

老马迷图

分享

http://blog.sciencenet.cn/u/zmpenguestc

网络空间做伏枥老马，志在千里育识途小驹！

博客首页

动态

微博

博文

相册

主题

分享

好友

留言板

博文

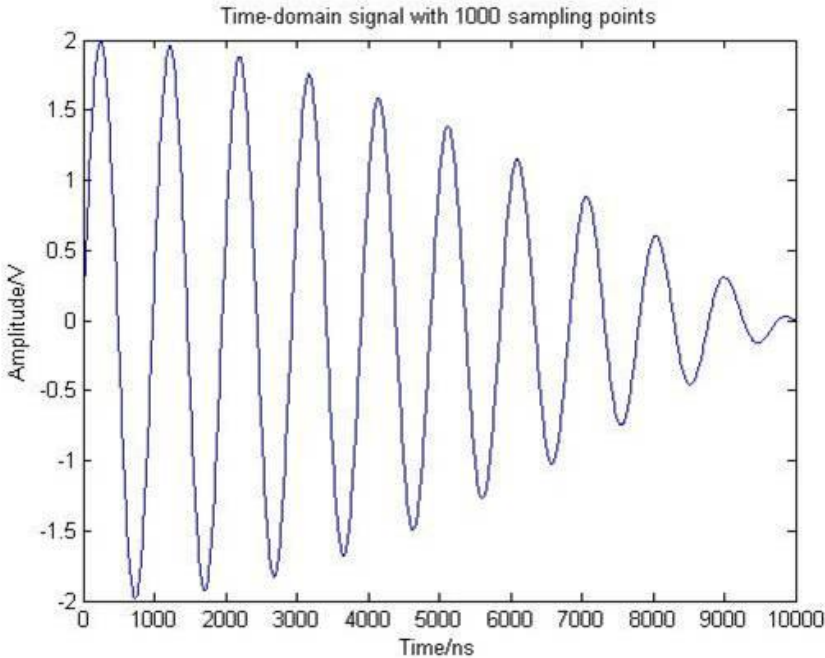
傅里叶变换的波形分辨率与频率分辨率精选

已有 37622 次阅读 2017-4-3 20:01 | 个人分类:闻图思学 | 系统分类:教学心得 | 关键词:FFT,频率分辨,补零 | FFT, 频率分辨, 补零

我们知道，快速傅里叶变换（FFT）是信号处理的重要数学工具。一般而言， n 点信号的离散傅里叶变换（DFT）的变换结果（频域）也是 n 个数据点。但在实际应用中，对实际信号作FFT时，常常涉及到变换前数据需要补零（Zero padding）的问题。一些论坛里，曾看到某些专业人士从信息论的角度分析认为：“Zero padding没有增加时域信号的有效信息，因此，不会改变DFT/FFT的分辨率”。那么，补零到底有什么用，什么时候需要补零呢？对于一般的工程技术人员来说，基本就是调用现成代码或模块进行计算，很少考虑这些问题。其实，了解和搞清楚这个问题，对实际应用还是很有帮助的。接下来，我们将从以下几个方面来简要阐述如何补零以及它对频谱分析结果的影响。

一、什么是补零（Zero Padding）？

简单来说，补零(Zero Padding)就是对变换前的时域或空域信号的尾部添加若干个0，以增加数据长度。如图1所示，为含有1.00 MHz 和1.05 MHz 两个频率成分合成的正弦波实信号。



(a)



彭真明

加为好友

给我留言

打个招呼

发送消息

扫一扫，分享此博文



作者的精选博文 全部

- 结缘科学网
- 研究生导学与培养的再思考
- 一个科研小白的成长之路
- 小团队如何发展，可有良策？
- 你跳了吗？
- 岂为功名始读书

作者的其他最新博文 全部

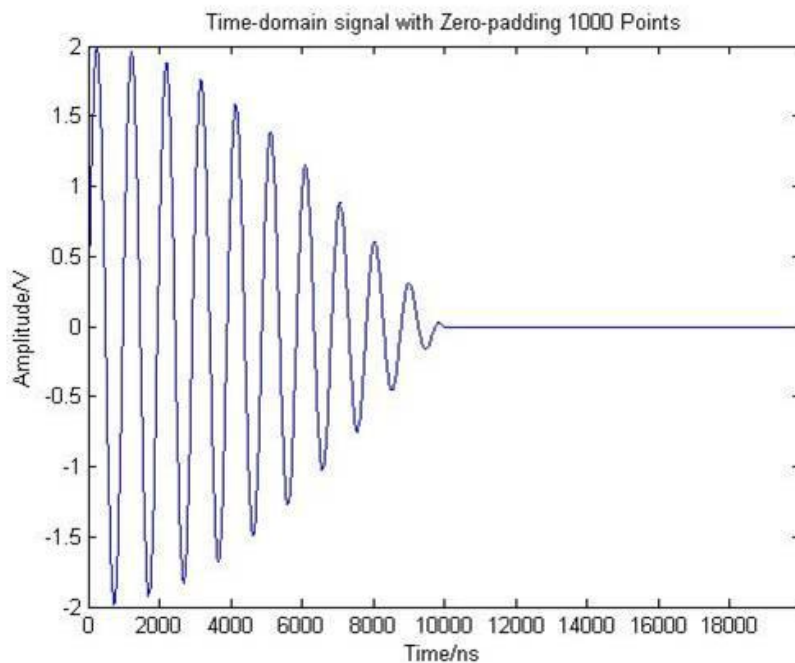
- 2019，一句话总结
- 金楚丰：一个“抱定宗旨，四
- 科研并不如初见
- 结缘科学网
- 抓住“幸运”
- 未来课堂，做好未来教师

精选博文导读 全部

- 访谈“有礼”| 国际期刊编辑期...
- 高彩霞研究组建立植物基因...
- 提高文章鉴赏能力，从读懂...
- 发表一张Nature正刊封面有...
- 宇宙膨胀背后的故事（三十...
- “早发表，晚评价”：如何晚...

相关博文

- 用Python、Matlab、C实现傅...



(b)

图1 时域信号的补零示意图

图1(a)中信号长度为1000个样点，采样频率为 $f_s=100$ MHz时，信号的实际时长则为10 us。在其尾部添加1000个0，即数据增加到了2000个点（时长为20us），则变为图1(b)所示的波形。

这个过程就是通常所说的补零（Zero Padding）。

二、为什么要Zero Padding?

最直接的理由就是，如果时域波形的数据样点为2的整数幂的话，FFT计算将是最高效的，硬件（FPGAs）计算FFT，就是采用了这样的Padding工作模式。那么，我们所关心的补零会不会影响计算输出的频率分辨率呢。

三、关于FFT频率分辨率

这里涉及到两种意义下的分辨率问题，一种叫“波形频率分辨率（Waveform frequency resolution）”或叫视觉频率分辨率（Visual frequency resolution）；另一种则叫做“FFT分辨率”。虽然，这个分类和命名不一定是专业的术语，但却有助于对“频率分辨率”概念的理解。在没有补零的情况下，这两个概念通常容易被混淆，因为它们都是等价的。

波形频率分辨率是指可以被分辨的2个频率的最小间隔（Spacing）；而FFT分辨率则是频谱中的数据点数（The number of points in the spectrum），它是与做FFT的点数直接相关的。

因此，波形频率分辨率可定义为：

$$\Delta R_w = 1/T$$

其中， T 是实际信号的时间长度。

同样，FFT分辨率可以定义为：

$$\Delta R_f = f_s/N_{fft}$$

其中， f_s 为采样频率（the sampling frequency）， N_{fft} 为FFT的点数。 ΔR_f 代表了FFT频率轴上的频率取值的间隔（Spacing）。

值得注意的是，可能有很好的FFT分辨率，但却不一定能够很好的把2个频率成分简单的分开。同样，可能有很高的波形分辨率，但波形的能量峰值会通过整个频谱而分散开（这是因为FFT的频率泄漏现象）。

我们知道，信号的离散傅里叶变换（DFT）或快速傅里叶变换（FFT）是对波形的任何一边补零形成的无限序列进行计算的。这就是，为什么FFT的每个频率单元（bin）都具有明显的sinc 波的形状。

波形频率分辨率 $1/T$ 与一个sinc函数空值间隔（the space between nulls）是一样的。

四、例析

下面以一个具有2种频率成分的周期信号为例，说明Zero Padding与频谱分辨率的关系：

$$x = \sin(2\pi \cdot 1000000 \cdot t) + \sin(2\pi \cdot 1050000 \cdot t)$$

其中， $f_1 = 1.00\text{MHz}$ ， $f_2 = 1.05\text{MHz}$ ，频率间隔为 0.05MHz 。也就是说，在我们的频谱分析曲线上能看到2个频率点的峰，若2个正弦波的幅度为1伏(V)，那么我们期望在1 MHz 和 1.05 MHz的频率点处的功率为10 dBm。

分以下几种情况进行分析：

1) 时域信号1000个点采样，做相同样点数的FFT

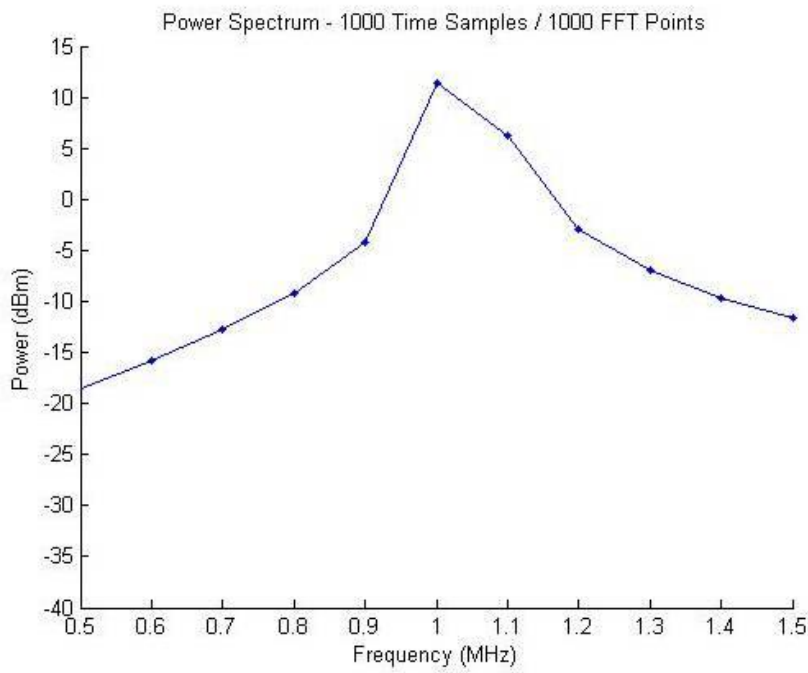
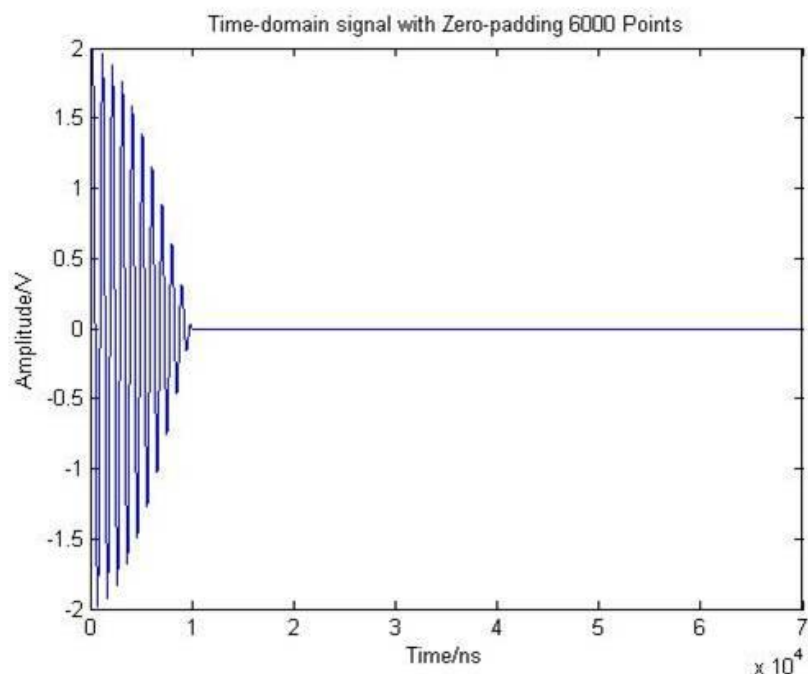


图2 原始信号的功率谱（1000点 FFT）

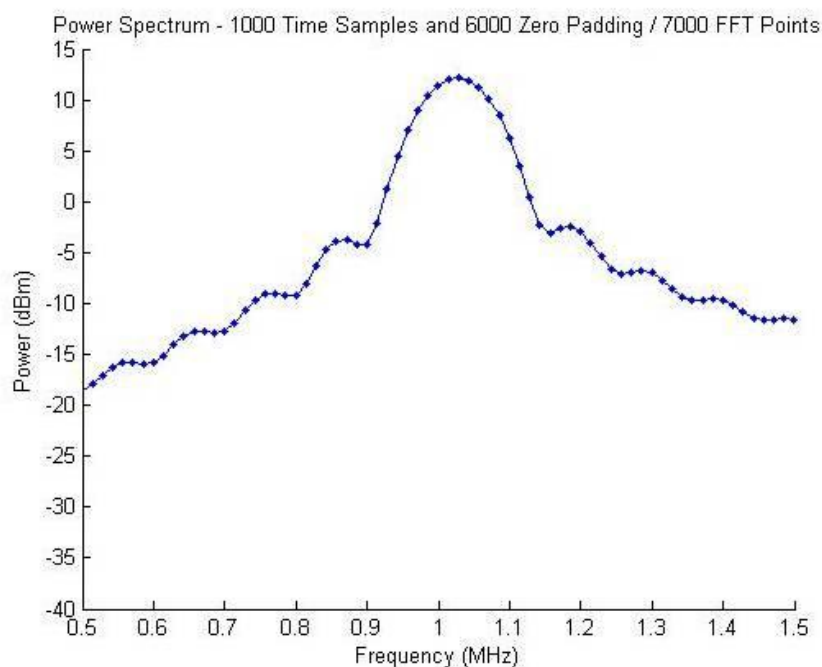
图2中，我们并没有看见期望的两个脉冲，因为图中仅出现一个脉冲点，其幅度约为11.4 dBm。显然，这个图并不是我们想要的正确的频谱图。原因很简单，没有足够的分辨率看见两个峰值（Peaks）。

2) 时域信号1000个点采样，后端补6000个零，做7000点数的FFT

我们自然想到，采用补零方式增加FFT点数，以使频率轴上能增加更多点数。如采用7000个点做FFT，即需要在原1000点信号尾部增加6000个零值（即60us时长），则原始信号变为图3(a)所示，其FFT结果如图3(b)所示。



(a)



(b)

图3 原始信号补零及功率谱（7000点 FFT）

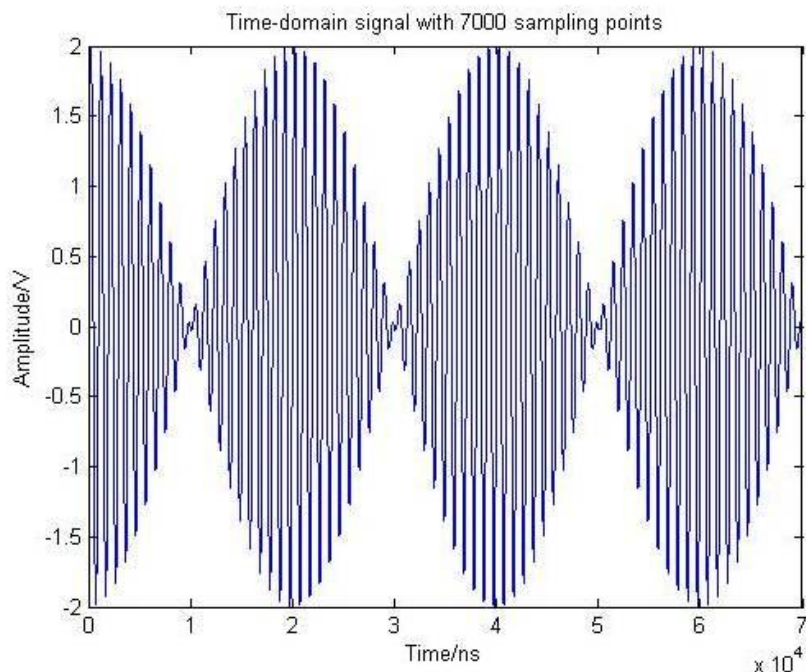
图3中，我们也并没有看见期望的结果。仔细观察一下，此图到底告诉了我们什么呢？即通过增加更多FFT点数的做法，使得波形频率分辨率公式中的sinc函数的定义更清晰。可以看出，sinc 空值（nulls）间隔大约是0.1 MHz。

由于给出信号的两个正弦波的频率间隔是按0.05 MHz分隔的, 因此，不管我们用多少FFT点数（Zero padding），都无法解决2个正弦波的问题。

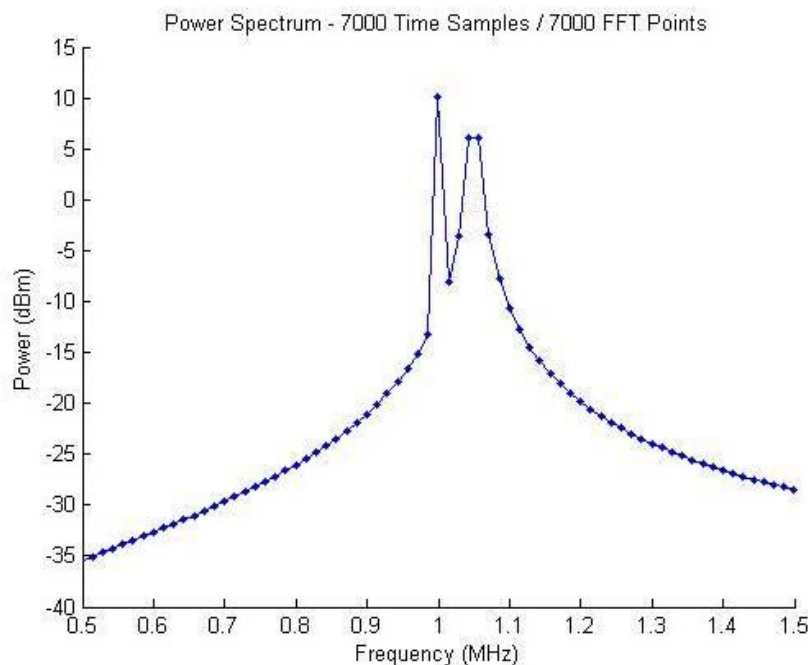
再来看一下频率分辨率 Δf 告诉了我们什么。尽管，FFT分辨率大约为14kHz（足够的频率分辨率），而波形频率分辨率仅仅为100 kHz。两个信号的频率间隔是50kHz，所以我们受限于波形频率分辨率 ΔR_w 。

3) 时域信号7000个点采样，做7000点数的FFT

为了合理地解决这个问题，需要增加用于FFT的时域数据的长度（点数）。因此，我们直接采集波形的7000点作为输入信号，取代补零（Zero Padding）方式到70us (7000 点)。时间域信号及对应的功率谱分别如图4a-4b所示。



(a)



(b)

图4 按7000点采集的信号及其功率谱

通过时域数据的周期延拓，现在的波形频率分辨率 ΔR_w 也近似为14KHz。但从频谱图中，我们还是看不见2个正弦波。1 MHz 信号已按正确的10 dBm功率值清晰地表征，而1.05 MHz 信号变宽，且未以期望的10 dBm 功率分布。这是为什么呢？

原因就是1.05 MHz处并没有FFT点的分布，原因是此处的能量被多个FFT点分散（泄露）了。

给出的例子中，采样频率是100 MHz，FFT点数为7000。频谱图中，点与点之间的间隔是14.28 kHz。1 MHz频率刚好为频率间隔的整数倍，而1.05 MHz 却不是。距1.05 MHz最近的整数倍频率为1.043 MHz 和 1.057 MHz, 因此，能量被这2个FFT单元所分散。

4) 时域信号7000个点采样，后端补1000个零，做8000点数值的FFT。

为了解决这个问题，我们可以合理选择FFT的点数，以便这两个点能在频率轴上成为独立分开的点。由于，我们并不需要更好的波形频率分辨率，仅采用时域数据的零填充方式来调整FFT数据点的频率间隔。

给时域信号增加1000零值(10 us)，使得频率间隔为12.5 kHz，这样，满足了1 MHz and 1.05 MHz两个频率都是这个间隔的整数倍。此时，给出的功率谱如图5所示。可以看出，两个频率问题得到解决，而且功率均在期望的10 dBm。

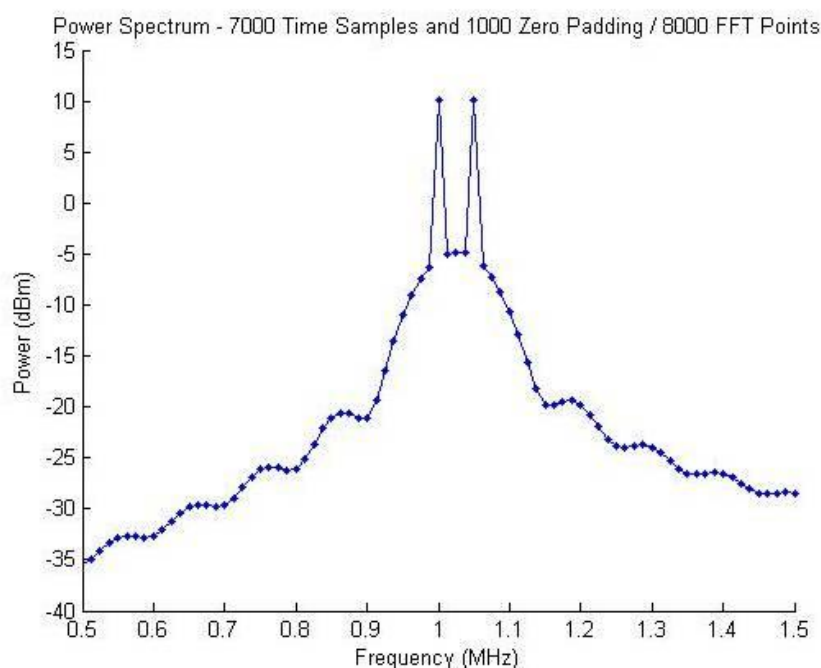


图5 补零至8000点信号的功率谱

为了进一步观察过度补零的现象，通过时域补更多的零值（10000点）来完成更多点数的FFT（确保具有正确的波形频率分辨率 ΔR_w ），我们就可以清晰地看到FFT单元（bins）的sinc波形状，如图6所示。

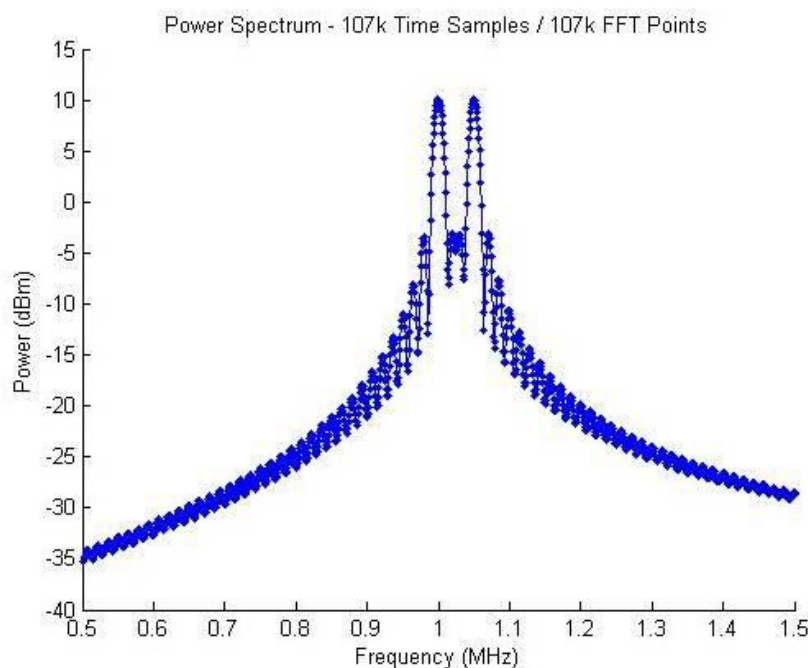


图6 补零至107000点信号的功率谱

博文中计算结果和图件，均利用MATLAB进行仿真验证。如需代码，可直接联系本人。

参考资料: <http://www.bitweenie.com/listings/fft-zero-padding/>

THE END

本博客内容与“老马迷图”个人微信公众号同步发布。欢迎关注！



扫一扫，可关注“老马迷图”微信公众号！

相关博文：

[1] [如何保持空域与频域滤波结果的一致性](#)

[2] [三页PPT一堂课](#)

转载本文请联系原作者获取授权，同时请注明本文来自彭真明科学网博客。

链接地址：<http://blog.sciencenet.cn/blog-425437-1043431.html>

上一篇：[那些年，我与学生之间的“过结”](#)

下一篇：[如何保持空域与频域滤波结果的一致性（续）](#)

分享 收藏

当前推荐数：**18** 推荐人： 徐令予 赵振明 黄永义 文克玲 孔梅 李曙 吴斌 詹亮 王安良 肖慈珣 魏焱明 马永亮 张云 刘全稳 王林平 陈南晖 **wwwxmm haipengzhangdr**

推荐到博客首页

评论 (33 个评论)

该博文允许注册用户评论 请点击登录



[18]唐白玉 2018-10-8 10:35

回复 | 赞

连了
<http://blog.sciencenet.cn/home.php?mod=space&uid=530150&do=blog&id=1131640>



[17]唐白玉 2017-5-1 07:57

回复 | 赞

博文，可以作为教学时，给普通初学者多些直观印象。

彭真明 回复 唐白玉： 应该是这样的~

2017-5-1 11:31 1 楼（回复楼主）

回复 | 赞



[16]唐白玉 2017-5-1 07:40

回复 | 赞

居士借贵地“精选之光”，说些术语问题。许多例子，反复在时、频两域中，调整序列的长度，已出现在居士的博客里。

不妨用“谱栅分解率”，指FFT的谱线间隔、透过等间距缝隙看频谱图的某种能力？

与实际信号的无穷时间模型中的频率联系起来时，考虑观测窗口。观测数据长度为N时，默认其为同宽度是N的窗口序列相乘的结果，在频域对应卷积，那么时间窗的宽度决定了频率分辨率。有卷积时，设想两个可分开的冲激函数的距离？给定了观测时间窗时，设想，两个频率信号成分需要有多大的频率差，才能在这个时间内累积表现出可靠区分的差别（周期数？）。这里的“分辨率”，具有明显的物理意义。

用FFT时的点数，相应于，将上述分辨率已明确了序列，做周期化延拓时的周期值，决定了频域光滑函数的采样间隔？补零加长，使采样间隔小了，引入的是冗余描述，可能方便某些后续处理。一般不说这改变了分辨率。记得约30年前的教科书，已把补零加长，视为人为的谱“插值”分析技术？再做IFFT，有部分始终为0；切除，以压缩冗余。

看几个“周期”一词的情形：单频成分，固有的最小正周期，它在观测窗内已表现出的周期数目，再做分析时的延拓周期。这比看几个“频率”，更直接。

例如，设已知，模拟信号只有直流（不为零）。不加长做FFT时的结果，恰好只有一个非零值，这才正确地反映了“单频”的事实。补零加长时，从观测窗的谱函数的主瓣和旁瓣，都可能采到了更多的非零数值，但不能误以为，那些是因为FFT分解得更细了就看见了的原模拟信号中固有的更多频率成分。

http://blog.sina.com.cn/s/blog_729a92140102wbfb.html，《修整FIR尺度滤波器的幅相加长迭代重组方法》，利用了补零，其要点不在于频域分辨率，而在于特定对象的内在本性的自由度和所使用的描述空间的维数之间的异同问题。不必要求其算法的一般性的迭代收敛的理论条件，但可以据实际性能的测验来判断取舍。

设 x 是 N 点实数序列，可将其补上全为零（无自由余地）的虚部序列，即用 N 维复线性空间中的点，来冗余地描述。 N 点

FFT是复空间上的满秩线性变换。实数序列集合的象，不可能充满整个复空间。变换结果的共轭对称的特点，表达了与人为的冗余有关的约束条件。

在涉及噪声时，统计独立、不相关、正交的概念，引人注目。对实的白高斯噪声序列的FFT结果，共轭对称的特点，使人们知道一个值，也就100%知道了对称频点（非 π 的整数倍）上的值，即它们非常合乎世俗的对于紧密“相关”联的观念。

虽然，正交系、直和、投影、正交补等，都早被作为适用于抽象的一般内积空间的严格的概念术语，不必限于欧氏空间（实的），但是，可能宜小心区分普通本科生线性代数课（很多工科研究生，还要学习矩阵分析以及实变函数与泛函分析）中的正交矩阵和酉矩阵。需要的话，尽量用“酉矩阵”一词，用它包含正交矩阵为一种特殊例子，即虚部为零的酉矩阵，可以直接限制在实空间上使用。

“教育部研究生工作办公室推荐研究生教学用书”（2003）称DFT是正交变换、其变换矩阵 W 是正交矩阵，这容易使人们，在了解伴随变换、逆矩阵和其中的正交基(可调整范数因子)时，忽视了复共轭运算（第365页）。

在做“正交小波”变换时，居士也用“正交”一词，指基函数之间、基序列之间或子空间之间的垂直关系，预定了空间结构模型为背景，但是，把在矩阵乘法形式时用的变换矩阵，就不必限定在基础线性代数中的正交矩阵了。

记得，本科高等数学，在使用“基”函数和“正交”多项式时，似乎并不要求先明确空间结构？

不常见，但是可查到“复欧几里得空间”、“复正交矩阵”的说法，也见个别人用了“酉尺度滤波器”一词。把酉矩阵称为复正交矩阵，这容易给人不良印象：正交矩阵的虚部可以不为零？

居士一直不清楚，为何在泛函分析中，把无穷维Hilbert空间中的元与任一规范正交系的内积，都称为傅里叶系数。要是小波基上的展开系数，也都用这个称呼，那么文献叙述就麻烦了。还是狭义些地用“傅里叶”好些。

另外，居士用很久的奇异值分解SVD，与Matlab和Scilab中用的概念一致，可以分解复矩阵，使用酉矩阵做因子。但是，近些年，已注意到《现代数学手册（1）》第196页以及上面提到的教材第442页，明确略去了复共轭运算，定义了实矩阵的一种分解，仅使用正交矩阵做因子。

彭真明 回复 唐白玉： 很专业！

2017-5-1 11:31 1 楼（回复楼主）

回复 | 赞



[15]梁先庭 2017-4-7 09:25

回复 | 赞

谢谢分享！

彭真明 回复 梁先庭： 谢谢关注！

2017-4-9 09:39 1 楼（回复楼主）

回复 | 赞



[14]crossludo 2017-4-7 05:05

回复 | 赞

integrates multiple external and internal cues. These roles depend on characteristic response kinetics, <http://www.nature.com/nrn/journal/v18/n4/abs/nrn.2017.24.html>



[13]刘全稳 2017-4-6 09:00

回复 | 赞



彭真明 回复 刘全稳： 师兄，好久不见~

2017-4-9 09:38 1 楼（回复楼主）

回复 | 赞



[12]魏焱明 2017-4-5 18:14

回复 | 赞

下次再讲小波

彭真明 回复 魏焱明： 谢谢魏老师！空了，一定从会课堂教学结合工程应用的角度，写一些授课的体会。

2017-4-5 19:23 1 楼（回复楼主）

回复 | 赞



[11]王安良 2017-4-5 09:39

回复 | 赞

我十几年前也是这么用的。

彭真明 回复 王安良：

2017-4-5 19:23 1 楼（回复楼主）

回复 | 赞



[10]haipengzhangdr 2017-4-5 08:47

回复 | 赞

<http://blog.sciencenet.cn/blog-3159769-1043593.html>



[9]李曙 2017-4-4 15:29

回复 | 赞

受教了，谢谢彭老师。

彭真明 回复 李曙： 备课笔记而已哈~

2017-4-4 19:10 1 楼（回复楼主）

回复 | 赞

[8]樊哲勇 2017-4-4 14:27

回复 | 赞



一般还需要用一个窗函数压制这个振荡吧？

赞

彭真明 回复 **樊哲勇**：离散FFT，用有限点近似无限序列的计算，截断处必然带来边界问题。这种截断其实就是矩形窗。本文重点是讨论Zero Padding对分辨率的影响问题，因此，没有考虑选择合适的窗函数的问题。谢谢您的讨论和建议！

2017-4-4 19:09 1 楼（回复楼主）

回复 | 赞



[7]黄永义 2017-4-4 14:19

好文！

彭真明 回复 **黄永义**：谢谢黄老师~

2017-4-4 19:10 1 楼（回复楼主）

回复 | 赞



[6]冯永春 2017-4-4 13:41

很好！

彭真明 回复 **冯永春**：谢谢！

2017-4-4 19:10 1 楼（回复楼主）

回复 | 赞



[5]赵振明 2017-4-4 13:33

彭老师活学活用！

彭真明 回复 **赵振明**：最近在讲授图像处理中的频域滤波，算是自己的一个教学后记吧。因为，课堂上没时间讲这么细。

2017-4-4 19:03 1 楼（回复楼主）

回复 | 赞



[4]徐宗博 2017-4-4 13:14

很透彻的解释。建议能否在用词上更加准确，看到两个分辨率公式时，对于波形频率分辨率中的信号长度，如果将该信号长度误认为是输入FFT的时间序列长度，那么两个公式其实是相同的。建议使用比如“有效信号”或“原始信号”等词语加以区分。

彭真明 回复 **徐宗博**：原本从连续信号的时长采样点考虑波形频率分辨率，意指有效信号（不包括采样后Zero padding的点），看来还是会混淆哈。谢谢您的宝贵建议，已加修饰。

2017-4-4 18:48 1 楼（回复楼主）

回复 | 赞



[3]zhouwangpu 2017-4-3 21:08

俺从前是个大学里的工程师，爱偷懒，所以整了这么个懒法子。让彭教授见笑了！

彭真明 回复 **周旺普**：能让学生快速理解的法子，就是牛！

2017-4-3 21:13 1 楼（回复楼主）

回复 | 赞



[2]zhouwangpu 2017-4-3 20:58

一般的学生会越听越迷糊。

ctft—>dtft—>dft，从数学定义、物理概念、波形图等三个方面入手，把来龙去脉讲清楚，那么，好学生就不用看书了，差学生也能听懂了。

彭真明 回复 **周旺普**：向您学习！！！

2017-4-3 21:00 1 楼（回复楼主）

回复 | 赞



[1]zhouwangpu 2017-4-3 20:41

复杂化了。

彭真明 回复 **周旺普**：为了精细频率分析~

2017-4-3 20:44 1 楼（回复楼主）

回复 | 赞

