

老马迷图

分享

http://blog.sciencenet.cn/u/zmpenguestc

网络空间做伏枥老马，志在千里育识途小驹！

博客首页

动态

微博

博文

相册

主题

分享

好友

留言板

博文

如何保持空域与频域滤波结果的一致性

已有 25098 次阅读 2015-11-8 10:00 | 个人分类:闻图思学 | 系统分类:教学心得 | 关键词:教学笔记,图像滤波 | 图像滤波, 教学笔记

我们知道，给定一个空（时）间滤波器，既可以在空（时）域直接完成数字信号的滤波，也可以在频域完成。空域滤波的数学运算为卷积/相关，对应频域则为点乘/频域数据的共轭（G*）与滤波器(H)的乘积。

简单起见，以一个1D数字信号为例加以说明。

例如：给定信号 $x = [1\ 2\ 2\ 4\ 4]$ ，滤波器 $h = [1\ 2\ 3]$ ；

空域滤波（卷积）为：

$y = \text{conv}(x,h,'same');$ % 此处未考虑h系数的归一化问题

则滤波结果为：

$y = [4\ 9\ 14\ 18\ 20]$

下面介绍频域方式的滤波过程。由于时域滤波属于有限序列的**线性卷积**，频域滤波方式实际上是利用离散傅里叶变换（DFT）求时域**线性卷积**的过程，而DFT本质上是对应时域滤波中针对周期序列的**循环卷积**。要满足**循环卷积**与**线性卷积**计算结果一致，时域信号x(m点)与滤波器h(n点)必须等长。这可以采用补零的方法，使x与h的长度均为 $L \geq m+n-1$ 。这样做的目的，也是为了避免周期函数卷积中因周期靠近引起所谓的频率缠绕错误（**混叠**）。

一般做法是，对空（时）域数据采用后端补0方式延拓至2倍数据长度。

信号延拓： $x_p = [1\ 2\ 2\ 4\ 4\ 0\ 0\ 0\ 0];$

由于滤波器h与延拓后的信号xp应保持相同的长度，故也需要补0做延拓。有两种方式：

(1) 双边延拓，滤波器h居中

$h_p = [0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 2\ 3\ 0\ 0\ 0];$

(2) 单边延拓，滤波器h居左

$h_p = [1\ 2\ 3\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0];$

然后，分别对xp, hp做DFT，完成频域滤波并做反变换，即

$y = \text{real}(\text{ifft}(\text{fft}(x_p).\text{fft}(h_p)));$

最后，剪裁掉补0多出的后半部分数据，即保留**主值序列**。则两种方式得到的滤波结果分别为：

$y1 = y(1:5) = [12\ 0\ 0\ 0\ 1];$ 和 $y2 = y(1:5) = [1\ 4\ 9\ 14\ 18];$



彭真明

加为好友

给我留言

打个招呼

发送消息

扫一扫，分享此博文



作者的精选博文 全部

- 结缘科学网
- 研究生导学与培养的再思考
- 一个科研小白的成长之路
- 小团队如何发展，可有良策？
- 你跳了吗？
- 岂为功名始读书

作者的其他最新博文 全部

- 2019，一句话总结
- 金楚丰：一个“抱定宗旨，四
- 科研并不如初见
- 结缘科学网
- 抓住“幸运”
- 未来课堂，做好未来教师

精选博文导读 全部

- 访谈“有礼”| 国际期刊编辑期...
- 高彩霞研究组建立植物基因...
- 提高文章鉴赏能力，从读懂...
- 发表一张Nature正刊封面有...
- 宇宙膨胀背后的故事（三十...
- “早发表，晚评价”：如何晚...

相关博文

- 依托MOOC开展SPOC教学笔...
- 光学教学笔记之总结
- 光学教学笔记之期末考试
- 光学教学笔记之吾能大子之门

可以看出, 第一种延拓, 滤波结果与空域结果完全不一致。第二种延拓与空域结果基本一致, 但在左右短点处(边界部分)是不一致的。这里, 第二种延拓也等价于:

```
y = real(ifft(fft(x,10).*fft(h,10)));
```

从傅立叶变换的时域性质知道，两种延拓的频谱是一样的，但相位会发生变化。因此，第一种延拓（两端补零方式， h 居中）是不可取的。第二种延拓与空域滤波结果基本一致，但边界上有差异。那么，如何消除这种边界差异，达到与空域滤波完全一致的结果呢？

我们只要在滤波器 h 延拓方式上稍作改动，即把空域滤波器中心元素放到最前段（起始点），左端被挤出的元素顺序放在尾部，即所谓的**循环移位**（circularly shift）法，则有：

```
hp = [2 3 0 0 0 0 0 0 0 1];
```

再按以上的相同步骤进行滤波处理, 可得:

```
y = [4 9 14 18 20];
```

频域滤波与空域滤波的结果就可完全保持一致。

假如，空域做的是相关运算来完成滤波，那么，只要滤波器旋转180度后，采取同样的0填充方式。

显然，以上方式很容易推广到二维情况。如果有以下二维滤波器，即一个计算y方向梯度的Sobel算子。

$$h = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

由于图像的模板运算默认为相关运算，而频域的乘积对应空域卷积。要达到一致性，以上滤波器需要上下颠倒，即旋转180度后(若为对称滤波器，可省此步)，即

$$h' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

以上模板在频域进行点乘可对应h的相关运算。

若需要填充0方式扩大到 10×10 （根据滤波图像的尺寸而定），则填充方式为：

[illegible]

$$h'_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

以上两种方式中，hp的填充方式会出现与空域滤波结果边界上的不一致，而hp' 填充方式则可以解决这个问题。

道理很简单，因为空域模板运算的当前像素（原点）一般是在滤波模板的中心像素，即

$$g(x) = \sum_{s=-a}^a f(x-s)h(s)$$

频域乘积（点乘）对应空域卷积的情况下，是按以下公式：

$$G(u) = \mathfrak{F}[g(x)] \equiv \sum_{x=0}^{M-1} \left[\sum_{s=0}^{M-1} f(x-s)h(s) \right] e^{-j2\pi ux/M} = H(u)F(u)$$

即原点（见椭圆标记处）是从左上角开始的。

下面的MATLAB代码可以简单实现以上方法，保持h中心像素位于填充区域的左上角。

```
center_h = ceil((size(h) + 1)/2); % 确定空域滤波器h中心像素坐标
hp = zeros(P, Q); % 生成P×Q的全零矩阵
hp(1:size(h,1), 1:size(h,2)) = h % 左上角填充h，形成延拓滤波器hp
row_indices = [center_h(1): P, 1: (center_h(1)-1)];
col_indices = [center_h(2): Q, 1: (center_h(2)-1)];
hp = hp(row_indices, col_indices); % 原点在左上角的延拓滤波器hp
```

其中， P 、 Q 是扩充后的滤波器尺寸，与待处理图像（ $M \times N$ ）有关（一般取， $P = 2M$ ， $Q = 2N$ ）。以上代码也就是实现前面提到的滤波器h补零延拓+循环移位过程。

滤波器h补零延拓做FFT，虽然可以简单调用 $H_p = \text{fft2}(h, P, Q)$ 来完成（MATLAB内部处理方式），但并未做循环移位，仅仅是右下部补零后计算FFT。因此，滤波结果的边界处并不能保证与空域滤波结果的一致性。空域滤波器h尺寸越大，这种边界差异越明显。例如用 25×25 ，方差为2的空域高斯低通滤波器进行实验，结果如下。

initial image



filtered image in spatial domain



filtered image in frequency domain



initial image



filtered image in spatial domain



filtered image in frequency domain



上一排图分别为原图，空域滤波结果及模板置于左上角的频域滤波结果。可以看出，频域滤波结果有明显的边界效应。下图为模版中心像素置左上角的测试结果（右下图），则与空域滤波结果是完全一致的。

相关博文：[如何保持空域与频域滤波结果的一致性（续）](#)

转载本文请联系原作者获取授权，同时请注明本文来自彭真明科学网博客。

链接地址：<http://blog.sciencenet.cn/blog-425437-934155.html>

上一篇：[三页PPT一堂课](#)

下一篇：[好汉要吃眼前“亏”](#)

[分享](#) [收藏](#)

当前推荐数：**8** 推荐人：[杨正瓴](#) [刘拴宝](#) [肖慈珣](#) [刘全稳](#) [徐志刚](#) [陆泽楷](#) [dulizhi95](#) [zouzoukankan](#)

[推荐到博客首页](#)

评论 (6 个评论)

[该博文允许注册用户评论 请点击登录](#)



[3]屈小波 2015-11-29 09:32

[回复](#) | [赞](#)

很好的讲解，一直被边界问题困扰。

[彭真明](#) 回复 [屈小波](#)： 有时会忽略这些细节~

2015-11-29 10:35 1 楼（回复楼主）

[回复](#) | [赞](#)



[2]刘全稳 2015-11-27 16:35

[回复](#) | [赞](#)



[彭真明](#) 回复 [刘全稳](#)： 😊

2015-11-29 10:35 1 楼（回复楼主）

[回复](#) | [赞](#)



[1]刘拴宝 2015-11-8 13:10

[回复](#) | [赞](#)

彭老师这学期在给学生们教授数字信号处理的相关课程么？我现在课程也正在学习数字信号处理。

[彭真明](#) 回复 [刘拴宝](#)： 数字图像处理课，差不多吧~

2015-11-8 14:43 1 楼（回复楼主）

[回复](#) | [赞](#)

