big\} \subseteq G$. 对任意 $0 < \epsilon \le 1$，利用万有覆叠 $\varphi : \mathbb{R} \to S^1, x \mapsto e^{2\pi i x}$ 定义 $N(\epsilon) := \varphi(-\epsilon/3, \epsilon/3) \subseteq S^1$. 在这些约定下，设有正整数 $m$，则：

(1) 若 $z \in \mathbb{C}$ 满足 $z, z^2, \cdots, z^m \in N(1)$，则 $z \in N(\frac{1}{m})$；

(2) 设 $U$ 是 $G$ 中包含单位元的子集. 若群同态 $\chi : G \to S^1$(不要求连续) 满足 $\chi(U^{(m)}) \subseteq N(1)$，则 $\chi(U) \subseteq N(\frac{1}{m})$.

**证明** (1) 令 $z = \varphi(\tau)$. 反证法，原命题变为：当 $\tau \in [\frac{1}{3m}, 1 - \frac{1}{3m}]$ 时，求证 $\{z, z^2, \cdots, z^m\} \cap \varphi[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \neq \varnothing$. 基于对称性，只需分成 $[\frac{1}{3m}, \frac{1}{2}]$、$[\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3m}]$ 两段即可，证明是初等的；(2) 若 $g \in U$，则 $g, g^2, \cdots, g^m \in U^{(m)}$，由 (1) 知条件 $\chi(U^{(m)}) \subseteq N(1)$ 蕴含 $\chi(g) \in N(\frac{1}{m})$，这就完成了证明.■

**命题 5.5** 设 $G$ 是一个拓扑 Abel 群，则有：

(1) 群同态 $\chi : G \to S^1$ 连续 (因此是 $G$ 的特征标) 当且仅当 $\chi^{-1}(N(1))$ 是 $G$ 中单位元的邻域.

(2) 集族 $\{W_{K,N(1)} : K\text{是}G\text{的紧子集}\}$ 是平凡特征标 $\chi_{\mathrm{tri}} \in \widehat{G}$ 在紧开拓扑下的邻域基.

(3) 若 $G$ 是离散群，则 $\widehat{G}$ 紧；反过来，若 $G$ 紧，则 $\widehat{G}$ 是离散群.

(4) 若 $G$ 是局部紧群，则 $\widehat{G}$ 也是.

**证明** (1) 必要性显然. 至于充分性，设有开集 $\mathfrak{i} \in U \subseteq \chi^{-1}(N(1)) \subseteq G$，注意到 $G$ 上的乘法运算连续，故对任意正整数 $m$，总存在开邻域 $\mathfrak{i} \in V$ 使得 $V^{(m)} \subseteq U$. 由引理 5.4 得 $\chi(V) \subseteq N(\frac{1}{m})$，这蕴含 $\chi$ 在 $\mathfrak{i}$ 处连续，

直接利用平移性知 $\chi$ 在整个 $G$ 上连续.

(2) 对任意紧集 $K\subseteq G$，对任意 $m\in\mathbb{Z}_{>0}$，由于 $K^{(m)}$ 是 $\prod_{i=1}^m K$ 的某个连续像，因而也是紧集. 设 $\chi\in W_{K^{(m)},N(1)}$，则任意 $x\in K$，均有 $\chi(x),\cdots,\chi(x)^m\in N(1)$，由引理 5.4 即 $\chi(x)\in N(\frac{1}{m})$，故 $W_{K^{(m)},N(1)}\subseteq W_{K,N(\frac{1}{m})}$.

(3) 以后半部分为例. 设 $\chi\in\widehat{G}$，则 $\chi(G)$ 是 $S^1$ 的子群. 如果 $\chi(G)$ 非平凡，则 $\chi(G)\nsubseteq N(\epsilon),0<\epsilon\leq 1$. 因此 $W_{G,N(1)}$ 中只有 $\chi_{\mathrm{tri}}$，这意味着 $\widehat{G}$ 离散.

(4) 给定 $\mathrm{i}\in G$ 的紧邻域 $K$，下面证明 $W_{K,\overline{N(\frac{1}{4})}}$ 是 $\widehat{G}$ 中 $\chi_{\mathrm{tri}}$ 的紧邻域.

**Step1：** 令 $G_0=G$，$G_0$ 的群结构与 $G$ 相同，但配备离散拓扑. 由 (3) 知 $\widehat{G_0}$ 紧，记 $W_0:=\Big\{\chi\in\widehat{G_0}=\mathrm{Hom}(G_0,S^1):\chi(K)\subseteq\overline{N(\frac{1}{4})}\Big\}$，易见 $W_0\subseteq\widehat{G_0}$ 是闭集，因而是紧集. 显然 $W_{K,\overline{N(\frac{1}{4})}}\subseteq W_0$，又由 (1) 知 $W_0\subseteq W_{K,\overline{N(\frac{1}{4})}}$，故 $W_0=W_{K,\overline{N(\frac{1}{4})}}$.

**Step2：** 记 $W_0$ 在 $\widehat{G_0},\widehat{G}$ 下的子空间拓扑分别为 $\tau_0,\tau_1$，则 $\tau_0$ 比 $\tau_1$ 细 (此时 $W_0$ 在 $\tau_0$ 下紧意味着它也在 $\tau_1$ 下紧，故命题得证). **证：** 设 $K_1\subseteq G$ 紧，对任意 $\chi\in W_0$，由 (2) 可考虑 $\chi$ 在 $\tau_1$ 下的开邻域基 $W(\chi,m):=\chi W_{K_1,N(\frac{1}{m})}\cap W_0,m\in\mathbb{Z}_{>0}$. 现说明每个 $W(\chi,m)$ 都是 $\chi$ 在 $\tau_0$ 下的开邻域. 取 $\mathrm{i}\in G$ 的开邻域 $V$ 使得 $V^{(2m)}\subseteq K$，由于 $K_1$ 紧，故存在有限集 $F$ 使得 $F\cdot V\supseteq K_1$. 记 $W_0(\chi,2m):=\big\{\chi\eta:\eta\in\widehat{G_0},\eta(F)\subseteq N(\frac{1}{2m})\big\}\cap W_0\subseteq W_0$，根据定义 5.2 这在 $\tau_0$ 下是开集，故 $W_0(\chi,2m)$ 是 $\chi$ 在 $\tau_0$ 下的一个邻域. 此外，设 $\mu\in W_0(\chi,2m)$，由构造知存在 $\mu_0\in\widehat{G_0}$ 满足 $\mu_0(F)\subseteq N(\frac{1}{2m})$，使得 $\mu=\chi\mu_0\in W_0$. 因为 $\mu_0=\chi^{-1}\mu\in W_0^{(2)}$，所以 $\mu_0(V^{(2m)})\subseteq\mu_0(K)\overset{\text{Step1}}{\subseteq}\overline{N(\frac{1}{2})}\subseteq N(1)$，故引理 5.4 给出 $\mu_0(V)\subseteq N(\frac{1}{2m})$，因而 $\mu_0(K_1)\subseteq\mu_0(F)\cdot\mu_0(V)\subseteq N(\frac{1}{2m})\cdot N(\frac{1}{2m})\subseteq N(\frac{1}{m})$. 注意到由 (1) 可得 $\mu_0$ 连续，所以 $\mu_0\in W_{K_1,N(\frac{1}{m})}\subseteq\widehat{G}$，因此 $\mu\in W(\chi,m)$，即 $W_0(\chi,2m)\subseteq W(\chi,m)$. 这就证明了 $\tau_1$ 中的开集全是 $\tau_0$ 中的开集.■

我们先来讨论局部紧群 $G$(不一定交换) 上的分析. 首先取定 $G$ 上的一个左 Haar 测度，定义：

**定义 5.6(卷积)** 设 $f,g$ 是局部紧群 $G$ 上的复值 Borel 可测函数，它们的**卷积**$f*g$ 定义为 $f*g(t):=\int_G g(s^{-1}t)f(s)ds=\int_G g(s^{-1})f(ts)ds$. 卷积不一定交换 (见 [7] 命题 43)，但当 $G$ 是 Abel 群时卷积是可交换的.

设 $G$ 是局部紧群，由定理 1.15 知其上存在一个 (左)Haar 测度 $\mu:\mathcal{B}_G\to\mathbb{R}_{\geq 0}\sqcup\{\infty\}$. 仍记 $G$ 上所有紧支撑复值连续函数作成的集合为 $\mathcal{C}_c(G)$，记 $L^\bullet(G):=\{G\text{上的 Borel 可测函数}\}/\text{几乎处处相等}$. 实分析告诉我们，对任意 $1\leq p\leq\infty$，$\mathcal{C}_c(G)\subseteq L^p(G):=\{f\in L^\bullet(G):\|f\|_p<\infty\}$ 且 $\mathcal{C}_c(G)$ 在 $L^p(G)$ 中稠密 (按 $L^p$-范数). 回忆 $L^p$-范数 $\|f\|_p:=\big(\int_G|f|^pd\mu\big)^{\frac{1}{p}}(\forall p<\infty)$、$\|f\|_\infty:=\operatorname{ess\,sup}|f|=\inf\big(\{\infty\}\cup\{a\geq 0:\mu(|f|^{-1}(a,+\infty])=0\}\big)$. 接下来我们会用到很多关于 $L^p$-空间的结论.

**命题 5.7(卷积的性质)** 此处列出 Abel 群情形下卷积的一些性质. 设 $f,g$ 是局部紧 Abel 群 $G$ 上的复值 Borel 可测函数 (由于交换性，$G$ 上的左 Haar 测度一定是右平移不变的，因而 $G$ 可以带有一个双不变的 Haar 测度)，则：

(1) 如果对 $x\in G$ 而言积分 $f*g(x)$ 存在，则积分 $g*f(x)$ 也存在，且 $g*f(x)=f*g(x)$.

(2) 若 $f,g\in L^1(G)$，则对几乎所有的 $x\in G$，$f*g(x)$ 存在. 此外还有 $f*g\in L^1(G)$，且 $\|f*g\|_1\leq\|f\|_1\cdot\|g\|_1$.

(3) 若 $f,g,h\in L^1(G)$，则 $(f*g)*h=f*(g*h)$. 因此在 $L^1(G)$ 中卷积满足结合律、交换律和分配律.

**证明** (1) 注意到 $G$ 是 Abel 群，故 $f*g(x)=\int_G g(y^{-1})f(xy)dy=\int_G g(y)f(y^{-1}x)dy=g*f(x)$；(2) 直接计算得 $\int_G|f*g(x)|dx\leq\int_G\int_G|g(y^{-1}x)f(y)|dydx=\int_G|f(y)|dy\int_G|g(z)|dz$；(3) 读者自行验证.■

有了这些概念，我们便可以给出 Fourier 变换的定义：

**定义 5.8(Fourier 变换)** 设 $G$ 是带有一个双不变 Haar 测度的局部紧 Abel 群，$f\in L^1(G),g\in L^1(\widehat{G})$. 定义

$\widehat{f}(\chi):=\int_G f(y)\overline{\chi(y)}dy;\qquad\widehat{g}(y):=\int_{\widehat{G}}g(\chi)\chi(y)d\chi$ ($\widehat{G}$上会存在一个典范的 Haar 测度，置于定理 5.11 中讨论).

称如上定义的 $\widehat{f}:\widehat{G}\to\mathbb{C}$ 是 $f$ 的 **Fourier 变换**；$\widehat{g}:G\to\mathbb{C}$ 是 $g$ 的 **Fourier 逆变换**. 注意到 $\chi:G\to S^1$，根据定义有估计 $|\widehat{f}(\chi)|\leq\|f\|_1<\infty$，因此积分 $\widehat{f}(\chi)$ 有限(定理 5.9 告诉我们 $\widehat{f},\widehat{g}$ 连续，但不一定是 $L^1$ 的).

**例** (1) 这里给出一个最经典的例子. 取 $G:=(\mathbb{R},+)$. 注意到群 $\mathbb{R}$ 的特征标一定形如 $\chi_t:\mathbb{R}\to S^1,s\mapsto e^{ist}(t\in\mathbb{R})$，因此定义 5.8 翻译过来即是 $\widehat{f}(t):=\widehat{f}(\chi_t)=\int_{\mathbb{R}}f(s)e^{-ist}ds$，此即实分析中的 Fourier 变换.

(2) 设有周期 $2\pi$ 的函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$. 定义 $f^\sharp:S^1(\cong\mathbb{R}/\mathbb{Z})\to\mathbb{C},e^{it}\mapsto f(t)$. 由于 $\widehat{S^1}\cong\widehat{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}\cong\mathbb{Z}$，故此时

Fourier 变换 $\widehat{f^\sharp}:\mathbb{Z}\to\mathbb{C},n\mapsto\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-itn}dt$，这是 $f$ 的第 $n$ 个 Fourier 系数. 根据分析学的基本常识，我们得到 $f$ 的 Fourier 级数 $f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f^\sharp}(n)e^{inx}$(对偶群 $\mathbb{Z}$ 上用计数测度)，这本质上是 $\widehat{f^\sharp}$ 的 Fourier 逆变换.

上面所展示的两个例子中，对偶群上的 Haar 测度的选取其实是有学问的，不能像我一样张口就来. 这个道理我们将在定理 5.11 中给出.

非常有意思的是，第 3 节介绍的 Gelfand 变换与此处的 Fourier 变换也是有联系的，唯一的区别只在于这里不能保证幺元存在 (定理 5.9). 而算子代数告诉我们，一个无幺元的交换 Banach 代数一定可以等距地嵌入进一个有幺元的交换 Banach 代数$\Big($对于无幺元交换 Banach 代数 $A$，定义有幺元交换 Banach 代数 $A\times\mathbb{C}$，其中 $(a,u)+(b,v):=(a+b,u+v),(a,u)\cdot(b,v):=(ab+ub+va,uv),z(a,u):=(za,zu),\|(a,u)\|:=\|a\|_A+|u|$，幺元是 $(0,1)$. 此时有等距嵌入 $A\hookrightarrow A\times\mathbb{C},a\mapsto(a,0)\Big)$，因此 Gelfand 变换也有无幺元的版本$\Big($设 $A$ 是**无幺元**交换 Banach 代数. 记 $\widehat{A}$ 为所有非零 $\mathbb{C}$-代数同态 $A\to\mathbb{C}$ 作成的集合 (配有 Gelfand 拓扑)，类似于定义 3.15，有 Gelfand 变换 $\Gamma:A\to\mathcal{C}_0(\widehat{A}),a\mapsto\big[\widehat{a}:\widehat{A}\to\mathbb{C},\gamma\mapsto\gamma(a)\big]$，其中 $\mathcal{C}_0(\widehat{A}):=\Big\{f\in\mathcal{C}(\widehat{A}):\forall\epsilon>0,$集合$\{x\in\widehat{A}:|f(x)|\geq\epsilon\}$紧$\Big\}$ 是 $\mathcal{C}(\widehat{A})$ 的 $\mathbb{C}$-线性子空间. 直观上可想象 $\mathcal{C}_0(\widehat{A})$ 中的元素在无穷远处消没，故当 $\widehat{A}$ 紧时 $\mathcal{C}_0(\widehat{A})=\mathcal{C}(\widehat{A})\Big)$. 当然第 3 节中有很多命题在此处仍然成立 (例如定理 3.7，见 [11]Chapter1.3 定理 1.30)，不幸的是也会有很多命题不再成立 (例如引理 3.14. 实际上 $\widehat{A}$ 在无幺元时只是局部紧 $T_2$ 的. 要使 $\widehat{A}$ 紧，当且仅当 $A$ 有幺元).

**定理 5.9(Fourier VS Gelfand)** 设 $G$ 是局部紧 Abel 群，由命题 5.7 知 $\big(L^1(G),\|\cdot\|_1,+,*\big)$ 是**无幺元**交换 Banach 代数. 对任意 $\chi\in\widehat{G}$ 以及 $f\in L^1(G)$，定义 $\nu_\chi:L^1(G)\to\mathbb{C},f\mapsto\widehat{f}(\chi)=\int_G f(x)\overline{\chi(x)}dx$. 此时有 $\nu_\chi\in\widehat{L^1(G)}$，因此若 $f,g\in L^1(G)$，则 $\widehat{f*g}=\widehat{f}\cdot\widehat{g}$(逐点相乘). 此外还有双射 $\Theta:\widehat{G}\xrightarrow{\sim}\widehat{L^1(G)},\chi\mapsto\nu_\chi$.

可将本定理改写成 Gelfand 变换的形式，即有 $\mathbb{C}$-代数的同态：$L^1(G)\longrightarrow\mathcal{C}_0(\widehat{L^1(G)}),f\longmapsto\big[\widehat{f}:\widehat{L^1(G)}\xrightarrow{\sim}\widehat{G}\to\mathbb{C},\nu_\chi\mapsto\chi\mapsto\widehat{f}(\chi)=\nu_\chi(f)\big]$. 特别，当 $\widehat{L^1(G)}$ 配备 Gelfand 拓扑、$\widehat{G}$ 配备紧开拓扑之后，$\Theta$ 是同胚(见 [1] 定理 3.13 或 [11]Chapter4.2. 基于此，根据 Gelfand 拓扑的定义，我们也可以说对偶群 $\widehat{G}$ 所配备的紧开拓扑是使所有 $f\in L^1(G)$ 的 Fourier 变换 $\widehat{f}$ 均连续的最粗的拓扑)，并且 $L^1(G)$ 在上述 $\mathbb{C}$- 代数同态下的像(不妨记作 $\mathcal{F}(L^1(G))$) 是 $\mathcal{C}_0(\widehat{L^1(G)})=\mathcal{C}_0(\widehat{G})$ 的稠密子空间 (这是 Stone-Weierstrass 定理的结论，见 [6] 定理 A.9 和 [11] 命题 4.14).

**证明** 直接验证知 $\nu_\chi$ 是一个非零的 $\mathbb{C}$-代数同态 (保持加法、卷积、数量乘法)，因此 $\nu_\chi\in\widehat{L^1(G)}$. 下证 $\Theta$ 是双射.

**Step1：** 设 $g$ 是 $G$ 上几乎处处有界的 Borel 可测函数. 若对任意 $f\in L^1(G)$，均有 $\int_G fgdx=0$，则 $g$ 在 $G$ 上几乎处处为 0. **证：** 反证法. 设 $E$ 满足 $0<\mu(E)<\infty$ 且 $g|_E$ 恒不为 0. 而 $E=\bigcup_{n\geq1}\{x\in E:|g(x)|>\frac{1}{n}\}:=\bigcup_{n\geq1}E_n$，故必存在 $n$ 使得 $0<\mu(E_n)<\infty$. 取示性函数 $\mathbf{1}_{E_n}\in L^1(G)$，当然 $\mathbf{1}_{E_n}\cdot\overline{g}\in L^1(G)$，因此 $\int_G\mathbf{1}_{E_n}\cdot\overline{g}gdx=\int_{E_n}|g|^2dx\geq\frac{\mu(E_n)}{n^2}>0$，矛盾.

**Step2：** 对任意非零 $\mathbb{C}$-代数同态 $\Psi:L^1(G)\to\mathbb{C}$，由引理 3.14 和 [9] 定理 C.19 知算子范数 $\|\Psi\|\leq1$，因此 $\Psi\in L^1(G)^*$. 根据对偶 ([6] 习题 3.5) 有等距同构 $L^1(G)^*\to L^\infty(G),\Psi\mapsto\psi$，满足对任意 $f\in L^1(G)$，$\Psi(f):=\int_G f(x)\psi(x)dx$ 且 $\|\Psi\|=\|\psi\|_\infty$. 由 $\Psi$ 是同态知对任意 $f,g\in L^1(G)$，有 $\Psi(f)\int_G g(x)\psi(x)dx=\Psi(f)\Psi(g)=\Psi(f*g)=\int_G\Psi(L_xf)g(x)dx$. 由 Step1，$\Psi(f)\psi(x)=\Psi(L_xf)$ 几乎处处成立. 按照这个思路，可随意固定某个满足 $\Psi(f)\neq0$ 的 $f\in L^1(G)$，复定义 $\psi:G\to\mathbb{C},x\mapsto\frac{\Psi(L_xf)}{\Psi(f)}$.

**Step3：** $\psi$ 是 $G$ 的特征标. **证：** 显然 $\psi$ 连续，且恒有 $\Psi(f)\psi(x)=\Psi(L_xf)$. 根据等式 $\Psi(f)\psi(xy)=\Psi(L_{xy}f)=\Psi(L_yL_xf)=\Psi(L_xf)\psi(y)=\Psi(f)\psi(x)\psi(y)$ 知 $\psi$ 是群同态. 因此 $\psi(x^{-1})=\psi(x)^{-1}$，由 $\|\psi\|_\infty=\|\Psi\|\leq1$ 知只能有 $\psi(x)\in S^1$. 综上，$\psi:G\to S^1$ 是特征标.

**Step4：** $\Theta$ 是双射. **证：** 由 $\Psi=\nu_{\overline{\psi}}$ 知 $\Theta$ 满；若 $\int_G f\overline{\chi_1}dx=\nu_{\chi_1}(f)=\nu_{\chi_2}(f)=\int_G f\overline{\chi_2}dx(\forall f\in L^1(G))$，则由 Step1 知 $\chi_1=\chi_2$ 几乎处处成立，此时利用特征标的连续性可推出 $\Theta$ 单.■

**注意 5.10** 定理 5.9 告诉我们 $L^1(G)$ 的 Gelfand 变换本质上就是 Fourier 变换. 例如取 $G:=(\mathbb{R},+)$，我们已经知道 $\widehat{L^1(G)}\xrightarrow{\sim}\mathbb{R}$，此时函数 $f\in L^1(G)$ 的 Gelfand 变换 $\widehat{f}$ 就是定义 5.8 中描述的 Fourier 变换.

**定理 5.11(Plancherel)** 设 $G$ 是带有一个双不变 Haar 测度 $\mu$ 的局部紧 Abel 群，则 $\widehat{G}$ 上存在唯一双不变 Haar 测度 (称为**对偶测度**)，使得在此测度下，对任意 $f\in\mathcal{C}_c(G)$，均有 $\|f\|_2=\|\widehat{f}\|_2$. 此外，$L^1(G)\cap L^2(G)$ 中函数的 Fourier 变换可以延拓成 Hilbert 空间的等距酉同构 $\tau:L^2(G)\xrightarrow{\sim}L^2(\widehat{G})$.

**证明** 证明的难点是找到 $\widehat{G}$ 上对应的 Haar 测度. 我们尝试按下面的顺序来逐一给出证明 (共 16 步).

**Step1**：设 $G$ 是局部紧群. 一个 Borel 可测函数 $L^\infty(G)\ni\varphi:G\to\mathbb{C}$ 称为是**正构型** (positive type) 的，如果对任意 $f\in L^1(G)$，复重积分 $\iint_{G^2}\varphi(t^{-1}s)f(s)\overline{f(t)}dsdt\in\mathbb{R}_{\geq 0}$(这里的 $ds,dt$ 均基于 Haar 测度). 直接验证可知若 $\varphi$ 是正构型函数，则 $\overline{\varphi}$ 也是. 记 $\mathcal{C}_p(G)$ 为 $G$ 上所有正构型连续函数作成的集合 (这并不是一个线性空间，因为不允许负元存在).

**Step2**：若 $f\in L^2(G)$，则 $f(x)*\overline{f(x^{-1})}\in\mathcal{C}_p(G)$. **证**：考虑由左平移诱导的**左正则酉表示**$\rho:G\to L^2(G),x\mapsto L_x$. 显然 $\overline{f(x)*\overline{f(x^{-1})}}(t)=\int_G f(t^{-1}s)\overline{f(s)}ds=\langle\rho_t(f)|f\rangle_{L^2}\in\mathcal{C}(G)$，而 $\langle\rho_t(f)|f\rangle_{L^2}\leq\|f\|_2^2$ 意味着 $f(x)*\overline{f(x^{-1})}(t)\in L^\infty(G)$. 另根据 Step1 的定义，对于任意 $h\in L^1(G)$ 有 $\iint_{G^2}\langle\rho_{t^{-1}}\rho_s(f)|f\rangle h(s)\overline{h(t)}dsdt=\iint_{G^2}\langle h(s)\rho_s(f)|h(t)\rho_t(f)\rangle dsdt=\left\|\int_G h(s)\rho_s(f)ds\right\|_2^2\geq 0$(弱可积). 综上 $f(x)*\overline{f(x^{-1})}(t)=\overline{\langle\rho_t(f)|f\rangle}\in\mathcal{C}_p(G)$.

**Step3**：设 $K\subseteq\widehat{G}$ 是紧子集，则存在 $f\in\mathcal{C}_c(G)\cap\mathcal{C}_p(G)$ 使得 Fourier 变换 $\widehat{f}\geq 0$，且在 $K$ 中 $\widehat{f}>0$. **证**：选取 $h\in\mathcal{C}_c(G)$ 使 $\widehat{h}(\chi_{\text{tri}})=\int_G h(x)dx=1$. 令 $g(t):=\big(\overline{h(x^{-1})}*h(x)\big)(t)$，容易发现 $\text{supp}(g)\subseteq\{a^{-1}b:a,b\in\text{supp}(h)\}$ 仍是紧集，因此 $g\in\mathcal{C}_c(G)$. 可以验证成立等式

$$\widehat{g}(\chi)=\iint_{G^2}h(x)\overline{\chi(x)}\overline{h(y)\overline{\chi(y)}}dxdy=\int_G h(x)\overline{\chi(x)}dx\cdot\overline{\int_G h(y)\overline{\chi(y)}dy}=\widehat{h}(\chi)\overline{\widehat{h}(\chi)}=|\widehat{h}(\chi)|^2.$$

显然 $\widehat{g}\geq 0$ 且 $\widehat{g}(\chi_{\text{tri}})=1$. 因为 $\widehat{g}$ 连续，故存在邻域 $1\in V\subseteq\widehat{G}$ 使得在其中 $\widehat{g}>0$. 由于 $K$ 紧，$K\subseteq\bigcup_{j=1}^n\chi_jV$. 若设 $f:=(\sum_{j=1}^n\chi_j)g\in\mathcal{C}_c(G)$，则有 $\widehat{f}(\chi)=\sum_{j=1}^n\int_G g(y)\chi_j(y)\overline{\chi(y)}dy=\sum_{j=1}^n\widehat{g}(\chi_j^{-1}\chi)\geq 0$，且 $\widehat{f}$ 在 $K$ 中严格大于 0. 又由 Step2 知 $g\in\mathcal{C}_p(G)$，此时根据定义易证 $f\in\mathcal{C}_p(G)$.

**Step4**：此处我们介绍重要的 **Bochner 定理**：若记 $\widehat{G}$ 上所有正则复 Borel 测度作成的 $\mathbb{C}$-线性空间为 $\mathcal{M}(\widehat{G})$，则有单的 $\mathbb{C}$-线性映射 $\mathcal{M}(\widehat{G})\hookrightarrow L^\infty(G),\mu\mapsto\widetilde{\mu}:=\int_{\widehat{G}}\chi(y)d\mu$. 此外，对任何 $\varphi\in\mathcal{C}_p(G)\subseteq L^\infty(G)$，存在唯一正测度 $\mu_\varphi\in\mathcal{M}(\widehat{G})$ 使得 $\widetilde{\mu_\varphi}=\varphi$. 关于该定理的证明，我们还是分以下几个步骤来解决 (Step4-1、Step4-2$_{(\text{含 4-2-1、4-2-2})}$ 和 Step4-3$_{(\text{含 4-3-1、4-3-2、4-3-3})}$).

**Step4-1**：有单的 $\mathbb{C}$-线性映射 $\mathcal{M}(\widehat{G})\hookrightarrow L^\infty(G)$. **证**：验证 $\mathbb{C}$-线性映射的定义即可. 而对任意 $f\in L^1(G)$，由等式 $0=\widetilde{\mu}=\int_{\widehat{G}}\chi(y)d\mu=\int_G f(y)\int_{\widehat{G}}\chi(y)d\mu dy=\int_{\widehat{G}}\int_G f(y)\overline{\chi^{-1}(y)}dyd\mu=\int_{\widehat{G}}\widehat{f}(\chi^{-1})d\mu$ 及定理 5.9 所述的 $\mathcal{F}(L^1(G))$ 在 $\mathcal{C}_0(\widehat{G})$ 中稠密可推出 $\mu=0$，故该映射单.

**Step4-2**：此处我们介绍“单位逼近 (approximate identity)”. 脉冲函数$\big($impulse function. 直观上它在 $\mathfrak{i}$ 处取值 $\infty$，在其它点取值 0$\big)$在 $L^1(G)$ 上关于卷积运算起到类似单位元的作用，但它却不是一个良好定义的函数，因而更不可能在 $L^1(G)$ 中. 为此，我们只能用 $L^1(G)$ 中的一系列支撑集越来越小、但上界却越来越大的“鼓包函数”(bump function，又译冲击函数. 见 [14]Chapter9.4.2.3) 来冲击逼近它，以此来逼近单位元的效果. 这部分内容是信号与系统学中的基础知识，此处还是要再分成两部分阐述.

**Step4-2-1**：设 $1\leq p<\infty$，$f\in L^p(G)$. 当 $y\to\mathfrak{i}$ 时，有 $\|L_yf-f\|_p\to 0,\|R_yf-f\|_p\to 0$. **证**：由于此处 $G$ 是 Abel 群，故仅证左平移的情况. 任取对称紧邻域 $V\ni\mathfrak{i}$ 及 $g\in\mathcal{C}_c(G)$，令 $K:=\text{supp}(g)\cdot V\cup V\cdot\text{supp}(g)$，由命题 1.3(5) 知 $K$ 紧. 任给 $\epsilon>0$，因为当 $y\in V$ 时 $L_yg$ 和 $g$ 只在 $K$ 中撑起，故当 $y\to\mathfrak{i}$ 时由命题 1.5 有 $\|L_yg-g\|_p\leq\mu(K)^{1/p}\cdot\sup|L_yg-g|<\epsilon$. 如果对一般的 $f\in L^p(G)$，由稠密性我们总能找到 $g\in\mathcal{C}_c(G)$ 使得 $\|f-g\|_p<\epsilon$. 利用等式 $\|L_yf\|_p=\|f\|_p$ 得 $\|L_yf-f\|_p\leq\|L_y(f-g)\|_p+\|L_yg-g\|_p+\|g-f\|_p<3\epsilon$，证毕.

**Step4-2-2**：设 $\mathcal{U}$ 是 $G$ 在 $\mathfrak{i}$ 处的一个邻域基. 对任何 $U\in\mathcal{U}$，总可以取一个函数 $\delta_U\in L^p(G)$ 满足：(1)$\text{supp}(\delta_U)$ 是紧集且包含于 $U$，(2)$\delta_U\geq 0$ 且 $\int_G\delta_Udt=1$，(3) 对任意 $x\in G$ 均有 $\delta_U(x^{-1})=\delta_U(x)$. 称这样的 $\delta_U$ 为在 $U$ 内撑起的**鼓包函数** (或**冲击函数**). 显然当 $U$ 遍历 $\mathcal{U}$ 时就取出了一列鼓包函数 $\{\delta_U:U\in\mathcal{U}\}$，由这列鼓包函数就可以“逼近”脉冲函数 (卷积运算的单位元). 严肃来说，对任何 $1\leq p<\infty$ 及 $f\in L^p(G)$，当 $U\to\{\mathfrak{i}\}$ 时 $\|\delta_U*f-f\|_p\to 0,\|f*\delta_U-f\|_p\to 0$. **证**：由于 $\int_G\delta_Udt=1$，我们有 $\delta_U*f(x)-f(x)=\int_G\delta_U(t)[L_tf(x)-f(x)]dt$. 根据广义 Minkowski 不等式 ([3] 习题 8.16) 得 $\|\delta_U*f-f\|_p\leq\int_G\delta_U(t)\|L_tf-f\|_pdt\leq\sup_{t\in U}\|L_tf-f\|_p$. 由 Step4-2-1 知 $\|\delta_U*f-f\|_p\to 0$. 类似地利用条件 (3) 可得 $\|f*\delta_U-f\|_p\to 0$.

**Step4-3**：对任意 $f_1,f_2\in L^1(G)$，简记 $\big(\overline{f_1(x^{-1})}*f_2(x)\big)(t)$ 为 $f_1^\sharp*f_2(t)$. 不失一般性设 $\varphi\in\mathcal{C}_p(G)$ 满足 $\varphi(\mathfrak{i})=1$，下面寻找 $\mathcal{M}(\widehat{G})$ 中的 $\mu_\varphi$ 使得 $\widetilde{\mu_\varphi}=\varphi$. 此结论的证明我们分如下几步给出. 首先基于 $G$ 上的 Haar 测度可以定义关于 $\varphi$ 的正定双线性形式 $\langle\cdot|\cdot\rangle_\varphi:L^1(G)^2\to\mathbb{C},(f_1,f_2)\mapsto\langle f_1|f_2\rangle_\varphi:=\iint_{G^2}\varphi(s^{-1}t)\overline{f_1(s)}f_2(t)dsdt=\int_G\varphi\cdot(f_1^\sharp*f_2)dt$.

**Step4-3-1**：对任意 $f\in L^1(G)$，$\left|\int_G\varphi fdt\right|^2\leq\langle f|f\rangle_\varphi$. **证**：对于 $\mathfrak{i}$ 的一个邻域基 $\mathcal{U}$，取一列合适

的鼓包函数 $\delta_U$. 由 Cauchy-Schwarz 不等式知 $|\langle\delta_U|f\rangle_\varphi|^2 \le \langle\delta_U|\delta_U\rangle_\varphi\cdot\langle f|f\rangle_\varphi$，问题变为研究 $\langle\delta_U|f\rangle_\varphi$ 和 $\langle\delta_U|\delta_U\rangle_\varphi$ 在 $U\to\{\mathrm{i}\}$ 时的极限. 因为 $f\in L^1(G)$，由 Step4-2-2 知 $\|\delta_U^\sharp * f - f\|_1 = \|\delta_U * f - f\|_1 \to 0$. 所以 $\langle\delta_U|f\rangle_\varphi = \int_G \varphi\cdot(\delta_U^\sharp * f)dt \to \int_G \varphi f dt$(按 1-范数收敛，注意 $\varphi\in L^\infty(G)$). 而由定理 1.17(2) 有 $\int_G(\delta_U^\sharp * \delta_U)dt = \int_G \delta_U(s)\int_G \delta_U(s^{-1}t)dtds = 1$，据此知 $\delta_U^\sharp * \delta_U$ 仍是一列基于 $\mathcal{U}$ 的鼓包函数. 注意到 $\varphi$ 连续，故存在 $U\in\mathcal{U}$ 使得对任意 $t\in U$ 总有 $|\varphi(\mathrm{i})-\varphi(t)|<\epsilon$，所以 $\left|\int_G\varphi\delta_U dt - \int_G\varphi(\mathrm{i})\delta_U dt\right| \le \int_G|\varphi(\mathrm{i})-\varphi(t)|\delta_U(t)dt<\epsilon$，据此很容易得到 $\langle\delta_U|\delta_U\rangle_\varphi\to\int_G\varphi\delta_U dt\to\varphi(\mathrm{i})=1$. 对之前的不等式取极限并利用保序性立得 $\left|\int_G\varphi f dt\right|^2\le\langle f|f\rangle_\varphi$.

**Step4-3-2**：对任意 $f\in L^1(G)$，$\left|\int_G\varphi f dt\right|\le\|\widehat{f}\|_\infty$. **证**：注意到 $\varphi\in L^\infty(G)$，且命题 5.7(1) 蕴含 $f^\sharp * f = (f^\sharp * f)^\sharp$. 依照 $\langle\cdot|\cdot\rangle_\varphi$ 的定义，利用 Step4-3-1 很容易归纳得到

$$\left|\int_G\varphi f dt\right|\le\left|\int_G\varphi\cdot(f^\sharp * f)dt\right|^{\frac12}\le\cdots\le\left|\int_G\varphi\cdot[\underbrace{(f^\sharp * f)*\cdots*(f^\sharp * f)}_{2^n}]dt\right|^{\frac{1}{2^{n+1}}}\le\left(\|\varphi\|_\infty\cdot\left\|(f^\sharp * f)^{2^n}\right\|_1\right)^{\frac{1}{2^{n+1}}}.$$

由定理 3.7 和命题 3.16(2) 的无幺元版本有 $\left\|(f^\sharp * f)^{2^n}\right\|_1^{\frac{1}{2^{n+1}}}\to\sqrt{r(f^\sharp * f)}=\|\widehat{(f^\sharp * f)}\|_\infty^{\frac12}=\||\widehat{f}|^2\|_\infty^{\frac12}=\|\widehat{f}\|_\infty$，最后一个等号来自于 $\operatorname{ess\,sup}$ 的定义. 对上述归纳得到的不等式取极限即可.

**Step4-3-3**：利用 Riesz-Markov 表示定理 (见 [3] 定理 6.19) 寻找满足题意的 $\mu_\varphi$. **证**：注意到泛函 $\Lambda: L^1(G)\to\mathbb{C}, f\mapsto\int_G\varphi f dt$ 诱导 $\mathcal{F}(L^1(G))\subseteq\left(\mathcal{C}_0(\widehat{G}),\|\cdot\|_\infty\right)$ 上的泛函 $\Sigma:\widehat{f}\mapsto\Lambda(f)$，利用定理 5.9 所述的稠密性知其可延拓成 $\mathcal{C}_0(\widehat{G})$ 上的连续线性泛函 $\widetilde{\Sigma}$. 根据 Riesz-Markov 表示定理，存在唯一 $\mu'\in\mathcal{M}(\widehat{G})$ 使得 $\int_G\varphi f dt=\Lambda(f)=\widetilde{\Sigma}(\widehat{f})=\int_{\widehat{G}}\widehat{f}d\mu'=\int_G f(t)\int_{\widehat{G}}\overline{\chi(t)}d\mu' dt$ 对任意 $f\in L^1(G)$ 均成立. 由 Step4-3-2，$\|\widetilde{\Sigma}\|=\|\Sigma\|=\sup\frac{|\Sigma\widehat{f}|}{\|\widehat{f}\|_\infty}=\sup\frac{|\int_{\widehat{G}}\widehat{f}d\mu'|}{\|\widehat{f}\|_\infty}\le 1$，因此 $\mu'(\widehat{G})=\int_{\widehat{G}}d\mu'\le 1$，这意味着关于 $t$ 的函数 $\int_{\widehat{G}}\overline{\chi(t)}d\mu'$ 几乎处处有界. 因为 $\varphi\in L^\infty(G)$，由定理 5.9 证明的 Step1 知 $\varphi(t)-\int_{\widehat{G}}\overline{\chi(t)}d\mu'$ 几乎处处有界蕴含 $\varphi(t)=\int_{\widehat{G}}\overline{\chi(t)}d\mu'$. 有了这个等式事实上可以得出 $1=\varphi(\mathrm{i})=\mu'(\widehat{G})$. 若令 $d\mu_\varphi(\chi):=d\mu'(\chi^{-1})$，则 $\mu_\varphi$ 即为所求 (可以验证它是正测度).

**Step5**：若 $\varphi,\psi\in\mathcal{C}_p(G)\cap L^1(G)$，则 $\widehat{\varphi}d\mu_\psi=\widehat{\psi}d\mu_\varphi$(这里 $\mu_\varphi,\mu_\psi$ 来自于 Step4，满足 $\widetilde{\mu_\varphi}=\varphi,\widetilde{\mu_\psi}=\psi$). **证**：对任意 $h\in L^1(G)$，我们有 $\int_{\widehat{G}}\widehat{h}d\mu_\varphi=\int_{\widehat{G}}\int_G\chi(y^{-1})h(y)dyd\mu_\varphi\xlongequal{\widetilde{\mu_\varphi}=\varphi}\int_G h(y)\varphi(y^{-1})dy=h*\varphi(\mathrm{i})$. 将 $h$ 换成 $h*\psi$，就有 $\int_{\widehat{G}}\widehat{h}\widehat{\psi}d\mu_\varphi=(h*\psi)*\varphi(\mathrm{i})=(h*\varphi)*\psi(\mathrm{i})=\int_{\widehat{G}}\widehat{h}\widehat{\varphi}d\mu_\psi$. 而 $\mathcal{F}(L^1(G))$ 在 $\mathcal{C}_0(\widehat{G})$ 中稠密，故有 $\widehat{\psi}d\mu_\varphi=\widehat{\varphi}d\mu_\psi$.

**Step6**：$\widehat{G}$ 上存在唯一双不变 Haar 测度，使得对任意 $h\in\mathcal{C}_c(G)\cap\mathcal{C}_p(G)$，均有 $h(y)=\int_{\widehat{G}}\widehat{h}(\chi)\chi(y)d\chi$. **证**：我们的目标是寻找 $\mathcal{C}_c(\widehat{G})$ 上的某个合适的正线性泛函. 设 $g\in\mathcal{C}_c(\widehat{G})$，由 Step3 知存在非负函数 $f\in\mathcal{C}_c(G)\cap\mathcal{C}_p(G)$ 使得 $\widehat{f}$ 在 $\mathrm{supp}(g)$ 上严格大于 0. 定义 $I_f(g):=\int_{\widehat{G}}\frac{g}{\widehat{f}}d\mu_f$(这里 $\widetilde{\mu_f}=f$ 由 Step4 给出)，由 Step3 选取的 $f$ 保证了该定义是良好的，即 $I_f(g)\neq\infty$. 如果由另一个函数 $f'$ 给出 $I_{f'}(g)$，则据 Step5 得等式 $\int_{\widehat{G}}\frac{g}{\widehat{f}}d\mu_f=\int_{\widehat{G}}\frac{g}{\widehat{f}\widehat{f'}}\widehat{f'}d\mu_f=\int_{\widehat{G}}\frac{g}{\widehat{f}\widehat{f'}}\widehat{f}d\mu_{f'}=\int_{\widehat{G}}\frac{g}{\widehat{f'}}d\mu_{f'}$，由此知 $I_f(g)$ 不依赖于 $f$ 的选取，故将其简记为 $I(g)$. 易证 $I(g)$ 关于 $g$ 是线性的，且对任意 $g\ge 0$，由于 $\widehat{f}\ge 0$ 且 $\mu_f$ 是正测度，我们有 $I(g)\ge 0$，因此 $I:\mathcal{C}_c(\widehat{G})\to\mathbb{C}$ 是一个正线性泛函 (可以验证 $I\neq 0$). 若设 $\eta\in\widehat{G}$，取适当的 $f\in\mathcal{C}_p(G)\cap L^1(G)$ 在 $\mathrm{supp}(g)\cup\mathrm{supp}(L_\eta g)$ 严格大于 0(保证良好定义)，可以验证 $I(L_\eta g)=\int_{\widehat{G}}\frac{g(\eta^{-1}\chi)}{\widehat{f}(\chi)}d\mu_f(\chi)=\int_{\widehat{G}}\frac{g(\chi)}{\widehat{f}(\eta\chi)}d\mu_f(\eta\chi)=\int_{\widehat{G}}\frac{g(\chi)}{\overline{\eta(\chi)}\widehat{f}(\chi)}d\mu_{\overline{\eta}f}(\chi)=I(g)$，因此 $I$ 还是平移不变的. 应用 Riesz 表示定理得到 $\widehat{G}$ 上存在唯一双不变 Haar 测度 $\widehat{\mu}$ 使得对任意 $g\in\mathcal{C}_c(\widehat{G})$ 均有 $I(g)=\int_{\widehat{G}}gd\widehat{\mu}$. 在测度 $\widehat{\mu}$ 下，任意 $h\in\mathcal{C}_c(G)\cap\mathcal{C}_p(G), g\in\mathcal{C}_c(\widehat{G})$，注意到 $\widehat{h}$ 连续，由 Step5 有 $\int_{\widehat{G}}\widehat{h}gd\widehat{\mu}=I(\widehat{h}g)=\int_{\widehat{G}}gd\mu_h$，因此 $\widehat{h}d\widehat{\mu}=d\mu_h$ 几乎处处成立，故 $\widehat{h}\in L^1(\widehat{G})$. 在这个前提下，可以计算得 $\widehat{\widehat{h}}(y)=\int_{\widehat{G}}\widehat{h}(\chi)\chi(y)d\widehat{\mu}_\chi=\int_{\widehat{G}}\chi(y)d\mu_h=\widetilde{\mu_h}=h(y)$.

**Step7**：$\mathcal{F}(L^1(G)\cap L^2(G))$ 是 $L^2(\widehat{G})$ 的稠密子空间. **证**：设 $g\in L^2(\widehat{G})$ 满足 $g\perp\{\widehat{f}: f\in L^1(G)\cap L^2(G)\}$. 对任意 $f\in L^1(G)\cap L^2(G)$ 以及任意 $y\in G$，有 $0=\int_{\widehat{G}}g\overline{\widehat{L_y f}}d\chi=\int_{\widehat{G}}\chi(y)\overline{\widehat{f}(\chi)}g(\chi)d\chi$. 若记 $d\mu_\chi:=\overline{\widehat{f}(\chi)}g(\chi)d\chi$，则根据 Step4-1 有 $\mu_\chi=0$，于是 $\overline{\widehat{f}}g$ 几乎处处为 0. 此时再利用 Step3 就可以证明 $g$ 几乎处处为 0.

**Step8**：$L^1(G)\cap L^2(G)$ 上的 Fourier 变换透过 $\mathcal{C}_c(G)$ 可唯一地延拓成 Hilbert 空间的酉同构 $\tau: L^2(G)\xrightarrow{\sim}L^2(\widehat{G})$. **证**：设 $f\in\mathcal{C}_c(G)$，则由 Step2 和 Step3 知 $f*f^\sharp\in\mathcal{C}_c(G)\cap\mathcal{C}_p(G)$，且 $\widehat{(f*f^\sharp)}=|\widehat{f}|^2$. 由 Step6 找到 $\widehat{G}$ 上的双不变 Haar 测度，在该测度下有 $\int_G|f(x)|^2dx=f*f^\sharp(\mathrm{i})=\int_{\widehat{G}}\widehat{f*f^\sharp}(\chi)d\chi=\int_{\widehat{G}}|\widehat{f}(\chi)|^2d\chi$，因此映射 $\mathcal{C}_c(G)\to L^2(\widehat{G}), f\mapsto\widehat{f}$ 保持 2-范数，利用稠密性知其可唯一地延拓成等距线性映射 $\tau: L^2(G)\to L^2(\widehat{G}), f\mapsto\widehat{f}$. 等距线性映射显然是单的，而 Step7 告诉我们 $\tau$ 还是满的，继而 $\tau$ 是 Hilbert 空间的等距同构. 由于有等式

$\langle\tau f|\tau g\rangle_{L^2}=\frac{1}{4}(\|\tau f+\tau g\|_2^2-\|\tau f-\tau g\|_2^2+i\|\tau f+i\tau g\|_2^2-i\|\tau f-i\tau g\|_2^2)=\langle f|g\rangle_{L^2}$，我们知道 $\tau$ 还是酉同构，这就完成了证明.■

**声明** 今后凡涉及到对偶群上的分析，选用的测度均是由定理 5.11 给出的对偶测度.

定理 5.11 的证明非构造性证明，因此对偶测度一般没有显式表达. 我们判断对偶群上的某个双不变 Haar 测度是否为对偶测度，根据 Plancherel 定理只需要研究在该测度下是否存在**某个**积分非零 $L^1$ 函数的 Fourier 变换保持 2-范数 (若不然，根据定理 1.15，这个测度离真正的对偶测度只会相差乘一个常数). 换言之，如同注意 1.16，定理 5.11 虽然看上去牛逼，但实际用来构造对偶测度时则捉襟见肘.

回顾定义 5.8，彼时我们并没有定义 $L^2(G)\setminus L^1(G)$ 中函数的 Fourier 变换，而定理 5.11 却直接把 Fourier 变换延拓到了 $L^2(G)$ 上，这使得我们能够借助 $L^2$-空间的特殊性质来处理一些问题. 例如有：

**推论 5.12(Parseval 恒等式)** 对任意 $f,g\in L^2(G)$，我们有 $\int_G f(y)\overline{g(y)}dy=\int_{\widehat{G}}\widehat{f}(\chi)\overline{\widehat{g}(\chi)}d\chi$. 此即定理 5.11 中“酉同构”的直接翻译.

**例** 取 $G:=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$，$\widehat{G}=\mathbb{Z}$. 利用推论 5.12 我们可以得到经典 Fourier 分析中的 Parseval 恒等式：若以 $\widehat{f}^\sharp(n):=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-itn}dt$ 代表可积函数 $f$ 的第 $n$ 个 Fourier 系数，$\widehat{g}^\sharp(n)$ 代表可积函数 $g$ 的第 $n$ 个 Fourier 系数，则 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}dx=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}^\sharp(n)\overline{\widehat{g}^\sharp(n)}$. 特别地有 $\|f\|_2^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}^\sharp(n)|^2=\|\widehat{f}^\sharp(n)\|_2^2$.

**推论 5.13** 设 $f,g\in L^2(G)$. 如果 $f\cdot g\in L^1(G)$，则 $\widehat{f\cdot g}=\widehat{f}*\widehat{g}$(请与定理 5.9 中 $\widehat{f*g}=\widehat{f}\cdot\widehat{g}$ 比较).

**证明** 对任意 $\chi_0\in\widehat{G}$，由推论 5.12 有 $\widehat{f\cdot g}(\chi_0)=\int_G f(y)\overline{\overline{g(y)}\chi_0(y)}dy=\int_{\widehat{G}}\widehat{f}(\chi)\widehat{g}(\chi^{-1}\chi_0)d\chi=\widehat{f}*\widehat{g}(\chi_0)$.■

**推论 5.14(Fourier 反演)** 定理 5.11 中酉同构 $\tau$ 的逆映射即定义 5.8 中定义的 Fourier 逆变换. 换句话说，若 $f\in L^1(G)$ 且 $\widehat{f}\in L^1(\widehat{G})$，那么 $\widehat{\widehat{f}}=f$ 在 $G$ 上几乎处处成立；若 $f\in L^2(G)$，那么 $\widehat{\widehat{f}}=\tau^{-1}\tau(f)=f$. 特别地，可以证明 Fourier 变换及其逆变换给出了双射 $\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\mathcal{C}_p(G)\}\cap L^1(G)\overset{\sim}{\longleftrightarrow}\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\mathcal{C}_p(\widehat{G})\}\cap L^1(\widehat{G})$(见 [1] 推论 3.19 和 [1]Chapter3.4).

**证明** 如果 $f\in L^1(G)\cap L^2(G)$ 满足 $\widehat{f}\in\mathcal{C}_c(\widehat{G})$，则对任意 $g\in\mathcal{C}_c(G)$，由推论 5.12 和定义 5.8 有 $\int_G f\overline{g}dx=\int_{\widehat{G}}\widehat{f}\overline{\widehat{g}}d\chi=\int_G\overline{g(y)}(\int_{\widehat{G}}\widehat{f}(\chi)\chi(y)d\chi)dy=\int_G\widehat{\widehat{f}}\overline{g}dx$.■

**推论 5.15** $\mathcal{F}(L^1(G))$ 中的元素一定可表成 $L^2(\widehat{G})$ 中两个函数的卷积；反过来，$L^2(\widehat{G})$ 中两个函数的卷积一定落在 $\mathcal{F}(L^1(G))$ 中.

**证明** 若 $h\in L^1(G)$，则存在 $f,g\in L^2(G)$ 使得 $f\cdot g=h\Big($例如 $h=p\cdot|p|$，其中 $p(x)=\begin{cases}\frac{h(x)}{\sqrt{|h(x)|}} & h(x)\neq0\\ 0 & h(x)=0\end{cases}\in L^2(G)\Big)$. 此时有 $\widehat{h}=\widehat{f}*\widehat{g}$. 反过来，由定理 5.11 知 $L^2(\widehat{G})$ 中的函数形如 $\widehat{f}$，其中 $f\in L^2(G)$. 对于 $\widehat{f},\widehat{g}\in L^2(\widehat{G})$，根据 Hölder 不等式有 $f\cdot g\in L^1(G)$，再由推论 5.13 立得 $\widehat{f\cdot g}=\widehat{f}*\widehat{g}\in\mathcal{F}(L^1(G))$.■

作为本节最重要的定理之一，我们给出 Pontryagin 对偶定理及其证明.

**定理 5.16(Pontryagin 对偶)** 设 $G$ 是局部紧 Abel 群，则由命题 5.5(4) 知 $\widehat{G}$ 也是局部紧 Abel 群. 此时有拓扑群同构 $\alpha:G\to\widehat{\widehat{G}},\alpha(y)(\chi):=\chi(y)$.

**证明** **Step1**：对任意 $y\in G$，$\alpha(y)\in\widehat{\widehat{G}}$(即 $\alpha(y):\widehat{G}\to S^1,\chi\mapsto\chi(y)$ 是连续同态). **证**：由命题 5.5(1)，适当选取紧集 $K$ 满足 $\chi_{\mathrm{tri}}\in W_{K,N(1)}\subseteq\{\chi\in\widehat{G}:\chi(y)\in N(1)\}=(\alpha(y))^{-1}(N(1))$ 即可.

**Step2**：$\alpha$ 是单的. **证**：这是定理 4.11 的直接推论，因为 $G$ 的特征标恰来自于拓扑不可约的酉拓扑表示.

**Step3**：设 $H$ 是局部紧群 $G$ 的子群. 如果 $H$ 在配备了子空间拓扑之后是局部紧的，则 $H$ 是 $G$ 的闭子群. **证**：若 $H$ 局部紧，则存在开邻域 $\mathrm{i}\in U\subseteq G$ 使得 $\overline{U\cap H}\subseteq H$ 是紧集. 又由于 $\overline{U\cap H}$ 在 $G$ 中也是紧集，根据 [4] 推论 7.2.2 知其还是 $G$ 中的闭集，因此 $\overline{U\cap H}$ 也是 $U\cap H$ 在 $G$ 中的闭包. 现设 $x\in\overline{H}$. 取对称邻域 $\mathrm{i}\in V\subseteq G$ 使得 $VV\subseteq U$，取 $\{x_n\}\subseteq xV\cap H$ 使得 $x_n\to x$. 由命题 1.3(3) 知 $\overline{H}$ 是子群，故 $x^{-1}\in\overline{H}$，所以 $Vx^{-1}\cap H\neq\varnothing$. 取 $y\in Vx^{-1}\cap H$，显然有 $yx_n\in(Vx^{-1})(xV)=VV\subseteq U\cap H$. 由于 $yx_n\to yx$，故 $yx\in\overline{U\cap H}\subseteq H$，因此 $x=y^{-1}(yx)\in H$.

**Step4**：$\alpha:G\to\alpha(G)$ 是同胚，因此 $\alpha(G)$ 局部紧. **证**：对 $\chi_{\mathrm{tri}}\in\widehat{G}$ 的一个紧邻域 $\widehat{K}$ 以及 $1\in S^1$ 的开邻域 $V$，可以验证有等式 $\alpha(\alpha^{-1}(W_{\widehat{K},V})\cap G)=W_{\widehat{K},V}\cap\alpha(G)$，因此在 $\mathrm{i}\in G$ 或 $\alpha(\mathrm{i})\in\alpha(G)$ 处 $\alpha$ 或 $\alpha^{-1}$ 连续，再利用平移变换 (注意 1.2) 将该连续性扩充到整个 $G$ 或 $\alpha(G)$ 即可.

**Step5**：$\alpha$ 是满的. **证**：反证法，设 $x\in\widehat{\widehat{G}}\setminus\alpha(G)$. 由 Step3 和 Step4 知 $\alpha(G)\subseteq\widehat{\widehat{G}}$ 是闭子群. 取 $\widehat{\widehat{G}}$ 中 $\mathrm{i}$ 的一个对称邻域 $V$ 使得 $xVV\cap\alpha(G)=\varnothing$，按定理 5.11 中 Step3 的办法取非负函数 $0\neq\phi,\psi\in\mathcal{C}_c(\widehat{\widehat{G}})$ 满足 $\mathrm{supp}(\phi)\subseteq xV,\mathrm{supp}(\psi)\subseteq V$. 显然 $\phi*\psi\neq0$ 且 $\mathrm{supp}(\phi*\psi)\cap\alpha(G)=\varnothing$(注意 $\mathrm{supp}(\phi*\psi)\subseteq$

$\mathrm{supp}(\phi)\cdot\mathrm{supp}(\psi)\subseteq xVV$). 由推论 5.15，存在 $h\in L^1(\widehat{G})$ 使得 $\phi*\psi=\widehat{h}$. 但由于对任何 $y\in G$ 均有 $0=\widehat{h}(\alpha(y^{-1}))=\int_{\widehat{G}}h(\chi)\alpha(y)(\chi)d\chi=\int_{\widehat{G}}\chi(y)h(\chi)d\chi$，因而 $h=0$，自然也有 $\widehat{h}=\phi*\psi=0$，矛盾.■

接下来将要介绍自守形式理论中颇为重要的 Poisson 求和公式，它本质上是联系子群 $H$ 和商群 $G/H$ 的对偶. 先约定记号：设 $G$ 是局部紧 Abel 群，如果 $H$ 是 $G$ 的闭子群，则记 $H^\perp:=\{\chi\in\widehat{G}:\forall y\in H,\chi(y)=1\}$. 根据命题 5.5(2) 可以证明 $H^\perp$ 是 $\widehat{G}$ 的闭子群 (由于 $G$ 是 Abel 群，所以这里出现的子群均是正规的).

**引理 5.17** 设 $G$ 是局部紧 Abel 群. 对任何 $G$ 的闭子群 $H$，有：(1) 运算 $(\cdot)^\perp$ 反转包含关系，特别地有 $(H^\perp)^\perp=H$. 因此根据定理 5.16 可以发现 $(\cdot)^\perp:\{G\text{的闭子群}\}\xrightarrow{\sim}\{\widehat{G}\text{的闭子群}\}$ 是一个广义 Galois 对应；(2) 映射 $\Phi:\widehat{G/H}\xrightarrow{\sim}H^\perp,\chi\mapsto\chi\circ(G\xrightarrow{\mathrm{proj}}G/H)$、$\Psi:\widehat{G}/H^\perp\to\widehat{H},\chi H^\perp\mapsto\chi|_H$ 均给出拓扑群的同构.

**推论 5.18(Poisson 求和公式)** 设 $H$ 是局部紧 Abel 群 $G$ 的闭子群. 对于 $f\in\mathcal{C}_c(G)$，定义 $F(xH):=\int_H f(xy)dy\in\mathcal{C}_c(G/H)$. 若将 $\widehat{G/H}$ 与 $H^\perp$ 等同 (引理 5.17)，则有 $\widehat{F}=\widehat{f}|_{H^\perp}$. 此外，如果还要求 $\widehat{f}|_{H^\perp}\in L^1(H^\perp)$，则在合适的 Haar 测度下有 $\int_H f(yt)dt=\int_{H^\perp}\widehat{f}(\chi)\chi(y)d\chi$.

**证明** 若 $\chi\in H^\perp$，则对任意 $y\in H$ 均有 $\chi(xy)=\chi(x)$. 因此 $\widehat{F}(\chi)=\int_{G/H}\int_H f(xy)\overline{\chi(xy)}dyd(xH)=\int_G f(x)\overline{\chi(x)}dx=\widehat{f}(\chi)$. 此外，若还有 $\widehat{f}|_{H^\perp}\in L^1(H^\perp)$，则根据推论 5.14 可推得后半部分.■

**例** 取 $G:=(\mathbb{R},+),H:=\mathbb{Z}$，则 $\widehat{G}=\mathbb{R},H^\perp=\mathbb{Z}$. 此时推论 5.18 即 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(x+n)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)e^{inx}$. 特别当 $x=0$ 时有 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(n)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)$.

## 6、回顾代数数论

此处不加证明地罗列一些代数数论方面的基本概念 (相应的证明在任何一本代数数论教材中都可以找到)，以保证本文结构的完整. 这些理论将会在第 7 节中用到.

**定义 6.1(赋值环与 Dedekind 整环)** 设 $A$ 是整环，记它的分式域为 $K$(下同).

(1) 若对任意 $x\in K$，$x\in A$ 和 $x^{-1}\in A$ 必有一者成立，则称 $A$ 是一个**赋值环**.

(2) 若 $A$ 是仅有唯一非零素理想的主理想整环，则称 $A$ 是一个**离散赋值环**.

(3) 若 $A$ 是 Noether 整闭整环，且每个非零素理想均极大，则称 $A$ 为 **Dedekind 整环**.

Dedekind 整环是 $\mathbb{Z}$ 的某种推广. 具体的讲，它推广了 $\mathbb{Z}$ 上的算术：

**定理 6.2(算术基本定理)** 设 $A$ 是 Dedekind 整环，则任何理想 $\mathfrak{a}\neq(1)$ 可唯一地分解为 $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}_1^{r_1}\cdots\mathfrak{p}_n^{r_n}$，其中 $\mathfrak{p}_i\in\mathrm{spec}(A)$ 两两不同且 $r_i\in\mathbb{Z}_{>0}$.

接下来我们将解释定义 6.1 中“赋值”一词的含义.

**定义 6.3(赋值)** 设 $K$ 是一个域，$(\Gamma,+,\geq)$ 是一个全序 Abel 群. 考虑集合 $\Gamma^*:=\Gamma\cup\{\infty\}$，定义 $\Gamma^*$ 中涉及 $\infty$ 的序关系和运算为 $\infty\geq a,\infty+a=a+\infty=\infty(\forall a\in\Gamma)$. 域 $K$ 的一个**赋值**是指一个映射 $v:K\to\Gamma^*$，满足：(1)$v(a)=\infty$ 当且仅当 $a=0$；(2)$v|_{K^\times}:K^\times\to\Gamma$ 是一个非零 Abel 群同态；(3)$v(a+b)\geq\min\{v(a),v(b)\}$.

设 $v:K\to\Gamma^*$ 是一个赋值，定义 $K$ 的**值群**为 $v(K^\times)$，这是 $\Gamma$ 的一个加法子群；定义 $K$ 的**赋值环**为 $\{x\in K:v(x)\geq 0\}$，它有唯一极大理想 $\{x\in K:v(x)>0\}$，称赋值环模去该极大理想得到的域为 $K$ 的**剩余域**.

特别地，若值群 $v(K^\times)$ 同构于 $\mathbb{Z}$ 的某个加法子群，则称这时的赋值为**离散赋值**.

与赋值相呼应，我们有“绝对值”的概念. 不同于第 2 节，“绝对值”可以给出构造 $p$-进整数环的另一个办法——把它看成域 $\mathbb{Q}$ 在某个“度量”下完备化之后的域的“整数环”. 当然我们得先给出“度量”的概念：

**定义 6.4(绝对值)** 设 $K$ 是一个域，$K$ 上的一个**绝对值**是指函数 $|\cdot|:K\to\mathbb{R}_{\geq 0},x\mapsto|x|$，满足：(1、正定性)$|x|\geq 0$，$|x|=0$ 当且仅当 $x=0$；(2、齐次性)$|xy|=|x||y|$；(3、三角不等式)$|x+y|\leq|x|+|y|$. 条件 (1)、(2) 告诉我们绝对值 $|\cdot|$ 诱导了同态 $K^\times\to\mathbb{R}_{>0}$，因此 $|\cdot|$ 将 $K^\times$ 中的任何单位根映为 1. 显见，绝对值诱导了 $K$ 上的度量 $d(x,y):=|x-y|$. 此外，如果绝对值 $|\cdot|$ 还满足条件 (3) 的加强版：$|x+y|\leq\max\{|x|,|y|\}$，则称其为 **non-Archimedean 绝对值**，相应诱导的度量则称为 **non-Archimedean 度量**. 显然对于 non-Archimedean 度量有三角不等式：$d(x,y)\leq\max\{d(x,z),d(y,z)\}\leq d(x,z)+d(y,z)$.

所谓 **Archimedean 绝对值 (度量)** 即非 non-Archimedean 的绝对值 (度量)，其最简单的例子就是通常意义下的绝对值 (不妨记作 $|\cdot|_\infty$).

**注意 6.5** 容易发现绝对值的定义与范数无异，采用“绝对值”的称呼只是为了和代数数论中域扩张的“范数”加以区分.

**注意 6.6** 离散赋值可以诱导绝对值$\big(v \Rightarrow |\cdot|_v := t^{-v(\cdot)}\big)$，反之亦然$\big(|\cdot| \Rightarrow v(\cdot) := -\log_t |\cdot|\big)$. 这里 $t \in \mathbb{R}_{>1}$. 因此可以用绝对值的语言重新描述赋值环等相关研究对象：

(1) 域 $K$ 的赋值环为 $\{x \in K : v(x) \geq 0\} = \{x \in K : |x|_v \leq 1\}$；

(2) 赋值环有唯一极大理想 $\{x \in K : v(x) > 0\} = \{x \in K : |x|_v < 1\}$；

(3) 赋值环中的单位为 $\{x \in K : v(x) = 0\} = \{x \in K : |x|_v = 1\}$.

**例 ($p$-进数域)** 设 $p$ 是素数 (下同). 对任意 $r \in \mathbb{Q}$，均存在 $k_r, s_r, t_r \in \mathbb{Z}$ 使得 $r = p^{k_r}\frac{s_r}{t_r}$，其中 $(s_r, p_r) = (t_r, p_r) = 1$. 定义**$p$-进绝对值**为 $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, 0 \mapsto 0, r \mapsto p^{-k_r}$. 例如 $|\frac{2}{3}|_5 = 1, |\frac{25}{18}|_3 = 9, |4|_2 = \frac{1}{4}$. 可以证明，$|\cdot|_p$ 是一个 non-Archimedean 绝对值 (见 [12] 引理 4.1.3). 数域 $\mathbb{Q}$ 关于该绝对值诱导度量的完备化称为**$p$-进数域** (或 $\mathbb{Q}$ 的 $p$-进完备化)，记作 $\mathbb{Q}_p$.

**注意 6.7** 我们总结一下迄今为止出现的所有关于 $p$-进 (整) 数的构造.

• **$p$-进整数环** (不可数、$T_2$、紧且完全不连通)：

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \xlongequal{\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i p^i \leftrightarrow (a_0 + p\mathbb{Z}, a_0 + a_1 p + p^2\mathbb{Z}, \cdots)} \left\{\sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i : 0 \leq a_i < p\right\} \xlongequal{[2]\text{ 命题 } 2.2.6} \mathbb{Z}[[x]]/(x-p)$$

$$\xlongequal{[2]\text{ 命题 } 2.2.3} \mathbb{Z}\text{在}(\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)\text{中的拓扑闭包} \xlongequal{|x+y| \leq \max\{|x|,|y|\}} \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\} := \mathscr{O}_{|\cdot|_p}.$$

• **$p$-进数域** (不可数、$T_2$、局部紧且完全不连通)：

$$\mathbb{Q}_p = \overline{(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)} \xlongequal{[5]\text{ 例 } 5.19} \mathrm{Frac}(\mathbb{Z}_p) \xlongequal{p^{-i}\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq p^i\}} \bigcup_{i=0}^{\infty} p^{-i}\mathbb{Z}_p = \left\{\sum_{i=-N}^{\infty} a_i p^i : N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, 0 \leq a_i < p\right\}.$$

设 $|\cdot|$ 是 $K$ 上的一个绝对值且 $K$ 在 $|\cdot|$ 下完备. 称子环 $\mathscr{O}_{|\cdot|} := \{x \in K : |x| \leq 1\}$ 为 $K$ 关于绝对值 $|\cdot|$ 的**整数环**. 根据注意 6.6，这实际上是 $K$ 按绝对值 $|\cdot|$ 的赋值环 (因此是局部整闭整环，记它的唯一极大理想为 $\mathfrak{m}_{|\cdot|}$). 应该留意，这里的 $\mathscr{O}$ 并非指经典的代数整数环 (它是代数整数环 $\mathcal{O}$ 这个概念的推广，因为此处需要考虑完备化的影响. 实际上可以证明 $\mathbb{Z} = \bigcap_{p<\infty}(\mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q})$，故称 $\mathscr{O}$ 为完备化意义下的“整数环”是相当合理的). 譬如说若 $K = \mathbb{Q}_p$，作为集合 $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p}$ 可数但 $\mathscr{O}_{|\cdot|_p}$ 不可数.

回到定义 6.3，彼时只给出了赋值的定义，并没有说明它和赋值环的关系. 现说明如下：

**命题 6.8** (1) 环 $A$ 是离散赋值环当且仅当它是局部 Dedekind 整环；

(2) 整环 $A$ 是赋值环当且仅当存在满的赋值映射 $v : K \to \Gamma^*$ 使得 $A$ 是 $K$ 的赋值环；

(3) 整环 $A$ 是离散赋值环当且仅当存在离散赋值 $v : K \to \mathbb{Z}^*$ 使得 $A$ 是 $K$ 的赋值环；

(4) 设 $A$ 是离散赋值环，由 (3) 给出离散赋值 $v : K \to \mathbb{Z}^*$. 定义新的赋值映射 $v' : K \to \mathbb{Z}^*, x \mapsto \frac{v(x)}{|\mathbb{Z}/v(K^\times)|}$，显然这是满射$\big($称这样的 $v'$ 为**标准离散赋值**. 此时满足 $v'(\varpi) = 1$ 的 $\varpi$ 称为**单值化子** (uniformizer)$\big)$，因此根据 (2) 知离散赋值环都是赋值环.

**例** 设 $\mathcal{M}_X$ 是紧 Riemann 曲面 $X$ 的亚纯函数域. 任给 $p \in X$，定义 $\mathcal{M}_X$ 上的离散赋值为 $\mathrm{ord}_p(f) := f$ 在 $p$ 处 Laurent 展开的最低次. 这是一个标准离散赋值. 应该留意，根据注意 6.6，若记 $\mathcal{M}_X$ 在离散赋值 $\mathrm{ord}_p$ 下的赋值环为 $\mathscr{O}_p$，则 $X$ 的全纯函数环 $\mathcal{O}_X = \bigcap_{p \in X} \mathscr{O}_p$. 这个形式可以推广到整体域及其素点上，见命题 6.16.

**例** 设局部 Dedekind 整环 $A$ 有唯一非零素主理想 $\mathfrak{p} := (\varpi)$，$a \in A$. 由定理 6.2 知存在 $v(a) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 使得 $(a) = \mathfrak{p}^{v(a)}$，因此任何 $A$ 中的元素 $a$ 都可表成 $a = \epsilon\varpi^{v(a)}$，其中 $\epsilon \in A^\times$. 很自然地，对于分式域 $K$ 定义 $x = \frac{a}{b} \in K$ 的赋值为 $v(x) := v(a) - v(b)$，这样就找到了 $K$ 的一个标准离散赋值.

此处我们可以在某种意义下推广中国剩余定理，得到弱逼近定理. 当然也有强逼近定理，见定理 7.12. 设 $A$ 是 Dedekind 整环，根据定理 6.2，由于任何 $a \in A$ 生成的主理想总有唯一分解 $(a) = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{spec}(A)} \mathfrak{p}^{r_\mathfrak{p}(a)}\big($至多有限个 $r_\mathfrak{p}(a) \neq 0\big)$，故仿上例可定义 $x = \frac{a}{b} \in K$ 在素理想 $\mathfrak{p}$ 处的离散赋值为 $v_\mathfrak{p}(x) := r_\mathfrak{p}(a) - r_\mathfrak{p}(b)$，相对应的绝对值则为 $|x|_\mathfrak{p} := e^{-v_\mathfrak{p}(x)}$(这里不妨取 $e$ 为自然对数的底数).

**定理 6.9(弱逼近)** 设 $x_1, \cdots, x_n$ 是 Dedekind 整环 $A$ 中的元素，$\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$ 为 $A$ 的两两互素的素理想. 任给正整数 $n$，总存在 $x \in A$ 使得对任意 $i = 1, \cdots, n$ 均有 $v_{\mathfrak{p}_i}(x - x_i) > n$.

换句话说，设 $|\cdot|_1, \cdots, |\cdot|_n$ 为 $K$ 上 $n$ 个两两不等价的绝对值$\big($称域 $K$ 上的两个绝对值 $|\cdot|, |\cdot|'$ **等价**，如果任何 $|\cdot|$ 诱导度量下的 Cauchy 序列当且仅当是 $|\cdot|'$ 诱导度量下的 Cauchy 序列$\big)$，则对任意 $x_1, \cdots, x_n \in K$，

任意 $\epsilon>0$，总存在 $x\in K$ 使得对任意 $i=1,\cdots,n$ 均有 $|x-x_i|_i<\epsilon$.

**证明** 显见 $\mathfrak{p}_i^{n+1}$ 两两互素，由中国剩余定理知存在 $x\in A$ 使得 $x\equiv x_i(\operatorname{mod}\mathfrak{p}_i^{n+1})$，即 $v_{\mathfrak{p}_i}(x-x_i)>n$.■

像上面这样体现局部—整体之间联系的现象在代数数论当中还有很多. 譬如我们最为关心的研究对象：

**定义 6.10(局部域、整体域)** 域 $K$ 称为**局部域** (local field)，如果存在非平凡绝对值使得 $K$ 在该绝对值诱导的度量下是局部紧的 (根据命题 1.11 知此时 $K$ 还是完备的). 局部域的分类如下：(1)Archimedean 局部域、特征 0：$\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$；(2)non-Archimedean 局部域、特征 0：$\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张；(3)non-Archimedean 局部域、特征 $p>0$：$\mathbb{F}_q((t)):=\mathrm{Frac}(\mathbb{F}_q[[t]])$.

局部域来自于整体域的完备化. 域 $K$ 称为**整体域** (global field)，如果 $K$ 是如下两类域扩张之一：(1) $K/\mathbb{Q}$ 是有限扩张；(2)$K/\mathbb{F}_q(t)$ 是有限扩张，这里 $t$ 是 $\mathbb{F}_q$ 上的超越元.

特别地，称 $\mathbb{Q}$、$\mathbb{F}_q(t)$ 为**素整体域**. 研究这两类整体域的算术性质是算术几何的核心问题 (实际上讨论 $\mathbb{Q}$ 上的问题要更加困难一些，因为这种情况下对应的几何具有某种“刚性”).

**定义 6.11(素点)** 设 $K$ 是一个整体域. 所谓域 $K$ 上的一个**素点** (place. 本文中一般用 $v$ 来表示素点)，是指某个绝对值所在的等价类. 更精确的，与 non-Archimedean 绝对值等价的叫**有限素点** (记作 $v<\infty$)，其余的则叫**无穷素点** (记作 $v\in\infty$).

接下来这个定理给出了素整体域上所有素点的描述 (证明见 [1] 定理 4.30，此处不再赘述)：

**定理 6.12(Ostrowski)** (1)$\mathbb{Q}$ 上的绝对值必等价于 $|\cdot|_p$($p$ 是素数) 或 $|\cdot|_\infty$ 之一. 换言之，$\mathbb{Q}$ 的素点即每个素数 $p$ 确定的有限素点 $|\cdot|_p$ 与 $\infty$ 确定的无穷素点 $|\cdot|_\infty$. (2)$\mathbb{F}_q(t)$ 的素点即不可约多项式 $P(t)\in\mathbb{F}_q[t]$ 确定的有限素点 $\left|\frac{f}{g}\right|_P:=q^{-\deg(P)\cdot a}$(这里 $\frac{f}{g}=P^a\frac{u}{v},P\nmid u,P\nmid v$)与 $\infty$ 确定的无穷素点 $\left|\frac{f}{g}\right|_\infty:=q^{\deg(f)-\deg(g)}$.

不出意外，整体域上的有限素点可由素理想描述. 一般地，我们有如下定理：

**定理 6.13** 设 $K$ 是整体域，则 $K$ 上的素点都来自于下述几种情形之一：

• 如果 $K/\mathbb{Q}$ 是有限扩张，则：

(1.1) 任何非零素理想 $\mathfrak{p}\in\mathrm{spec}(\mathcal{O}_K)$ 都唯一地对应了 $K$ 的一个有限素点 $|\cdot|_\mathfrak{p}:=|\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}|^{-v_\mathfrak{p}(\cdot)}$；

(1.2) 任何实嵌入 $\sigma:K\hookrightarrow\mathbb{R}$ 都唯一地对应了 $K$ 的一个无穷素点 $|\cdot|_\infty:=|\sigma(\cdot)|$；

(1.3) 任何一对互相共轭的复嵌入 $\sigma,\overline{\sigma}:K\hookrightarrow\mathbb{C}$ 都唯一地对应了 $K$ 的一个无穷素点 $|\cdot|_\infty:=\sigma(\cdot)\overline{\sigma(\cdot)}$. 注意，此处的绝对值并不满足三角不等式. 但由于它与绝对值 $\sqrt{\sigma(\cdot)\overline{\sigma(\cdot)}}$ 诱导的拓扑一致，并且为了之后的结论更加简洁(例如取 $K=\mathbb{C}$ 时，若记 Lebesgue 面积测度为 $dz$，则 $d(rz)=r^2dz$，此时测度 $\frac{dz}{z\overline{z}}$ 关于乘法平移不变)，我们仍把它看成绝对值.

•(见 [22]Chapter3.2) 如果 $K/\mathbb{F}_q(t)$ 是有限扩张，$A,B$ 分别为 $\mathbb{F}_q[t],\mathbb{F}_q[t^{-1}]$ 在 $K$ 中的整闭包 (可以证明 $A,B$ 均是 Dedekind 整环)，设主理想 $(t^{-1})$ 在 $B$ 中有分解 $(t^{-1})B=\mathfrak{q}_1^{t_1}\cdots\mathfrak{q}_g^{t_g}(g<\infty,\mathfrak{q}_i\in\mathrm{spec}(B))$，则：

(2.1) 任何非零素理想 $\mathfrak{p}\in\mathrm{spec}(A)$ 都唯一地对应了 $K$ 的一个有限素点 $|\cdot|_\mathfrak{p}:=|A/\mathfrak{p}|^{-v_\mathfrak{p}(\cdot)}$；

(2.2) 这 $g$ 个素理想 $\mathfrak{q}_i\in\mathrm{spec}(B)$ 分别唯一地对应了 $K$ 的 $g$ 个无穷素点 $|\cdot|_{\mathfrak{q}_i}=|B/\mathfrak{q}_i|^{\deg(\cdot)}$.

上述列举出的绝对值均称为**标准绝对值**. 此外，由于局部域来自于整体域在某个绝对值下的完备化，故这些标准绝对值可以自然延拓成相应局部域上的标准绝对值.

当然，我们还关心素点/绝对值/赋值的提升或限制问题. 对此我们有如下结论：

**命题 6.14(提升)** 设 $L/K$ 是有限扩张，称 $L$ 上的绝对值 $|\cdot|_L$ 是 $K$ 上绝对值 $|\cdot|_K$ 的**提升**，如果对任意 $x\in K$ 均有 $|x|_L=|x|_K$. 我们有：

(1) 设 $K$ 在 $|\cdot|_K$ 下完备且 $L/K$ 是 $n$ 次有限扩张，则在 $L$ 上存在唯一 $|\cdot|_K$ 的提升 $|\cdot|_L:=|\mathrm{Norm}_{L/K}(\cdot)|_K^{\frac{1}{n}}$. 特别地，若 $L/K$ 分别在标准绝对值 $|\cdot|_L,|\cdot|_K$ 下完备，则有关于标准绝对值的提升 $|\cdot|_L=|\mathrm{Norm}_{L/K}(\cdot)|_K$.

(2) 若 $K$ 在 $|\cdot|_K$ 下不完备且 $L/K$ 是 $n$ 次可分扩张，则 $|\cdot|_K$ 至多有 $n$ 种提升到 $L$ 上绝对值的方式 (不妨设有 $J\le n$ 种). 若记 $\overline{K}$ 为 $K$ 在 $|\cdot|_K$ 下的完备化，且对 $|\cdot|_K$ 的某个提升 $|\cdot|_{L,i}(1\le i\le J)$，记 $L$ 在 $|\cdot|_{L,i}$ 下的完备化为 $\overline{L_i}$，则有 $\bigoplus_{1\le i\le J}\overline{L_i}\cong\overline{K}\otimes_K L$.

(3) 设 $L/K$ 是可分扩张，$|\cdot|_K$ 是 $K$ 上的一个标准绝对值. 若记标准绝对值 $|\cdot|_{L,i}(1\le i\le J)$ 来自于 $|\cdot|_K$ 的 $J$ 种互不等价的提升，则对任意 $x\in L$，有 $\prod_{1\le i\le J}|x|_{L,i}=|\mathrm{Norm}_{L/K}(x)|_K$.

可以将这些结论转化成素点的语言：设 $L/K$ 是 $n$ 次有限扩张，$w,v$ 分别是 $L,K$ 上的素点. 称 $w$ **整除**$v$(记作 $w|v$)，如果 $w$ 代表的绝对值限制到 $K$ 上与 $v$ 等价. 若记 $K,L$ 在素点 $v,w$ 处的完备化分别为 $K_v,L_w$，相应的整数环分别为 $\mathscr{O}_v,\mathscr{O}_w$，记 $\widetilde{L_v}:=\bigoplus_{w|v}L_w,\widetilde{\mathscr{O}_v}:=\bigoplus_{w|v}\mathscr{O}_w$，则：

(4) 对于数域 $K,L$ 上满足 $w|v$ 的任何有限素点 $v,w$，由定理 6.13(1.1) 知 $v,w$ 分别唯一地对应了某个素理想 $\mathfrak{p}_v\in\mathrm{spec}(\mathcal{O}_K),\mathfrak{P}_w\in\mathrm{spec}(\mathcal{O}_L)$. 此时有 $\mathfrak{P}_w\cap\mathcal{O}_K=\mathfrak{p}_v$.

(5) 对于数域 $K,L$ 上满足 $w|v$ 的任何无穷素点 $v,w$，由定理 6.13(1.2,1.3) 知 $w$ 对应了某个嵌入 $L\overset{\sigma}{\hookrightarrow}\mathbb{C}$，使得 $\sigma$(或 $\overline{\sigma}$) 提升了 $v$ 对应的嵌入.

(6) 若 $L/K$ 可分，则由命题 6.14(2) 知 $\widetilde{L_v}\cong K_v\otimes_K L$.

(7) 若 $w|v$，则有嵌入 $K_v\hookrightarrow L_w\hookrightarrow\widetilde{L_v}$ 使 $\widetilde{L_v}$ 成为一个交换 $K_v$-代数，其维数为 $\sum_{w|v}[L_w:K_v]=n$.

**例** 考虑 2-次扩张 $\mathbb{C}/\mathbb{R}$，此时 $|x+iy|_{\mathbb{C}}:=|\mathrm{Norm}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(x+iy)|_{\mathbb{R}}^{1/2}=\sqrt{x^2+y^2}$(非标准).

**命题 6.15(乘积公式)** 设 $K$ 是整体域，$0\neq x\in K$，则当 $|\cdot|_v$ 跑遍 $K$ 的所有标准绝对值时，$|x|_v=1$ 几乎处处成立，且 $\prod|x|_v=1$.

**证明** 仅证数域情形.

**Step1**：在等价的意义下至多只有有限多个 $K$ 的绝对值 $|\cdot|_1,\cdots,|\cdot|_n$ 使得 $|x|_i>1(i=1,\cdots,n)$. **证**：若 $K=\mathbb{Q}$，则由定理 6.12 知命题显然成立(注意到 $\frac{n}{d}\in\mathbb{Q}$ 且 $\left|\frac{n}{d}\right|_p>1$ 蕴含 $p|d$). 现设 $K/\mathbb{Q}$ 是有限扩张，则 $x$ 满足方程 $x^n+r_{n-1}x^{n-1}+\cdots+r_0=0(r_i\in\mathbb{Q})$. 设 $|\cdot|$ 来自于 $\mathbb{Q}$ 上绝对值 $|\cdot|_p$ 的提升使得 $1<|x|=|x|^{1-n}\cdot|-(r_{n-1}x^{n-1}+\cdots+r_0)|\le\max\{|x|^{1-n},1\}\cdot\max\limits_{0\le i\le n-1}\{|r_i|_p\}\le\max\limits_{0\le i\le n-1}\{|r_i|_p\}$，即存在 $i$ 使得 $|r_i|_p>1$. 若有无穷多个 $|\cdot|$ 使得 $|x|>1$，则至少有某个 $r_i$ 对无穷多个 $p$ 满足 $|r_i|_p>1$，矛盾.

**Step2**：乘积公式成立. **证**：由 Step1 知几乎所有的 $|x|_v\le1$，同样 $\frac{1}{|x|_v}=\left|\frac{1}{x}\right|_v\le1$ 对几乎所有的 $v$ 成立，故 $|x|_v=1$ 几乎处处成立. 现设 $w$ 跑遍素整体域 $\mathbb{Q}$ 的所有素点，取对应的标准绝对值为 $|\cdot|_w$，则由命题 6.14(3) 知 $\prod_v|x|_v=\prod_w\left(\prod_{v|w}|x|_v\right)=\prod_w|\mathrm{Norm}_{K/\mathbb{Q}}(x)|_w$，如此问题化归为只要证 $K=\mathbb{Q}$ 的情况：设有素数分解 $x=p_1^{t_1}\cdots p_n^{t_n}$，显然 $\prod_w|x|_w=|x|\cdot\prod_{p<\infty}|x|_p=1$.■

在代数几何中，如果 $A$ 是 Dedekind 整环，$\mathcal{O}_{\mathrm{spec}(A)}$ 是 $\mathrm{spec}(A)$ 上的结构层，则有 $\Gamma\big(\mathrm{spec}(A),\mathcal{O}_{\mathrm{spec}(A)}\big)=A=\bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathrm{spec}(A)}A_{\mathfrak{p}}$，即整体截面 (global section) 是所有茎 (stalk) 的交. 类比这种关系我们有如下结论：

**命题 6.16** 设 $K$ 是一个整体域，定义 $K$ 的**整数环**为 $\mathscr{O}_K:=\bigcap\limits_{v<\infty}\{x\in K:|x|_v\le1\}=\bigcap\limits_{v<\infty}(\mathscr{O}_v\cap K)$，则：

(1)$\mathscr{O}_K$ 是 Dedekind 整环.

(2) 若 $\mathrm{char}(K)=0$，则 $\mathscr{O}_K=\mathcal{O}_K$，即 $\mathscr{O}_K$ 等于 $\mathbb{Z}$ 在 $K$ 中的整闭包；若 $\mathrm{char}(K)>0$，则 $\mathscr{O}_K$ 等于 $\mathbb{F}_q[t]$ 在 $K$ 中的整闭包.

在代数数论中，一个数域的代数整数环一定是 Dedekind 整环但不一定是主理想整环 (例如 $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]}=\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$)，这使得 Kummer 最终不能使用他的理论来完整证明 Femart 最后定理. 而衡量一个 Dedekind 整环离主理想整环还差多远的指标，就是我们即将介绍的理想类群：

**命题 6.17(理想类群)** 设 $A$ 是一个 Dedekind 整环.$A$ 的一个**分式理想** (fractional ideal) 是指 $A$-模 $K$ 的一个非零 $A$- 子模 $\mathfrak{a}$，满足存在 $0\neq d\in K$ 使得 $d\mathfrak{a}\subseteq A$. 对任意 $0\neq b\in K$，定义分式理想 $(b):=\{ba:a\in A\}$，称形如此的分式理想为**分式主理想**. 若定义两个分式理想的运算为 $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}:=\left\{\sum_i a_ib_i:a_i\in\mathfrak{a},b_i\in\mathfrak{b}\right\}$，则所有分式理想关于该运算作成一个自由 Abel 群，记作 $\mathrm{Id}(A)$. 而所有分式主理想构成这个群的一个正规子群，记作 $\mathrm{P}(A)$. 商群 $\mathrm{Id}(A)/\mathrm{P}(A)$ 称为 $A$ 的**理想类群**，记作 $\mathrm{Cl}(A)$，该群的阶称为 $A$ 的**类数**.

设 $K$ 是一个数域，称 $\mathrm{Cl}(\mathcal{O}_K)$ 为域 $K$ 的理想类群，记作 $\mathrm{Cl}(K)$，其阶称为域 $K$ 的类数.

**命题 6.18(类数有限)** Minkowski 理论告诉我们数域 $K$ 的类数都是有限的. 例如 $\mathbb{Q}[\sqrt{-n}]$ 的类数为 1(其中 $n=1,2,3,7,11,19,43,67,163$)；$\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$ 的类数为 2(也就是说 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ 非主理想整环).

下面介绍分歧理论，这是代数数论中最经典的内容之一.

**定义 6.19(分歧)** 设 $A$ 是 Dedekind 整环，$K=\mathrm{Frac}(A)$，$L/K$ 是有限**可分**扩张，$B$ 为 $A$ 在 $L$ 中的整闭包. 可以证明 $B$ 也是 Dedekind 整环. 由算术基本定理 (定理 6.2)，对任意 $\mathfrak{p}\in\mathrm{spec}(A)$，总有分解 $\mathfrak{p}B=\mathfrak{P}_1^{e_1}\cdots\mathfrak{P}_g^{e_g}(e_i\ge1)$. 称 $\mathfrak{P}\in\mathrm{spec}(B)$ **整除**$\mathfrak{p}$(记作 $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$. 不难发现 $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$ 当且仅当 $\mathfrak{p}=\mathfrak{P}\cap K$)，如果 $\mathfrak{P}$ 出现在上述分解中；而上述分解中的 $e_i$ 称为**分歧指数**，记作 $e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$. 若存在 $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$ 使得 $e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})>1$，则称 $\mathfrak{p}$ 在 $L$(或 $B$) 中的 $\mathfrak{P}$ 处**分歧**，而 $[B/\mathfrak{P}:A/\mathfrak{p}]$ 则称为 $\mathfrak{p}$ 在 $\mathfrak{P}$ 处的**剩余指数**，记作 $f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$. 称上述分解中的 $g$ 为 $\mathfrak{p}$ 的**惯性指数**.

设 $\mathfrak{p}\in\mathrm{spec}(A)$. 称 $\mathfrak{p}$ 在 $L$ 中**完全分裂**，如果对任意 $i$ 均有 $e_i=f_i=1$；称 $\mathfrak{p}$ 在 $L$ 中**惯性** (inert)，如果 $\mathfrak{p}B\in\mathrm{spec}(B)$，此时 $e=g=1$.

**例** 设有域扩张 $\mathbb{Q}[i]/\mathbb{Q}, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Z}, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}[i]} = \mathbb{Z}[i]$. 验证得理想 $(2) = (1+i)^2$，故此时 $e = 2, f = 1, g = 1$；素理想 $(3)$ 是惯性的，因为 $\mathbb{Z}[i]/(3) = \mathbb{F}_9$，此时 $e = 1, f = 2, g = 1$；理想 $(5) = (2+i)(2-i)$ 是完全分裂的.

**定理 6.20** 设 $L/K$ 是 $n$ 次可分扩张，$\mathfrak{P}_1, \cdots, \mathfrak{P}_g$ 整除 $\mathfrak{p} \in \mathrm{spec}(A)$，则 $\sum_{i=1}^{g} e_i f_i = n$. 特别地，如果 $L/K$ 还是 Galois 扩张，则所有的 $e_i$ 相等，所有的 $f_i$ 相等，且 $efg = n$.

**注意 6.21** 拓扑上来说，若设 $X, Y$ 为可定向 2 维连通曲面 (仅考虑拓扑流形结构)，$f : Y \to X$ 是分歧覆叠映射，则对任意 $y \in Y$，成立等式 $\sum_{x \in f^{-1}(y)} e(x) = \deg(f)$. 这里 $\deg(f)$ 指分歧覆叠映射 $f$ 的**次数**，$e(x)$ 指 $x$ 处的**分歧指数**. 例如考虑分歧覆叠 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^2$，则 $\deg(f) = 2, e(0) = 2, e(\mathbb{C}^\times) = 1$.

**注意 6.22** 设 $L/K$ 是可分扩张. 定理 6.13 告诉我们，$K$ 的有限素点 $v_{\mathfrak{p}}$、标准 non-Archimedean 离散赋值 $v_{\mathfrak{p}}(\cdot)$、标准 non-Archimedean 绝对值 $|\cdot|_{v_{\mathfrak{p}}}$ 与 $\mathcal{O}_K$ 的素理想 $\mathfrak{p}$ 均一一对应. 根据定理 6.2，$\mathfrak{p}\mathcal{O}_L = \mathfrak{P}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{P}_g^{e_g}$，而素理想 $\mathfrak{P}_i \in \mathrm{spec}(\mathcal{O}_L)$ 则唯一地对应了 $v_{\mathfrak{p}}$ 在 $L$ 上的某个提升：有限素点 $w_{\mathfrak{P}_i}$、标准 non-Archimedean 离散赋值 $w_{\mathfrak{P}_i}(\cdot)$、标准 non-Archimedean 绝对值 $|\cdot|_{w_{\mathfrak{P}_i}}$(分歧指数被标准化抹去). 为此我们可以说命题 6.14 所描述的素点/绝对值/赋值的提升实际上正由理想的素分解唯一地给出.

## 7、Adèle 和 Idèle

在类域论中会出现两个重要的代数对象：Adele 和 Idele，本节的目标就是介绍这两个代数对象的构造办法以及相关性质 (对应 [15]Chapter3)，为之后使用调和分析作准备.

在研究整体域 (例如 $\mathbb{Q}$) 的算术性质时，常常会遇到需要同时考虑该域在所有素点处完备化的情况. 为此，我们希望找到一个拓扑群，它包含这些完备化的所有信息——自然地我们把目光抛向直积 $\Pi$. 但不幸的是这里的积拓扑不再是局部紧的$\Big($Tychonoff 定理只是说紧空间的乘积仍然紧，但并没有描述局部紧的情况. 事实上 [12] 引理 5.1.1 告诉我们：设 $X_i (i \in I)$ 是一族局部紧 $T_2$ 空间，则 $\prod_{i \in I} X_i$ 局部紧当且仅当只有有限多个 $X_i$ 非紧$\Big)$，这意味着不能保证之前建立的 Haar 测度理论在此处还是合理的. 解决这个问题的办法，则是考虑所谓的“限制积”. 用这个办法可以构造出一个真正包含了在所有素点处完备化信息的局部紧 Abel 群 (而且还是环)——Adele.

**定义 7.1(限制积)** 设 $\{G_i\}_{i \in I}$ 是一族局部紧群 (至多可数个). 给出一个有限集 $I_\infty \subseteq I$(预留给无法进行接下来操作的 $G_i$，例如 $\mathbb{Q}$ 在无穷素点处的完备化 $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$ 无紧开子群)，对任何 $i \in I \setminus I_\infty$，指定 $G_i$ 的紧开子群 $H_i$(由命题 1.3.4 知 $H_i$ 也是闭的，因此连通拓扑群没有非平凡紧开子群)，定义 $\{G_i\}$ 关于 $\{H_i\}$ 的**限制积**为 $\prod_i G_i$ 的子群

$$\hat{\prod_{i \in I}}^{H_i} G_i := \left\{ (g_i) \in \prod_{i \in I} G_i : \text{对几乎所有} i \in I \setminus I_\infty, g_i \in H_i \right\},$$

这里的“几乎所有”指至多只有有限个 $i$ 使 $g_i \notin H_i$. 限制积在不引起混淆时可以简记为 $\hat{\prod}_i G_i$. 我们可以立刻给出一个限制积在直观上的大小估计：$\bigoplus_i G_i \subseteq \hat{\prod}_i G_i \subseteq \prod_i G_i$.

现赋予 $\hat{\prod}_{i \in I} G_i$ 拓扑结构：集合 $U \subseteq \hat{\prod}_{i \in I} G_i$ 是开集当且仅当 $U$ 可以写成一族集合 $\mathrm{Rec}(E, U_i)$ 的并，其中 $\mathrm{Rec}(E, U_i) := \prod_{i \in E} U_i \times \prod_{i \notin E} H_i \subseteq \hat{\prod}_{i \in I} G_i$ 称为**矩形** (rectangle)，这里 $I_\infty \subseteq E \subseteq I$ 是有限集，$U_i \subseteq G_i$ 是开集. 注意到 $H_i$ 是开集，因而显然两个矩形的交仍是矩形. 此时所有矩形生成 $\hat{\prod}_{i \in I} G_i$ 上的一个拓扑，称为**限制积拓扑**. 显然限制积配备了限制积拓扑之后成为一个拓扑群 (命题 7.3 将断言该拓扑群是局部紧群).

**注意 7.2** [4] 定理 3.3.4 告诉我们，对于配备了通常积拓扑的空间 $\prod_i G_i$ 而言，序列 $\{\boldsymbol{x}_n := (x_{i,n})\}$ 收敛于 $\boldsymbol{x} := (x_i) \in \prod_i G_i$ 当且仅当对任意 $i$，在 $G_i$ 中 $\{x_{i,n}\}$ 收敛于 $x_i$. 为此我们也称积拓扑为**依分量收敛拓扑**. 但是对于限制积拓扑而言，即便 $\{x_{i,n}\}$ 按分量的收敛速度看似是一致的，也不能断言 $\boldsymbol{x}_n := (x_{i,n})$ 收敛. 具体的例子见注意 7.23.

**命题 7.3** 对一族局部紧群 $\{G_i\}_{i \in I}$ 以及它的一族紧开子群 $\{H_i\}_{i \in I \setminus I_\infty}$，有：

(1) 若 $I$ 有限，则 $\hat{\prod}_{i \in I} G_i = \prod_{i \in I} G_i$.

(2) 若 $I = I_1 \sqcup I_2$，则 $\hat{\prod}_{i \in I} G_i = (\hat{\prod}_{i \in I_1} G_i) \times (\hat{\prod}_{i \in I_2} G_i)$.

(3)$\hat{\prod}_{i \in I} G_i$ 在限制积拓扑下亦是局部紧群.

(4) 对任何 $i_0 \in I$，有拓扑嵌入 $G_{i_0} \to \hat{\prod}_{i \in I} G_i, g \mapsto (\cdots, \mathrm{i}, g, \mathrm{i}, \cdots)$. 故每个 $G_i$ 都可看成 $\hat{\prod}_i G_i$ 的闭子群.

**证明** 直接应用定义即可.■

既然说 $\hat{\prod}_i G_i$ 是局部紧群，事已至此自然要关心其上的 Haar 测度.

**定义 7.4(积测度)** 设限制积 $\hat{\prod}_i G_i$ 如定义 7.1. 给定实数列 $\{\lambda_i\}_{i\in I\setminus I_\infty}$ 满足 $\prod_i \lambda_i<\infty$，由于每个 $G_i$ 均是局部紧群，故其上存在唯一 (左)Haar 测度 $dx_i$ 使得 $\mu_i(H_i)=\int_{H_i}dx_i=\lambda_i$. 在这些前提下，定义 $\hat{\prod}_i G_i$ 上的 **(左) 积测度**$\mu:\mathfrak{M}\to\mathbb{R}_{\geq 0}\sqcup\{\infty\}$ 为满足如下两个条件的测度：(1)$\sigma$-代数 $\mathfrak{M}$ 由形如 $\prod_i M_i$ 的集合生成，其中 $M_i\subseteq G_i$ 满足 $\mu_i(M_i)<\infty$ 且几乎所有的 $M_i=H_i$；(2) 对任何 $\prod_i M_i\in\mathfrak{M}$，$\mu(\prod_i M_i):=\prod_i\mu_i(M_i)$. 不难验证这里的 $\mu$ 满足 (左)Haar 测度的一切性质，所以 $\mu$ 应该与 $\hat{\prod}_i G_i$ 上的某个 (左)Haar 测度 $\widetilde{\mu}$ 在定义域的交集处重合(一般不再区分 $\mu$ 和 $\widetilde{\mu}$，或将 $\widetilde{\mu}$ 亦称为 (左) 积测度). 根据定理 1.15 不难发现这里定义的 (左) 积测度是唯一的，因为我们明确知道 $\mu(\prod_i H_i)$ 的值.

**声明** 今后凡涉及到局部紧群限制积上的分析，选用的测度均是由定义 7.4 给出的 (左、右) 积测度. 特别地，如果涉及到的局部紧群均是 Abel 群，则可选用双不变的积测度. 为图方便，以后叙述积测度时一般省略“左、右”这些定语.

另外，讨论定义 7.4 中 $\mu$ 与 $\widetilde{\mu}$ 对应 $\sigma$-代数的区别时需兼顾限制积拓扑结构 (定义 7.1) 与 Nedoma 病态 (命题 1.19) 的双重影响，但本文对大基数可测拓扑空间的 Nedoma 病态现象的态度是：不关心. 因为抹除 Nedoma 病态本质上是不困难的也是不重要的 (只需要给 $\sigma$-代数添入一些集合并对测度作合理延拓即可，而 Haar 测度的存在唯一性保证了该操作的普适性).

**注意 7.5** 对任何满足 $I_\infty\subseteq E\subseteq I$ 的有限集 $E$，易见积测度 $\mu$ 在 $\mathrm{Rec}(E,G_i)$ 上的限制就是普通的乘积测度$\Big($若 $I$ 有限则 $\mu$ 可直接视为乘积测度；若 $I$ 无限则 $\mu$ 可等效地看成 $\bigsqcup\limits_{E\text{有限},I_\infty\subseteq E\subseteq I}\mathrm{Rec}(E,G_i)=\hat{\prod\limits_{i\in I}}G_i$ 上的“示性”测度$\Big)$. 我们常把由积测度 $\mu$ 决定的 $d\mu$ 记作 $d\boldsymbol{x}$.

当然我们还关心 $\hat{\prod}_i G_i$ 上的可积函数在积测度下的积分具有哪些性质：

**命题 7.6** 设限制积 $\hat{\prod}_{i\in I}G_i$ 如定义 7.1，带有积测度 $d\boldsymbol{x}$，则：

(1) 若 $f:\hat{\prod}_i G_i\to\mathbb{R}$ 是可积函数，则 $\int_{\hat{\prod}_i G_i}f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=\varinjlim_E\left(\left(\int_{\mathrm{Rec}(E,G_i)}f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}_E\in\mathbb{R}\right)_{E\text{有限},I_\infty\subseteq E\subseteq I},\leq\right)$，其中 $d\boldsymbol{x}_E$ 指积测度限制到 $\mathrm{Rec}(E,G_i)$ 上的测度 (或 $dx_i$ 的乘积测度). 如果仅要求 $f$ 连续，上式仍然成立，前提是允许上述极限取到 $\infty$.

(2) 设对任意 $i\in I$ 有非负可积函数 $f_i:G_i\to\mathbb{R}$ 使得 $f_i|_{H_i}=1(i\notin I_\infty)$. 对任意 $\boldsymbol{x}:=(x_i)\in\hat{\prod}_i G_i$，定义可测函数 $f:\hat{\prod}_i G_i\to\mathbb{R},f(\boldsymbol{x}):=\prod_i f_i(x_i)$. 此时对于 $I$ 的任何有限子集 $E\supseteq I_\infty$，由定理 1.17(2) 知成立等式 $\int_{\mathrm{Rec}(E,G_i)}f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}_E=\prod_{i\in E}\left(\int_{G_i}f_i dx_i\right)$. 若 $f$ 还可积，则由 (1) 可得 $\int_{\hat{\prod}_i G_i}f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=\prod_{i\in I}\left(\int_{G_i}f_i dx_i\right)$. 此外，如果这些 $f_i$ 是连续的，则将 $f$ 限制在 $f_i$ 取值非平凡处讨论可以证得 $f$ 亦连续.

事实上上述结论对复值函数也成立，唯一的区别在于不能用偏序关系讨论函数值的大小 (此时考虑 $E$ 的包含关系即可). 此外，由于命题 7.3(2)，上述命题 7.6(2) 中的条件可放宽为“几乎所有 $i\in I\setminus I_\infty,f_i|_{H_i}=1$”.

**证明** (1) 对于非负可积函数 $f$ 而言，由正向极限的泛性质有如下交换图表，注意到 $\mathbb{R}$ 上的欧氏拓扑是序拓扑，故可确认 $\varinjlim$ 是某种意义下的“最小上界”.

$$\begin{tikzcd}
\int_{\hat{\prod}_i G_i}f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \arrow[rr, dashed, "\exists 1", "\leq"'] & & \forall X & \in\mathrm{obj}(\mathbb{R}) \\
\int_{\mathrm{Rec}(E,G_i)}f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}_E \arrow[u] \arrow[rr, "E\subseteq E'", "\leq"'] \arrow[urr] & & \int_{\mathrm{Rec}(E',G_i)}f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}_{E'} \arrow[u] \arrow[ull]
\end{tikzcd}$$

(2) 注意到 $\prod_i f_i(x_i)$ 是有限乘积，故 $f$ 是良好定义的.■

特别地，当 $G_i$ 是局部紧 Abel 群时，我们要研究 $\hat{\prod}_i G_i$ 作为局部紧 Abel 群的 Pontryagin 对偶群及其上的对偶测度.

**定理 7.7** 设 $\hat{\prod}_i G_i$ 如定义 7.1，其中 $G_i$ 均是局部紧 Abel 群. 此时有拓扑 Abel 群同构 $\Theta:\hat{\prod}_i^{H_i^\perp}\widehat{G_i}\xrightarrow{\sim}\widehat{\hat{\prod}_i^{H_i}G_i},(\chi_i)\mapsto\left[\Pi\chi_i:\hat{\prod}_i G_i\to S^1,(g_i)\mapsto\prod_i\chi_i(g_i)\right]$.

**证明** 我们要说明 $\Theta$ 是 Abel 群同构，并且还是同胚映射. 这可分为如下几步：

**Step1：** 首先证明 $H_i^\perp$ 是 $\widehat{G_i}$ 的紧开子群. **证：** $H_i$ 开 (因此闭)$\xRightarrow{\text{命题 1.8(3)}}G/H_i$ 是离散群 $\xRightarrow{\text{命题 5.5(3)}}\widehat{G/H_i}$ 是紧群 $\xRightarrow{\text{引理 5.17(2)}}H_i^\perp$ 紧；$H_i$ 紧 $\xRightarrow{\text{命题 5.5(3)}}\widehat{H_i}$ 是离散群 $\xRightarrow{\text{命题 5.17(2)}}\widehat{G}/H_i^\perp$ 是离散群 $\xRightarrow{\text{命题 1.8(3)}}H_i^\perp$ 开.

**Step2**：$\Theta$ 良好定义：即验证 $\Pi\chi_i$ 是特征标. **证**：设 $(\chi_i)\in\prod_i^{H_i^\perp}\widehat{G_i}$，则 $\chi_i|_{H_i}=1$ 对几乎所有的 $i$ 成立，不妨设使 $\chi_i|_{H_i}\neq 1$ 的 $i$ 构成有限集 $E$. 不难验证 $\Pi\chi_i:\hat{\prod}_iG_i\to S^1$ 是良好定义的群同态，下证 $\Pi\chi_i$ 是特征标. 由命题 5.5(1)，对于 $N(1)\subseteq S^1$，取 1 的另一个邻域 $U$ 使得 $U^{(|E|)}\subseteq N(1)$. 对任意 $i\in E$，由于 $\chi_i$ 连续，存在邻域 $\mathfrak{i}\in U_i\subseteq G_i$ 使得 $\chi_i(U_i)\subseteq U$. 此时 $(\mathfrak{i})\in\hat{\prod}_iG_i$ 的邻域 $\prod_{i\in E}U_i\times\prod_{i\notin E}H_i\subseteq(\Pi\chi_i)^{-1}(N(1))$，证毕.

**Step3**：$\Theta$ 是同态. **证**：以乘法记加法，有 $\Theta\big((\chi_i)(\eta_i)\big)=\Pi(\chi_i\eta_i):(g_i)\mapsto\prod_i(\chi_i\eta_i)(g_i)=\prod_i\chi_i(g_i)\eta_i(g_i)$；而另一方面 $\Theta\big((\chi_i)\big)\Theta\big((\eta_i)\big)=\Pi(\chi_i)\Pi(\eta_i):(g_i)\mapsto(\Pi\chi_i)(g_i)\cdot(\Pi\eta_i)(g_i)=\prod_i\chi_i(g_i)\prod_i\eta_i(g_i)$.

**Step4**：$\Theta$ 单. **证**：$\Theta\big((\chi_i)\big)$ 平凡意味着对任何 $g_i\in G_i$，$\Pi\chi_i(\cdots,\mathfrak{i},g_i,\mathfrak{i},\cdots)=\chi_i(g_i)=1$，即 $\chi_i$ 平凡.

**Step5**：设 $\chi:\hat{\prod}_iG_i\to S^1$ 是连续同态，定义 $\chi$ 限制在每个 $G_i$ 处的特征标为 $\chi|_{G_i}:G_i\to S^1,g_i\mapsto\chi(\cdots,\mathfrak{i},g_i,\mathfrak{i},\cdots)$. 此时对几乎所有的 $i$，有 $(\chi|_{G_i})|_{H_i}=1$，并且成立等式 $\chi=\Pi(\chi|_{G_i})$、$(\Pi\chi_i)|_{G_i}=\chi_i$. **证**：在 $S^1$ 中取 1 的邻域 $U$ 使得 $U$ 中不含 $S^1$ 的非平凡子群. 由于 $\chi$ 是连续的，取 $\hat{\prod}_iG_i$ 中 $(\mathfrak{i})$ 的开邻域 $\mathrm{Rec}(E,U_i)=\prod_{i\in E}U_i\times\prod_{i\notin E}H_i$ 使得 $\chi\big(\mathrm{Rec}(E,U_i)\big)\subseteq U$，则 $\chi\big(\prod_{i\in E}\{\mathfrak{i}\}\times\prod_{i\notin E}H_i\big)\subseteq U$. 注意到左边是 $S^1$ 的一个子群，因此只能是平凡群 $\{1\}$. 换句话说，对任意 $i\notin E$，$(\chi|_{G_i})|_{H_i}=1$. 至于后两个等式，注意到乘积均是有限乘积，故显然成立.

**Step6**：$\Theta$ 满. **证**：对任何特征标 $\chi:\hat{\prod}_iG_i\to S^1$，由 Step5 知几乎所有的 $\chi|_{G_i}\in H_i^\perp$，故可取 $(\chi|_{G_i})\in\prod_i^{H_i^\perp}\widehat{G_i}$. 再次利用 Step5 知 $\Pi(\chi|_{G_i})\big((g_i)\big)=\chi\big((g_i)\big)$，因此 $\Theta$ 满.

**Step7**：$\Theta$ 连续. **证**：设 $K$ 是 $\hat{\prod}_iG_i$ 中的任何紧子集 (由 Tychonoff 定理知 $K=\prod_iK_i$，其中 $K_i$ 是 $G_i$ 的某个紧子集且几乎所有的 $K_i=H_i$. 设 $E$ 为 $K_i\neq H_i$ 的那些 $i$ 作成的有限集)，$V$ 是 $1\in S^1$ 的邻域，考虑 $(\mathfrak{i})$ 的邻域 $W_{K,V}:=\big\{\chi\in\hat{\prod}_iG_i\to S^1:\chi(K)\subseteq V\big\}\subseteq\widehat{\hat{\prod}_iG_i}$. 取 $1\in V_1\subseteq S^1$ 使得 $V_1^{(|E|)}\subseteq V$，对于 $\widehat{G_i}$ 中的开集 $W_{K_i,V_1}$，直接验证有包含关系 $\Theta\big(\mathrm{Rec}(E,W_{K_i,V_1})\big)\subseteq W_{K,V}$.

**Step8**：$\Theta$ 是开映射. 因此 $\Theta$ 是同胚. **证**：考虑含有 $(\mathfrak{i})$ 的开集 $N:=\mathrm{Rec}(E,W_{K_i,V_i})\subseteq\prod_i^{H_i^\perp}\widehat{G_i}$，由 Step5 知 $\chi=\Pi(\chi|_{G_i})$，因此 $W_{\prod_iK_i,\bigcap_iV_i}\subseteq\Theta(N)$ 是 $(\mathfrak{i})\in\widehat{\prod_i^{H_i}G_i}$ 的开邻域，故 $\Theta$ 是开映射.■

设 $G_i$ 是局部紧 Abel 群. 根据定理 5.11，我们的目标是找到 $\widehat{\prod_i^{H_i}G_i}$ 的与 $\prod_i^{H_i}G_i$ 上积测度 $\mu$(或 $d\boldsymbol{x}$) 对偶的测度，而且我们还希望找到的这个对偶测度仍旧是一个积测度. 办法是直接的：

对任意 $i\in I$，由定理 5.11 可直接赋予 $\widehat{G_i}$ 上的测度为 $G_i$ 上双不变 Haar 测度 $\mu_i$(或 $dx_i$) 的对偶测度，记作 $\widehat{\mu_i}$(或 $d\chi_i$). 根据定理 7.7 将 $\widehat{\prod_i^{H_i}G_i}$ 与 $\prod_i^{H_i^\perp}\widehat{G_i}$ 等同起来，则 $\widehat{\prod_i^{H_i}G_i}$ 中的元素可以唯一地写成 $(\chi_i)$，其中几乎所有的 $\chi_i\in H_i^\perp$. 问题现在转变为给 $\prod_i^{H_i^\perp}\widehat{G_i}$ 配备积测度. 这便是如下定理：

**定理 7.8** 对任意 $i\in I\setminus I_\infty$，$\widehat{\mu_i}(H_i^\perp)=\lambda_i^{-1}$. 因此可以按照定义 7.4 的办法赋予 $\prod_i^{H_i^\perp}\widehat{G_i}\cong\widehat{\prod_i^{H_i}G_i}$ 积测度，记为 $\widehat{\mu}$(或 $d\boldsymbol{\chi}$)，这正是 $\mu$(或 $d\boldsymbol{x}$) 的对偶测度. 此外，对任意 $i$，设 $f_i\in L^1(G_i)$ 为 $H_i$ 的示性函数，则 $f(\boldsymbol{x}):=\prod_if_i(x_i)\in L^1\Big(\prod_i^{H_i}G_i\Big)$；$f$ 的 Fourier 变换为 $\widehat{f}(\boldsymbol{\chi})=\prod_i\int_{H_i}\overline{\chi_i(x_i)}dx_i=\prod_i\widehat{f}_i(\chi_i)\in L^1\Big(\widehat{\prod_i^{H_i}G_i}\Big)$. 因此由推论 5.14，有 Fourier 反演 $\widehat{\widehat{f}}=f$.

**证明** $f_i$ 的 Fourier 变换为 $\widehat{f}_i(\chi_i)=\int_{H_i}\overline{\chi_i(x_i)}dx_i$. 由于等价的拓扑表示诱导相同的特征标，故有

$$\widehat{f}_i(\chi_i)=\int_{H_i}1\cdot\overline{\chi_i(x_i)}dx_i=\begin{cases}0, & \chi_i\notin H_i^\perp(\text{命题 4.10.6})\\ \mu_i(H_i), & \chi_i\in H_i^\perp\end{cases}=\mu_i(H_i)\cdot\mathbf{1}_{H_i^\perp}\in L^1(\widehat{G_i}).$$

根据 Fourier 反演 (推论 5.14) 有等式 $f_i(x_i)=\int_{H_i^\perp}\widehat{f}_i(\chi_i)\chi_i(x_i)d\chi_i=\mu_i(H_i)\int_{H_i^\perp}\chi_i(x_i)d\chi_i$. 若令 $x_i\in H_i$，则 $1=\mu_i(H_i)\int_{H_i^\perp}d\chi_i$. 而定义 7.4 中正好要求 $\mu_i(H_i)=\lambda_i$，故 $\widehat{\mu_i}(H_i^\perp)=\int_{H_i^\perp}d\chi_i=\lambda_i^{-1}$. 此外，直接计算可以得到 $\widehat{f}(\boldsymbol{\chi})=\int_{\hat{\prod}_iG_i}f(\boldsymbol{x})\overline{\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x})}d\boldsymbol{x}=\int_{\hat{\prod}_iG_i}\big(\prod_if_i(x_i)\overline{\chi_i(x_i)}\big)d\boldsymbol{x}\xlongequal{\text{命题 7.6(2)}}\prod_i\int_{G_i}f_i(x_i)\overline{\chi_i(x_i)}dx_i=\prod_i\widehat{f}_i(\chi_i)$，可积性显然.■

有了关于限制积的概念与性质，接下来便可给出 Adele 的定义.

**定义 7.9(Adele)** 设 $K$ 是一个整体域，记 $K_v$ 为 $K$ 在素点 $v$ 处的完备化，显然 $K_v$ 关于加法是一个局部紧 Abel 群. 在任何有限素点 $v$ 处，整数环 $\mathscr{O}_v$ 均是 Abel 群 $K_v$ 的一个紧开子群$\Big($紧：整体域的完备化就是局部域，而 [2] 命题 2.5.1 告诉我们局部域的整数环 $\mathscr{O}=\varprojlim_{n\geq1}\mathscr{O}/\mathfrak{m}^n$ 紧；开：$\mathscr{O}_v=\bigcup_{\alpha\in\mathscr{O}_v}\alpha+\mathfrak{m}_v$ 是一些开集的并$\Big)$. 若取 $I_\infty$ 为所有的无穷素点 (个数不超过 $K$ 在素整体域上的扩张次数，从而只有有限多个，见

[2]Chapter6.2)，则可作限制积 $\hat{\prod\limits_{v\text{是素点}}}^{\mathscr{O}_v} K_v$(注意素点至多可数多个). 称这个限制积为 $K$ 的 **Adele 群**，简记为 $\mathbb{A}_K$，显然这是一个局部紧 Abel 群. 特别地，记 $\mathbb{A}_{K,\mathrm{fin}} := \hat{\prod}_{v<\infty}^{\mathscr{O}_v} K_v$.

**注意 7.10** 由乘积公式可知，对任何 $x \in K$，$x \in \mathscr{O}_v$ 对几乎所有素点 $v$ 成立. 故利用嵌入 $K \hookrightarrow \mathbb{A}_K, x \mapsto (x, x, \cdots)$ 可将 $K$ 视作 $\mathbb{A}_K$ 的子集，称为 $\mathbb{A}_K$ 的**主要部分** (principal adeles).

我们以如下命题总结 Adele 的一些简单性质：

**命题 7.11** 设 $K$ 是整体域，$L/K$ 是 $n$ 次有限扩张. 设 $L$ 作为 $K$-线性空间的一组基为 $\{u_1, \cdots, u_n\}$，则：

(1)$\mathbb{A}_K$ 在逐分量相乘的运算下作成一个环 (或 $K$-代数). 这不是整环：$(0, 1, \cdots) \cdot (1, 0, \cdots) = \mathbf{0}$.

(2) 有拓扑 Abel 群同构 $\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{A}_K \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_K \otimes_K L \underset{\boldsymbol{x}\otimes u_i \mapsto u_i \boldsymbol{x}}{\xrightarrow{\sim}} \mathbb{A}_L, (\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) \mapsto \sum_{i=1}^n u_i \boldsymbol{x}_i$，且 $K \otimes_K L \cong L$ 是 $\mathbb{A}_L$ 的主要部分.

(3)$K$ 是 $\mathbb{A}_K$ 的离散闭子群.

(4)$\mathbb{A}_K/K$ 紧.

(5) 对素整体域 $\mathbb{Q}$ 而言，有拓扑 Abel 群同构 $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q} \cong \widehat{\mathbb{Z}} \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cong \varprojlim \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$.

**证明** (2) 由 Abel 群同构

$$\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{A}_K \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^n (\mathbb{A}_K \otimes_K K) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^n (\mathbb{A}_K \otimes_K u_i K) \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_K \otimes_K \Big(\bigoplus_{i=1}^n u_i K\Big) \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_K \otimes_K L,$$

$$(\boldsymbol{x}_i) \longmapsto (\boldsymbol{x}_i \otimes 1) \longmapsto (\boldsymbol{x}_i \otimes u_i) \longmapsto \sum_{i=1}^n \boldsymbol{x}_i \otimes (0, \cdots, 0, u_i, 0, \cdots, 0) \longmapsto \sum_{i=1}^n \boldsymbol{x}_i \otimes u_i$$

即可得到第一个同构，连续性自然. 而关于 $\mathbb{A}_K \otimes_K L \cong \mathbb{A}_L$ 是拓扑 Abel 群同构的证明请移步 [17].

至于 (3) 和 (4)，由 (2) 可知只需要证明 $K = \mathbb{Q}$ 或 $K = \mathbb{F}_q(t)$ 的情形. 此处不妨以 $K = \mathbb{Q}$ 为例.

(3) 定义 $U := \{(x_p) : \forall p < \infty, |x_p|_p \le 1; |x_\infty|_\infty < 1\} = \widehat{\mathbb{Z}} \times (-1, 1)$，显然 $U$ 是 $\mathbf{0} \in \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ 的开邻域. 任取 $y \in U \cap \mathbb{Q}$，则对任意素数 $p$ 均有 $|y|_p \le 1$，因此根据命题 6.16 有 $y \in \bigcap_{p<\infty} (\mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q}) = \mathcal{O}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Z}$. 又由于 $|y|_\infty < 1$，故 $y \in (-1, 1)$，因而只能有 $y = 0$. 这就找到了邻域 $U \ni \mathbf{0}$ 使得 $U \cap \mathbb{Q} = \{0\}$，由平移性立得 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ 中离散. 由命题 1.11 知 $\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ 的闭子群.

(4) 定义紧集 $W := \big\{(x_p) : \forall p < \infty, |x_p|_p \le 1, |x_\infty|_\infty \le \frac{1}{2}\big\} = \widehat{\mathbb{Z}} \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$，下证复合 $W \overset{\tau}{\hookrightarrow} \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ 是满射 (连续性显然). 任取 $\boldsymbol{x} := (x_p) \in \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$，不妨记 $|x_p|_p > 1$ 的那些 $p$ 构成有限集 $E$. 容易发现对某个 $p_1 \in E$，总存在 $z_1 \in \mathbb{Z}, n_1 \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ 使得 $\big|x_{p_1} - \frac{z_1}{p_1^{n_1}}\big|_{p_1} \le 1$. 现取 $p_1 \ne p_2 \in E$，注意到 $\big|\frac{z_1}{p_1^{n_1}}\big|_{p_2} \le 1$，故 $\big|x_{p_2} - \frac{z_1}{p_1^{n_1}}\big|_{p_2} > 1$ 当且仅当 $|x_{p_2}|_{p_2} > 1$，因而重复上述操作可找到 $\frac{z_2}{p_2^{n_2}} \in \mathbb{Q}$ 使得同时成立不等式 $\big|x_{p_1} - \frac{z_1}{p_1^{n_1}} - \frac{z_2}{p_2^{n_2}}\big|_{p_1} \le 1$、$\big|x_{p_2} - \frac{z_1}{p_1^{n_1}} - \frac{z_2}{p_2^{n_2}}\big|_{p_2} \le 1$. 如此递归有限步遍历整个 $E$，可取 $r_E := \sum_{p_i \in E} \frac{z_i}{p_i^{n_i}} \in \mathbb{Q}$，有 $\boldsymbol{x} - r_E \in \widehat{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}$. 再取 $s \in \mathbb{Z}$ 使得 $x_\infty - r_E - s \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$，则 $\boldsymbol{x} - r_E - s \in W$. 显然 $\pi \circ \tau(\boldsymbol{x} - r_E - s) = \boldsymbol{x} + \mathbb{Q}$，故 $\pi \circ \tau$ 满. 由于紧集的连续像仍然紧，命题得证.

(5) 第一个同构：只需验证 (4) 中的 $\pi \circ \tau$ 是单射即可. 若 $\tau(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{Q} \cap \big(\widehat{\mathbb{Z}} \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\big)$，则由 $\mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ 知只能有 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$，故 $\pi\tau$ 是单射. 由于紧空间打到 $T_2$ 空间的连续双射还是同胚，故 $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q} \cong \widehat{\mathbb{Z}} \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ 是拓扑 Abel 群的同构. 第二个同构只需注意到有典范同构 $\widehat{\mathbb{Z}} \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cong \big(\varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\big) \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cong \varprojlim (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cong \varprojlim \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$ 即可.■

接下来介绍强逼近定理，该定理的应用将在第 10 节呈现. 首先把弱逼近定理 6.9 重新描述一下：设 $K$ 是数域，则利用嵌入 $K \hookrightarrow \prod_{i=1}^n (K, |\cdot|_i), x \mapsto (x, \cdots, x)$ 可将 $K$ 视为 $\prod_{i=1}^n K$ 的稠密子集(更精确地，$K$ 可视为 $\prod_{i=1}^n \overline{(K, |\cdot|_i)}$ 的稠密子集). 我们希望将这个结论推广到 Adele 上去，这就是所谓的强逼近定理：

**定理 7.12(强逼近)** 设 $v_0$ 是整体域 $K$ 的一个素点，则 $K$ 在 $\mathbb{A}_{K,v_0} := \hat{\prod\limits_{v \ne v_0}}^{\mathscr{O}_v} K_v$ 中稠密.

**证明** 首先不难发现该定理与下述陈述等价：任给由素点 $v \ne v_0$ 作成的有限集 $S$，对任意 $v \in S$、$x_v \in K_v$ 以及任意 $\epsilon > 0$，总存在 $x \in K$ 使得对所有的 $v \in S$ 均有 $|x - x_v|_v < \epsilon$，对所有的 $v_0 \ne v \notin S$ 均有 $|x|_v \le 1$(均取标准绝对值). 该陈述的证明分如下几步完成：

**Step1**：设 $K$ 是整体域，则存在常数 $C_K > 0$ 使得对任意满足 $\prod_v |x_v|_v > C_K$ 的 $\boldsymbol{x} := (x_v) \in \mathbb{A}_K$，总存在 $y \in K^\times$ 使得对任意素点 $v$，$|y|_v \le |x_v|_v$. **证**：记 $c_0$ 为 $\mathbb{A}_K/K$ 在商空间诱导 Haar 测度下的体积；$c_1$ 为集合

$$\big\{(x_v) \in \mathbb{A}_K : \text{若}v\text{是 Archimedean，则}|x_v|_v \le 1/2\text{；若}v\text{是 non-Archimedean，则}|x_v|_v \le 1\big\}$$

在 Haar 测度下的体积. 由于 $\mathbb{A}_K/K$ 紧，故 $0<c_0<\infty$；又因 Archimedean 赋值只有有限多个，故 $0<c_1<\infty$. 取 $C_K:=c_0/c_1$，不难发现集合

$$T:=\big\{(y_v)\in\mathbb{A}_K:\text{若}v\text{是 Archimedean，则}|y_v|_v\le 1/2|x_v|_v\text{；若}v\text{是 non-Archimedean，则}|y_v|_v\le|x_v|_v\big\}$$

的测度为 $\mu(T)=c_1\prod_v|x_v|_v$，因而对任意 $(x_v)\in\mathbb{A}_K$ 满足 $\prod_v|x_v|_v>C_K$，都有 $\mu(T)>c_0$，即商映射 $T\twoheadrightarrow\mathbb{A}_K/K$ 非单射(否则 $\mu(T)\le\mu(\mathbb{A}_K/K)=c_0$，矛盾). 所以存在 $T$ 中两个元素 $\boldsymbol{y}_1\neq\boldsymbol{y}_2$ 透过商映射映为同一个像，亦即 $\widetilde{y}:=\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}_2\in K$. 此时对任意 $v$ 必有 $|\widetilde{y}|_v=|y_{1,v}-y_{2,v}|_v\le|x_v|_v$，证毕.

**Step2**：设 $v_0$ 是 $K$ 的一个素点. 对任意 $v\neq v_0$，令 $\delta_v>0$ 且 $\delta_v=1$ 几乎处处成立，则存在 $0\neq x\in K$ 使得对任意 $v\neq v_0$ 均有 $|x|_v\le\delta_v$. **证**：当 $v\neq v_0$ 时，取 $y_v\in K_v$ 满足 $0<|y_v|_v\le\delta_v$，且当 $\delta_v=1$ 时 $|y_v|_v=1$；而在 $v_0$ 处可适当选取 $y_{v_0}\in K_{v_0}$ 使得 $\prod_v|y_v|_v>C_K$，由 Step1 知此时必然存在满足条件的 $x$.

**Step3**：先前给出的陈述成立. **证**：由命题 7.11(4) 的证明知存在 $W:=\{(y_v):|y_v|_v\le\delta_v,\text{几乎所有的}\delta_v=1\}\subseteq\mathbb{A}_K$ 使得任意 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{A}_K$ 均可表成 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+x_2$，其中 $\boldsymbol{x}_1\in W,x_2\in K$. 又由 Step2 知存在 $0\neq\lambda\in K$ 使得 $|\lambda|_v<\delta_v^{-1}\epsilon(v\in S),|\lambda|_v\le\delta_v^{-1}(v_0\neq v\notin S)$. 不妨设 $\boldsymbol{x}$ 由陈述给出，两边同时乘以 $\lambda^{-1}$ 可知此处的 $\boldsymbol{x}$ 还可表成 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{w}+a$，其中 $\boldsymbol{w}\in\lambda W,a\in K$. 不难验证这里的 $a\in K$ 就是我们要找的.■

**注意 7.13** 命题 7.11、定理 7.12 告诉我们：$K$ 在 $\mathbb{A}_K$ 中虽然离散，但“几乎”稠密.

**推论 7.14** 若记 $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}:=\prod_{p<\infty}\mathbb{Z}_p\times\mathbb{R}=\widehat{\mathbb{Z}}\times\mathbb{R}$，记 $\mathbb{A}_{\mathscr{O}_K}:=\prod_{v<\infty}\mathscr{O}_v\times\prod_{v\in\infty}K_v$($K$ 是一个整体域)，则：

(1)$\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{A}_{\mathbb{Q},\mathrm{fin}}$ 中稠密.

(2) 有 Abel 群同构 $\mathbb{A}_{\mathbb{Q},\mathrm{fin}}\cong\widehat{\mathbb{Z}}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$. 一般地，$\mathbb{A}_{K,\mathrm{fin}}\cong\big(\prod_{v<\infty}\mathscr{O}_v\big)\otimes_{\mathscr{O}_K}K$.

(3) 有环同构 $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}\cong\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$. 一般地，有 $\mathbb{A}_K\cong\mathbb{A}_{\mathscr{O}_K}\otimes_{\mathscr{O}_K}K$.

(4)$\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}=\mathbb{Q}+\mathbb{A}_{\mathbb{Z}},\mathbb{Z}=\mathbb{Q}\cap\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}$. 一般地，有 $\mathbb{A}_K=K+\mathbb{A}_{\mathscr{O}_K},\mathscr{O}_K=K\cap\mathbb{A}_{\mathscr{O}_K}$.

通过这 4 个结论，能感受到 $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}=\widehat{\mathbb{Z}}\times\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ 中扮演类似于“整数”的角色.

**证明** (1) 取定理 7.12 中 $K=\mathbb{Q},v_0=\infty$ 即可；下面以 $K=\mathbb{Q}$ 为例证明 (2),(3),(4).

(2) 定义 $\mathbb{Z}$-双线性映射 $\theta:\widehat{\mathbb{Z}}\times\mathbb{Q}\to\mathbb{A}_{\mathbb{Q},\mathrm{fin}},\big((x_p),r\big)\mapsto(rx_p)$，对于任意 $\mathbb{Z}$-双线性映射 $\varphi:\widehat{\mathbb{Z}}\times\mathbb{Q}\to M$，注意到任何 $\mathbb{A}_{\mathbb{Q},\mathrm{fin}}$ 中的元素 $(y_p)$ 均可表成 $(a_p/n)$，其中 $n\in\mathbb{Z},(a_p)\in\prod_{p<\infty}\mathbb{Z}_p$，故可定义 $\widetilde{\varphi}:\mathbb{A}_{\mathbb{Q},\mathrm{fin}}\to M,(y_p)\mapsto\varphi\big((a_p),1/n\big)$. 容易验证这里的 $\widetilde{\varphi}$ 是良好定义的使张量积泛性质图表交换的唯一的 $\mathbb{Z}$- 模同态.

(3)$\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}=(\widehat{\mathbb{Z}}\times\mathbb{R})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\cong(\widehat{\mathbb{Z}}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q})\times(\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q})\cong(\widehat{\mathbb{Z}}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q})\times\mathbb{R}=\mathbb{A}_{\mathbb{Q},\mathrm{fin}}\times\mathbb{R}=\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$.

(4)$\mathbb{Z}=\mathbb{Q}\cap\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}$ 可由两边互相包含得到，故只需证 $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}=\mathbb{Q}+\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}$. 对任意 $\boldsymbol{x}:=(x_p)\in\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$，设使 $x_p\notin\mathbb{Z}_p$ 的 $p$ 构成有限集 $E$. 令 $N=\prod_{p\in E}|x_p|_p=\prod_{p\in E}p^{t_p}\in\mathbb{Z}$(取标准绝对值)，根据中国剩余定理，关于 $\lambda$ 的方程组 $\lambda\equiv Nx_p(\bmod p^{t_p}),p\in E$ 有整数解. 考虑 $\boldsymbol{x}-\frac{\lambda}{N}=\big(\frac{Nx_p-\lambda}{N}\big)$，注意到 $\frac{|Nx_p-\lambda|_p}{|N|_p}\le1$，故 $\boldsymbol{x}-\frac{\lambda}{N}\in\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}$.■

接下来介绍 Adele 的乘法单位群——Idele，我们当然希望这是一个拓扑群. 最简单的想法是直接取 Adele 上拓扑的子空间拓扑，但这不能保证 $x\mapsto x^{-1}$ 总是连续的. 为了解决这个问题，我们给出如下定义：

**定义 7.15(乘法单位群上的拓扑)** 设 $R$ 是一个拓扑交换环，利用单射 $\tau:R^\times\hookrightarrow R\times R,x\mapsto(x,x^{-1})$ 将 $R^\times$ 与 $\tau(R^\times)\subseteq R\times R$ 等同，定义集合 $U\subseteq R^\times$ 是开集当且仅当 $\tau(U)$ 是 $R\times R$(积拓扑) 中的开集. 显然 $R^\times$ 上所有这样的开集作成一个拓扑，称其为**单位群拓扑**.

**定义 7.16(Idele)** 设 $K$ 是一个整体域，对 $K$ 任意素点 $v$，考虑局部紧 Abel 群 $K_v^\times$(即 $K_v$ 的乘法单位群，配备单位群拓扑，下同). 此时在任何有限素点 $v$ 处，不难验证整数环的乘法单位群 $\mathscr{O}_v^\times$ 均是 Abel 群 $K_v^\times$ 的一个紧开子群 (注意到 $\mathscr{O}_v^\times=\mathscr{O}_v\setminus\mathfrak{m}_v$ 作为拓扑环 $\mathscr{O}_v$ 的子集既开又闭即可). 若取 $I_\infty$ 为所有的无穷素点，则可作限制积 $\hat{\prod\limits_{v\text{是素点}}}^{\mathscr{O}_v^\times}K_v^\times$. 称这个限制积为 $K$ 的 **Idele 群**，简记为 $\mathbb{I}_K$，这也是一个局部紧群.

**注意 7.17** 实际上有群同构 $\mathbb{I}_K\cong\mathbb{A}_K^\times$，因此可以在集合的意义下把 $\mathbb{I}_K$ 嵌入 $\mathbb{A}_K$. 但是这里的嵌入不是拓扑嵌入：$\mathbb{I}_K$ 的限制积拓扑比 $\mathbb{A}_K$ 下放到 $\mathbb{I}_K$ 的子空间拓扑要细. 我们将在注意 7.23 给出的例子中观察这一现象.

与注意 7.10 类似，容易验证有嵌入 $K^\times\hookrightarrow\mathbb{I}_K,x\mapsto(x,x,\cdots)$，故可将 $K^\times$ 视作拓扑 Abel 群 $\mathbb{I}_K$ 的子群，根据定义 1.7 我们便有商拓扑群 $\mathbb{I}_K/K^\times$. 更具体地，由命题 7.11(3) 知嵌入 $K^\times\hookrightarrow\mathbb{A}_K\times\mathbb{A}_K,x\mapsto(x,x^{-1})$ 使 $K^\times$ 成为 $\mathbb{A}_K\times\mathbb{A}_K$ 离散子集，故 $K^\times$ 实际上还是 $\mathbb{I}_K$ 的离散子群. 基于此我们给出如下定义：

**定义 7.18(Idele 类群)** 设 $K$ 是整体域，称拓扑群 $\mathfrak{Cl}(K):=\mathbb{I}_K/K^\times$ 为 $K$ 的 **Idele 类群**. 记局部域 $K_v$ 上的标准绝对值为 $|\cdot|_v$(见定理 6.13，注意完备化)，定义群同态 $|\cdot|:\mathbb{I}_K\to\mathbb{R}_{>0},(x_v)\mapsto\prod_v|x_v|_v$. 不难验证

$\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$ 蕴含 $|\boldsymbol{x}_n| \to |\boldsymbol{x}|$，故 $|\cdot|$ 是连续群同态. 一般称 $|\cdot|$ 为 $\mathbb{I}_K$ 上的**绝对值**.

**注意 7.19** 设 $K$ 是整体域. 对命题 6.17 给出的理想类群而言，我们有 (证明见 [1] 命题 5.19)

$$\mathfrak{Cl}(K) \twoheadrightarrow \mathbb{I}_K \Big/ K^\times \Big( \prod_{v<\infty} \mathscr{O}_v^\times \times \prod_{v\in\infty} K_v^\times \Big) \cong \mathrm{Cl}(K).$$

特别地，若 $\mathrm{char}(K) > 0$，则 Idele 类群也可以和代数几何中的 Picard 群 (除子类群) 联系起来 (见定义 8.21). 此外，在类域论中，[29] 定理 14.40 利用 Idele 类群给出了**整体类域论基本定理**：设 $K$ 是数域，则存在一一对应 (广义 Galois 对应)

$$\big\{L \subseteq \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}} : L/K\text{有限 Abel 扩张}\big\} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \big\{H : H\text{是}\mathfrak{Cl}(K)\text{指数有限的开子群}\big\}, L \longmapsto \mathrm{id}_{\mathbb{A}_K} \otimes \mathrm{Norm}_{L/K}(\mathfrak{Cl}(L)).$$

这里张量的合理性请参考命题 7.11(2)，事实上 $\mathrm{id}_{\mathbb{A}_K} \otimes \mathrm{Norm}_{L/K}((x_w)) = \big(\prod_{w|v} \mathrm{Norm}_{L_w/K_v}(x_w)\big)$. 不仅如此，该对应还给出了所谓的**互反同构** (reciprocity isomorphism)：$\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathfrak{Cl}(K)\big/\big(\mathrm{id}_{\mathbb{A}_K} \otimes \mathrm{Norm}_{L/K}(\mathfrak{Cl}(L))\big)$.

**定理 7.20(Artin 乘积公式)** 设 $K$ 是整体域，则对任意 $\boldsymbol{x} \in K^\times \subseteq \mathbb{I}_K$，$|\boldsymbol{x}| = 1$.

**证明** 此即乘积公式 (命题 6.15).■

**定义 7.21(范 1-类群)** 设 $K$ 是整体域，记 $\mathbb{I}_K^1 := \ker\big(\mathbb{I}_K \xrightarrow{|\cdot|} \mathbb{R}_{>0}\big)$，称商群 $\mathfrak{Cl}^1(K) := \mathbb{I}_K^1/K^\times$ 为 $K$ 的**范 1-类群**$\Big($由定理 7.20 有 $K^\times \subseteq \mathbb{I}_K^1$，故 $\mathfrak{Cl}^1(K)$ 良好定义$\Big)$.

与命题 7.11(4) 相呼应，虽然在这里 $\mathbb{I}_K/K^\times$ 一般不紧 (例子见注意 7.23)，但我们却有：

**定理 7.22** 设 $K$ 是整体域，则 $\mathfrak{Cl}^1(K)$ 紧.

**证明** **Step1**：设 $\mathbb{I}_K^1$ 作为 $\mathbb{I}_K$ 子空间的拓扑为 $\tau_1$，作为 $\mathbb{A}_K$ 子空间的拓扑为 $\tau_2$，则 $\tau_1 = \tau_2$. 因此 $\mathbb{I}_K^1$ 是 $\mathbb{A}_K$ 的闭子集. **证**：设 $\boldsymbol{x} := (x_v) \in \mathbb{I}_K^1$. 令 $W \subseteq \mathbb{I}_K^1$ 为 $\boldsymbol{x}$ 在 $\tau_2$ 中的邻域，那么 $W$ 一定包含了 $\tau_2$ 中某个形如 $P_2 := \big\{(y_v) : v \in E, |y_v - x_v|_v < t; v \notin E, |y_v|_v \le 1\big\}$ 的邻域，这里 $E$ 是某个有限集. 而 $P_2$ 包含了 $\tau_1$ 中形如 $Q_1 := \big\{(y_v) : v \in E, |y_v - x_v|_v < t; v \notin E, |y_v|_v = 1\big\}$ 的邻域. 反过来，令 $W' \subseteq \mathbb{I}_K^1$ 为 $\boldsymbol{x}$ 在 $\tau_1$ 中的邻域，那么 $W'$ 一定包含了 $\tau_1$ 中某个形如 $P_1 := \big\{(y_v) : v \in E, |y_v - x_v|_v < t; v \notin E, |y_v|_v = 1\big\}$ 的邻域，这里有限集 $E$ 至少包含所有无穷素点以及那些 $|x_v|_v \ne 1$ 的素点. 由于 $\prod_v |x_v|_v = 1$，故可取充分小的 $t$ 使得对任何 $(y_v) \in P_1$ 均有 $\prod_v |y_v|_v < 2$. 此时可以验证 $P_1 \cap \mathbb{I}_K^1 \supseteq P_2 \cap \mathbb{I}_K^1$，即 $P_1$ 包含了 $\tau_2$ 中形如 $P_2$ 的邻域.

**Step2**：$\mathfrak{Cl}^1(K)$ 紧. **证**：设 $C_K$ 为定理 7.12 证明 Step1 中给出的常数，取 $\boldsymbol{x} := (x_v) \in \mathbb{A}_K$ 满足 $\prod_v |x_v|_v > C_K$. 由 Step1，定义 $\mathbb{A}_K$ 中的紧集 $W_{\boldsymbol{x}} := \big\{(y_v) \in \mathbb{A}_K : \forall v, |y_v|_v \le |x_v|_v\big\}$. 由于 $\mathbb{I}_K^1$ 是 $\mathbb{A}_K$ 的闭子集，故 $W_{\boldsymbol{x}} \cap \mathbb{I}_K^1$ 是 $\mathbb{A}_K$ 中的紧集，进而是 $\mathbb{I}_K^1$ 中的紧集. 下证连续映射 $W_{\boldsymbol{x}} \cap \mathbb{I}_K^1 \hookrightarrow \mathbb{I}_K^1 \twoheadrightarrow \mathbb{I}_K^1/K^\times = \mathfrak{Cl}^1(K)$ 是满射. 取 $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_v) \in \mathbb{I}_K^1$，显然 $|\boldsymbol{\alpha}| = \prod_v |\alpha_v|_v = 1$ 蕴含 $\prod_v |\alpha_v^{-1}|_v = 1$，这意味着 $\prod_v |\alpha_v^{-1} x_v|_v = \prod_v |x_v|_v > C_K$. 由定理 7.12 证明 Step1 知存在 $r \in K^\times$ 使得对任意 $v$ 均有 $|r|_v \le |\alpha_v^{-1} x_v|_v$，因此 $r\boldsymbol{\alpha} \in W_{\boldsymbol{x}} \cap \mathbb{I}_K^1$，这就证明了 $W_{\boldsymbol{x}} \cap \mathbb{I}_K^1 \to \mathbb{I}_K^1/K^\times$ 是满射. 由于紧集的连续像仍然紧，命题得证.■

**注意 7.23** 我们以整体域 $\mathbb{Q}$ 为例列举一些不得不提的事实.

(1) 在 $\mathbb{A}_\mathbb{Q}$ 中，若以 $p_n$ 表示第 $n$ 个素数，记 $\boldsymbol{x}_n = \big(1, 1, \cdots, \frac{1}{p_n}, \cdots\big)$，则 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 不收敛于 $\mathbb{A}_\mathbb{Q}$ 中任何元素$\big($但它们在经典积拓扑下收敛于 $(1, 1, \cdots)\big)$. **证**：对任意 $\mathbf{0}$ 的开邻域 $\mathrm{Rec}(E, U_i) = \prod_{i\in E} U_i \times \prod_{i\notin E} \mathbb{Z}_{p_i}$. 设 $E$ 中的最大元为 $N$，则对任何 $n, m > N$，$\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_m = \big(0, \cdots, 0, \cdots, \frac{1}{p_n} - 1, \cdots, 1 - \frac{1}{p_m}, 0, \cdots\big) \notin \mathrm{Rec}(E, U_i)$. 这是因为 $1 \in \mathbb{Z}_{p_n}$，所以 $\frac{1}{p_n} - 1 \notin \mathbb{Z}_{p_n}$.

(2) 对任意素数 $q$，令 $N_q = (\frac{q-1}{q}, \frac{q+1}{q})$ 为 $1 \in \mathbb{R}$ 的开邻域基. 若 $\mathbb{I}_\mathbb{Q}$ 配备了 $\mathbb{A}_\mathbb{Q}$ 子空间拓扑，则其中的开集 $\big(N_q \times \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p\big) \cap \mathbb{I}_\mathbb{Q} \not\subseteq \mathbb{R}^\times \times \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p^\times$. 这是因为总可以构造元素 $\boldsymbol{x} := (x_q)$ 使得 $x_\infty = \frac{q+1}{q}, x_q = \frac{1}{q}$. 因此我们能够感觉到 $\mathbb{I}_\mathbb{Q}$ 的限制积拓扑比 $\mathbb{A}_\mathbb{Q}$ 下放的子空间拓扑要细.

(3)$\mathfrak{Cl}(\mathbb{Q})$ 非紧. **证**：对任意 $r \in \mathbb{R}_{>0}$，取 $\boldsymbol{r}\,\mathbb{Q}^\times := (1, \cdots, 1, r)\,\mathbb{Q}^\times \in \mathbb{I}_\mathbb{Q}/\,\mathbb{Q}^\times$(有限素点处为 1，无穷素点处为 $r$)，总有 $|\boldsymbol{r}| = r$. 因此连续映射 $|\cdot| : \mathbb{I}_\mathbb{Q}/\,\mathbb{Q}^\times \twoheadrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ 是满射，这意味着 $\mathbb{I}_\mathbb{Q}/\,\mathbb{Q}^\times$ 不可能是紧集.

(4) 有如下一一对应：

(4.1)$\mathbb{I}_\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \mathbb{I}_\mathbb{Q}^1 \times \mathbb{R}_{>0}, \boldsymbol{x} := (x_p) \mapsto \Big(\big((x_p), \frac{x_\infty}{|\boldsymbol{x}|}\big), |\boldsymbol{x}|\Big)$；

(4.2)$\mathfrak{Cl}^1(\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathbb{Z}}^\times, \big((x_p), 1\big)\,\mathbb{Q}^\times \leftarrow\!\shortmid (x_p)$；

(4.3)$\mathfrak{Cl}(\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Cl}^1(\mathbb{Q}) \times \mathbb{R}_{>0}, \boldsymbol{x}\,\mathbb{Q}^\times := (x_p)\,\mathbb{Q}^\times \mapsto \Big(\big((x_p), \frac{x_\infty}{|\boldsymbol{x}|}\big)\,\mathbb{Q}^\times, |\boldsymbol{x}|\Big)$.

## 8、Tate 的工作

在数论中有大家熟知的函数方程：$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\zeta(1-s)$，其中 $\zeta(s)$ 指亚纯延拓后的经典 Riemann-zeta 函数. 许多解析数论的工作给出了处理或证明函数方程的办法，但总不能完美地解决问题，譬如无法严肃地解释函数方程中奇怪因子 $\pi^{-\frac{s}{2}}$、$\Gamma(\frac{s}{2})$ 的来源. 而 Tate 的博士论文则是关于函数方程的技术性工作，他提供了处理整体域上函数方程的一般思路，即使用调和分析. 本节我们将追溯 Tate 的想法，在他的理论框架下给出函数方程的证明 (见推论 8.30). 在这过程中，我们会发现函数方程中的奇怪因子来源于无穷素点处的正态分布函数.

**声明** 本节如无特别说明我们只讨论数域上的理论，也就是说以下所涉及的局部域一般是特征 0 的. 对于特征 $p$ 的函数域上的理论，本节仅提及 Riemann-Roch 定理 (见定理 8.22)，其余内容还请参考专著 [17] 的相应章节或 [1]Chapter7 的习题.

我们从局部理论开始，介绍 [15]Chapter2 的相应内容. 设 $K$ 是局部域，其上带有定理 6.13 给出的**标准绝对值**$|\cdot|$(注意完备化). 首先约定如下记号：

**定义 8.1** • 若 $K$ 是 non-Archimedean 局部域，则在无混淆的前提下简记 $\mathscr{O}$ 为 $K$ 的整数环，$\mathfrak{m}$ 为 $\mathscr{O}$ 的唯一极大理想，$\varpi\in\mathfrak{m}$ 为一个单值化子，$\mathrm{Res}(K):=\mathscr{O}/\mathfrak{m}$ 为剩余域. 此时成立等式 $|\varpi|=\frac{1}{|\mathrm{Res}(K)|}\Big($事实上，设 $F$ 是整体域，记 $\mathcal{O}_F$ 为其代数整数环，设 $\mathfrak{p}\in\mathrm{spec}(\mathcal{O}_F)$，记 $F$ 在素点 $\mathfrak{p}$ 处的完备化及其整数环分别为 $\overline{F}$、$\mathscr{O}$. 取乘法闭子集 $S:=\mathcal{O}_F\setminus\mathfrak{p}$. 注意到 $\mathcal{O}_F/\mathfrak{p}$ 已经是域，故 $|\mathcal{O}_F/\mathfrak{p}|=|\mathrm{Frac}(\mathcal{O}_F/\mathfrak{p})|=|S^{-1}\mathcal{O}_F/S^{-1}\mathfrak{p}|\xlongequal{[2]\ \text{命题2.4.3}}|\mathscr{O}/\mathfrak{m}|=|\mathrm{Res}(\overline{F})|\Big)$.

• 若记 $U_K:=\ker\big(K^\times\xrightarrow{|\cdot|}\mathbb{R}_{>0}\big),V_K:=\mathrm{Im}\big(K^\times\xrightarrow{|\cdot|}\mathbb{R}_{>0}\big)$，由同态基本定理，对局部域 $K$ 而言有 $K^\times/U_K\cong V_K\cong v(K^\times)\cong\begin{cases}\mathbb{R}_{>0}, & K=\mathbb{R},\mathbb{C}\\ \mathbb{Z}, & K\text{是 non-Archimedean}\end{cases}$. 据此不难验证有拓扑群同构 $K^\times\xrightarrow{\sim}U_K\oplus V_K,y\mapsto(y_U,y_V:=|y|)$(请读者自行验证这确实是拓扑群的同构). 此举旨在模拟局部域上的极坐标，所以我们称该同构为**极坐标变换**.

• 记 $X(K^\times):=\{\text{连续群同态}K^\times\to\mathbb{C}^\times\}$，称 $X(K^\times)$ 中的元素为 $K^\times$ 的 **(连续) 拟特征标** (quasi-character). 而第 5 节中介绍的 Pontryagin 对偶群 $\widehat{K^\times}$ 中的元素则是一类特殊的拟特征标——(连续酉) 特征标. 我们称拟特征标 $\chi$ 是**非分歧** (unramify) 的，如果 $\chi|_{U_K}=1$.

现在来确定局部域 $K$ 的特征标. 在第 5 节中我们曾给出断言：局部域是自对偶的. 现在我们给出这个事实的证明：

**定理 8.2** 设 $K$ 是局部域，考虑加法结构则有典范拓扑 Abel 群同构 $K\cong\widehat{K}$.

**证明** 易见 $\widehat{K}$ 非平凡$\Big($若 $\widehat{K}$ 平凡，则由定理 5.16 知 $K\cong\widehat{\widehat{K}}=\widehat{\{\mathfrak{i}\}}\cong\{\mathfrak{i}\}$，矛盾$\Big)$. 取定 $\widehat{K}$ 中的一个非平凡特征标 $\widetilde{\chi}$(具体办法见注意 8.3)，定义 $\Theta:K\to\widehat{K},s\mapsto\big[\chi_s:K\to S^1,t\mapsto\widetilde{\chi}(st)\big]$，验证 $\Theta$ 是良好定义的拓扑群同构即可. 此处唯一的困难在于验证满射. 注意到 $\overline{\Theta(K)}^{\perp}=\{y\in K:\forall\chi\in\Theta(K),\chi(y)=1\}=\{y\in K:\forall s\in K,\widetilde{\chi}(sy)=1\}=\{0\}$(留意 $\widetilde{\chi}$ 非平凡)，故 $\overline{\Theta(K)}=\widehat{K}$. 此时再利用定理 5.16 证明的 Step3 验证 $\Theta(K)$ 是闭集即可.■

**注意 8.3** 我们尝试找出一个非平凡特征标. 先从最简单的局部域 $K_0=\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{Q}_p$ 开始：

(1) 当 $K_0=\mathbb{R}$ 时，取非平凡特征标 $\widetilde{\chi}:\mathbb{R}\to S^1,x\mapsto e^{-2\pi ix}$；

(2) 当 $K_0=\mathbb{C}$ 时，取非平凡特征标 $\widetilde{\chi}:\mathbb{C}\to S^1,x\mapsto e^{-2\pi i(x+\overline{x})}$；

(3) 当 $K_0=\mathbb{Q}_p$ 时，取非平凡特征标 $\widetilde{\chi}:\mathbb{Q}_p\to S^1,\sum_{j=-N}^{\infty}a_jp^j\mapsto\exp(2\pi i\sum_{j=-N}^{-1}a_jp^j)$(此处指数部分没有出现负号的原因参见定理 8.18)，显见 $\widetilde{\chi}(x)=1$ 当且仅当 $x\in\mathbb{Z}_p$；

若局部域 $K$ 来自于上述 $K_0$ 的有限扩张$\big($例如情况 (1) $\Rightarrow$ (2)$\big)$，则令 $\widetilde{\chi}'(\cdot):=\widetilde{\chi}\circ\mathrm{tr}_{K/K_0}(\cdot)$，易证这是 $K$ 的一个非平凡特征标$\Big($对于情况 (3)，设扩张次数为 $n$，取 $p^t>n\in\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Z}_p$，则 $\widetilde{\chi}\circ\mathrm{tr}(\frac{1}{p^t})\neq1\Big)$.

**声明** 为记号简洁，以后讨论局部域上的特征标 $\Theta(s)$ 时，$\widetilde{\chi}$ 均取为注意 8.3 中列出的那些，相应地记 $\Theta(s)=\chi_s:x\mapsto\widetilde{\chi}(sx)$.

**推论 8.4** 设 $K/\mathbb{Q}_p$ 是有限扩张，$\mathscr{O}$ 是 $K$ 的整数环，则 $\chi_s\in\mathscr{O}^\perp$ 当且仅当 $s\in\mathfrak{C}_K:=\big\{s\in K:\mathrm{tr}_{K/\mathbb{Q}_p}(s\mathscr{O})\subseteq\mathbb{Z}_p\big\}$. 特别地，有拓扑 Abel 群同构 $\Theta(\mathbb{Z}_p)\cong\mathbb{Z}_p^\perp$(该结论一般并不成立，详见下面的例子).

**证明** 由注意 8.3，$\chi_s\in\mathscr{O}^\perp$ 当且仅当 $\widetilde{\chi}\circ\mathrm{tr}_{K/\mathbb{Q}_p}(s\mathscr{O})=1$，当且仅当 $\mathrm{tr}_{K/\mathbb{Q}_p}(s\mathscr{O})\subseteq\ker(\widetilde{\chi})=\mathbb{Z}_p$. 特别地，由 $\widetilde{\chi}(\mathbb{Z}_p)=1$ 知 $\Theta(\mathbb{Z}_p)\subseteq\mathbb{Z}_p^\perp$；反过来由定理 8.2 设 $\chi_s:\mathbb{Q}_p\to S^1$ 满足 $\chi_s(\mathbb{Z}_p)=1$，若 $s\notin\mathbb{Z}_p$，则 $s\notin\mathfrak{C}_{\mathbb{Q}_p}$，因而 $\chi_s\notin\mathbb{Z}_p^\perp$，矛盾.■

**例** 考虑有限扩张 $K := \mathbb{Q}_2[i]/\mathbb{Q}_2$，注意到有分解 $(2) = (1+i)^2 \subseteq \mathbb{Q}_2[i]$，故根据命题 6.14(6) 有环同构 $K = \mathbb{Q}_2[i] \cong \mathbb{Q}_2 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[i] \cong \big(\mathbb{Q}[i]\big)_{(1+i)}$，相应的整数环为 $\mathscr{O} = \mathbb{Z}_2[i]$(见 [29] 命题 2.53). 考虑 $s := \frac{1}{1+i} \in K$，直接计算得 $\mathrm{tr}_{K/\mathbb{Q}_2}(s\,\mathbb{Z}_2[i]) \subseteq \mathbb{Z}_2$，因此根据推论 8.4 有 $\chi_s \in \mathbb{Z}_2[i]^{\perp}$，但 $s \notin \mathbb{Z}_2[i]$.

在这里先来解释一下推论 8.4 中出现的记号“$\mathfrak{C}_K$”，可以将它理解为整数环关于迹的某种对偶. 此外在定理 8.2 给出的同构对应下，整数环的对偶可能会产生偏移 (推论 8.4)，这也是导致其出现的原因.

**命题 8.5(差分)** 设 $L/K$ 是域 (或局部域) 的有限可分扩张，称 $\mathfrak{C}_L := \big\{s \in L : \mathrm{tr}_{L/K}(s\mathcal{O}_L) \subseteq \mathcal{O}_K\big\}$(局部域时将 $\mathcal{O}$ 替换为 $\mathscr{O}$) 为 $L$ 的**余差分** (codifferent). 关于余差分我们有：

(1.1)$\mathfrak{C}_L$ 是一个 $\mathcal{O}_K$-模，且有同构 $\mathfrak{C}_L \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_L, \mathcal{O}_K), s \mapsto \big[y \mapsto \mathrm{tr}_{L/K}(sy)\big]$. 特别地，当 $L = K$ 时有 $\mathfrak{C}_K = \mathcal{O}_K$.

(1.2) 局部域时，若设 $K = \mathbb{Q}_p$，则 $\mathfrak{C}_L$ 是一个 $\mathbb{Z}_p$-模，并且有同构 $\mathfrak{C}_L \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathscr{O}, \mathbb{Z}_p), s \mapsto \big[y \mapsto \mathrm{tr}_{L/\mathbb{Q}_p}(sy)\big]$. 特别地，当 $L = K = \mathbb{Q}_p$ 时有 $\mathfrak{C}_{\mathbb{Q}_p} = \mathbb{Z}_p$.

事实上，设 $s \in \mathcal{O}_L$，则由 (1.1) 可知 $\mathfrak{C}_L \supseteq \mathcal{O}_L$(对局部域的有限扩张 $L/\mathbb{Q}_p$ 而言亦有 $\mathfrak{C}_L \supseteq \mathscr{O}$). 据此可以定义 $L$ 的**差分** (different) 为 $\mathfrak{D}_L := \mathfrak{C}_L^{-1} := \big\{x \in L : x\mathfrak{C}_L \subseteq \mathcal{O}_L(\text{或}\,\mathscr{O})\big\} \subseteq \mathcal{O}_L$(或 $\mathscr{O}$). 关于差分我们有：

(2.1)$\mathfrak{C}_L$ 是 $\mathcal{O}_L$ 的分式理想，$\mathfrak{D}_L$ 是 $\mathcal{O}_L$ 的理想.

(2.2) 局部域时，$\mathfrak{C}_L$ 是 $\mathscr{O}$ 的分式理想，$\mathfrak{D}_L$ 是 $\mathscr{O}$ 的理想. 因此存在 $n \geq 0$ 使得 $\varpi^n\mathfrak{C}_L = \mathscr{O}$(即 $\mathfrak{C}_L = \varpi^{-n}\,\mathscr{O}$)，相应的 $\mathfrak{D}_L = \varpi^n\,\mathscr{O} = \mathfrak{m}^n$.

有了差分的概念，便可在局部域 $(K, +)$ 上选取合适的 Haar 测度 $dx$，并且根据该测度诱导 $K^{\times}$ 上的 Haar 测度 $d^{\times}x$. 具体如下：

**声明** 设局部域 $K$ 关于加法配备 Haar 测度 $\mu$(或 $dx$)，则 $dx$ 诱导在 $K^{\times}$ 上关于乘法平移不变的 Haar 测度 $d^{\times}x := \ell_K \frac{dx}{|x|}$(请读者根据命题 1.14(2) 自行验证这是 Haar 测度)，其中 $\ell_K$ 是某个正实数. 关于这里的测度 $dx$(或 $\mu$) 和正实数 $\ell_K$，我们作如下约定：

(1) 当 $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 时，取 $dx, dz$ 分别为通常的 Lebesgue 测度、$dz = d(x+iy) := 2dxdy$，取 $\ell_K = 1$；

(2) 当 $K$ 是 non-Archimedean 时，取 $dx$ 为使 $\int_{\mathscr{O}} dx = |\,\mathscr{O}/\mathfrak{D}_K|^{-1/2}$ 的 Haar 测度，取 $\ell_K = \frac{1}{1-|\varpi|}$.

声明中约定积分值为 $|\,\mathscr{O}/\mathfrak{D}_K|^{-1/2}$ 是出于对偶测度的考量. 由定理 5.11 知 $\widehat{K}$ 上存在唯一对偶测度 $\widehat{\mu}$(或 $d\chi$)，我们自然希望 $\mu(\mathfrak{C}_K) = \widehat{\mu}(\mathscr{O}^{\perp})$，以此来响应推论 8.4. 举例来说，若取 $K = \mathbb{Q}_p$，是否有 $\int_{\mathbb{Z}_p} dx = \int_{\mathbb{Z}_p^{\perp}} d\chi$? 此外，还以 $\mathbb{Q}_p$ 为例，上述约定给出 $\int_{\mathbb{Z}_p} dx = 1$，但更一般地，我们还希望利用这个积分值来计算诸如 $\int_{a+p^n\mathbb{Z}_p} dx$、$\int_{\mathbb{Z}_p^{\times}} d^{\times}x$ 等积分. 这一系列问题的答案由如下引理给出：

**引理 8.6(积分的性质)** 设 $K$ 是 non-Archimedean 局部域 (Archimedean 情形就是经典实复分析)，则：

(1) 对任何可测集 $X \subseteq K$ 及任意 $a \in K$，有 $\int_{aX} dx = |a|\int_X dx$，即 $d(ay) = |a|dy$(因此 $\int_{a+p^n\mathbb{Z}_p} dx = p^{-n}$). 也就是说，此时的积分换元公式为 $\int_{aX} f(y)dy = |a|\int_X f(ay)dy$.

(2) 关于乘法群 $K^{\times}$，有 $\int_{\mathscr{O}^{\times}} d^{\times}x = \int_{\mathscr{O}} dx = |\,\mathscr{O}/\mathfrak{D}_K|^{-1/2}$(这解释了声明的情形 (2) 中为何取 $\ell_K = \frac{1}{1-|\varpi|}$)，且 $\int_{\mathscr{O}\setminus\{0\}} |x|^t d^{\times}x = \frac{|\,\mathscr{O}/\mathfrak{D}_K|^{-1/2}}{1-|\varpi|^t}$($t \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(t) > 0$). 特别地，$\int_{\mathbb{Z}_p^{\times}} d^{\times}x = 1$，$\int_{\mathbb{Z}_p\setminus\{0\}} |x|^t d^{\times}x = \frac{1}{1-p^{-t}}(\mathrm{Re}(t) > 0)$.

(3) 示性函数 $\mathbf{1}_{a+\mathfrak{m}^n}$ 的 Fourier 变换为 $\widehat{\mathbf{1}_{a+\mathfrak{m}^n}}(s) := \widehat{\mathbf{1}_{a+\mathfrak{m}^n}}(\chi_s) = \overline{\chi_s(a)}|\,\mathscr{O}/\mathfrak{D}_K|^{-1/2}|\varpi|^n \cdot \mathbf{1}_{\mathfrak{C}_K\cdot\mathfrak{m}^{-n}}$.

(4) 只有在约定 $\int_{\mathscr{O}} dx = |\,\mathscr{O}/\mathfrak{D}_K|^{-1/2}$ 时，才会成立等式 $\int_{\mathfrak{C}_K} dx = \int_{\mathscr{O}^{\perp}} d\chi$(这解释了声明的情形 (2) 中为何约定 $\int_{\mathscr{O}} dx = |\,\mathscr{O}/\mathfrak{D}_K|^{-1/2}$). 特别地，$1 = \int_{\mathbb{Z}_p} dx = \int_{\mathbb{Z}_p^{\perp}} d\chi$.

**证明** (1) 易见 $\mu_a(X) := \mu(aX)$ 仍然是 $(K, +)$ 上的一个 Haar 测度，因此由定理 1.15 知存在 $M_a > 0$ 使得 $\mu_a = M_a\mu$. 下证 $M_a = |a|$，而这只需证 $\mu(a\,\mathscr{O}) = |a|\mu(\mathscr{O})$. 不失一般性设 $a = \varpi^n (n \geq 0)$，而 $\mathscr{O}$ 关于加法有陪集分解 $\mathscr{O} = \bigsqcup_{j=1}^{[\mathscr{O}:\varpi^n\,\mathscr{O}]}(x_j + \varpi^n\,\mathscr{O})$，故 $\mu(\mathscr{O}) = \sum_{j=1}^{[\mathscr{O}:\varpi^n\,\mathscr{O}]}\mu(x_j + \varpi^n\,\mathscr{O}) = [\mathscr{O} : \varpi^n\,\mathscr{O}] \cdot \mu(\varpi^n\,\mathscr{O})$. 注意到 $[\mathscr{O} : \varpi^n\,\mathscr{O}] = [\mathscr{O} : \varpi\,\mathscr{O}]^n = |\,\mathscr{O}/\mathfrak{m}|^n = |\varpi|^{-n}$(见 [2] 命题 2.3.9)，因此 $|\varpi|^n\mu(\mathscr{O}) = \mu(\varpi^n\,\mathscr{O})$，证毕.

(2) 直接计算有 $\int_{\mathscr{O}^{\times}} d^{\times}x = \frac{1}{1-|\varpi|}\int_{\mathscr{O}^{\times}} \frac{dx}{|x|} \overset{|x|=1}{=\!=\!=} \frac{1}{1-|\varpi|}\int_{\mathscr{O}\setminus\mathfrak{m}} dx = \frac{1}{1-|\varpi|}|\,\mathscr{O}/\mathfrak{D}_K|^{-1/2}(1-|\varpi|) = |\,\mathscr{O}/\mathfrak{D}_K|^{-1/2}$. 此外由 (1) 有 $\int_{\varpi^k\,\mathscr{O}} dx = |\varpi|^k|\,\mathscr{O}/\mathfrak{D}_K|^{-1/2}$，故后一结论由下式给出：

$$\int_{\mathscr{O}\setminus\{0\}} |x|^t d^{\times}x = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{\varpi^k\,\mathscr{O}\setminus\varpi^{k+1}\,\mathscr{O}} \frac{|x|^{t-1}}{1-|\varpi|}dx = \frac{1}{1-|\varpi|}\sum_{k=0}^{\infty}|\varpi|^{k(t-1)}\left(\int_{\varpi^k\,\mathscr{O}} dx - \int_{\varpi^{k+1}\,\mathscr{O}} dx\right) = \frac{|\,\mathscr{O}/\mathfrak{D}_K|^{-1/2}}{1-|\varpi|^t}.$$

(3) 显然 $\widehat{1_{a+\mathfrak{m}^n}}(s) = \int_{a+\mathfrak{m}^n}\overline{\chi_s(y)}dy = \int_{\mathfrak{m}^n}\overline{\chi_s(a+y)}dy = \overline{\chi_s(a)}\int_{\mathfrak{m}^n}\overline{\chi_s(y)}dy$. 注意到 $y \in \mathscr{O}$ 蕴含 $\varpi^n sy \in$

$s\mathfrak{m}^n$，因而当 $\mathrm{tr}(s\mathfrak{m}^n)\subseteq\mathbb{Z}_p$(即 $s\in\mathfrak{C}_K\cdot\mathfrak{m}^{-n}$) 时注意 8.3(3) 中的 $\widetilde{\chi}$ 平凡，即

$$\int_{\mathfrak{m}^n}\overline{\chi_s(y)}dy=\int_{\varpi^n\mathscr{O}}\overline{\widetilde{\chi}\circ\mathrm{tr}(sy)}dy\overset{(1)}{=}|\varpi|^n\int_{\mathscr{O}}\overline{\widetilde{\chi}\circ\mathrm{tr}(\varpi^n sy)}dy=|\varpi|^n\int_{\mathscr{O}}dy=|\mathscr{O}/\mathfrak{D}_K|^{-1/2}|\varpi|^n.$$

而当 $s\notin\mathfrak{C}_K\cdot\mathfrak{m}^{-n}$ 时，由命题 4.10(6) 知积分为 0.

(4) 设 $\int_{\mathscr{O}}dx=T$. 首先，若设 $\mathfrak{C}_K=\varpi^{-n}\mathscr{O}$，则 $\mathfrak{D}_K=\varpi^n\mathscr{O}$. 此时有 $\int_{\mathfrak{C}_K}dx=\int_{\varpi^{-n}\mathscr{O}}dx\overset{(1)}{=}|\varpi|^{-n}T=|\mathscr{O}/\varpi\mathscr{O}|^nT=|\mathscr{O}/\mathfrak{D}_K|\cdot T$. 其次，若使等式 $\int_{\mathfrak{C}_K}dx=\int_{\mathscr{O}^\perp}d\chi$ 成立，则

$$T=\int_K\mathbf{1}_{\mathscr{O}}^2dx\xlongequal{\text{定理 5.11}}\int_{\widehat{K}}\widehat{\mathbf{1}_{\mathscr{O}}}^2d\chi\xlongequal{\text{类似 (3) 的方法}}\int_K\left(T\cdot\mathbf{1}_{\mathfrak{C}_K}\right)^2dx=T^2\int_{\mathfrak{C}_K}dx=T^3\cdot|\mathscr{O}/\mathfrak{D}_K|,$$

解关于 $T$ 的方程即可.■

**推论 8.7** 若记 $\mathbb{I}_{\mathbb{Q},\mathrm{fin}}:=\widehat{\prod}_{p<\infty}^{\mathbb{Z}_p^\times}\mathbb{Q}_p^\times$，则积分 $\int_{\widehat{\mathbb{Z}}\cap\mathbb{I}_{\mathbb{Q},\mathrm{fin}}}|\boldsymbol{x}|^sd^\times\boldsymbol{x}$ 绝对收敛于 Riemann-zeta 函数 $\zeta(s):=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^s},\mathrm{Re}(s)>1$. 也就是说，Riemann-zeta 函数收集的是有限素点处的信息.

**证明** 任取 $\boldsymbol{x}:=(x_p)\in\mathbb{I}_{\mathbb{Q},\mathrm{fin}},|\boldsymbol{x}|:=\prod_{p<\infty}|x_p|_p\in\mathbb{Q}_{>0}$. 对任意素数 $p$，$x_p\in\mathbb{Q}_p^\times$ 总可以唯一地表成 $x_p=p^{k_p}u,k_p\in\mathbb{Z},u\in\mathbb{Z}_p^\times$，而此时 $|\boldsymbol{x}|=\prod_{p<\infty}p^{-k_p}$. 所以 $\big||\boldsymbol{x}|x_p\big|_p=1$，即 $\boldsymbol{x}\in|\boldsymbol{x}|^{-1}\widehat{\mathbb{Z}}^\times$. 至此我们实际上证明了 $\mathbb{I}_{\mathbb{Q},\mathrm{fin}}=\bigsqcup_{q\in\mathbb{Q}_{>0}}q\widehat{\mathbb{Z}}^\times$，故 $\widehat{\mathbb{Z}}\cap\mathbb{I}_{\mathbb{Q},\mathrm{fin}}=\bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}_{>0}}n\widehat{\mathbb{Z}}^\times$. 此时积分

$$\int_{\widehat{\mathbb{Z}}\cap\mathbb{I}_{\mathbb{Q},\mathrm{fin}}}|\boldsymbol{x}|^sd^\times\boldsymbol{x}=\sum_{n=1}^\infty|\boldsymbol{n}|^s\int_{\widehat{\mathbb{Z}}^\times}|\boldsymbol{x}|^sd^\times\boldsymbol{x}\xlongequal{\text{命题 7.6}}\sum_{n=1}^\infty n^{-s}\cdot\left(\prod_{p<\infty}\int_{\mathbb{Z}_p^\times}d^\times x\right)\xlongequal{\text{引理 8.6(2)}}\zeta(s).■$$

事实上上述积分的另一种 (不严谨的) 计算方式给出了 $\zeta(s)$ 的 Euler 乘积表达：

$$\int_{\widehat{\mathbb{Z}}\cap\mathbb{I}_{\mathbb{Q},\mathrm{fin}}}|\boldsymbol{x}|^sd^\times\boldsymbol{x}=\int_{\widehat{\prod}_{p<\infty}^{\mathbb{Z}_p^\times}\mathbb{Z}_p}|\boldsymbol{x}|^sd^\times\boldsymbol{x}\xlongequal{\text{命题 7.6}}\prod_{p<\infty}\int_{\mathbb{Z}_p}|x|_p^sd^\times x\xlongequal{\text{引理 8.6(2)}}\prod_{p<\infty}\frac{1}{1-p^{-s}}=\zeta(s).$$

留意到之前总是会对形如 $|\cdot|^s$ 的函数积分，而这其实是非分歧的拟特征标. 一般地，对于 $K^\times$ 的拟特征标，我们有如下描述：

**定理 8.8(Tate)** $K^\times$ 的拟特征标均形如 $\chi:K^\times\to\mathbb{C}^\times,y\mapsto\chi(y)=\chi_0(y_U)\cdot|y|^s$，这里 $y\mapsto(y_U,y_V)$ 是极坐标变换，且 $\chi_0\in\widehat{U_K}$、$s\in\mathbb{C}$ 的实部 $\mathrm{Re}(s)$ 均由 $\chi$ 唯一确定(因而我们称 $\mathrm{Re}(s)$ 为 $\chi$ 的**幂** (exponent)，记作 $\sigma(\chi)$). 也就是说，任何拟特征标都可以唯一地分解成分歧部分 (体现为酉特征标) 和非分歧部分的乘积.

**证明** **Step1**：拟特征标 $\chi$ 非分歧当且仅当存在 $s\in\mathbb{C}$ 使得 $\chi(x)=|x|^s$. 注意，这里 $\mathrm{Re}(s)$ 由 $\chi$ 唯一确定. **证**：注意到 $\chi$ 诱导了两个同态 $\chi_1:U_K\to\mathbb{C}^\times,\chi_2:V_K\to\mathbb{C}^\times$，因而 $\chi$ 非分歧当且仅当 $\chi_1$ 平凡，也就是说 $\chi$ 唯一地对应了 $V_K$ 上的拟特征标 $\chi_2$. 注意到 $V_K$ 无非就是 $(\mathbb{R}_{>0},\times)$ 或 $\left(|\varpi|^{\mathbb{Z}},\times\right)$，且不难发现 $\chi_2$ 的像落在某条曲线 $\gamma_s(t)=e^{st},s\in\mathbb{C}$ 上，$\mathrm{Re}(s)$ 由 $\chi$ 唯一确定. 因此 $\chi_2$ 形如 $x\mapsto e^{s\ln x}$，所以 $\chi(x)=\chi_2(x_V)=|x|^s$.

**Step2**：定理 8.8 成立. **证**：定义 $\chi_0:=\chi|_{U_K}$. 由于 $U_K$ 紧($U_K$ 无非就是 $\{\pm1\}$ 或 $S^1$ 或 $\mathscr{O}^\times$)，故 $\chi_0(U_K)$ 紧，这蕴含 $\chi_0(U_K)\subseteq S^1$，即 $\chi_0$ 是酉特征标. 此时再根据 Step1 验证拟特征标 $\chi/\chi_0$ 非分歧即可. 唯一性显然.■

**注意 8.9(导子)** 设 $\chi\in X(K^\times)$，根据定理 8.8 知存在唯一 $\chi_0\in\widehat{U_K}$. 事实上，

(1) 当 $K=\mathbb{R}$ 时，$U_K=\{\pm1\}$，因而 $\widehat{U_K}$ 中仅有两个元素 $-1\mapsto\pm1$；

(2) 当 $K=\mathbb{C}$ 时，$U_K=S^1$，因而 $\widehat{U_K}\cong\mathbb{Z}$ 中的特征标为 $e^{it}\mapsto e^{itn}$；

(3) 当 $K$ 是 non-Archimedean 时，$U_K=\mathscr{O}^\times$. 此时 $\mathscr{O}^\times$ 的子群族 $\{1+\mathfrak{m}^n:n>0\}$ 构成 $1\in\mathscr{O}^\times$ 的一个邻域基. 若 $\chi_0$ 非平凡，则存在 $N\in\mathbb{Z}_{>0}$ 使得当 $n\geq N$ 时 $\chi_0(1+\mathfrak{m}^n)=1$. 取最小的 $N$(若 $\chi_0$ 平凡，则取 $N=0$)，称理想 $\mathfrak{m}^N$ 为拟特征标 $\chi$ 的**导子** (conductor)，记作 $\mathrm{cond}(\chi):=\mathfrak{m}^N$. 易见 $\mathrm{cond}(\chi)=\mathscr{O}$ 当且仅当 $\chi$ 非分歧.

而接下来我们要研究的比示性函数更一般的基本对象是：

**定义 8.10(速降函数)** 定义局部域 $K$ 上的 **Schwarz 函数** (或**速降函数**) 为如下集合 $\mathcal{S}(K)$ 中的元素：

(1) 当 $K=\mathbb{R}$ 时，定义 $\mathcal{S}(\mathbb{R}):=\left\{f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}):\forall m,n\in\mathbb{Z}_{\geq0},x^mf^{(n)}(x)\text{有界}\right\}$；$K=\mathbb{C}$ 时类似；

(2) 当 $K$ 是 non-Archimedean 时 (注意此时 $K$ 局部紧且完全不连通)，定义 $\mathcal{S}(K):=\big\{f:f$ 是局部常值且紧支撑的复值函数$\big\}$.

实分析告诉我们，$\mathcal{S}(K)$ 是 $\mathbb{C}$-线性空间，且 $\mathcal{S}(K)$ 在 $L^1(K)$ 中稠密.

**命题 8.11** 设 $K$ 是 non-Archimedean 局部域 (Archimedean 情形就是经典实复分析)，$f\in\mathcal{S}(K)$，则 Fourier 变换 $\widehat{f}\in\mathcal{S}(\widehat{K})\cong\mathcal{S}(K)$. 换言之，Fourier 变换保持速降函数，因此推论 5.14 蕴含 $\widehat{\widehat{f}}=f$.

**证明** 仅需证明 $\mathcal{S}(K)$ 中的元素是示性函数 $\mathbf{1}_{a+\mathfrak{m}^n}$ 的有限线性组合，再利用引理 8.6(3) 即可. 设 $f\in\mathcal{S}(K)$，由于 $f$ 局部常值，故 $f^{-1}(z),z\in\mathbb{C}$ 均是 $K$ 中的开集，因此 $K\setminus f^{-1}(0)$ 闭，这意味着 $\mathrm{supp}(f)=K\setminus f^{-1}(0)=\bigcup_{z\neq 0}f^{-1}(z)$. 由于 $\mathrm{supp}(f)$ 紧，从而上述开覆盖有有限子覆盖 $\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(z_i)$，这蕴含 $\mathrm{Im}(f)$ 中只有有限多个元素. 此时只需注意到 $K$ 完全不连通且形如 $a+\mathfrak{m}^n$ 的开集构成 $(K,+)$ 的一个开邻域基结构即可.■

**定义 8.12(局部 $\zeta$ 函数)** 设 $K$ 是局部域，$f\in\mathcal{S}(K)$. 定义 $f$ 对应的**局部 $\zeta$ 函数**为

$$\zeta(f,\cdot):\{\chi\in X(K^\times):\sigma(\chi)>0\}\longrightarrow\mathbb{C},\zeta(f,\chi):=\int_{K^\times}f(x)\chi(x)d^\times x.$$

**命题 8.13** 关于 $\chi$ 的函数 $\zeta(f,\chi)$ 在定义域上良好定义，即当 $\sigma(\chi)>0$ 时积分 $\int_{K^\times}f(x)\chi(x)d^\times x$ 存在.

**证明** 仅证 non-Archimedean 情形. 依据命题 8.11 设 $f=\sum_{k=1}^n f_k\mathbf{1}_{a_k+\mathfrak{m}^k}$，则积分

$$\int_{K^\times}|f(x)\chi(x)|d^\times x\xlongequal{\text{定理 8.8}}\int_{K^\times}|f(x)||x|^{\sigma(\chi)}d^\times x=\sum_{k=1}^n|f_k|\int_{a_k+\mathfrak{m}^k\setminus\{0\}}|x|^{\sigma(\chi)}d^\times x\le M\int_{\mathfrak{m}^N\setminus\{0\}}|x|^{\sigma(\chi)}d^\times x,$$

其中 $M$ 是一个充分大的正实数，$N$ 是一个整数满足 $\mathfrak{m}^N\supseteq\bigcup_{k=1}^n a_k+\mathfrak{m}^k$. 而积分

$$\int_{\mathfrak{m}^N\setminus\{0\}}|x|^{\sigma(\chi)}d^\times x=\int_{\varpi^N\mathscr{O}\setminus\{0\}}|x|^{\sigma(\chi)}d^\times x=|\varpi|^{N\sigma(\chi)}\int_{\mathscr{O}\setminus\{0\}}|x|^{\sigma(\chi)}d^\times x\xlongequal{\text{引理 8.6(2)}}|\varpi|^{N\sigma(\chi)}\frac{|\mathscr{O}/\mathfrak{D}_K|^{-1/2}}{1-|\varpi|^{\sigma(\chi)}}$$

有界，故定义良好.■

关于局部 $\zeta$ 函数，Tate 证明了如下运算法则：

**命题 8.14** 设 $f,g\in\mathcal{S}(K)$，对任意 $\chi\in X(K^\times)$ 满足 $0<\sigma(\chi)<1$，定义 (对偶的) 拟特征标 $\widehat{\chi}:=|\cdot|\chi^{-1}$，则 $\zeta(f,\chi)\cdot\zeta(\widehat{g},\widehat{\chi})=\zeta(\widehat{f},\widehat{\chi})\cdot\zeta(g,\chi)$.

**证明** 由定义 8.12 知在 $\sigma(\chi)>0$ 和 $\sigma(\widehat{\chi})>0$ 时讨论才有意义，这蕴含 $0<\sigma(\chi)<1$. 此时有

$$\zeta(f,\chi)\cdot\zeta(\widehat{g},\widehat{\chi})=\int_{K^\times}f(x)\chi(x)d^\times x\int_{K^\times}\widehat{g}(xy)|xy|\chi^{-1}(xy)d^\times y=\int_{K^\times}\left(\int_{K^\times}f(x)\widehat{g}(xy)|x|d^\times x\right)\chi(y^{-1})|y|d^\times y,$$

由于 $\int_{K^\times}f(x)\widehat{g}(xy)|x|d^\times x=\ell_K\cdot\int_K\int_K f(x)g(z)\overline{\chi_y(xz)}dzdx$，故上式中 $f,g$ 的地位对称.■

为了给出局部理论的主要定理 (定理 8.16)，我们先来回顾一下 Gamma 函数——$\Gamma$ 及其相关性质：

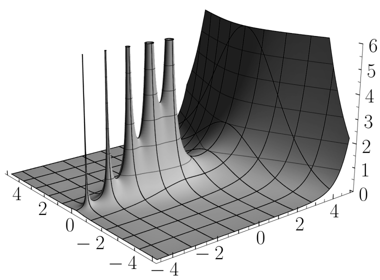
**命题 8.15(Gamma 函数)** 定义 **Gamma 函数**为 $\Gamma(z):=\int_0^\infty e^{-x}x^{z-1}dx(z\in\mathbb{C},\mathrm{Re}(z)>0)$. 该函数有如下性质：

(1) 运用 $x^ze^{-x}dx=-x^zd(e^{-x})$ 作分部积分知当 $\mathrm{Re}(z)>0$ 时有 $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$. 特别地，对所有 $n\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ 均有 $\Gamma(n+1)=n!$.

(2) 由 (1) 迭代知当 $n\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ 时有 $\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+n)}{(z+n-1)\cdots(z+1)z}$. 等式左边的定义域是 $\mathrm{Re}(z)>0$，而等式右边给出定义在 $\mathrm{Re}(z)>-n$ 上的亚纯函数，故遍历 $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ 便得到 $\Gamma$ 在 $\mathbb{C}$ 上的亚纯延拓. 关于亚纯函数 $\Gamma\in\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$，等式 $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ 仍然成立，且它没有零点，它的极点为 $z=0,-1,-2,\cdots$，其中 $z=-n$ 是留数为 $\frac{(-1)^n}{n!}$ 的极点 (阶为 $-1$).

(3) 成立等式 $\Gamma(z)\Gamma(-z)=\frac{-\pi}{z\sin(\pi z)}$，$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$. 此外，对任意正整数 $n$，有 $\prod_{i=0}^{n-1}\Gamma(z+\frac{i}{n})=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}-nz}\Gamma(nz)$.

该函数的图像大致如下：




回归正题，命题 8.14 告诉我们 $\frac{\zeta(f,\chi)}{\zeta(\widehat{f},\widehat{\chi})}$ 的值不依赖于 $f$ 的选取，仅与 $\chi$ 有关. 据此我们得到如下定理：

**定理 8.16(Tate)** 对任意 $f\in\mathcal{S}(K)$，$\zeta(f,\chi)$ 均可延拓成 $X(K^\times)\Big($我们赋予 $X(K^\times)$ 复结构 $\chi\in\{\chi|\cdot|^s:s\in\mathbb{C}\}\xrightarrow{\sim}\mathbb{C},\chi|\cdot|^s\mapsto s$ 使之成为一个 Riemann 曲面，注意 $\chi\in X(K^\times)$ 所在的连通分支就是 $\{\chi|\cdot|^s:s\in\mathbb{C}\}$，而 $\widehat{U_K}$ 中的每个酉特征标唯一地对应了一个连通分支$\Big)$的某个连通分支上的一个亚纯函数，并且满足函数方程 $\zeta(f,\chi)=\varrho(\chi)\zeta(\widehat{f},\widehat{\chi})$. 这里 $\varrho(\chi)$ 与 $f$ 无关，且 $\varrho(\chi)$ 是 $\chi$ 所在连通分支上的亚纯函数，具体为 (请回顾注意

8.9)：

(1) 当 $K=\mathbb{R}$ 时，$X(K^\times)=\{|\cdot|^s : s\in\mathbb{C}\}\sqcup\{\mathrm{sgn}(\cdot)|\cdot|^s : s\in\mathbb{C}\}$，且

$$\varrho(|\cdot|^s)=2^{1-s}\pi^{-s}\cos(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s),\quad \varrho(\mathrm{sgn}(\cdot)|\cdot|^s)=-i2^{1-s}\pi^{-s}\sin(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s).$$

(2) 当 $K=\mathbb{C}$ 时，$X(K^\times)=\bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}}\{\chi_n|\cdot|^s : s\in\mathbb{C}\}$，其中 $\chi_n:\mathbb{C}^\times\to S^1, re^{it}\mapsto e^{itn}$，且

$$\varrho(\chi_n|\cdot|^s)=(-i)^{|n|}(2\pi)^{1-2s}\frac{\Gamma(s+\frac{|n|}{2})}{\Gamma(1-s+\frac{|n|}{2})}.$$

(3) 当 $K$ 是 non-Archimedean 时，若记 $\chi=\chi_0|\cdot|^s$，则当 $\chi_0$ 平凡时有 $\varrho(|\cdot|^s)=|\mathscr{O}/\mathfrak{D}_K|^{s-\frac12}\frac{1-|\varpi|^{1-s}}{1-|\varpi|^s}$；$\chi_0$ 非平凡时有

$$\varrho(\chi_0|\cdot|^s)=|\mathscr{O}/\mathfrak{D}_K|^{1/2}|\varpi|^{\mathrm{ord}_\varpi\left(\mathrm{cond}(\chi)\mathfrak{D}_K\right)(1-s)}\sum_{\alpha\in\mathscr{O}^\times/\left(1+\mathrm{cond}(\chi)\right)}\chi_0(-\alpha)\cdot\overline{\widetilde{\chi}\circ\mathrm{tr}_{K/\mathbb{Q}_p}\left(\frac{\alpha}{\varpi^{\mathrm{ord}_\varpi\left(\mathrm{cond}(\chi)\mathfrak{D}_K\right)}}\right)}.$$

上式中，由定理 8.8 给出的 $\chi_0\in\widehat{U_K}=\widehat{\mathscr{O}^\times}$ 满足 $\chi_0(\varpi_U)=1$，$\widetilde{\chi}$ 来源于注意 8.3(3).

**证明** 由命题 8.14 知 $\frac{\zeta(f,\chi)}{\zeta(\widehat{f},\widehat{\chi})}:=\varrho(\chi)$ 与 $f$ 无关，且 $\zeta(f,\chi),\zeta(\widehat{f},\widehat{\chi})$ 分别在 $\sigma(\chi)>0,\sigma(\chi)<1$ 时有定义，故倘若能证明 $\varrho(\chi)$ 亚纯，我们立即得到 $\zeta(f,\chi)$ 可以延拓成关于 $\chi$ 的亚纯函数. 而对于 $\varrho(\chi)$ 的分类讨论如下(注意到计算 $\varrho(\chi)$ 只需选取特殊的 $f\in\mathcal{S}(K)$ 即可)：

**Step1**：$K=\mathbb{R}$. **证**：对于连通分支 $\{|\cdot|^s : s\in\mathbb{C}\}$，取 $f_1(x)=e^{-\pi x^2}$. 此时 $\zeta(f_1,|\cdot|^s)=\int_{\mathbb{R}^\times}e^{-\pi x^2}|x|^s d^\times x=2\int_0^\infty e^{-\pi x^2}x^{s-1}dx\xlongequal{\pi x^2:=t}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})$. 另由于 $\widehat{f_1}(y)=\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi(x^2-2ixy)}dx=e^{-\pi y^2}\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi(x-iy)^2}dx\xlongequal{\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi x^2}dx=1}e^{-\pi y^2}$，故 $\zeta(\widehat{f_1},|\cdot|^{1-s})=\int_{\mathbb{R}^\times}e^{-\pi y^2}|y|^{1-s}d^\times y=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})$，因此

$$\varrho(|\cdot|^s)=\frac{\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})}{\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})}=\pi^{\frac{1-2s}{2}}\frac{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s+1}{2})}{\Gamma(\frac{1-s}{2})\Gamma(\frac{1+s}{2})}\xlongequal{\text{命题 8.15(3)}}2^{1-s}\pi^{-s}\cos(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s).$$

而对于连通分支 $\{\mathrm{sgn}(\cdot)|\cdot|^s : s\in\mathbb{C}\}$，取 $f_2(x)=xe^{-\pi x^2}$. 相同的计算方法给出 $\zeta(f_2,\mathrm{sgn}(\cdot)|\cdot|^s)=\pi^{-\frac{s+1}{2}}\Gamma(\frac{s+1}{2})$，且不难验证 $\widehat{f_2}(x)=\int_{\mathbb{R}}ye^{-\pi y^2}\overline{e^{-2\pi ixy}}dy=e^{-\pi x^2}\int_{\mathbb{R}}ye^{-\pi(y-ix)^2}dy\xlongequal{y-ix:=t}e^{-\pi x^2}\left(\int_{\mathbb{R}}te^{-\pi t^2}dy+ix\right)=if_2(x)$，因此 $\zeta(\widehat{f_2},\mathrm{sgn}(\cdot)|\cdot|^{1-s})=i\pi^{\frac{s}{2}-1}\Gamma(1-\frac{s}{2})$. 此时

$$\varrho(\mathrm{sgn}(\cdot)|\cdot|^s)=\frac{\pi^{-\frac{s+1}{2}}\Gamma(\frac{s+1}{2})}{i\pi^{\frac{s}{2}-1}\Gamma(1-\frac{s}{2})}=-i\pi^{\frac{1-2s}{2}}\frac{\Gamma(\frac{s+1}{2})\Gamma(\frac{s}{2})}{\Gamma(1-\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s}{2})}\xlongequal{\text{命题 8.15(3)}}-i2^{1-s}\pi^{-s}\sin(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s).$$

**Step2**：$K=\mathbb{C}$. **证**：对于连通分支 $\{\chi_{-n}|\cdot|^s : s\in\mathbb{C}\}$，取 $f_{-n}(z)=z^ne^{-\pi z\overline{z}}$. 此时 $\zeta(f_{-n},\chi_{-n}|\cdot|^s)=\int_{\mathbb{C}^\times}z^ne^{-\pi z\overline{z}}\chi_{-n}(z)(z\overline{z})^s d^\times z\xlongequal{z:=re^{i\theta},d^\times z=dz/r^2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{+\infty}e^{-\pi r^2}r^{2s+n}\frac{2rdrd\theta}{r^2}=4\pi\int_0^{+\infty}e^{-\pi r^2}r^{2s+n-1}dr\xlongequal{\pi r^2:=t}2\pi^{1-s-\frac{n}{2}}\Gamma(s+\frac{n}{2})$. 另一方面，记函数 $g(z)=e^{-\pi z\overline{z}}=z^{-n}f_{-n}(z)$，根据注意 8.3(2) 其 Fourier 变换为

$$\begin{aligned}\widehat{g}(z):=\widehat{g}(\chi_z)&=\int_{\mathbb{C}}e^{-\pi w\overline{w}}e^{2\pi i(zw+\overline{zw})}dw\xlongequal[dw=2dudv]{\substack{z:=x+iy\\ w:=u+iv}}2\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi(u^2+v^2)}e^{4\pi i(ux-vy)}dudv\\&=2e^{-4\pi(x^2+y^2)}\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi(u-2ix)^2}du\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi(v+2iy)^2}dv\xlongequal{\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi x^2}dx=1}2e^{-4\pi z\overline{z}},\end{aligned}$$

将该含参量积分对 $z$ 求 $n$ 次偏导得 $\frac{\partial^n}{\partial z^n}(2e^{-4\pi z\overline{z}})=2(-4\pi\overline{z})^ne^{-4\pi z\overline{z}}=(2\pi i)^n\int_{\mathbb{C}}w^ne^{-\pi w\overline{w}}e^{2\pi i(zw+\overline{zw})}dw=(2\pi i)^n\widehat{f_{-n}}(z)$，即 $\widehat{f_{-n}}(z)=2f_{-n}(2i\overline{z})$. 故 $\zeta(\widehat{f_{-n}},\widehat{\chi_{-n}|\cdot|^s})=\zeta\left(2f_{-n}(2i\overline{z}),\chi_n|\cdot|^{1-s}\right)=i^n2^{2s}\pi^{s-\frac{n}{2}}\Gamma(1+\frac{n}{2}-s)$. 此时

$$\varrho(\chi_{-n}|\cdot|^s)=\frac{2\pi^{1-s-\frac{n}{2}}\Gamma(s+\frac{n}{2})}{i^n2^{2s}\pi^{s-\frac{n}{2}}\Gamma(1+\frac{n}{2}-s)}=(-i)^n(2\pi)^{1-2s}\frac{\Gamma(s+\frac{n}{2})}{\Gamma(1+\frac{n}{2}-s)}(n\geq 0).$$

当 $n<0$ 时，取 $\overline{f_{-n}}$ 进行类似计算即可得到结论.

**Step3**：$K$ 是 non-Archimedean. 简记注意 8.3 中的 $\widetilde{\chi}\circ\mathrm{tr}_{K/\mathbb{Q}_p}:=\psi$. 对于 $\chi=\chi_0|\cdot|^s$，记 $\mathrm{cond}(\chi)\mathfrak{D}_K:=\mathcal{Q}$.

**Step3-1**：$\chi_0$ 平凡. **证**：取 $f(x)=\mathbf{1}_{\mathscr{O}}$，由引理 8.6(3) 知 $\widehat{f}=|\mathscr{O}/\mathfrak{D}_K|^{-1/2}\mathbf{1}_{\mathfrak{C}_K}$. 此时引理 8.6(2) 给出 $\zeta(f,\chi)=\int_{\mathscr{O}\setminus\{0\}}|x|^sd^\times x=\frac{|\mathscr{O}/\mathfrak{D}_K|^{-1/2}}{1-|\varpi|^s}$；$\zeta(\widehat{f},\widehat{\chi})=|\mathscr{O}/\mathfrak{D}_K|^{-1/2}\int_{\mathfrak{C}_K\setminus\{0\}}|x|^{1-s}d^\times x=\frac{|\mathscr{O}/\mathfrak{D}_K|^{-s}}{1-|\varpi|^{1-s}}$，作商即可.

**Step3-2**：$\chi_0$ 非平凡. **证**：注意到 $\mathrm{cond}(\chi)\subseteq\mathfrak{m}$，故 $1+\mathrm{cond}(\chi)$ 中的所有元素均可逆且对逆封闭，从而检验定义 7.15 可知 $1+\mathrm{cond}(\chi)$ 是 $\mathscr{O}^\times$ 的一个开子群. 记商群 $\mathscr{O}^\times/(1+\mathrm{cond}(\chi)):=S_\chi$，命题 1.8(3) 告诉我们

$S_\chi$ 是有限群. 取 $f(x)=\overline{\psi(\frac{x}{\varpi^{\mathrm{ord}_\varpi(\mathcal{Q})}})}\mathbf{1}_{\mathscr{O}}$. 由乘法平移不变性有

$$\zeta(f,\chi)=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\varpi^k\mathscr{O}\setminus\varpi^{k+1}\mathscr{O}}\overline{\psi(\frac{x}{\varpi^{\mathrm{ord}_\varpi(\mathcal{Q})}})}\chi_0(x_U)|x|^s d^\times x \xlongequal{x:=\varpi^k y,|y|=1}\sum_{k=0}^{\infty}|\varpi|^{ks}\int_{\mathscr{O}^\times}\overline{\psi(\frac{\varpi^k y}{\varpi^{\mathrm{ord}_\varpi(\mathcal{Q})}})}\chi_0(y)d^\times y.$$

下证当 $k\geq 1$ 时，$T_k:=\int_{\mathscr{O}^\times}\overline{\psi(\frac{\varpi^k y}{\varpi^{\mathrm{ord}_\varpi(\mathcal{Q})}})}\chi_0(y)d^\times y=0$. 易证 $\frac{\mathrm{cond}(\chi)}{\varpi^{\mathrm{ord}_\varpi(\mathcal{Q})}}=\mathfrak{C}_K$，故当定义 $\mathscr{O}^\times$ 上的等价关系为 $y_1\sim y_2\Leftrightarrow y_1y_2^{-1}\in 1+\varpi^{-k}\mathrm{cond}(\chi)$ 时，对应地记 $S_\chi$ 的子群 $S_k:=\mathscr{O}^\times/(1+\varpi^{-k}\mathrm{cond}(\chi)),k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，由推论 8.4 知关于 $y$ 的函数 $\psi(\frac{\varpi^k}{\varpi^{\mathrm{ord}_\varpi(\mathcal{Q})}}y):\mathscr{O}^\times\to S^1$ 诱导商群上的函数 $S_k\to S^1$. 因此当 $k\geq 0$ 时，

$$T_k=\left(\int_{1+\mathrm{cond}(\chi)}d^\times y\right)\sum_{y\in S_\chi}\overline{\psi(\frac{\varpi^k y}{\varpi^{\mathrm{ord}_\varpi(\mathcal{Q})}})}\chi_0(y)=\left(\int_{1+\mathrm{cond}(\chi)}d^\times y\right)\sum_{y\in S_k}\overline{\psi(\frac{\varpi^k y}{\varpi^{\mathrm{ord}_\varpi(\mathcal{Q})}})}\chi_0(y)\sum_{e\in S_\chi/S_k}\chi_0(e).$$

注意到商群 $S_\chi/S_k$ 有限 (紧) 且 $\chi_0$ 非平凡，因而由命题 4.10(6) 得 $k\geq 1$ 时有 $\sum_{e\in S_\chi/S_k}\chi_0(e)=0$，当 $k=0$ 时 $\sum_{e\in S_\chi/S_\chi}\chi_0(e)=1$.

至此我们得到 $\zeta(f,\chi)=T_0=\chi_0(-1)\int_{1+\mathrm{cond}(\chi)}d^\times y\left(\sum_{\alpha\in S_\chi}\chi_0(-\alpha)\overline{\psi(\frac{\alpha}{\varpi^{\mathrm{ord}_\varpi(\mathcal{Q})}})}\right)$. 而

$$\widehat{f}(y):=\widehat{f}(\chi_y)=\int_{\mathscr{O}}\overline{\psi(\frac{x}{\varpi^{\mathrm{ord}_\varpi(\mathcal{Q})}})}\overline{\psi(xy)}dx=\int_{\mathscr{O}}\overline{\chi_{y+\varpi^{-\mathrm{ord}_\varpi(\mathcal{Q})}}(x)}dx\xlongequal{\text{引理 8.6(3)}}|\mathscr{O}/\mathfrak{D}_K|^{-1/2}\mathbf{1}_{\mathfrak{C}_K-\varpi^{-\mathrm{ord}_\varpi(\mathcal{Q})}},$$

由于 $\mathfrak{C}_K-\varpi^{-\mathrm{ord}_\varpi(\mathcal{Q})}=-\varpi^{-\mathrm{ord}_\varpi(\mathcal{Q})}(1+\mathrm{cond}(\chi))$ 且 $\chi_0\big(\varpi_U^{-\mathrm{ord}_\varpi(\mathcal{Q})}(1+\mathrm{cond}(\chi))_U\big)=1$，故乘法平移不变给出

$$\zeta(\widehat{f},\widehat{\chi})=\zeta(\widehat{f},\chi_0^{-1}|\cdot|^{1-s})=\chi_0(-1)|\mathscr{O}/\mathfrak{D}_K|^{-1/2}|\varpi|^{-\mathrm{ord}_\varpi(\mathcal{Q})(1-s)}\int_{1+\mathrm{cond}(\chi)}d^\times y.$$

作商 $\frac{\zeta(f,\chi)}{\zeta(\widehat{f},\widehat{\chi})}$ 即可完成证明.■

如果我们的目标仅仅是证明函数方程 (定理 8.29)，那么只会用到定理 8.16 的一部分. 至此我们结束局部理论的介绍，接下来的篇幅将集中于整体理论 (主要覆盖 [15]Chapter4 的内容)，或者说 1 维的**自守形式**理论.

设 $F/\mathbb{Q}$ 是整体域，$\mathcal{O}_F$ 为其代数整数环. 对于 $F$ 的素点 $v$，仍记 $F_v$ 为 $F$ 在 $v$ 处的完备化. 取 $\mathbb{A}_F$ 上的 Haar 测度 $\mu$(或 $d\boldsymbol{x}$) 如定义 7.4，此处 $\lambda_v=|\mathscr{O}_v/\mathfrak{D}_v|^{-1/2}$. 该测度在商群 $\mathbb{A}_F/F$ 上诱导了 Haar 测度 (考虑基本区域即可)，仍记为 $d\boldsymbol{x}$. 命题 7.11(4) 告诉我们 $\mathbb{A}_F/F$ 紧，因而由命题 1.14(4) 知其测度有限. 事实上，我们有：

**命题 8.17** $\int_{\mathbb{A}_F/F}d\boldsymbol{x}=1$.

**证明** 我们先回顾一下 Minkowski 关于格的理论. 设 $F/\mathbb{Q}$ 是 $n$ 次扩张，设 $F$ 有 $r_1$ 个实嵌入 $\{\sigma_1,\cdots,\sigma_{r_1}\}$ 和 $r_2$ 对互相共轭的复嵌入 $\{\sigma_{r_1+1},\overline{\sigma_{r_1+1}},\cdots,\sigma_{r_1+r_2},\overline{\sigma_{r_1+r_2}}\}$(即 $r_1+r_2$ 个无穷素点)，此时 $n=r_1+2r_2$. 考虑嵌入

$$\sigma:F\hookrightarrow\mathbb{R}^{r_1}\times\mathbb{C}^{r_2}\xrightarrow{\sim}\mathbb{R}^n,\alpha\mapsto(\sigma_1\alpha,\cdots,\sigma_{r_1+r_2}\alpha)\mapsto\big(\sigma_1\alpha,\cdots,\sigma_{r_1}\alpha,\mathrm{Re}(\sigma_{r_1+1}\alpha),\mathrm{Im}(\sigma_{r_1+1}\alpha),\cdots\big),$$

赋予 $\mathbb{R}^{r_1}\times\mathbb{C}^{r_2}$ 上的 Haar 测度为之前声明中列举测度的乘积测度，则：

**Step1**：$\sigma(\mathcal{O}_F)$ 是 $r_1+2r_2$ 维 $\mathbb{R}$-线性空间 $\mathbb{R}^{r_1}\times\mathbb{C}^{r_2}$ 上的格，若记其基本区域为 $D_{\sigma(\mathcal{O}_F)}$，则在上述 Haar 测度下 $\mathrm{Vol}(D_{\sigma(\mathcal{O}_F)})=\sqrt{|d|}$，这里 $d$ 是 $F$ 的判别式. **证**：取 $\mathcal{O}_F$ 的整基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$，则 $\sigma(\mathcal{O}_F)=\bigoplus_{i=1}^n\mathbb{Z}\sigma(\alpha_i)$. 此时

$$\mathrm{Vol}(D_{\sigma(\mathcal{O}_F)})=|\det(\sigma\alpha_1,\cdots,\sigma\alpha_n)|=\left|\det\begin{pmatrix}\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ \sigma_1\alpha_i&\cdots&\sigma_{r_1}\alpha_i&\sqrt{2}\mathrm{Re}(\sigma_{r_1+1}\alpha)&\sqrt{2}\mathrm{Im}(\sigma_{r_1+1}\alpha)&\cdots\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\end{pmatrix}\right|,$$

这里系数 $\sqrt{2}$ 来自于 $\mathbb{C}$ 上 Haar 测度的选取. 初等列变换给出

$$\mathrm{Vol}(D_{\sigma(\mathcal{O}_F)})=\left|\det\begin{pmatrix}\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ \sigma_1\alpha_i&\cdots&\sigma_{r_1}\alpha_i&\sigma_{r_1+1}\alpha_i&\overline{\sigma_{r_1+1}\alpha_i}&\cdots\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\end{pmatrix}\right|=|\det(\sigma_i\alpha_j)|=\sqrt{|d|}.$$

**Step2**：类似于命题 7.11(4)、(5) 的证明，可以取 $\mathbb{A}_F/F$ 的一个基本区域为 $D:=\prod_{v<\infty}\mathscr{O}_v\times D_{\sigma(\mathcal{O}_F)}$. 此时 $\int_D d\boldsymbol{x}=1$. **证**：根据定理 1.17 有 $\int_{\prod_{v<\infty}\mathscr{O}_v\times D_{\sigma(\mathcal{O}_F)}}d\boldsymbol{x}=\big(\prod_{v<\infty}\int_{\mathscr{O}_v}dx\big)\times\mathrm{Vol}(D_{\sigma(\mathcal{O}_F)})\xlongequal{\text{Step1}}\sqrt{|d|}\cdot\prod_{v<\infty}|\mathscr{O}_v/\mathfrak{D}_v|^{-1/2}\xlongequal{|d|=\prod_{v<\infty}|\mathscr{O}_v/\mathfrak{D}_v|}1$，最后一个等号来自于 [2] 推论 3.2.3.■

在整体理论中，按照一贯的方法，我们当然得先描述清楚 $\mathbb{A}_F$ 上的酉特征标，而实际上这在定理 7.7 中就差不多完成了，唯一的区别在于 $\mathscr{O}_v^\perp\subseteq\widehat{F_v}$ 按定理 8.2 给出的同构对应到 $F_v$ 中并不一定正好就是 $\mathscr{O}_v$. 消除这部分差别并不困难，我们放在如下定理中展示：

**定理 8.18(Tate-Young)** 设 $F$ 是整体域 (配备离散拓扑，此时 $(F,+)$ 当然是局部紧 Abel 群)，则：

(1) 有拓扑 Abel 群同构 $\mathbb{A}_F\cong\widehat{\mathbb{A}_F}$；

(2) 有拓扑 Abel 群同构 $\widehat{F}\cong\mathbb{A}_F/F$. 因此 $\Theta(\boldsymbol{x})\in F^{\perp}$ 当且仅当 $\boldsymbol{x}\in F$，这里 $\Theta$ 的定义见 (1) 的证明.

**证明** (1) 设 $v$ 是素点，对局部域 $F_v$ 而言，由注意 8.3 给出的非平凡特征标记为 $\widetilde{\chi}_v$. 易见当 $v<\infty$ 时有 Abel 群同构 $\tau_v:F_v\xrightarrow{\sim}F_v,\mathscr{O}_v\xrightarrow{\sim}\mathfrak{C}_v,u\mapsto\varpi^{-\mathrm{ord}_{\varpi}(\mathfrak{D}_v)}u$(约定当 $v\in\infty$ 时 $\tau_v$ 为恒等)，因此如下复合是同构：

$$\Theta:\mathbb{A}_F=\widehat{\prod_v}^{\mathscr{O}_v}F_v\xrightarrow{(\tau_v)}\widehat{\prod_v}^{\mathfrak{C}_v}F_v\xrightarrow{\text{推论 8.4}}\widehat{\prod_v}^{\mathscr{O}_v^{\perp}}\widehat{F_v}\xrightarrow{\text{定理 7.7}}\widehat{\widehat{\prod_v}^{\mathscr{O}_v}F_v}=\widehat{\mathbb{A}_F},$$

$$(x_v)\mapsto(\tau_vx_v)\mapsto\big(\widetilde{\chi}_v(\tau_vx_v\cdot)\big)\mapsto\Big[\Pi\widetilde{\chi}_v(\tau_vx_v\cdot):\mathbb{A}_F\to S^1,(y_v)\mapsto\prod_v\widetilde{\chi}_v(\tau_vx_vy_v)\Big].$$

(2)**Step1**：$\mathbb{Q}\cong\widehat{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}}$. **证**：考虑集合 $\Gamma:=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}:\Theta(\boldsymbol{x})|_{\mathbb{Q}}=1\}=\Theta^{-1}(\mathbb{Q}^{\perp})$. 不失一般性，对于 $\frac{s}{r}\in\mathbb{Q}\cap[0,1),s<r$ 均是素数，有 $\prod_p\widetilde{\chi}_p(\frac{s}{r})=\widetilde{\chi}_r(\frac{s}{r})\widetilde{\chi}_{\infty}(\frac{s}{r})=e^{2\pi i\frac{s}{r}}\cdot e^{-2\pi i\frac{s}{r}}=1$，因此 $\mathbb{Q}\subseteq\Gamma$. 反过来，由于 $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}=\mathbb{Q}+\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}$，任取 $\boldsymbol{x}=r+(\alpha_p)\in\Gamma,r\in\mathbb{Q},\alpha_p\in\mathbb{Z}_p$，并且还特别要求 $\alpha_{\infty}\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\subseteq\mathbb{R}$，则有 $1=\Theta(\boldsymbol{x})(1)=\prod_p\widetilde{\chi}_p(r+\alpha_p)=\widetilde{\chi}_{\infty}(\alpha_{\infty})=e^{-2\pi i\alpha_{\infty}}$，即 $\alpha_{\infty}\in\mathbb{Z}$，这迫使 $\alpha_{\infty}=0$. 此外，对任意素数 $q$ 以及任意整数 $n\geq0$，仍有 $1=\Theta(\boldsymbol{x})(\frac{1}{q^n})=\prod_p\widetilde{\chi}_p(\frac{r+\alpha_p}{q^n})=\prod_p\widetilde{\chi}_p(\frac{\alpha_p}{q^n})=\widetilde{\chi}_q(\frac{\alpha_q}{q^n})$，故推论 8.4 给出 $\alpha_q\in q^n\mathbb{Z}_q$，这迫使 $\alpha_q=0$. 所以 $\boldsymbol{x}=r\in\mathbb{Q}$，即 $\mathbb{Q}\supseteq\Gamma$. 此时由引理 5.17 有 $\widehat{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}}\cong\mathbb{Q}^{\perp}=\Theta(\Gamma)=\Theta(\mathbb{Q})\cong\mathbb{Q}$.

由于 $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ 紧，故命题 5.5(3) 要求这里的 $\widehat{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}}\cong\mathbb{Q}$ 配备离散拓扑，此时定理 5.16 给出 $\widehat{\mathbb{Q}}\cong\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$(若 $\mathbb{Q}$ 配备欧氏拓扑，则 $\mathbb{Q}$ 不是局部紧的. 此时 $\mathbb{Q}$ 的稠密性给出 $\widehat{\mathbb{Q}}=\widehat{\mathbb{R}}=\mathbb{R}$).

**Step2**：$\widehat{F}\cong\widehat{\mathbb{Q}}\otimes_{\mathbb{Q}}F$. **证**：设 $F$ 作为 $\mathbb{Q}$-线性空间的一组基为 $\{e_1,\cdots,e_n\}$，命题 5.3 给出同构 $\widehat{F}\xrightarrow{\sim}\bigoplus_{i=1}^n\widehat{\mathbb{Q}},\chi\mapsto\big(\chi(\cdot e_1),\cdots,\chi(\cdot e_n)\big)$. 注意到 $\widehat{\mathbb{Q}}$ 是 $\mathbb{Q}$-模，因而有同构 $\widehat{F}\cong\bigoplus_{i=1}^n\widehat{\mathbb{Q}}\cong\bigoplus_{i=1}^n\big(\widehat{\mathbb{Q}}\otimes_{\mathbb{Q}}e_i\mathbb{Q}\big)\cong\widehat{\mathbb{Q}}\otimes_{\mathbb{Q}}F$.

利用 Step2 可以将问题化归为 $\mathbb{Q}$ 的情形 (一般情况下难以将 $\mathscr{O}_v^{\times}$ 中的元素拆解成级数)，则有如下同构：

$$\widehat{F}\xrightarrow{\text{Step2}}\widehat{\mathbb{Q}}\otimes_{\mathbb{Q}}F\xrightarrow{\text{Step1}}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\otimes_{\mathbb{Q}}F\xrightarrow{F\text{是平坦}\mathbb{Q}\text{-模}}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}\otimes_{\mathbb{Q}}F)/F\xrightarrow{\text{命题 7.11(2)}}\mathbb{A}_F/F.\blacksquare$$

**定义 8.19(Adelic 速降函数)** 设 $F$ 是整体域，定义如下由复值函数作成的 $\mathbb{C}$- 线性空间

$$\mathcal{S}(\mathbb{A}_F):=\hat{\bigotimes_v}\mathcal{S}(F_v):=\left\{\sum_i^{<\infty}a_if_i:a_i\in\mathbb{C},f_i=\bigotimes_v f_{i,v},f_{i,v}\in\mathcal{S}(F_v),\text{对几乎所有的}v,f_{i,v}=\mathbf{1}_{\mathscr{O}_v}\right\},$$

其中的元素称为 $\mathbb{A}_F$ 上的 **Schwarz 函数** (或**速降函数**). 这里 $\hat{\bigotimes}$ 称为**限制张量积**.

有了定理 8.18，我们便可描述 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{A}_F)$ 的 Fourier 变换 $\widehat{f}(\boldsymbol{y})=\int_{\mathbb{A}_F}f(\boldsymbol{x})\overline{\Theta(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x})}d\boldsymbol{x}$. 如同命题 8.11，有：

**命题 8.20** 设 $F$ 是整体域，若 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{A}_F)$，则 $\widehat{f}\in\mathcal{S}(\widehat{\mathbb{A}_F})\cong\mathcal{S}(\mathbb{A}_F)$. 换言之，Fourier 变换保持速降函数，因此推论 5.14 蕴含 $\widehat{\widehat{f}}=f$.

**证明** 设 $f_v\in\mathcal{S}(F_v)$ 满足几乎所有 $f_v=\mathbf{1}_{\mathscr{O}_v}$. 注意到 $\bigotimes_v f_v=\prod_v f_v:\mathbb{A}_F\to\mathbb{C}$，在命题 7.3(2) 的保证下 (即我们可以忽略“几乎所有”的条件)，有

$$\widehat{\prod_v f_v}(\boldsymbol{y})=\int_{\mathbb{A}_F}\Big(\prod_v f_v\Big)(\boldsymbol{x})\overline{\Theta(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x})}d\boldsymbol{x}=\int_{\mathbb{A}_F}\prod_v\Big(f_v(x_v)\overline{\widetilde{\chi}_v(\tau_vx_vy_v)}\Big)d\boldsymbol{x}\xlongequal{\text{命题 7.6}}\prod_v\int_{F_v}f_v(x_v)\overline{\widetilde{\chi}_v(\tau_vx_vy_v)}dx_v.$$

根据引理 8.6(3)，上述等式右边无非是 $\prod_{v<\infty}\widehat{\mathbf{1}_{\mathscr{O}_v}}(\tau_vy_v)\cdot\prod_{v\in\infty}\widehat{f}_v(y_v)=\prod_{v<\infty}|\mathscr{O}_v/\mathfrak{D}_v|^{-1/2}\cdot\prod_{v<\infty}\mathbf{1}_{\mathscr{O}_v}(y_v)\cdot\prod_{v\in\infty}\widehat{f}_v(y_v)$，此时再利用命题 8.11 即可.$\blacksquare$

引入 Fourier 变换之后，应用 Poisson 求和公式将得到一个不平凡的结论——函数域上的 Riemann-Roch 定理 (见定理 8.22). 为了体现该定理的几何意义，我们首先回顾一下代数几何中的基本概念.

**定义 8.21(除子)** 设函数域 $F:=\mathbb{F}_q(t)$，形式和 $D=\sum\limits_{v\text{是素点}}n_vv$ 称为 $F$ 上的一个**除子** (divisor)，如果 $n_v\in\mathbb{Z}$ 且仅有有限个 $n_v\neq0$. 所有除子关于运算 $(D_1+D_2)(v):=D_1(v)+D_2(v)$ 作成一个 Abel 群，记为 $\mathrm{Div}(F)$. 赋予 $\mathrm{Div}(F)$ 上一个偏序关系为 $D_1\leq D_2\Leftrightarrow\forall v\in F,D_1(v)\leq D_2(v)$.

由 $F^{\times}$ 中的元素 $f$ 诱导的除子 $[f]:=\sum_v\mathrm{ord}_v(f)v$ 称为**主除子** (principal divisor). 由于 $[f]+[g]=[fg]$，故所有主除子作成 $\mathrm{Div}(F)$ 的一个子群，记作 $\mathrm{Piv}(F)$；称商群 $\mathrm{Pic}(F):=\mathrm{Div}(F)/\mathrm{Piv}(F)$ 为 $F$ 的 **Picard 群**，其中的陪集称为**除子类**. 事实上，这里给出的 Picard 群与定义 7.18 给出的 Idele 类群有如下联系：$\mathbb{I}_F/\big(F^{\times}\cdot\prod_v\mathscr{O}_v^{\times}\big)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Pic}(F),(x_v)\mapsto\sum_v\mathrm{ord}_v(x_v)v$.

定义 Abel 群同态 $\deg:\mathrm{Div}(F)\to\mathbb{Z},\sum_vn_vv\mapsto\sum_vn_v\cdot[\mathrm{Res}(F_v):\mathbb{F}_q]$，记 $\mathrm{Div}^0(F):=\ker(\deg)$. 对主除子 $[f]$ 而言，可以证明 $\deg([f])=0\Big($事实上，若设 $f\in\mathbb{F}_q(t)^{\times}$，则对任意素点 $v$ 由命题 6.14(1) 有 $|f|_v=|\mathscr{O}_v/\mathfrak{m}_v|^{-\mathrm{ord}_v(f)}=(q^{[\mathrm{Res}(F_v):\mathbb{F}_q]})^{-\mathrm{ord}_v(f)}$，并且定理 7.20 给出 $\prod_v|f|_v=1$，故 $\deg([f])=\sum_v\mathrm{ord}_v(f)\cdot$

$[\mathrm{Res}(F_v):\mathbb{F}_q]=0\big)$，因此 $\mathrm{Piv}(F)\subseteq\mathrm{Div}^0(F)$. 这里商群 $\mathrm{Div}^0(F)/\mathrm{Piv}(F)$ 扮演类似于范 1-类群 (定义 7.21) 的角色，事实上有同构 $\mathbb{I}_F^1/\big(F^\times\cdot\prod_v\mathscr{O}_v^\times\big)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Div}^0(F)/\mathrm{Piv}(F),(x_v)\mapsto\sum_v\mathrm{ord}_v(x_v)v$. 我们还可以证明这是一个有限群 (见 [1]Chapter7.5. 如此便可说明类数有限).

设 $D\in\mathrm{Div}(F)$，定义集合 $H^0(F,D):=\{0\}\cup\big\{f\in F^\times:[f]\geq -D\big\}$. 直接观察得到：(1)$H^0(F,0)=\mathbb{F}_q$；(2) 由 $\mathrm{ord}_v(f+g)\geq\min\{\mathrm{ord}_v(f),\mathrm{ord}_v(g)\}$ 知 $H^0(F,D)$ 是 $\mathbb{F}_q$-线性空间；(3) 若 $\deg(D)<0$，则 $H^0(F,D)=\{0\}$. 我们称 $\mathbb{F}_q$-线性空间 $H^0(F,D)$ 为第 0 维**上同调**.

**定理 8.22(Riemann-Roch 定理)** 设 $F$ 是整体域，则：

(1) 对于 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{I}_F$，$f\in\mathcal{S}(\mathbb{A}_F)$，总成立等式 $\sum_{y\in F}f(y\boldsymbol{x})=\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\sum_{y\in F}\widehat{f}(y\boldsymbol{x}^{-1})$，这里 $|\boldsymbol{x}|=\prod_v|x_v|_v$.

(2) 设 $F=\mathbb{F}_q(t)$，则存在 $g\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$(称为 $F$ 的**亏格**) 以及除子 $\mathcal{K}$ 满足 $\deg(\mathcal{K})=2g-2$(称为 $F$ 的**典范除子**)，使得对任意 $D\in\mathrm{Div}(F)$，恒有等式 $\dim_{\mathbb{F}_q}H^0(F,D)-\dim_{\mathbb{F}_q}H^0(F,\mathcal{K}-D)=1-g+\deg(D)$.

**证明** (1) 对任意 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{I}_F$，定义 $h_{\boldsymbol{x}}:\mathbb{A}_F\to\mathbb{C},\boldsymbol{\alpha}\mapsto f(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{x})$，显然 $h_{\boldsymbol{x}}\in\mathcal{S}(\mathbb{A}_F)$. 此时 Poisson 求和公式 (推论 5.18) 给出 $\int_F h_{\boldsymbol{x}}(y)dy=\int_{F^\perp}\widehat{h_{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{\chi})d\boldsymbol{\chi}\xlongequal{\text{定理 8.18(2)}}\int_F\widehat{h_{\boldsymbol{x}}}(y)dy$. 由于 $F$ 配备的是离散拓扑，故可调整记号 $\int$ 为 $\sum$，即 $\sum_{y\in F}h_{\boldsymbol{x}}(y)=\sum_{y\in F}\widehat{h_{\boldsymbol{x}}}(y)$. 而引理 8.6(1) 给出

$$\widehat{h_{\boldsymbol{x}}}(y)=\int_{\mathbb{A}_F}f(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{x})\overline{\Theta(y)(\boldsymbol{\alpha})}d\boldsymbol{\alpha}\xlongequal{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{x}:=\boldsymbol{t}}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\int_{\mathbb{A}_F}f(\boldsymbol{t})\overline{\Theta(y\boldsymbol{x}^{-1})(\boldsymbol{t})}d\boldsymbol{t}=\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\widehat{f}(y\boldsymbol{x}^{-1}),$$

代入即可.

(2)**Step1**：若记 $l(D):=\dim_{\mathbb{F}_q}H^0(F,D)$，则 $l(D)$ 有限. **证**：取 $f=\prod_v\mathbf{1}_{\mathscr{O}_v}$，利用满同态 $\mathbb{I}_F\twoheadrightarrow\mathrm{Pic}(F),(x_v)\mapsto\sum_v\mathrm{ord}_v(x_v)v$ 取 $\boldsymbol{x}_D\in\mathbb{I}_F$ 为 $D$ 所在除子类的某个代表元的某个原像. 对任意 $y\in F$，容易证明 $f(y\boldsymbol{x}_D)=1$ 当且仅当 $y\in H^0(F,D)$. 因此推论 5.18 蕴含 $q^{l(D)}=|H^0(F,D)|=\sum_{y\in F}f(y\boldsymbol{x}_D)<\infty$.

**Step2**：对任意素点 $v$，记 $\mathrm{ord}_v(\mathfrak{C}_v)=N_v$. 定义典范除子 $\mathcal{K}:=-\sum_v N_v v$，令 $g=1+\frac{1}{2}\deg(\mathcal{K})$，则对任意除子 $D=\sum_v n_v v$ 恒成立等式 $l(D)-l(\mathcal{K}-D)=1-g+\deg(D)$. **证**：记 $f=\prod_v\mathbf{1}_{\mathscr{O}_v}$，Step1 给出 $q^{l(D)}=\sum_{y\in F}f(y\boldsymbol{x}_D)$. 此外，注意到 $|\boldsymbol{x}_D|^{-1}=\prod_v|x_{D,v}|_v^{-1}=\prod_v|\mathscr{O}_v/\mathfrak{m}_v|^{\mathrm{ord}_v(x_{D,v})}=\prod_v|\mathscr{O}_v/\mathfrak{m}_v|^{n_v}=q^{\sum_v n_v[\mathrm{Res}(F_v):\mathbb{F}_q]}=q^{\deg(D)}$，故由 (1) 得

$$q^{l(D)}=\sum_{y\in F}f(y\boldsymbol{x}_D)=\frac{1}{|\boldsymbol{x}_D|}\sum_{y\in F}\widehat{f}(y\boldsymbol{x}_D^{-1})=q^{\deg(D)}\sum_{y\in F}\widehat{f}(y\boldsymbol{x}_D^{-1}).$$

注意到对于任意素点 $v$ 均有 $\widehat{\mathbf{1}_{\mathscr{O}_v}}=|\mathscr{O}_v/\mathfrak{D}_v|^{-1/2}\mathbf{1}_{\mathfrak{C}_v}$，且 $|\mathscr{O}_v/\mathfrak{D}_v|^{-1/2}=|\mathscr{O}_v/\mathfrak{m}_v|^{N_v/2}=q^{N_v[\mathrm{Res}(F_v):\mathbb{F}_q]/2}$，因此 $\prod_v|\mathscr{O}_v/\mathfrak{D}_v|^{-1/2}=q^{-\deg(\mathcal{K})/2}=q^{1-g}$，故 $\widehat{f}(y\boldsymbol{x}_D^{-1})=q^{1-g}$ 当且仅当 $\mathrm{ord}_v(y)\geq n_v+N_v$，即 $\sum_{y\in F}\widehat{f}(y\boldsymbol{x}_D^{-1})=q^{l(\mathcal{K}-D)-g+1}$，代入即可.■

接下来我们要给出整体 $\zeta$ 函数及其相应的函数方程，即定义 8.12 的整体版本. 在这之前，我们需要介绍 Hecke 特征标这个概念 (实际上就是拟特征标的整体版本).

**定义 8.23(Hecke 特征标)** 设 $F$ 是整体域，称连续同态 $\boldsymbol{\chi}:\mathfrak{Cl}(F)\to\mathbb{C}^\times$ 为 $F$ 的一个 **Hecke 特征标**. 记 $F$ 的所有 Hecke 特征标作成的集合为 $\boldsymbol{X}(F)$，它配备复结构 $\boldsymbol{\chi}\in\{\boldsymbol{\chi}|\cdot|^s:s\in\mathbb{C}\}\xrightarrow{\sim}\mathbb{C},\boldsymbol{\chi}|\cdot|^s\mapsto s$ 之后成为一个 Riemann 曲面. 称 Hecke 特征标 $\boldsymbol{\chi}$ **非分歧**，如果存在 $s\in\mathbb{C}$ 使得 $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x})=|\boldsymbol{x}|^s$.

正如注意 7.23(4.3)，我们有同构 $\mathfrak{Cl}(F)\xrightarrow{\sim}\mathfrak{Cl}^1(F)\oplus\mathbb{R}_{>0},\boldsymbol{x}\mapsto(\boldsymbol{x}_U,\boldsymbol{x}_V:=|\boldsymbol{x}|)$，而这正好是在模拟定义 8.1 给出的极坐标变换. 基于此类比定理 8.8，我们可以描述所有 Hecke 特征标 (证明从略)：

**定理 8.24(Tate)** $F$ 的 Hecke 特征标均形如 $\boldsymbol{\chi}:\mathfrak{Cl}(F)\to\mathbb{C}^\times,\boldsymbol{y}\mapsto\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{\chi}_0(\boldsymbol{y}_U)\cdot|\boldsymbol{y}|^s$，这里 $\boldsymbol{y}\mapsto(\boldsymbol{y}_U,|\boldsymbol{y}|)$ 定义如上，且 $\boldsymbol{\chi}_0\in\widehat{\mathfrak{Cl}^1(F)}$(注意 $\mathfrak{Cl}^1(F)$ 紧)、$s\in\mathbb{C}$ 的实部 $\mathrm{Re}(s)$ 均由 $\boldsymbol{\chi}$ 唯一确定(因而我们称 $\mathrm{Re}(s)$ 为 $\boldsymbol{\chi}$ 的幂，记作 $\sigma(\boldsymbol{\chi})$). 也就是说，任何 Hecke 特征标都可以唯一地分解成分歧部分 (体现为酉特征标) 和非分歧部分的乘积.

**定义 8.25(整体 $\zeta$ 函数)** 设 $F$ 是整体域，$f\in\mathcal{S}(\mathbb{A}_F)$. 定义 $f$ 对应的**整体 $\zeta$ 函数**为

$$\zeta(f,\cdot):\big\{\boldsymbol{\chi}\in\boldsymbol{X}(F):\sigma(\boldsymbol{\chi})>1\big\}\longrightarrow\mathbb{C},\zeta(f,\boldsymbol{\chi}):=\int_{\mathbb{I}_F}f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x})d^\times\boldsymbol{x}.$$

**命题 8.26** 关于 $\boldsymbol{\chi}$ 的函数 $\zeta(f,\boldsymbol{\chi})$ 在定义域上良好定义，即当 $\sigma(\boldsymbol{\chi})>1$ 时积分 $\int_{\mathbb{I}_F}f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x})d^\times\boldsymbol{x}$ 存在.

**证明** 设 $v$ 是 $F$ 的素点，记 $\chi_v:F_v^\times\hookrightarrow\mathbb{I}_F\twoheadrightarrow\mathfrak{Cl}(F)\xrightarrow{\boldsymbol{\chi}}\mathbb{C}^\times,y\mapsto\boldsymbol{\chi}(\cdots,1,y,1,\cdots)$，则 $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x})=\prod_v\chi_v(x_v)=\prod_v\chi_{v,0}(x_{v,U})\cdot\prod_v|x_v|_v^{s_v}$.

**Step1**：对任意 $v$，$\sigma(\boldsymbol{\chi})=\sigma(\chi_v)$，简记这个常数为 $\sigma$. **证**：设 $\boldsymbol{\chi}=\boldsymbol{\chi}_0(\cdot_U)|\cdot|^s$，则 $\sigma(\boldsymbol{\chi})=\mathrm{Re}(s)$，此

时 $\chi_v(y)=\boldsymbol{\chi}_0\big((\cdots,1,y,1,\cdots)_U\big)|y|_v^s$. 另一方面 $\chi_v(y)=\chi_{v,0}(y_U)|y|_v^{s_v}\in X(F_v^\times)$，即 $\sigma(\chi_v)=\mathrm{Re}(s_v)$，则 $1=\frac{\boldsymbol{\chi}_0((\cdots,1,y,1,\cdots)_U)|y|_v^s}{\chi_{v,0}(y_U)|y|_v^{s_v}}=\alpha\frac{|y|_v^s}{|y|_v^{s_v}}=\alpha|y|_v^{s-s_v}$，其中 $\alpha\in S^1$. 这意味着对任意 $y$ 均有 $|y|_v^{s-s_v}\in S^1$，故只能 $s-s_v\in i\mathbb{R}$，即 $\sigma(\boldsymbol{\chi})=\sigma(\chi_v)$.

**Step2**：几乎所有的 $\chi_v$ 非分歧. **证**：若有无穷多个 $v$ 使 $\chi_v$ 分歧，则适当选取 $x_v\in\mathscr{O}_v^\times$ 使得对这些 $v$，有 $\chi_{v,0}(x_v)\notin\big\{e^{\pi it}:-\frac{1}{2}<t\le\frac{1}{2}\big\}$，此时无穷乘积 $\prod_v\chi_{v,0}(x_v)$ 显然不收敛，矛盾.

**Step3**：若设 $f=\prod_v f_v$，其中几乎所有的 $f_v=\mathbf{1}_{\mathscr{O}_v}$，则当 $\sigma>1$ 时，$|\zeta(f,\boldsymbol{\chi})|<\infty$. **证**：由命题 7.6 有

$$|\zeta(f,\boldsymbol{\chi})|\le\int_{\mathbb{I}_F}\prod_v|f_v(x_v)|\cdot|x_v|_v^\sigma d^\times\boldsymbol{x}=\prod_v\int_{F_v^\times}|f_v(x_v)|\cdot|x_v|_v^\sigma d^\times x_v=\prod_v\zeta(|f_v|,|\cdot|_v^\sigma)$$

而此处 $\zeta(|f_v|,|\cdot|_v^\sigma)$ 在 $v<\infty$ 时不过是定义 8.12 描述的局部 $\zeta$ 函数. 根据定理 8.16 证明的 Step3-1 知当 $\sigma>0$ 时有 $\zeta(\mathbf{1}_{\mathscr{O}_v},|\cdot|_v^\sigma)=\frac{|\mathscr{O}_v/\mathfrak{D}_v|^{-1/2}}{1-|\mathscr{O}_v/\mathfrak{m}_v|^{-\sigma}}$，故若记有限集 $E:=\{v:f_v\ne\mathbf{1}_{\mathscr{O}_v}\}\cup\{v:v\in\infty\}$，则

$$|\zeta(f,\boldsymbol{\chi})|\le\prod_v\zeta(|f_v|,|\cdot|_v^\sigma)=\prod_{v\in E}\zeta(|f_v|,|\cdot|_v^\sigma)\cdot\prod_{v\notin E}\frac{|\mathscr{O}_v/\mathfrak{D}_v|^{-1/2}}{1-|\mathscr{O}_v/\mathfrak{m}_v|^{-\sigma}}.$$

既然命题 8.13 保证每个 $\zeta(|f_v|,|\cdot|_v^\sigma)$ 在 $\sigma>0$ 时收敛，故问题在于 $\prod_{v\notin E}\frac{1}{1-|\mathscr{O}_v/\mathfrak{m}_v|^{-\sigma}}$ 是否收敛. 设 $F/\mathbb{Q}$ 是有限扩张，则当 $\sigma>1$ 时有 $\prod_{v\notin E}\frac{1}{1-|\mathscr{O}_v/\mathfrak{m}_v|^{-\sigma}}\le\prod_p\prod_{v|p}\frac{1}{1-|\mathscr{O}_v/\mathfrak{m}_v|^{-\sigma}}\le\big(\prod_p\frac{1}{1-p^{-\sigma}}\big)^{[F:\mathbb{Q}]}$，并且 Euler 乘积 $\prod_p\frac{1}{1-p^{-\sigma}}$ 收敛. 因此 $|\zeta(f,\boldsymbol{\chi})|<\infty$.■

类似于定理 8.16，我们有：

**定理 8.27(Tate)** 设 $F$ 是整体域，$f\in\mathcal{S}(\mathbb{A}_F)$. 此时 $\zeta(f,\boldsymbol{\chi})$ 可以延拓成 Riemann 曲面 $\boldsymbol{X}(F)$ 上的亚纯函数，且满足函数方程 $\zeta(f,\boldsymbol{\chi})=\zeta(\widehat{f},\widehat{\boldsymbol{\chi}})$，这里 $\widehat{\boldsymbol{\chi}}=|\cdot|\boldsymbol{\chi}^{-1}$.

若记 $\boldsymbol{\chi}=\boldsymbol{\chi}_0|\cdot|^s$，则亚纯函数 $\zeta(f,\boldsymbol{\chi})$ 在 Riemann 曲面 $\boldsymbol{X}(F)$ 上的极点只会出现在 $\boldsymbol{\chi}_0\in\widehat{\mathfrak{Cl}^1(F)}$ 平凡的连通分支 $\{\boldsymbol{\chi}_0|\cdot|^s:s\in\mathbb{C}\}$ 上，而在其余连通分支上全纯. 具体来讲，若设 $\boldsymbol{\chi}_0$ 平凡，则 $\zeta(f,\boldsymbol{\chi})$ 在连通分支 $\{\boldsymbol{\chi}_0|\cdot|^s:s\in\mathbb{C}\}$ 上有两个极点 $s=0$ 和 $s=1$，其阶均为 $-1$，留数分别为 $\mathrm{Res}_0(f)=-f(0)\mathrm{Vol}(\mathfrak{Cl}^1(F))$、$\mathrm{Res}_1(f)=\widehat{f}(0)\mathrm{Vol}(\mathfrak{Cl}^1(F))$. 这里 $\mathrm{Vol}(\mathfrak{Cl}^1(F))=\frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}hR}{w\sqrt{|d|}}$，其中 $r_1,r_2$ 分别指 $F$ 的 $r_1$ 个实嵌入、$r_2$ 对互相共轭的复嵌入；$h$ 指 $F$ 的类数；$d$ 指 $F$ 的判别式；$w$ 指 $F$ 中单位根的个数；$R$ 指 $F$ 的**正规子** (regulator. 见证明 Step3).

**证明** 仅证数域的情形. 该定理在函数域情形时的证明见 [1]Chapter7.3.

**Step1**：$\mu^\times(\mathbb{I}_F^1):=\int_{\mathbb{I}_F^1}d^\times\boldsymbol{x}=0$. **证**：反证法，设 $\mu^\times(\mathbb{I}_F^1)>0$. 给 $F$ 的可数多个有限素点编号 $1,2,\cdots$，记 $E_n:=\big\{\boldsymbol{x}=(x_i):|\boldsymbol{x}|=1,\forall m>n,|x_m|=1\big\}$，则 $\mathbb{I}_F^1=\bigcup_{n\ge0}E_n$. 因此必然存在某个 $N\ge0$ 使得 $\mu^\times(E_N)>0$，不妨设 $N=0$. 此时零测集 $\big\{(x_v)\in\prod_{v\in\infty}F_v:\prod_v|x_v|_v=1\big\}\times\prod_{v<\infty}\mathscr{O}_v^\times\supseteq E_0$，矛盾.

**Step2**：记 $\mathbb{I}_F^{\ge1}$、$\mathbb{I}_F^{\le1}$ 分别为 $\mathbb{I}_F$ 中绝对值 $\ge1$、$\le1$ 的元素作成的集合，故 $\mathbb{I}_F^1=\mathbb{I}_F^{\ge1}\cap\mathbb{I}_F^{\le1}$. 由 Step1 有

$$\zeta(f,\boldsymbol{\chi})=\text{(i)}\int_{\mathbb{I}_F^{\ge1}}f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x})d^\times\boldsymbol{x}+\text{(ii)}\int_{\mathbb{I}_F^{\le1}}f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x})d^\times\boldsymbol{x}.$$

不难发现 $f$ 在 $|\boldsymbol{x}|\to\infty$ 时足够完美 (因为紧支撑)，故积分 (i) 对任何 $\boldsymbol{\chi}$ 均可绝对收敛，这贡献了 $\boldsymbol{X}(F)$ 每个连通分支上的一个全纯函数. 对于积分 (ii)，我们有

$$\begin{aligned}\text{(ii)}&=\int_{\mathbb{I}_F^{\le1}}f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x})d^\times\boldsymbol{x}\xlongequal{\boldsymbol{\chi}|_{F^\times}=1}\int_{\mathbb{I}_F^{\le1}/F^\times}\sum_{a\in F}f(a\boldsymbol{x})\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x})d^\times\boldsymbol{x}-\int_{\mathbb{I}_F^{\le1}/F^\times}f(0)\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x})d^\times\boldsymbol{x}\\&\xlongequal{\text{定理 8.22(1)}}\text{(iii)}\int_{\mathbb{I}_F^{\le1}/F^\times}\frac{\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x}|}\sum_{a\in F^\times}\widehat{f}(a\boldsymbol{x}^{-1})d^\times\boldsymbol{x}+\text{(iv)}\int_{\mathbb{I}_F^{\le1}/F^\times}\Big[\frac{\widehat{f}(0)}{|\boldsymbol{x}|}-f(0)\Big]\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x})d^\times\boldsymbol{x},\end{aligned}$$

积分 (iii) 作变量替换 $\boldsymbol{x}:=\boldsymbol{y}^{-1}$ 得 $\text{(iii)}=\int_{\mathbb{I}_F^{\ge1}/F^\times}\sum_{a\in F^\times}\widehat{f}(a\boldsymbol{y})\widehat{\boldsymbol{\chi}}(\boldsymbol{y})d^\times\boldsymbol{y}=\int_{\mathbb{I}_F^{\ge1}}\widehat{f}(\boldsymbol{y})\widehat{\boldsymbol{\chi}}(\boldsymbol{y})d^\times\boldsymbol{y}$. 至于积分 (iv)，考虑 $\boldsymbol{\chi}_0|\cdot|^s(s\in\mathbb{C})$ 所在的连通分支. 注意到 $\mathbb{I}_F/F^\times=\mathbb{I}_F^1/F^\times\times\mathbb{R}_{>0},\boldsymbol{\chi}_0\in\widehat{\mathbb{I}_F^1/F^\times}$，我们有累次积分

$$\text{(iv)}=\int_{\mathbb{I}_F^{\le1}/F^\times}\Big[\frac{\widehat{f}(0)}{|\boldsymbol{x}|}-f(0)\Big]\boldsymbol{\chi}_0(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}|^sd^\times\boldsymbol{x}=\text{(v)}\left(\int_{\mathbb{I}_F^1/F^\times}\boldsymbol{\chi}_0(\boldsymbol{x})d^\times\boldsymbol{x}\right)\cdot\text{(vi)}\left(\int_0^1\Big[\frac{\widehat{f}(0)}{t}-f(0)\Big]t^sd^\times t\right).$$

而命题 4.10(6) 给出 $\text{(v)}=\begin{cases}0, & \boldsymbol{\chi}_0\text{非平凡}\\ \mathrm{Vol}(\mathfrak{Cl}^1(F)), & \boldsymbol{\chi}_0\text{平凡}\end{cases}$. 对于 (vi)，由 $d^\times t=\frac{dt}{t}$ 直接计算得 $\text{(vi)}=\frac{\widehat{f}(0)}{s-1}-\frac{f(0)}{s}$，因此

$$\zeta(f,\boldsymbol{\chi})=\text{(i)}+\text{(iii)}+\text{(v)}\cdot\text{(vi)}=\int_{\mathbb{I}_F^{\ge1}}f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x})d^\times\boldsymbol{x}+\int_{\mathbb{I}_F^{\ge1}}\widehat{f}(\boldsymbol{x})\widehat{\boldsymbol{\chi}}(\boldsymbol{x})d^\times\boldsymbol{x}+\mathrm{Vol}(\mathfrak{Cl}^1(F))\Big[\frac{\widehat{f}(0)}{s-1}-\frac{f(0)}{s}\Big]\delta_{\boldsymbol{\chi}_0,\boldsymbol{\chi}_{\mathrm{tri}}},$$

这里 $\delta$ 是 Kronecker 记号. 不难发现上式在变换 $(f,\boldsymbol{\chi})\mapsto(\widehat{f},\widehat{\boldsymbol{\chi}})$ 下保持不变，故函数方程成立. 此外，上式告诉

我们 $\zeta(f,\boldsymbol{\chi})$ 在 $\boldsymbol{\chi}_0$ 非平凡的连通分支上全纯；而在 $\boldsymbol{\chi}_0$ 平凡的连通分支上，$\zeta(f,\boldsymbol{\chi})$ 的极点只可能来自于 (vi)，正是 $\boldsymbol{\chi}_0|\cdot|(s=1)$ 和 $\boldsymbol{\chi}_0(s=0)$，留数的计算显然.

**Step3**：$\mathrm{Vol}(\mathfrak{Cl}^1(F))=\frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}hR}{w\sqrt{|d|}}$. **证**：设 $S$ 是 $F$ 的若干个素点作成的有限集，定义集合 $\mathbb{I}_{F,S}:=\{\boldsymbol{x}=(x_v)\in\mathbb{I}_F:\forall v\notin S,|x_v|_v=1\}$，称之为 $F$ 的**$S$-Idele**. 记 $\mathbb{I}^1_{F,S}:=\mathbb{I}_{F,S}\cap\mathbb{I}^1_F$. 显然，$\mathbb{I}_{F,\varnothing}=\mathbb{I}^1_{F,\varnothing}$ 是紧集.

若记 $S_\infty$ 为所有无穷素点作成的集合，则 $|S_\infty|=r_1+r_2$，$\mathbb{I}_{F,S_\infty}=\prod_{v<\infty}\mathscr{O}_v^\times\times(\mathbb{R}^\times)^{r_1}\times(\mathbb{C}^\times)^{r_2}$，而 $\mathbb{I}^1_{F,S_\infty}$ 无非只需要控制 $(\mathbb{R}^\times)^{r_1}\times(\mathbb{C}^\times)^{r_2}$ 中的元素. 我们有如下正合列

$$1\longrightarrow\mathbb{I}_{F,S_\infty}\cdot F^\times/F^\times\cong\mathbb{I}_{F,S_\infty}/F^\times\cap\mathbb{I}_{F,S_\infty}\longrightarrow\mathfrak{Cl}(F)=\mathbb{I}_F/F^\times\longrightarrow\mathbb{I}_F/\mathbb{I}_{F,S_\infty}\cdot F^\times\longrightarrow1,$$

容易验证 $\mathbb{I}^1_F/\mathbb{I}^1_{F,S_\infty}\cdot F^\times\to\mathbb{I}_F/\mathbb{I}_{F,S_\infty}\cdot F^\times,\boldsymbol{x}(\mathbb{I}^1_{F,S_\infty}\cdot F^\times)\mapsto\boldsymbol{x}(\mathbb{I}_{F,S_\infty}\cdot F^\times)$ 是良好定义的双射 (也就是说，上述正合列绝对值为 1 的部分亦正合. 请读者自行验证)，故由注意 7.19 得 $F$ 的类数 $h=|\mathbb{I}_F/\mathbb{I}_{F,S_\infty}\cdot F^\times|=|\mathbb{I}^1_F/\mathbb{I}^1_{F,S_\infty}\cdot F^\times|<\infty$.

另一方面，若定义连续同态 $\mathrm{Ln}:\mathbb{I}^1_{F,S_\infty}\to\mathbb{R}^{r_1+r_2},\boldsymbol{x}\mapsto(\ln|x_v|_v)_{v\in\infty}$，定义 $\mathbb{R}^{r_1+r_2}$ 中的 $r_1+r_2-1$ 维线性子空间 $V:=\{(x_1,\cdots,x_{r_1+r_2}):\sum_{i=1}^{r_1}x_i+2\sum_{j=r+1}^{r_2}x_j=0\}$，则不难验证有 $\mathrm{Im(Ln)}=V$ 且 $\ker(\mathrm{Ln})=\mathbb{I}^1_{F,\varnothing}=\mathbb{I}_{F,\varnothing}$. 记 $\mathrm{reg}:\mathbb{I}^1_{F,S_\infty}\cap F^\times\hookrightarrow\mathbb{I}^1_{F,S_\infty}\xrightarrow{\mathrm{Ln}}\mathbb{R}^{r_1+r_2}$，注意到命题 6.16 给出 $\mathbb{I}^1_{F,S_\infty}\cap F^\times\cong\mathcal{O}_F^\times$，故 $\ker(\mathrm{reg})=\mathbb{I}^1_{F,\varnothing}\cap F^\times=\mu_F$(指 $F$ 的所有单位根作成的群). 易见 $\mathrm{reg}(\mathcal{O}_F^\times)$ 是 $V$ 上的格，记其一个基本区域的体积为 $R$(即正规子).

注意到 $\mathbb{I}^1_{F,\varnothing}=\prod_{v<\infty}\mathscr{O}_v^\times\times\prod_{i=1}^{r_1}\{\pm1\}\times\prod_{j=1}^{r_2}S^1$，每部分分别配备测度 $d^\times x_v$、计数测度、Lebesgue 测度. 基于此利用 Haar 测度的唯一性可以赋予 $\mathbb{I}^1_{F,\varnothing}$ 一个 Haar 测度，无非是将之前各部分的测度乘积起来. 因此定理 1.17 给出

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{I}^1_{F,\varnothing})=\prod_{v<\infty}\mathrm{Vol}(\mathscr{O}_v^\times)\cdot\mathrm{Vol}(\{\pm1\})^{r_1}\cdot\mathrm{Vol}(S^1)^{r_2}=2^{r_1}(2\pi)^{r_2}|d|^{-1/2}.$$

现考虑如下行、列正合的交换图表：

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & \mu_F \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_F^\times \arrow[r, "\mathrm{reg}"] \arrow[d] & \mathrm{reg}(\mathcal{O}_F^\times) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
1 \arrow[r] & \mathbb{I}^1_{F,\varnothing} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{I}^1_{F,S_\infty} \arrow[r, "\mathrm{Ln}"] \arrow[d] & V \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
1 \arrow[r] & \mathbb{I}^1_{F,\varnothing}/\mu_F \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{I}^1_{F,S_\infty}/\mathcal{O}_F^\times \arrow[r] \arrow[d] & V/\mathrm{reg}(\mathcal{O}_F^\times) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 1 & 1 & 0 &
\end{tikzcd}$$

据此直接计算可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(\mathfrak{Cl}^1(F))&\xlongequal{h=|\mathbb{I}^1_F/\mathbb{I}^1_{F,S_\infty}\cdot F^\times|}h\mathrm{Vol}(\mathbb{I}^1_{F,S_\infty}/F^\times\cap\mathbb{I}^1_{F,S_\infty})\xlongequal{\mathbb{I}^1_{F,S_\infty}\cap F^\times\cong\mathcal{O}_F^\times}h\mathrm{Vol}(\mathbb{I}^1_{F,S_\infty}/\mathcal{O}_F^\times)\\
&\xlongequal{\text{第 3 行正合}}h\mathrm{Vol}(\mathbb{I}^1_{F,\varnothing}/\mu_F)\mathrm{Vol}(V/\mathrm{reg}(\mathcal{O}_F^\times))\xlongequal{\text{第 1 列正合}}h\frac{\mathrm{Vol}(\mathbb{I}^1_{F,\varnothing})}{|\mu_F|}\mathrm{Vol}(V/\mathrm{reg}(\mathcal{O}_F^\times))=\frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}hR}{|\mu_F|\sqrt{|d|}}.\blacksquare\end{aligned}$$

以下是 Tate 建立上述理论的主要目标——我们现在有了一般的技术来证明数域上 Dedekind-zeta 函数的函数方程 (这在该理论诞生之前是较为困难的事情). 首先给出 Dedekind-zeta 函数的定义 (这是 Riemann-zeta 函数在整体域上的推广)：

**定义 8.28(Dedekind-zeta 函数)** 设 $F$ 是整体域，定义 **Dedekind-zeta 函数**为

$$\zeta_F(s):=\prod_{v<\infty}\frac{1}{1-|\mathscr{O}_v/\mathfrak{m}_v|^{-s}}=\sum_{0\neq\mathfrak{a}\lhd\mathcal{O}_F}\frac{1}{|\mathcal{O}_F/\mathfrak{a}|^s},s\in\mathbb{C}.$$

命题 8.26 证明的 Step3 已经表明，$\zeta_F(s)$ 在 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时绝对收敛.

**定理 8.29(函数方程)** 设 $F$ 是整体域，有 $r_1$ 个实嵌入、$r_2$ 对互相共轭的复嵌入. 记 $Z_F(s):=G_1(s)^{r_1}G_2(s)^{r_2}\zeta_F(s)$，其中 $G_1(s)=\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2}),G_2(s)=(2\pi)^{1-s}\Gamma(s)$. 则 $Z_F(s)$ 在 $\mathbb{C}$ 上亚纯，其极点为 $s=0$ 和 $s=1$，阶均为 $-1$，留数分别为 $\mathrm{Res}_0(Z_F)=-\sqrt{|d|}\mathrm{Vol}(\mathfrak{Cl}^1(F)),\mathrm{Res}_1(Z_F)=\mathrm{Vol}(\mathfrak{Cl}^1(F))$，$d$ 指 $F$ 的判别式. 此外，成立函数方程 $Z_F(s)=|d|^{\frac{1}{2}-s}Z_F(1-s)$.

**证明** 取 Adelic 速降函数 $f=\prod_v f_v$，其中 $f_v=\begin{cases} e^{-\pi x_v^2}, & F_v=\mathbb{R} \\ e^{-\pi x_v\overline{x_v}}, & F_v=\mathbb{C} \\ \mathbf{1}_{\mathscr{O}_v}, & v<\infty \end{cases}$. 此时回顾定理 8.16 的证明可以得到 $\zeta(f_v,|\cdot|^s)=\begin{cases} \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2}), & F_v=\mathbb{R} \\ 2\pi^{1-s}\Gamma(s), & F_v=\mathbb{C} \\ \frac{|\mathscr{O}_v/\mathfrak{D}_v|^{-1/2}}{1-|\mathscr{O}_v/\mathfrak{m}_v|^{-s}}, & v<\infty \end{cases}$ 以及 $\zeta(\widehat{f_v},|\cdot|^{1-s})=\begin{cases} \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2}), & F_v=\mathbb{R} \\ 2^{2s}\pi^s\Gamma(1-s), & F_v=\mathbb{C} \\ \frac{|\mathscr{O}_v/\mathfrak{D}_v|^{-s}}{1-|\mathscr{O}_v/\mathfrak{m}_v|^{s-1}}, & v<\infty \end{cases}$. 由命题 7.6 可得整体 $\zeta$ 函数 $\zeta(f,|\cdot|^s)=\prod_v\zeta(f_v,|\cdot|^s)=2^{r_2s}|d|^{-\frac{1}{2}}Z_F(s)$、$\zeta(\widehat{f},|\cdot|^{1-s})=\prod_v\zeta(\widehat{f_v},|\cdot|^{1-s})=2^{r_2s}|d|^{-s}Z_F(1-s)$. 而定理 8.27 给出函数方程 $\zeta(f,|\cdot|^s)=\zeta(\widehat{f},|\cdot|^{1-s})$，因此 $|d|^{-\frac{1}{2}}Z_F(s)=|d|^{-s}Z_F(1-s)$，即 $Z_F(s)=|d|^{\frac{1}{2}-s}Z_F(1-s)$. 又因为 $Z_F(s)=2^{-r_2s}|d|^{\frac{1}{2}}\zeta(f,|\cdot|^s)$，从而 $Z_F(s)$ 的留数直接由 $\zeta(f,|\cdot|^s)$ 的留数给出.■

若取定理 8.29 中 $F=\mathbb{Q}$，则 $r_1=1,r_2=0,d=1$. 据此我们得到了 Riemann-zeta 函数 $\zeta(s)$ 的函数方程：

**推论 8.30** $Z_{\mathbb{Q}}(s)=Z_{\mathbb{Q}}(1-s)$，即 $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\zeta(1-s)$.

作为本文的结尾，我们简要介绍一下 Tate 的工作对 Langlands 纲领的影响. 正如之前所说，Tate 的整体理论后来被称为 1 维的自守形式理论，也就是说定义 8.23 中出现的 Hecke 特征标就是 1 维自守形式 (即使此时无法定义何为全纯性，因为 $\mathfrak{gl}(1,\mathbb{C})$ 的泛包络代数中没有非平凡 Casimir 元素，从而自守形式中的 $Z$-有限条件自动满足). 所谓的 Langlands 纲领大致是说，我们期待一个联系复 Galois 表示和自守表示 (粗糙地讲，即 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ 在所有自守形式作成的 $\mathbb{C}$-线性空间的某个子商中的不可约表示) 的理论. 在 Abel 扩张的情形下 (对应的群表示可以换成酉表示)，1 维的 Langlands 互反律表现为类域论中的 Artin 互反律 (见注意 7.19)，当然最简单的情况就是 Gauss 二次互反律.