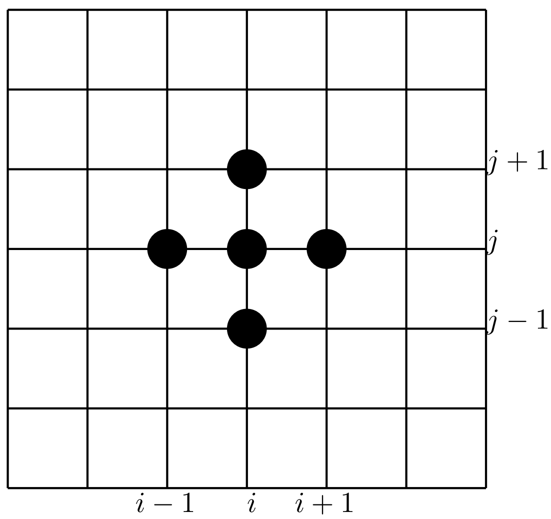
2017年数值代数大作业

1 各向异性泊松方程差分方法

已知如下各向异性泊松方程：

$$\begin{cases} -u_{xx} - \epsilon u_{yy} = f \quad (x,y) \in \Omega := (0,1) \times (0,1), \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

问题的真解为: $u(x,y) = sin(\pi x)sin(\pi y)$. 将区域$\Omega$在$x$方向和$y$方向做步长分别为$h_x = \frac{1}{M}$, $h_y = \frac{1}{N}$，记$(x_i, y_j) = (ih_x, jh_y)$，其中$M$和$N$为正整数，如图所示



在上述网格上，各向异性泊松方程的差分格式为：

$$\begin{cases} -\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h_x^2} - \quad \epsilon\frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h_y^2} = f_{i,j} = f(x_i, y_j) \\ \qquad\qquad 1 \le i \le N-1,\ 1 \le j \le N-1 \\ u_{ij} = 0 \qquad\qquad i = 0 \text{ 或} i = N \text{ 或} j = 0 \text{ 或} j = N \end{cases}$$

令$u_i=(u_{i,1},u_{i,2},...,u_{i,N-1})^T,\ 1\le i\le N-1,\ f_i=(f_{i,1},f_{i,2},...,f_{i,N-1})^T$，

$$\mathbb{A}_h=\begin{bmatrix} a_{N-1,h} & -I_{N-1}/h_x^2 & & & \\ -I_{N-1}/h_x^2 & a_{N-1,h} & -I_{N-1}/h_x^2 & & \\ & -I_{N-1}/h_x^2 & a_{N-1,h} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -I_{N-1}/h_x^2 \\ & & & -I_{N-1}/h_x^2 & a_{N-1,h} \end{bmatrix},\mathbb{U}_h=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix},\mathbb{F}_h=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix},$$

其中

$$a_{N-1,h}=\begin{bmatrix} \frac{2}{h_x^2}+\frac{2\epsilon}{h_y^2} & -\frac{\epsilon}{h_y^2} & & & \\ -\frac{\epsilon}{h_y^2} & \frac{2}{h_x^2}+\frac{2\epsilon}{h_y^2} & -\frac{\epsilon}{h_y^2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \frac{2}{h_x^2}+\frac{2\epsilon}{h_y^2} & -\frac{\epsilon}{h_y^2} \\ & & & -\frac{\epsilon}{h_y^2} & \frac{2}{h_x^2}+\frac{2\epsilon}{h_y^2} \end{bmatrix}_{N-1\times N-1}.$$

令

$$\mathbb{M}_h=\begin{bmatrix} mc_{N-1} & mr_{N-1} & & & \\ ml_{N-1} & mc_{N-1} & mr_{N-1} & & \\ & ml_{N-1} & mc_{N-1} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & mr_{N-1} \\ & & & ml_{N-1} & mc_{N-1} \end{bmatrix}$$

其中

$$mc_{N-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & & & \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} \\ & & & \frac{1}{12} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_{N-1\times N-1} \qquad ml_{N-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{12} & & & & \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \frac{1}{12} & \\ & & & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}_{N-1\times N-1}$$

$$mr_{N-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & & & \\ & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ & & & & \frac{1}{12} \end{bmatrix}_{N-1\times N-1}$$

以及$\mathbb{N}=(N-1)\times(N-1)$. 对任意非零向量$\mathbb{U}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, 定义Rayleigh商：

$$\rho(\mathbb{U})=\frac{\mathbb{U}^T\mathbb{A}_h\mathbb{U}}{\mathbb{U}^T\mathbb{M}_h\mathbb{U}}.$$

对$\mathbb{W}=(w_1,\cdots,w_{\mathbb{N}})^T\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, 定义如下离散的$l^2$范数：

$$\|\mathbb{W}\|_{l^2}=(\sum_{i=1}^{\mathbb{N}}h_x^2w_i^2)^{1/2}.$$

Algorithm 1: Inverse Free Krylov Subspace Method.
给定ℓ和单位初始向量$\mathbb{U}_0$;
$\rho_0 = \rho(\mathbb{U})$;
For $k = 0, 1, 2, \cdots$,直至收敛，

- 构造空间$K_\ell = \text{span}\{\mathbb{U}_k, (\mathbb{A}_h - \rho_0\mathbb{M}_h)\mathbb{U}_k, \cdots, (\mathbb{A}_h - \rho_0\mathbb{M}_h)^\ell\mathbb{U}_k\}$的一组基$Z_\ell = [z_0, z_1, \cdots, z_\ell]$;
- 形成矩阵$\mathbb{A}_\ell = Z_\ell^T(\mathbb{A}_h - \rho_k\mathbb{M}_h)Z_\ell$和$\mathbb{M}_\ell = Z_\ell^T\mathbb{M}_hZ_\ell$;
- 求$(\mathbb{A}_\ell, \mathbb{M}_\ell)$的最小特征对$(\mu_1, v_1)$;
- 令$\rho_{k+1} = \rho_k + \mu_1$, $\mathbb{U}_{k+1} = \mathbb{U}_k + Z_\ell v_1$.

End

求K_ℓ基的算法

Algorithm 2: $\mathbb{M}_h$-orthonormal basis by Arnoldi
输入$\mathbb{C}_k = \mathbb{A}_h - \rho_k\mathbb{M}_h$, 近似向量$\mathbb{U}_k$,
输出：$Z_\ell = [z_0, z_1, \cdots, z_\ell]$.
$z_0 = \mathbb{U}_k/\|\mathbb{U}_k\|_{\mathbb{M}_h}$
For $i = 0 : \ell - 1$,

- $w = C_kz_i$;

  For $j = 0 : i$

  - $h_{j,i} = z_j^T\mathbb{M}_hw$;
  - $w = w - h_{j,i}z_j$;

  end
- $z_{i+1} = w/\|w\|_{\mathbb{M}_h}$

End

各向异性泊松问题的解$u(x, y) = sin\pi x \sin\pi y$在离散节点$(x_i, y_j)$上的值记为$u_{i,j}^e = u(x_i, y_j)$. 令$u_i^e = (u_{i,1}^e, u_{i,2}^e, ..., u_{i,N-1}^e)^T$, $1 \le i \le N-1$, $\mathbb{U}_h^e = ((u_1^e)^T, \cdots, (u_{N-1}^e)^T)^T$.

取$\epsilon = 1, 10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-7}$和$M = N = 32, 64, 128, 256, 512, 1024$，完成下面其中一个作业(需在2018年1月31日前提交源代码和PDF文件的大作业报告, 格式自定).

2 作业1

1. 取$M = N = 64$, $\epsilon = 1, 10^{-3}, 10^{-5}$, 考虑矩阵带状结构的性质，用高斯消去法求解方程组

$$\mathbb{A}_h\mathbb{U}_h = \mathbb{F}_h,$$

   并计算误差$\|\mathbb{U}_h - \mathbb{U}_h^e\|_{l^2}$.

2. 在最细网格上取向量$\mathbb{U}_0 = (1, 1, \cdots, 1)^T$为共轭梯度法的初始值，以对称线Gauss-Seidel迭代为光滑子，以多重网格V-Cycle 为预条件子，用预条件共轭梯度法求解方程组(取$\epsilon = 1, 10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-7}$ 和$M = N = 32, 64, 128, 256, 512, 1024$)

$$\mathbb{A}_h\mathbb{U}_h = \mathbb{F}_h,$$

并做出误差$\|\mathbb{U}_h - \mathbb{U}_h^e\|_{l^2}$图，CPU时间表和迭代次数表（停机标准$\|r\|_2/\|r_0\|_2 \leq 10^{-6}$, 其中$r_0$ 为初始残量，r为当前残量）.

3. 取$\epsilon = 10^{-5}$，$M = N = 256$, 在最细网格上取向量$\mathbb{U}_0 = (1, 1, \cdots, 1)^T$为共轭梯度法的初始值，以对称点Gauss-Seidel 迭代为光滑子，以多重网格V-Cycle 为预条件子，用预条件共轭梯度法求解方程组

$$\mathbb{A}_h\mathbb{U}_h = \mathbb{F}_h,$$

给出CPU时间表和迭代次数表（停机标准$\|r\|_2/\|r_0\|_2 \leq 10^{-6}$, 其中$r_0$ 为初始残量，r为当前残量.

3 作业2

取$\epsilon = 1, 10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-7}$ 和$M = N = 32, 64, 128, 256, 512, 1024$，取$m = 5, 10, 20, 40, 80$，取向量$\mathbb{U}_0 = (1, 1, \cdots, 1)^T/\sqrt{\mathbb{N}}$，用**Algorithm 1**: Inverse Free Krylov Subspace Method 求解如下特征值问题的第一个特征值和特征向量

$$\mathbb{A}_h\mathbb{U}_h = \lambda\mathbb{M}_h\mathbb{U}_h,$$

其中求K_ℓ基的算法为**Algorithm 2**: $\mathbb{M}_h$-orthonormal basis by Arnoldi （停机标准$\|\mathbb{A}_h\mathbb{U}_k - \rho_k\mathbb{M}_h\mathbb{U}_k\|_2/\|\mathbb{A}_h\mathbb{U}_0 - \rho_0\mathbb{M}_h\mathbb{U}_0\|_2 \leq 10^{-6}$），求$(\mathbb{A}_\ell, \mathbb{M}_\ell)$的最小特征对$(\mu_1, v_1)$用去年期末考试第七题的算法. 给出近似特征值，画出特征向量图，做CPU 时间表和迭代次数表.