密级:公开

编号:18215015

中山大學

硕士学位论文

一类矩阵型约束Kadomtsev-Petviashvili序列的贝克隆变换

Bäcklund Transformation for Certain Series of the Matrix Constrained Kadomtsev-Petviashvili Hierarchy

学位申请人: 佘梓堉

导师姓名及职称: 吴志伟 讲师

专业名称: 应用数学

2021 年 5 月 20 日

中山大學

SUN YAT-SEN UNIVERSITY

硕士学位论文

一类矩阵型约束 Kadomtsev-Petviashvili 序列的贝克隆变换

Bäcklund Transformation for Certain Series of the Matrix Constrained Kadomtsev-Petviashvili Hierarchy

专业名称: 应用数学

申 请 人: 余梓琦

指导老师: 吴志伟

答辩委员会 (签名):

主席:

成员: 涂思锐

2021 年 5 月 19 日

学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究作出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：余梓琦

日期：2021年05月31日

学位论文使用授权声明

本人完全了解中山大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留学位论文并向国家主管部门或其指定机构送交论文的电子版和纸质版；有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆、院系资料室被查阅；有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索；可以采用复印、缩印或其他方法保存学位论文；可以为存在馆际合作关系的兄弟高校用户提供文献传递服务和交换服务。

保密论文保密期满后，适用本声明。

学位论文作者签名：余梓琦　　　　导师签名：[illegible]

日期：2021年05月31日　　　　日期：2021年05月31日

一类矩阵型约束 Kadomtsev-Petviashvili 序列的贝克隆变换

专 业：应用数学
硕士生：余梓墒
指导教师：吴志伟

摘 要

Kadomtsev-Petviashvili (KP) 序列是一类经典的可积系统，对 KP 序列的研究一直是可积理论中一类重要的问题。本文主要从李代数角度研究 KP 序列的一类特殊的不变子流形，其诱导的序列我们称为矩阵 restricted modified constrained KP (矩阵 rmcKP) 序列。接着，通过圈群分解理论，我们构造该序列的贝克隆变换，并通过贝克隆变换给出复数值 (纯虚数值) modified KdV 方程的显式解。

本文结构如下：

第一章介绍本文的研究背景、现状和主要方法，并列举出本文的主要定理。

第二章给出李群和李代数的预备知识。

第三章通过拟微分算子构造 KP 序列的拉克斯对，并给出 KP 序列的几类特殊不变子流形，从而诱导出 KdV 方程、modified KdV 方程、Gelfand-Dickey 序列和 restricted modified constrained KP 序列等。

第四章基于李代数分解导出矩阵 modified constrained KP (矩阵 mcKP) 序列，并对矩阵 mcKP 序列作二阶自同构约束，从而得到矩阵 rmcKP 序列。

第五章具体给出几种矩阵 rmcKP 序列的贝克隆变换，并由此给出复数值 (纯虚数值) modified KdV 方程的一系列非平凡解。

最后一章对本文的工作做出总结，并讨论后续考虑的相关问题以及拟开展的研究方向。

关键词： 可积系统；贝克隆变换；李代数分解；矩阵型约束 KP 序列

Bäcklund Transformation for Certain Series of the Matrix Constrained Kadomtsev-Petviashvili Hierarchy

Major: Applied Mathematics
Name: She Ziyu
Supervisor: Wu Zhiwei

ABSTRACT

The Kadomtsev-Petviashvili (KP) hierarchy is a classic integrable system, and the study of the KP hierarchy has always been an important topic in the development of the soliton theory. In this paper, we study a special invariant submanifold of the KP hierarchy from the perspective of Lie algebra. The induced hierarchy is called the Matrix restricted modified constrained KP (Matrix rmcKP) hierarchy. Then, through the factorization theory of the loop group, we construct the Bäcklund Transformation (BT) for the Matrix rmcKP hierarchy. As an example, we apply BT to the complex-value (imaginary-value) modified KdV equation to obtain the explicit solutions.

The organization is as follows:

In the first chapter, we give the motivation of this paper, and introduce the background and main method of this paper.

In the second chapter, we give some preliminary of Lie group and Lie algebra.

In the third chapter, we introduce the KP hierarchy from the Lax pair of the pseudodifferential operator, and list several types of invariant submanifolds of the KP hierarchy, which give the the KdV equation, the modified kdV equation, the Gelfand-Dickey hierarchy and the restricted modified constrained KP hierarchy.

In the fourth chapter, we introduce the Matrix modified constrained KP (Matrix mcKP) hierarchy generated from a Lie algebra splitting. After introducing the involution to the Matrix mcKP hierarchy, we construct the Matrix rmcKP hierarchy.

In the fifth chapter, we derive the Bäcklund Transformation for several Matrix rmcKP hierarchy cases, and obtain the nontrivial solutions of the complex-value (imaginary-value) modified KdV equation.

In the last chapter, we summarize this paper and discuss some future projects.

Key Words: integrable system; Bäcklund Transformation; Lie algebra splitting; Matrix restricted modified constrained KP hierarchy

目录

第一章 绪论

1.1 研究背景

孤立波是一类特殊的波, 对其的研究已持续近两百年, 涉及的领域有数学, 力学以及光学等, 进而形成了可积理论[1][2][3]. 随着研究的深入, 可积理论对数学与物理学的各个分支如微分几何, 代数几何以及凝聚态等都产生了重大影响[4][5].

1834 年, S.Russell 在河中观察到一个波形不变的浅水波, 该水波在河道转弯处消失了[6]. 1895 年, D.Korteweg 和 de Vries 证明浅水波沿着河道运动时保持波形和波速[7]. 1954 年, E.Fermi, J.Pasta 和 S.Ulam 研究一个由 N 个振子组成且具有初值的一维晶格的能量分布情况 (FPU 问题), 实验结果表明: 经过较长时间后, 能量分布几乎与初始时一样, 而不是预期的均衡分布[8]. 1965 年, J.Zabusky 和 D.Kruskal 证明连续极限下, 可以用 KdV 方程逼近 FPU 问题; 此外, 他们对 KdV 方程的孤波解进行进一步的研究, 结果表明: 若两个孤波解最初分开并且速度大的位于后方, 则碰撞之后, 速度大的在前方并且保持最初的高度和速度; 同时, 他们将这种孤波解命名为孤立子, 又称孤立波[9].

随着孤立子研究的蓬勃发展, 人们发现众多非线性方程有类似的性质–拉克斯可积; 拉克斯可积是指方程拥有拉克斯对表示或者零曲率方程表示[10][11]. 1975 年, D.Wahlquist 和 B.Estahrook 利用李代数构造非线性方程的拉克斯对表示, 该表示需要借助李代数结构这一数学工具进行运算[12]. 时至今日, 如何判断一个非线性方程是否拉克斯可积是亟待解决的问题; 对于可积方程与可积序列, 数学家与物理学家们也一直在寻求一个准确的定义. 另一方面, 如何构造新的可积系统, 并导出具有物理意义的方程也是数学家们关注的重点.

非线性方程的求解是偏微分方程理论中的一个重要部分. 对于可积的方程, 由于其蕴含的代数背景, 我们通常通过一系列方法进行求解, 例如达布变换[13][14], 贝克隆变换[15], 反散射法[16][17] 和 Hirota 双线性法[18] 等.

微分几何与可积系统的联系可以追溯到 1899 年 V.Bäcklund 关于伪球面间微分同胚的研究: 取适当坐标系后, 伪球面的 Gauss-Codazzi 方程可以写成 sine-Gordon 方程

$$u_{xt} = \sin u; \tag{1-1}$$

(1-1) 的解空间 u 若满足 $Im(u) \subset (0, \pi)$, 则刚体运动下其与伪球面等价; 若建立活动标

架并且得到 (1-1) 的显式解, 则通过贝克隆变换可以得到无穷族伪球面[15]. 具体地, 设 u 是方程 (1-1) 的解, 在贝克隆变换

$$\begin{cases} \left(\frac{\bar{u}+u}{2}\right)_x = a\sin\frac{\bar{u}-u}{2}, \\ \left(\frac{\bar{u}-u}{2}\right)_t = \frac{1}{a}\sin\frac{\bar{u}+u}{2} \end{cases} \tag{1-2}$$

下, $\bar{u}$ 也是 (1-1) 的解[19].

1967 年, S.Gardner 等人考虑薛定谔算子的谱问题, 通过反散射的方法得到 KdV 方程的 N 孤子解, 求解过程涉及傅里叶变换, 因此该方法也被称为非线性傅里叶变换法[16]. 1968 年, D.Lax 进一步指出用反散射法求解方程的前提是该方程有拉克斯对表示[10][11]. 1972 年, A.Shabat 和 V.Zakharov 利用 D.Lax 的想法求解非线性薛定谔方程, 用实例证实了反散射法的一般性[20]. 1991 年, 胡星标和李勇提出非线性叠加公式, 得出方程的 N 孤子解[21].

然而, 由于偏微分方程的复杂性, 需要用到许多技巧或者借助其他数学工具才能获得方程的精确解, 但也无法得到所有解. 此外, 针对不同种类的方程, 尚且没有统一的解法. 值得庆幸的是, 利用贝克隆变换等方法, 人们至少得到许多具有物理背景的重要的解[22][23].

1.2 研究现状

A.Shabat 和 V.Zakharov 通过 $sl(2)$ 值的拉克斯对导出非线性薛定谔方程[20]. 通过 J.Ablowitz 等人构造的 AKNS 序列, 我们也可以得到 KdV 方程, modified KdV 方程和 sine-Gordon 方程[24]. M.Adler 利用拟微分算子导出 KdV 方程[25]. A.Kupershmidt 和 G.Wilson 给出 $n \times n$ modified KdV 方程[26]. G.Drinfeld 和 V.Sokolov 利用圈代数的分解也导出了孤子方程[27]. 这些工作引出利用李代数的分解导出孤子方程的一般方法, 目前的孤子方程具有如下共性: 满足拉克斯对, 具有 N 孤子解以及具有双哈密顿结构与无穷守恒律等[27][28]. 此外, 张大军和陈登远提出从拉克斯对构造离散系统守恒律的方法[29]; K.Tenenblat 和 C L.Terng 构造广义 sine-Gordon 方程的贝克隆变换, 并得出其 N 孤子解[30][31].

1.3 研究方法

正如1.1所言, 寻找尽量多的可积系统并导出方程, 具有重要的指导意义. 本文基于孤立子理论, 研究了由拉克斯对导出孤子方程的方法. 特别地, 利用李群和李代数这一工

具, 着重介绍了导出孤子方程的一个通用方法–李代数分解法. 具体结构如下:

1) 将李代数作子代数的直和分解, 得到 G-序列;
2) τ 为李群 $L(G)$ 上的共轭线性二阶自同构, U 为 τ 的不动点构成的集合, $\mathcal{U}$ 为 U 对应的李代数; 基于李代数的分解可以得到 U-序列;
3) τ, σ 为 $L(G)$ 上的可交换二阶自同构, 并且分别为共轭线性的和复线性的, U 为 τ 关于 $L(G)$ 的不动点集合, K 为 σ 关于 U 的不动点集合; U, K 对应的李代数分别为 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{K}$; 基于李代数的分解可以得到 $\frac{U}{K}$-序列;
4) σ 为 $L(G)$ 上的线性二阶自同构; 基于李代数的分解可以得到 (G, σ)-序列.

最后, 从代数角度出发, 利用局部交换公式等构造相应序列的贝克隆变换.

1.4　主要工作

1) 通过拟微分算子构造 Kadomtsev-Petviashvili (KP) 序列的拉克斯对[32], 并列举出 KP 序列的几种不变子流形, 例如 KdV 方程[7], modified KdV 方程[33], Gelfand-Dickey 序列[32] 和 restricted modified constrained KP 序列等, 加深对 KP 序列本质的认识;
2) 基于李代数分解导出几类孤子方程, 例如 $n \times n$ AKNS 序列[24], $n \times n$ KdV 序列[34], $SU(n)$ 序列[35], $\frac{SU(n)}{SO(n)}$ 序列[35] 和矩阵 modified constrained KP (矩阵 mcKP) 序列[36] 等; 此外, 我们对矩阵 mcKP 序列作约束, 得到矩阵 restricted modified constrained KP (矩阵 rmcKP) 序列, 该序列是一个复合结构, 即取不同的参数, 可以得到常见方程, 例如特殊的 modified KdV 方程–复数值 modified KdV 方程和纯虚数值 modified KdV 方程等;
3) 基于导出的矩阵 rmcKP 序列及圈群分解理论, 构造贝克隆变换, 从零解出发, 导出非平凡解; 特别地, 导出复数值 modified KdV 方程和纯虚数值 modified KdV 方程的非平凡解.

第二章 李群和李代数

相关定义

定义 2.1 (李群)[37] 若群 G 满足:

1) G 为一个微分流形;

2) $\forall g_1, g_2 \in G$, 映射 $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2^{-1}$ 为一个光滑映射;

则 G 称为一个李群.

定义 2.2 (李代数)[37] 令 $\mathcal{G}$ 为域 F 上的线性空间, 给定算子 $[,]$, 若满足:

1) $[X,Y] = -[Y,X], \forall X, Y \in \mathcal{G}$;

2) $[aX + bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z], \forall a, b \in F, \forall X, Y, Z \in \mathcal{G}$;

3) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0, \forall X, Y, Z \in \mathcal{G}$;

则 $[,]$ 称为李括号, $\mathcal{G}$ 称为域 F 上的李代数.

定义 2.3 (左不变矢量场)[37] G 为一个李群. 令 $\rho \in G$, $L_\rho : g \mapsto \rho g$ 为 G 到自身的光滑同构, 若

$$dL_\rho Z = Z, \forall \rho \in G,$$

则 G 上的矢量场 Z 称为左不变矢量场.

注记 2.1 [37] 令 G_e 为李群 G 在恒等元 e 处的切矢量场, 对于 $\forall X, Y \in G_e$, G 上存在一个左不变矢量场 $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$, 使得 $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]_e = [X,Y]$, 即李群在 e 处的左不变矢量场上有一个自然的李代数结构, 称为李群对应的李代数.

定义 2.4 (指数映射)[37] G 为李群, 其李代数为 $\mathcal{G}$. 令 $x \in \mathcal{G}$, 则 g 到 G 的映射 $x \mapsto \exp x$ 称为指数映射.

常用的李群及其李代数

1) $GL(n) = \{X \in M_{n\times n} | \det(X) \neq 0\}$ 称为一般线性群, 其对应的李代数为 $gl(n) = M_{n\times n}$;

2) $SL(n) = \{X \in GL(n) | \det(X) = 1\}$ 称为特殊线性群, 其对应的李代数为 $sl(n) = \{x \in gl(n) | tr(x) = 0\}$;

3) $O(n) = \{X \in GL(n) | X^T X = I\}$ 称为正交群, 其对应的李代数为 $o(n) = \{x \in$

$gl(n)|x^T = -x\}$;

4) $SO(n) = \{X \in GL(n)||X^T X = I, \det(X) = 1\}$ 称为特殊正交群, 其对应的李代数为 $so(n) = \{x \in gl(n)|x^T = -x, tr(x) = 0\}$;

5) $U(n) = \{X \in GL(n)|\bar{X}^T X = I\}$ 称为酉群, 其对应的李代数为 $u(n) = \{x \in gl(n)|\bar{x}^T = -x\}$;

6) $SU(n) = \{X \in GL(n)|\bar{X}^T X = I, |\det(X)| = 1\}$ 称为特殊酉群, 其对应的李代数为 $su(n) = \{x \in gl(n)|\bar{x}^T = -x, tr(x) = 0\}$.

第三章 Kadomtsev-Petviashvili 序列及其不变子流形

3.1 拟微分算子和 Kadomtsev-Petviashvili 序列

记 $\mathcal{D}=\{Y|Y(x)=\sum\limits_{j\leq j_0}Y_j(x)\partial^j, x\in\mathbb{R}\}$ 为拟微分算子形成的集合, 其通过拟微分算子的运算成为李代数. 令 $\mathcal{D}_+=\{Y\in\mathcal{D}|Y(x)=\sum\limits_{j\geq 0}Y_j(x)\partial^j\}$ 和 $\mathcal{D}_-=\{Y\in\mathcal{D}|Y(x)=\sum\limits_{j<0}Y_j(x)\partial^j\}$ 为 $\mathcal{D}$ 的子代数, 则 $\mathcal{D}=\mathcal{D}_+\oplus\mathcal{D}_-$ 为线性空间的直和.

令 $\mathcal{M}=\{L\in\mathcal{D}|L=\partial+u_1\partial^{-1}+u_2\partial^{-2}+\cdots\}$, 考虑 $\mathcal{M}$ 上的方程

$$L_{t_j}=[(L^j)_+,L]. \tag{3-1}$$

由 $[L^j,L]=0$ 可以得出 (3-1) 等号右边等于 $-[(L^j)_-,L]$, 并且其最高次数为 ∂^{-1}. 因此, $L_{t_j}\in T\mathcal{M}_L$, 即 (3-1) 为 $\mathcal{M}$ 上的流, 称为 Kadomtsev-Petviashvili (KP) 序列[32].

考虑 KP 序列 (3-1) 中的第二阶和第三阶流

$$\begin{cases}u_{1,t_2}=u_{1,xx}+2u_{2,x},\\ -\frac{2}{3}u_{1,t_3}+u_{1,xt_2}+u_{2,t_2}=\frac{1}{3}u_{1,xxx}-2u_1u_{1,x}+u_{2,xx}.\end{cases}$$

消去上式中的 u_2, 并令 $y=u_1$, 则可以得到 KP 方程[36]

$$3y_{t_2t_2}=(\frac{4}{3}y_{t_3}-\frac{1}{3}y_{xxx}-4yy_x)_x. \tag{3-2}$$

令 ξ 为流形 $\mathcal{M}$ 上的矢量场, 若 $\forall p\in\mathcal{N}$, 有 $\xi(p)\in T\mathcal{N}_p$, 则 $\mathcal{N}$ 称为 $\mathcal{M}$ 的不变子流形; $\mathcal{M}$ 上的流 $x_t=\xi(x)$ 称为限制在 $\mathcal{N}$ 上的流, 即若初值 $x(t_0)\in\mathcal{N}$, 则 $\forall t$, 有 $x(t)\in\mathcal{N}$[36]. 此外, 通过对 (3-1) 进行计算, 我们有

$$L^n_{t_j}=[(L^j)_+,L^n]. \tag{3-3}$$

由 $[L^j,L^n]=0$ 可以得出 (3-3) 等号右边等于 $-[(L^j)_-,L^n]$, 并且其最高次数为 ∂^{n-2}. 因此, L^n 的形式为

$$L^n=\partial^n+u_{n-2}\partial^{n-2}+\cdots.$$

取不同形式的 L^n, 可以得到 KP 序列的各类不变子流形.

3.2　不变子流形

KdV 方程和 Modified KdV 方程

令 $\mathcal{N}_{KdV}=\{L\in\mathcal{M}|L^2=(L^2)_+=\partial^2+u\}$, 则可以得到奇数阶流. 其中, 第三阶流即为 KdV 方程[7]

$$u_{t_3}=\frac{1}{4}u_{xxx}+\frac{3}{2}uu_x. \tag{3-4}$$

令 $\mathcal{N}_{mKdV}=\{L\in\mathcal{N}_{KdV}|L^2=(\partial-v)(\partial+v)=\partial^2+v_x-v^2\}$, 第三阶流即为 modified KdV 方程[33]

$$v_{t_3}=\frac{1}{4}v_{xxx}-\frac{3}{2}v^2v_x. \tag{3-5}$$

因此, 若 v 是 modified KdV 方程的一个解, 则 $u=v_x-v^2$ 是 KdV 方程的一个解 (Miura 变换)[38].

Gelfand-Dickey 序列

令 $\mathcal{N}_n=\{L\in\mathcal{M}|L^n=(L^n)_+=\partial^n+\sum\limits_{i=1}^{n-1}u_i\partial^{i-1}\}$, 则可以得到 $j(j\not\equiv 0 \bmod n)$ 阶流, 称为 Gelfand-Dickey 序列[32]. 若 L^n 可以分解成 $L^n=(\partial-v_n)\cdots(\partial-v_1)$, 则可以得到 modified Gelfand-Dickey 序列; 此外, 若 $L^n=(\partial-v_n)\cdots(\partial-v_1)$ 是 (3-3) 的一个解, 则 $\widetilde{L}^n=(\partial-v_{n-1})\cdots(\partial-v_1)(\partial-v_n)$ 也是 (3-3) 的解, 该变换称为贝克隆变换[39].

Restricted Modified Constrained KP 序列

令 $\mathcal{N}_{mcKP}=\{L\in\mathcal{M}|L^{k+1}=(\partial-u_{k+1})(\partial-u_k)\cdots(\partial-u_2)(\partial-u_1-\sum\limits_{i=1}^{m}q_i\partial^{-1}r_i)\}$, 则可以得到 modified constrained KP (mcKP) 序列[36]. mcKP 序列是 KP 序列的不变子流形, 下面我们在 mcKP 序列上作限制, 得到另一类不变子流形.

令 $\mathcal{N}_{rmcKP}=\{L\in N_{mcKP}|L^{k+1}=(\partial+\bar{u}_2)(\partial+\bar{u}_3)\cdots(\partial-u_2)(\partial-u_1+\sum\limits_{i=1}^{m}q_i\partial^{-1}\bar{q}_i)\}$, 其中, u_1 的值为纯虚数, $u_i=-\bar{u}_{k+3-i}, 2\leq i\leq k+1, \sum\limits_{i=1}^{k+1}u_i=0$. 此时, (3-3) 称为 restricted modified constrained KP (rmcKP) 序列.

通过拟微分算子可以构造 KP 序列的拉克斯对; 从代数结构出发也可以建立 KP 序列; 可以证明两种方式导出的许多序列间是等价的, 例如 mcKP 序列和矩阵 mcKP 序列是等价的[36], 用该方法也能证明 rmcKP 序列和我们接下来介绍的矩阵 rmcKP 序列是等

价的, 从而可以简洁地证明 rmcKP 序列是 KP 序列的不变子流形. 为了做到这一点, 我们需要介绍李代数的分解.

第四章 李代数分解

4.1 基本理论

给定李群 L 及其对应的李代数 $\mathcal{L}$, 令 $L_\pm$ 为 L 的子群, 对应的李子代数为 $\mathcal{L}_\pm$, 若满足 $L_+ \cap L_- = \{e\}$, 其中, e 为 L 的恒等元; 并且 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_+ \oplus \mathcal{L}_-$ 为线性空间的直和; 则 $(\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-)$ 称为 $\mathcal{L}$ 的一个分解.

真空序列

给定 $\mathcal{L}_+$ 中一个可交换的序列 $\mathcal{J} = \{J_j | j \geq 1\}$, 若满足 $\mathcal{J}$ 是线性无关的; 并且 J_j 为关于 J_1 的解析函数; 则 $\mathcal{J}$ 称为真空序列.

孤子流

令 $\pi_\pm : \mathcal{L} \to \mathcal{L}_\pm$ 为关于 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_+ \oplus \mathcal{L}_-$ 的投影, 则孤子流的相空间为 $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathcal{M})$, 其中,

$$\mathcal{M} = \{\pi_+(gJ_1g^{-1}) | g \in L_-\}.$$

显然, $J_1 \in \mathcal{M}$. 本文中, 通过计算可以得到 $\mathcal{M} = J_1 + [J_1, \mathcal{L}_-]_+$.

定理 4.1 令 $P : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}$, 则存在唯一的 $Q_j(P) \in \mathcal{L}$, 使得

$$\begin{cases} [\partial_x - P, Q_j(P)] = 0, \\ Q_j(P) \text{与 } J_j \text{ 有相同的极小多项式}, \\ Q_j(J_1) = J_j, \end{cases} \tag{4-1}$$

其中, $Q_j(P)$ 为关于 P 和其导数的方程. J_j 生成的流为

$$P_{t_j} = [\partial_x - P, Q_j(P)_+]. \tag{4-2}$$

我们称 (4-2) 为关于 $\mathcal{L}$ 的分解 $(\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-)$ 以及 $\mathcal{J} = \{J_j | j \geq 1\}$ 的孤子序列.

定理 4.2 [35] 令 $P : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}$, 则下列叙述是等价的:

1) P 是 (4-2) 的一个解;

2) $[\partial_x - P, \partial_{t_j} - Q_j(P)_+] = 0$;

3)

$$\begin{cases} E_x E^{-1} = P, \\ E_{t_j} E^{-1} = Q_j(P)_+, \end{cases} \tag{4-3}$$

关于任意初值 $E(0,0) = c \in L_+$ 是可解的.

(4-3) 的解称为关于 P 的一个延拓标架, 其中, 初值 $c = e$ 的解称为标准延拓标架. 显然, $P = J_1$ 是 (4-2) 的一个解, 其对应的标准延拓标架为 $E(x, t_j) = \exp(J_1 x + J_j t_j)$, 称为真空标架.

4.2 几类典型的可积序列

G-序列

令 $L(G)$ 为从单位球面 S^1 到李群 G 的所有光滑映射 f 组成的群, 群的分解如下所示:

$$\begin{cases} L_+(G) = \{f\text{为光滑映射}h\text{在}|\lambda| \leq 1\text{的边界值}\}, \\ L_-(G) = \{f\text{为光滑映射}h\text{在}|\lambda| \geq 1\text{的边界值}, h(\infty) = e\}, \end{cases} \tag{4-4}$$

其中, e 为 G 的恒等元. 令 $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ 及 $\mathcal{L}_\pm(\mathcal{G})$ 为对应的李代数, 则 $(\mathcal{L}_+(\mathcal{G}), \mathcal{L}_-(\mathcal{G}))$ 称为 $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ 的一个分解. 再给定一真空序列, 则可以得到 G-序列.

G-序列的例子如下所示:

1) 令 $a_1, \cdots, a_{n-1}$ 为 $sl(n,\mathbb{C})$ 中对角矩阵空间的一个基, 使得 a_1 的特征值互不相同. 令 $\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{L}(sl(n,\mathbb{C})) | A(\lambda) = \sum\limits_{j \leq j_0} A_j \lambda^j\}$, 给定 $\mathcal{L}$ 的分解和真空序列:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_+ = \{A \in \mathcal{L} | A(\lambda) = \sum\limits_{j \geq 0} A_j \lambda^j\}, \\ \mathcal{L}_- = \{A \in \mathcal{L} | A(\lambda) = \sum\limits_{j < 0} A_j \lambda^j\}. \end{cases}$$

$$\mathcal{J} = \{a_i \lambda^j | 1 \leq i \leq n-1, j \geq 1\}.$$

通过计算可以得到相空间为 $\mathcal{M} = a_1 \lambda + Y$, 其中,

$$Y = [a_1 \lambda, \mathcal{L}_-]_+ = \{u = (u_{ij}) \in sl(n,\mathbb{C}) | u_{ii} = 0,\ \forall\, 1 \leq i \leq n\},$$

则 (4-2) 给出 $SL(n,\mathbb{C})$ 序列 ($n \times n$ AKNS 序列)[24].

特别地, 当 $a_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, 则可以得到 2×2 AKNS 序列的相空间为

$$\mathcal{M} = \left\{ a_1\lambda + \left(\begin{smallmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{smallmatrix}\right) \right\},$$

其第三阶流为

$$\begin{cases} q_t = \frac{1}{4}q_{xxx} - \frac{3}{2}qrq_x, \\ r_t = \frac{1}{4}r_{xxx} - \frac{3}{2}qrr_x. \end{cases}$$

当 $q = \pm r$ 时, 上述两方程相容, 从而得到 modified KdV 方程[33].

2) 令 $h(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} c_j\Lambda^j\lambda^j$, 其中,

$$\Lambda = \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k e_{k+1,k}, \quad \sigma_k = \frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}, \quad c_k = \frac{1}{\sigma_1 \cdots \sigma_k}, \quad \alpha = e^{\frac{2\pi i}{n}}.$$

令 $\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{L}(sl(n,\mathbb{C})) | h(\lambda)A(\lambda)h(\lambda)^{-1} = h(\alpha\lambda)A(\alpha\lambda)h(\alpha\lambda)^{-1}\}$, 给定 $\mathcal{L}$ 的分解:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_+ = \{A \in \mathcal{L} | A(\lambda) = \sum\limits_{j \geq 0} A_j\lambda^j\}, \\ \mathcal{L}_- = \{A \in \mathcal{L} | A(\lambda) = \sum\limits_{j < 0} A_j\lambda^j\}. \end{cases}$$

令 $a = diag(1, \alpha, \cdots, \alpha^{n-1})$, $b = e_{12} + e_{23} + \cdots + e_{n_1,n}$, $J = a\lambda + b$, $\mathcal{J} = \{J^j | j \geq 1, j \not\equiv 0 \bmod n\}$, 通过计算可以得到相空间为

$$\mathcal{M} = \{a\lambda + b + u | u \in sl(n,\mathbb{C})\} \cap \mathcal{L},$$

则 (4-2) 给出 $n \times n$ KdV 序列[34].

特别地, 当 $a = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, 则可以得到 2×2 KdV 序列的相空间为

$$\mathcal{M} = \left\{ a_1\lambda + \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ q & 0 \end{smallmatrix}\right) \right\},$$

其第三阶流为 KdV 方程[7]

$$q_t = \frac{1}{4}q_{xxx} - \frac{3}{2}qq_x.$$

U-序列

令 τ 为 $L(G)$ 上的共轭线性二阶自同构, U 为 τ 的不动点构成的集合; 此外, τ 诱导的在 $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ 的作用也记为 τ, $\mathcal{U}$ 为 U 对应的李代数. 令 $\mathcal{L}^\tau = \{A \in \mathcal{L}(\mathcal{G}) | A(\lambda) = \sum\limits_{j\le j_0} A_j\lambda^j, \tau(A(\bar\lambda)) = A(\lambda)\}$, 给定 $\mathcal{L}^\tau$ 的分解:

$$\begin{cases}\mathcal{L}^\tau_+ = \{A \in \mathcal{L}^\tau | A(\lambda) = \sum\limits_{j\ge 0} A_j\lambda^j\},\\ \mathcal{L}^\tau_- = \{A \in \mathcal{L}^\tau | A(\lambda) = \sum\limits_{j< 0} A_j\lambda^j\}.\end{cases}$$

再给定一真空序列, 则可以得到 U-序列.

U-序列的例子如下所示:

令 $\mathcal{L}^\tau = \{A \in \mathcal{L}(sl(n,\mathbb{C})) | A(\lambda) = \sum\limits_{j\le j_0} A_j\lambda^j, \tau(A(\bar\lambda)) = -(\overline{A(\bar\lambda)})^T = A(\lambda)\}$, 给定 $\mathcal{L}^\tau$ 的分解:

$$\begin{cases}\mathcal{L}^\tau_+ = \{A \in \mathcal{L}^\tau | A(\lambda) = \sum\limits_{j\ge 0} A_j\lambda^j\},\\ \mathcal{L}^\tau_- = \{A \in \mathcal{L}^\tau | A(\lambda) = \sum\limits_{j< 0} A_j\lambda^j\}.\end{cases}$$

令 $a_1, \cdots, a_{n-1}$ 为 $su(n)$ 中对角矩阵空间的一个基, 使得 a_1 的特征值互不相同; $\mathcal{J} = \{a_i\lambda^j | 1 \le i \le n-1, j \ge 1\}$. 通过计算可以得到相空间为 $\mathcal{M} = a_1\lambda + Y$, 其中,

$$Y = [a_1\lambda, \mathcal{L}_-]_+ = \{u = (u_{ij}) \in su(n) | u_{ii} = 0,\ \forall\, 1 \le i \le n\},$$

则 (4-2) 给出 $SU(n)$ 序列[35].

特别地, 当 $a_1 = diag(i, -i)$, 则可以得到 $SU(2)$ 序列的相空间为

$$\mathcal{M} = \left\{a_1\lambda + \left(\begin{smallmatrix} 0 & q \\ -\bar q & 0\end{smallmatrix}\right)\right\},$$

其第二阶流为非线性薛定谔方程[40]

$$q_t = \frac{i}{2}(q_{xx} + 2|q|^2 q).$$

$\frac{U}{K}$-序列

令 τ, σ 为 $L(G)$ 上的可交换二阶自同构, 并且分别为共轭线性的和复线性的, 其诱导的在 $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ 的作用也分别记为 τ, σ; 令 U 为 τ 关于 $L(G)$ 的不动点集合, K 为 σ 关

于 U 的不动点集合; 则 $\frac{U}{K}$ 称为对称空间. 此外, 令 U, K 对应的李代数分别为 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{K}$, $\mathcal{P}$ 为 σ 的特征值 -1 对应的特征子空间, 则 $\mathcal{U} = \mathcal{K} + \mathcal{P}$ 称为 $\frac{U}{K}$ 的 Cartan 分解. 令 $\mathcal{L}^{\tau,\sigma} = \{A \in \mathcal{L}(\mathcal{G}) | A(\lambda) = \sum\limits_{j \leq j_0} A_j\lambda^j, \tau(A(\bar{\lambda})) = A(\lambda), \sigma(A(-\lambda)) = A(\lambda)\}$, 给定 $\mathcal{L}^{\tau,\sigma}$ 的分解:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_+^{\tau,\sigma} = \{A \in \mathcal{L}^{\tau,\sigma} | A(\lambda) = \sum\limits_{j \geq 0} A_j\lambda^j\}, \\ \mathcal{L}_-^{\tau,\sigma} = \{A \in \mathcal{L}^{\tau,\sigma} | A(\lambda) = \sum\limits_{j < 0} A_j\lambda^j\}. \end{cases}$$

再给定一真空序列, 则可以得到 $\frac{U}{K}$-序列.

$\frac{U}{K}$-序列的例子如下所示:

令 $\mathcal{L}^{\tau,\sigma} = \{A \in \mathcal{L}(sl(n,\mathbb{C})) | A(\lambda) = \sum\limits_{j \leq j_0} A_j\lambda^j, A(\lambda) = -(\overline{A(\bar{\lambda})})^T = -(A(-\lambda))^T\}$, 给定 $\mathcal{L}^{\tau,\sigma}$ 的分解:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_+^{\tau,\sigma} = \{A \in \mathcal{L}^{\tau,\sigma} | A(\lambda) = \sum\limits_{j \geq 0} A_j\lambda^j\}, \\ \mathcal{L}_-^{\tau,\sigma} = \{A \in \mathcal{L}^{\tau,\sigma} | A(\lambda) = \sum\limits_{j < 0} A_j\lambda^j\}. \end{cases}$$

令 $a_1, \cdots, a_{n-1}$ 为 $su(n)$ 中对角矩阵空间的一个基, 使得 a_1 的特征值互不相同; $\mathcal{J} = \{a_i\lambda^{2j+1} | 1 \leq i \leq n-1, j \geq 0\}$. 则 (4-2) 给出 $\frac{SU(n)}{SO(n)}$ 序列[35].

特别地, 当 $a_1 = diag(i, -i)$, 则可以得到 $\frac{SU(2)}{SO(2)}$ 序列的相空间为

$$\mathcal{M} = \left\{a_1\lambda + \left(\begin{smallmatrix} 0 & q \\ -q & 0 \end{smallmatrix}\right) | q \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})\right\},$$

其第三阶流为 modified KdV 方程[33]

$$q_t = \frac{1}{3}q_{xxx} + 2q^2q_x.$$

(G,σ)**-序列**

令 σ 为 $L(G)$ 上的线性二阶自同构, 其诱导的在 $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ 的作用也记为 σ. 令 $\mathcal{L}^\sigma = \{A \in \mathcal{L}(\mathcal{G}) | A(\lambda) = \sum\limits_{j \leq j_0} A_j\lambda^j, \sigma(A(-\lambda)) = A(\lambda)\}$, 给定 $\mathcal{L}^\sigma$ 的分解:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_+^{\sigma} = \{A \in \mathcal{L}^{\sigma} | A(\lambda) = \sum\limits_{j \geq 0} A_j\lambda^j\}, \\ \mathcal{L}_-^{\sigma} = \{A \in \mathcal{L}^{\sigma} | A(\lambda) = \sum\limits_{j < 0} A_j\lambda^j\}. \end{cases}$$

由线性代数, σ 将 $\mathcal{G}$ 分解成特征值为 ± 1 的特征子空间的直和, 即 $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_{-1}$. 显然, $A(\lambda) \in \mathcal{L}^\sigma$ 当且仅当 $A_j \in \mathcal{G}_1$ (j 为偶数) 和 $A_j \in \mathcal{G}_{-1}$ (j 为奇数). 再给定一真空序列, 则可以得到 (G, σ)-序列.

(G, σ)-序列的例子如下所示:

令

$$C = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad D = diag(1, \alpha, \cdots, \alpha^k), \quad \alpha = e^{\frac{2\pi i}{k+1}},$$

$$S = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{k+1},$$

其中, m 和 k 是非负整数. 显然, $C^{k+1} = I_{m+k+1}$ 和 $S^2 = I_{m+k+1}$. 令 τ 为 $\mathcal{L}(sl(m+k+1))$ 上的自同构作用, 并且 $\mathcal{L} = \{A(\lambda) \in \mathcal{L}(sl(m+k+1)) | \tau(A(\alpha\lambda)) = CA(\alpha\lambda)C^{-1} = A(\lambda)\}$, 从 $\mathcal{L}$ 的分解可以得到矩阵 modified constrained KP (矩阵 mcKP) 序列[36]. 下面我们对矩阵 mcKP 序列作限制, 得到另一类序列.

令 $\mathcal{L}^\sigma = \{A \in \mathcal{L} | \sigma(A(-\lambda)) = -S(\overline{A(-\bar{\lambda})})^T S^{-1} = A(\lambda)\}$, 给定 $\mathcal{L}^\sigma$ 的分解:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_+^\sigma = \{A \in \mathcal{L}^\sigma | A(\lambda) = \sum\limits_{j \geq 0} A_j \lambda^j\}, \\ \mathcal{L}_-^\sigma = \{A \in \mathcal{L}^\sigma | A(\lambda) = \sum\limits_{j < 0} A_j \lambda^j\}. \end{cases}$$

通过计算可以得到

$$\tau(A_j) = CA_jC^{-1},$$

$$\sigma(A_j) = -S\bar{A}_j^{\,T} S^{-1}.$$

则

$$sl(m+k+1) = \mathcal{G}_0 \oplus \cdots \oplus \mathcal{G}_k,$$

其中, $\mathcal{G}_j$ 是 τ 的特征值 α^{-j} 和 σ 的特征值 $(-1)^j$ 对应的特征子空间, 即

$$\mathcal{G}_j = \{A_j \in sl(m+k+1) | CA_jC^{-1} = \alpha^{-j} A_j, -S\bar{A}_j^{\,T} S^{-1} = (-1)^j A_j, 0 \leq j \leq k\}.$$

通过计算可以得到 $\mathcal{G}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \right\}$, 其中, $A_{11} \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $A_{12} \in \mathbb{C}^{m \times (k+1)}$, $A_{21} \in$

$\mathbb{C}^{(k+1)\times m}$, $A_{22}\in\mathbb{C}^{(k+1)\times(k+1)}$, 满足

$$A_{11}=-\bar{A}_{11}^{T}, A_{12}=\begin{pmatrix} q & 0_{m\times k}\end{pmatrix}, A_{21}=\begin{pmatrix} -\bar{q}^{T} \\ 0_{k\times m}\end{pmatrix}, A_{22}=diag(a_1,\cdots,a_{k+1}),$$

a_1 的值为纯虚数.

令 $J=a\lambda$, 其中,

$$a=\begin{pmatrix} 0_m & 0 \\ 0 & \Lambda\end{pmatrix},\quad \Lambda=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}_{k+1},$$

则真空序列为 $\mathcal{J}=\{J^j|j\geq 1, j\not\equiv 0 \bmod (k+1),\ j$ 为奇数$\}$, 相空间为

$$\mathcal{M}=\{(gJg^{-1})_+|g\in L_-^{\sigma}\}=a\lambda+\mathcal{U},$$

其中,

$$\mathcal{U}=\left\{U\middle|U_{11}=0, U_{12}=\begin{pmatrix} q & 0_{m\times k}\end{pmatrix}, U_{21}=\begin{pmatrix} -\bar{q}^{T} \\ 0_{k\times m}\end{pmatrix}, U_{22}=diag(u_1,\cdots,u_{k+1})\right\},$$

u_1 的值为纯虚数, $u_i=-\bar{u}_{k+3-i},\ 2\leq i\leq k+1$.

此时, (4-2) 可以具体写成

$$\begin{cases} [\partial_x-(a\lambda+U), Q_1(U)]=0, \\ Q_1(U)^{k+2-\delta_m}=Q_1(U)^{1-\delta_m}\lambda^{k+1}I_{m+k+1}, \end{cases} \tag{4-5}$$

其中,

$$\delta_m=\begin{cases} 1, & m=0, \\ 0, & m\neq 0. \end{cases}$$

令 $Q_1^j(U)$ 为多项式 $Q_1^j(U) = a^j\lambda^j + \sum_{l<j} \mathcal{Q}_{j,l}(U)\lambda^l$, 则 J^j 产生的流为

$$\begin{aligned} U_{t_j} &= [\partial_x - (a\lambda + U), Q_1^j(U)_+] \\ &= [\partial_x - U, \mathcal{Q}_{j,0}(U)], \end{aligned} \tag{4-6}$$

则 (4-6) 给出矩阵 **restricted modified constrained KP (矩阵 rmcKP) 序列**.

下面我们计算一些具体的例子.

1) $m = 1,\ k = 0$, 第三阶流为复数值 modified KdV 方程

$$q_{t_3} = q_{xxx} + 6|q|^2 q_x.$$

2) $m = 0,\ k = 1$, 第三阶流为纯虚数值 modified KdV 方程

$$u_{t_3} = \frac{1}{4}u_{xxx} - \frac{3}{2}u^2 u_x.$$

3) $m = 1,\ k = 1$, 真空序列为 $\mathcal{J} = \{(a\lambda)^{2j-1} | j \geq 1\}$, 其中, $a = \left(\begin{smallmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&1 \\ 0&1&0 \end{smallmatrix}\right)$,
相空间为

$$\mathcal{M} = \left\{ a\lambda + \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ -\bar{q} & u & 0 \\ 0 & 0 & -u \end{pmatrix} \right\},$$

第三阶流为

$$\begin{cases} q_{t_3} = q_{xxx} + \frac{3}{2}(-\frac{1}{2}u_{xx} - uu_x - uq\bar{q})q - \frac{3}{4}q^2\bar{q}_x + \frac{3}{2}(\frac{3}{2}q\bar{q} - u_x - u^2)q_x, \\ u_{t_3} = \frac{1}{4}u_{xxx} - \frac{3}{2}u^2u_x + \frac{3}{4}(\bar{q}q_{xx} - q\bar{q}_{xx}). \end{cases}$$

4) $m = 2,\ k = 1$, 真空序列为 $\mathcal{J} = \{(a\lambda)^{2j-1} | j \geq 1\}$, 其中, $a = \left(\begin{smallmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&1&0 \end{smallmatrix}\right)$,
相空间为

$$\mathcal{M} = \left\{ a\lambda + \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_1 & 0 \\ 0 & 0 & q_2 & 0 \\ -\bar{q}_1 & -\bar{q}_2 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -u \end{pmatrix} \right\},$$

第三阶流为

$$\begin{cases} q_{1,t_3} = q_{1,xxx} + \frac{3}{2}(\frac{1}{2}\bar{q}_2 q_{2,x} - \frac{1}{2} q_2 \bar{q}_{2,x} - \frac{1}{2} u_{xx} - u u_x - u q_1 \bar{q}_1 - u q_2 \bar{q}_2) q_1 \\ \qquad - \frac{3}{4} q_1^2 \bar{q}_{1,x} + \frac{3}{2}(\frac{3}{2} q_1 \bar{q}_1 + q_2 \bar{q}_2 - u_x - u^2) q_{1,x} \end{cases},$$

$$\begin{cases} q_{2,t_3} = q_{2,xxx} + \frac{3}{2}(\frac{1}{2}\bar{q}_1 q_{1,x} - \frac{1}{2} q_1 \bar{q}_{1,x} - \frac{1}{2} u_{xx} - u u_x - u q_2 \bar{q}_2 - u q_1 \bar{q}_1) q_2 \\ \qquad - \frac{3}{4} q_2^2 \bar{q}_{2,x} + \frac{3}{2}(\frac{3}{2} q_2 \bar{q}_2 + q_1 \bar{q}_1 - u_x - u^2) q_{2,x} \end{cases},$$

$$u_{t_3} = \tfrac{1}{4} u_{xxx} - \tfrac{3}{2} u^2 u_x + \tfrac{3}{4}(\bar{q}_1 q_{1,xx} - q_1 \bar{q}_{1,xx} + \bar{q}_2 q_{2,xx} - q \bar{q}_{2,xx}).$$

第五章 贝克隆变换

第四章中, 我们利用李代数分解导出矩阵 rmcKP 序列. 第五章中, 我们将对几种特殊的矩阵 rmcKP 序列进行贝克隆变换, 并且从零解出发, 导出非平凡的解.

引理 5.1 (局部分解定理)[35] 令 L 为有限维李群 G 中的 Sobolev H^1-圈群的闭子群, $(\mathcal{L}_+,\mathcal{L}_-)$ 为李代数 $\mathcal{L}$ 的分解. 令 $\mathcal{O}$ 为 $\mathbb{R}^N$ 中的一个开子集, $f:\mathcal{O}\to L$ 为一个映射, 使得 $(x,\lambda)\mapsto f(x)(\lambda)$ 是光滑的. 若 $p_0\in\mathcal{O}$ 和 $f(p_0)=k_+k_-=h_-h_+$ 成立, 其中, $k_\pm,h_\pm\in L_\pm$, 则存在一个包含 p_0 的 $\mathcal{O}$ 中的开子集 $\mathcal{O}_0$ 和唯一的 $f_\pm,g_\pm:\mathcal{O}_0\to L_\pm$, 使得 $\mathcal{O}_0$ 中, $f=f_+f_-=g_-g_+$ 和 $f_\pm(p_0)=k_\pm, g_\pm(p_0)=h_\pm$ 成立.

定理 5.1 [35][41] 令 P 为 (4-2) 的一个解, E 为关于 P 的延拓标架. 给定 $f\in L_-$, 根据引理5.1, 则 $\mathbb{R}^2$ 中存在一个开子集 $\mathcal{O}$, 使得

$$E(x,t_j)f^{-1}=\widetilde{f}^{-1}(x,t_j)\widetilde{E}(x,t_j), \tag{5-1}$$

其中, $\widetilde{E}(x,t_j)\in L_+$, $\widetilde{f}(x,t_j)\in L_-$, $(x,t_j)\in\mathcal{O}$.

注记 5.1 $\widetilde{P}=\widetilde{E}_x\widetilde{E}^{-1}$ 也是 (4-2) 的一个解, $\widetilde{E}$ 是关于 $\widetilde{P}$ 的延拓标架; $f*P=\widetilde{P}$ 表示 L_- 中的元素作用于 (4-2) 的解空间, $f*E=\widetilde{E}$ 表示 L_- 中的元素作用于 (4-2) 的解所对应的延拓标架; 令 $L(G)$ 为从单位球面 S^1 到李群 G 的所有光滑映射 f 组成的群, 若 L 是 $L(G)$ 的子群, $f\in L_-$ 是一个包含奇点的有理元素, 并且 $\widetilde{f}(x,t_j)\in L_-$ 是与 f 有相同奇点的有理元素, 则我们可以利用 f 的奇点及延拓标架 E 算出 $f*P$; $f*J_1$ 是一个孤子解.

5.1 矩阵 rmcKP 序列的贝克隆变换

在接下来的讨论中, 我们将对矩阵 rmcKP 序列进行贝克隆变换. 为此, 我们对一些符号进行说明: 记 L 为从单位球面 S^1 到李群 G 的所有光滑映射 f 组成的群, 满足 $\tau(f(\alpha\lambda))=Cf(\alpha\lambda)C^{-1}=f(\lambda)$, L^σ 为 L 的子群, 满足 $\sigma(f(-\lambda))=S(\overline{f(-\bar{\lambda})})^{-T}S^{-1}=f(\lambda)$, 即

$$L^\sigma=\{f:S^1\to SL(m+k+1)|f(\lambda)=Cf(\alpha\lambda)C^{-1}, f(\lambda)S(\overline{f(-\bar{\lambda})})^{T}S^{-1}=I\}.$$

给定 L^σ 的分解: 令 $L^\sigma_\pm$ 为 L^σ 的子群. 下面我们以 $k=1$ 为例进行分析, 利用相同的原理可以对任意非负整数 k 进行贝克隆变换.

$k=1$ 时, $L^\sigma=\{f:S^1\to SL(m+2)|f(\lambda)=Cf(-\lambda)C^{-1},f(\lambda)(\overline{f(-\bar{\lambda})})^T=I\}$. 因此, 若 $f\in L^\sigma_-$ 有两个奇点, 则奇点必为一对相反数. 令 $z\in\mathbb{C}\setminus 0,\pi$ 为 $\mathbb{C}^{m+2}$ 上的厄米特投影, 即 $\bar{\pi}^T\pi=I,\pi^2=\pi$. 令 $\pi^\perp=I-\pi$,

$$f_{iz,\pi}(\lambda)=\pi+\frac{\lambda-i\bar{z}}{\lambda-iz}\pi^\perp,$$

显然, f 的形式必为 $f=f_{-iz,\rho}f_{iz,\pi}$, 其中, ρ 为厄米特投影. 为了分析 $f\in L^\sigma_-$ 的形式, 我们需要对 G^m 运用交换公式, 其中,

$$G^m=\{f:S^1\to SL(m+2)|f(\lambda)(\overline{f(-\bar{\lambda})})^T=I\}.$$

引理 5.2 (交换公式)[35] 给定 $f_{iz_j,\pi_j}\in G^m_-$, 其中, $z_j\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $j=1,2$ 并且 $|z_1|\neq|z_2|$. 令 ρ_1 为从 $\mathbb{C}^{m+2}$ 到 $f_{iz_2,\pi_2}(iz_1)(Im\pi_1)$ 的厄米特投影, ρ_2 为到 $f_{iz_1,\pi_1}(iz_2)(Im\pi_2)$ 的厄米特投影, 则

$$f_{iz_2,\rho_2}f_{iz_1,\pi_1}=f_{iz_1,\rho_1}f_{iz_2,\pi_2}.$$

定理 5.2 令 $z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\cup\mathbb{R}i,\pi$ 为 $\mathbb{C}^{m+2}$ 上的厄米特投影, ρ 为到 $f_{iz,\pi}(-iz)(ImC\pi C^{-1})$ 的厄米特投影,

$$f(\lambda)=f_{-iz,\rho}(\lambda)f_{iz,\pi}(\lambda),$$

则 $f\in L^\sigma_-$.

证明 令 $z_2=-z_1=-z,C\pi_2C^{-1}=\pi_1=\pi$. 由引理 5.2, 我们有

$$f_{-iz,\rho_2}f_{iz,\pi}=f_{iz,\rho_1}f_{-iz,C\pi C^{-1}},$$

其中,

$$Im(\rho_1)=f_{-iz,C\pi C^{-1}}(iz)(Im\pi),Im(\rho_2)=f_{iz,\pi}(-iz)(ImC\pi C^{-1}).$$

由 $f_{iz,\pi}(-iz)=Cf_{-iz,C\pi C^{-1}}(iz)C^{-1}$, 我们有 $\rho_2=C\rho_1C^{-1}=\rho$. 则

$$f(\lambda)=f_{-iz,\rho}(\lambda)f_{iz,\pi}(\lambda)=f_{iz,C\rho C^{-1}}(\lambda)f_{-iz,C\pi C^{-1}}(\lambda),$$

即得证 $k=1$ 时, $f\in L^\sigma_-$. □

定理 5.3 令 $U \in \mathcal{U}$ 为矩阵 rmcKP 序列在 $k=1$ 时的解, E 为对应的延拓标架, z,π 和 ρ 的定义如同定理 5.2,

$$\widetilde{\pi}(x,t)\text{为到}E(x,t,iz)(Im\pi)\text{的厄米特投影},$$

$$\widetilde{\rho}(x,t)\text{为到}E_1(x,t,-iz)(Im\rho)\text{的厄米特投影},$$

其中, $E_1(x,t,\lambda)=f_{iz,\widetilde{\pi}}(\lambda)E(x,t,\lambda)f^{-1}_{iz,\pi}(\lambda)$. 则

$$\begin{aligned}\widetilde{E}(x,t,\lambda)=&\widetilde{f}(x,t,\lambda)E(x,t,\lambda)f^{-1}(\lambda)\\=&f_{-iz,\widetilde{\rho}}(\lambda)f_{iz,\widetilde{\pi}}(\lambda)E(x,t,\lambda)f^{-1}_{iz,\pi}(\lambda)f^{-1}_{-iz,\rho}(\lambda)\\=&(\widetilde{\rho}+\frac{\lambda+i\bar{z}}{\lambda+iz}\widetilde{\rho}^{\perp})(\widetilde{\pi}+\frac{\lambda-i\bar{z}}{\lambda-iz}\widetilde{\pi}^{\perp})E(x,t,\lambda)\\&(\pi+\frac{\lambda-iz}{\lambda-i\bar{z}}\pi^{\perp})(\rho+\frac{\lambda+iz}{\lambda+i\bar{z}}\rho^{\perp})\end{aligned}$$

为解 $\widetilde{U}$ 所对应的延拓标架.

证明 显然, $\widetilde{E}(x,t,\lambda)$ 满足 $\widetilde{E}(\lambda)=C\widetilde{E}(-\lambda)C^{-1}, \widetilde{E}(\lambda)(\overline{\widetilde{E}(-\bar{\lambda})})^{T}=I$. 因此, 我们只需要证明 $\widetilde{E}(x,t,\lambda)$ 在 $\lambda\in\mathbb{C}$ 是解析的即可. 由 $\widetilde{E}$ 的形式可以得到 $\widetilde{E}$ 在 $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{\pm iz,\pm i\bar{z}\}$ 是解析的; 由 $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\cup\mathbb{R}i$ 可以得到 $\widetilde{E}$ 只可能在 $\lambda=\pm iz,\pm i\bar{z}$ 有一阶奇点. 分别计算 $\widetilde{E}$ 在 $\lambda=\pm iz,\pm i\bar{z}$ 的留数:

$$\begin{aligned}Res(\widetilde{E}(iz))&=i(z-\bar{z})(\widetilde{\rho}+\frac{z+\bar{z}}{2z}\widetilde{\rho}^{\perp})\widetilde{\pi}^{\perp}E(iz)\pi(\rho+\frac{2z}{z+\bar{z}}\rho^{\perp}),\\Res(\widetilde{E}(-iz))&=i(\bar{z}-z)\widetilde{\rho}^{\perp}(\widetilde{\pi}+\frac{z+\bar{z}}{2z}\widetilde{\pi}^{\perp})E(-iz)(\pi+\frac{2z}{z+\bar{z}}\pi^{\perp})\rho,\\Res(\widetilde{E}(i\bar{z}))&=i(\bar{z}-z)(\widetilde{\rho}+\frac{2\bar{z}}{z+\bar{z}}\widetilde{\rho}^{\perp})\widetilde{\pi}E(i\bar{z})\pi^{\perp}(\rho+\frac{z+\bar{z}}{2\bar{z}}\rho^{\perp}),\\Res(\widetilde{E}(-i\bar{z}))&=i(z-\bar{z})\widetilde{\rho}(\widetilde{\pi}+\frac{2\bar{z}}{z+\bar{z}}\widetilde{\pi}^{\perp})E(-i\bar{z})(\pi+\frac{z+\bar{z}}{2\bar{z}}\pi^{\perp})\rho^{\perp}.\end{aligned}$$

由 $E(iz)(\overline{E(i\bar{z})})^{T}=I$, 通过直接计算可以得到在 $\lambda=\pm iz,\pm i\bar{z}$ 处, $Res(\widetilde{E}(\lambda))=0$, 即 $\widetilde{E}$ 在 $\lambda\in\mathbb{C}$ 解析. 综上, $\widetilde{E}(x,t,\lambda)$ 为 $\widetilde{U}$ 所对应的延拓标架.

下面我们导出矩阵 rmcKP 序列在 $k=1$ 时的非平凡解 $\widetilde{U}$: 令 $\widetilde{E}_x\widetilde{E}^{-1}=a\lambda+\widetilde{U}$, 由 $\widetilde{E}=\widetilde{f}Ef^{-1}$ 和 $E_xE^{-1}=a\lambda+U$, 我们有

$$\widetilde{f}_x\widetilde{f}^{-1}+\widetilde{f}(a\lambda+U)\widetilde{f}^{-1}=a\lambda+\widetilde{U}.$$

等式两边右乘 $\widetilde{f}$, 我们有

$$\widetilde{f}_x + \widetilde{f}(a\lambda + U) = (a\lambda + \widetilde{U})\widetilde{f}.$$

令 $\lambda = \pm iz, \pm i\bar{z}$, 我们有

$$\begin{cases} \quad i(z-\bar{z})(\widetilde{\rho}_x\widetilde{\pi}^{\perp} - \widetilde{\rho}\widetilde{\pi}_x + \widetilde{\rho}\widetilde{\pi}^{\perp}(aiz+U)) + i(z+\bar{z})(-\widetilde{\pi}_x + \widetilde{\pi}^{\perp}(aiz+U)) \\ = i(z-\bar{z})(aiz+\widetilde{U})\widetilde{\rho}\widetilde{\pi}^{\perp} + i(z+\bar{z})(aiz+\widetilde{U})\widetilde{\pi}^{\perp}, \\ \quad i(z-\bar{z})(\widetilde{\rho}_x\widetilde{\pi} + \widetilde{\rho}\widetilde{\pi}_x + \widetilde{\rho}\widetilde{\pi}(ai\bar{z}+U)) + 2i\bar{z}(\widetilde{\pi}_x + \widetilde{\pi}(ai\bar{z}+U)) \\ = i(z-\bar{z})(ai\bar{z}+\widetilde{U})\widetilde{\rho}\widetilde{\pi} + 2i\bar{z}(ai\bar{z}+\widetilde{U})\widetilde{\pi}, \\ \quad i(\bar{z}-z)(-\widetilde{\rho}_x\widetilde{\pi} + \widetilde{\rho}^{\perp}\widetilde{\pi}_x + \widetilde{\rho}^{\perp}\widetilde{\pi}(-aiz+U)) + i(z+\bar{z})(\widetilde{\rho}_x - \widetilde{\rho}^{\perp}(-aiz+U)) \\ = i(\bar{z}-z)(-aiz+\widetilde{U})\widetilde{\rho}^{\perp}\widetilde{\pi} - i(z+\bar{z})(-aiz+\widetilde{U})\widetilde{\rho}^{\perp}, \\ \quad i(\bar{z}-z)(\widetilde{\rho}_x\widetilde{\pi} + \widetilde{\rho}\widetilde{\pi}_x + \widetilde{\rho}\widetilde{\pi}(-ai\bar{z}+U)) - 2i\bar{z}(\widetilde{\rho}_x + \widetilde{\rho}(-ai\bar{z}+U)) \\ = i(\bar{z}-z)(-ai\bar{z}+\widetilde{U})\widetilde{\rho}\widetilde{\pi} - 2i\bar{z}(-ai\bar{z}+\widetilde{U})\widetilde{\rho}. \end{cases}$$

前两个等式和后两个等式分别相加, 我们有

$$\begin{cases} (\widetilde{\rho}_x - \widetilde{\pi}_x) + iz[\widetilde{\rho}, a] - i(z-\bar{z})[\widetilde{\rho}\widetilde{\pi}, a] + \dfrac{-2\bar{z}^2 + z^2 + |z|^2}{i(z-\bar{z})}[\widetilde{\pi}, a] + \\ (\widetilde{\rho} - \widetilde{\pi} + \dfrac{z+\bar{z}}{z-\bar{z}}I)U = \widetilde{U}(\widetilde{\rho} - \widetilde{\pi} + \dfrac{z+\bar{z}}{z-\bar{z}}I), \\ (\widetilde{\rho}_x - \widetilde{\pi}_x) + iz[\widetilde{\pi}, a] - i(z-\bar{z})[\widetilde{\rho}\widetilde{\pi}, a] + \dfrac{-2\bar{z}^2 + z^2 + |z|^2}{i(z-\bar{z})}[\widetilde{\rho}, a] + \\ (\widetilde{\rho} - \widetilde{\pi} - \dfrac{z+\bar{z}}{z-\bar{z}}I)U = \widetilde{U}(\widetilde{\rho} - \widetilde{\pi} - \dfrac{z+\bar{z}}{z-\bar{z}}I). \end{cases} \tag{5-2}$$

(5-2) 中, 第一个等式减去第二个等式, 我们有

$$\widetilde{U} = U + i(z-\bar{z})[a, \widetilde{\pi} - \widetilde{\rho}]. \tag{5-3}$$

因此, 我们得到非平凡的解 $\widetilde{U}$. □

$k = 0$ 时, $L^{\sigma} = \{f : S^1 \to SL(m+1) | f(\lambda)(\overline{f(-\bar{\lambda})})^T = I\}$. 因此, 贝克隆变换相应地变简单, $f \in L^{\sigma}_{-}$ 只需要一个奇点, 即令 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \pi$ 为 $\mathbb{C}^{m+1}$ 上的厄米特投影, $\pi^{\perp} = I - \pi$, $f(\lambda) = f_{iz,\pi}(\lambda) = \pi + \frac{\lambda - i\bar{z}}{\lambda - iz}\pi^{\perp}$, 则 $f \in L^{\sigma}_{-}$. 类似定理5.3, 我们也可以导出矩阵 rmcKP 序列的非平凡解. 不难发现, U-序列的贝克隆变换与 $k = 0$ 这一情形类似.

$k > 1$ 时, 令 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $i\alpha^j z \neq i\alpha^l \bar{z}$, $0 \leq j, l \leq k$, π_j 为 $\mathbb{C}^{m+k+1}$ 上的厄米特投影,

$\pi_j^{\perp} = I - \pi_j$,

$$f_{iz_j,\pi_j}(\lambda) = \pi_j + \frac{\lambda - i\bar{z}}{\lambda - iz}\pi_j^{\perp}.$$

类似地, 我们可以将 $f \in L_-^{\sigma}$ 分解成

$$f(\lambda) = f_{i\alpha^k z,\pi_k}(\lambda)\cdots f_{i\alpha z,\pi_1}(\lambda) f_{iz,\pi_0}(\lambda).$$

重复运用交换公式, 我们依然能构造贝克隆变换并求出非平凡的解, 但求解过程比较繁琐.

5.2 显式解

令 $N = diag(e^{\lambda x+\lambda^j t}, e^{\alpha\lambda x+\alpha^j\lambda^j t}, \cdots, e^{\alpha^k\lambda x+\alpha^{kj}\lambda^j t})$,

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \alpha & \cdots & \alpha^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha^k & \cdots & \alpha^{k^2} \end{pmatrix}.$$

则矩阵 rmcKP 序列的真空标架为

$$E(x,t,\lambda) = \begin{pmatrix} I_m & \\ & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & \\ & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & \\ & V^{-1} \end{pmatrix}.$$

$k = 0$ 时, 真空标架为

$$E(x,t,\lambda) = \begin{pmatrix} I_m & \\ & e^{\lambda x+\lambda^j t} \end{pmatrix}.$$

给定 $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}i$, $Im\pi = (\xi_1, \cdots, \xi_{m+1})^T$, $\xi_1, \cdots, \xi_{m+1} \neq 0$, 通过计算可以得到

$$Im\widetilde{\pi} = E(z)(Im\pi) = (\eta_1, \cdots, \eta_{m+1})^T,$$

$$\widetilde{\pi} = \begin{pmatrix} |\eta_1|^2 & \eta_1\bar{\eta}_2 & \eta_1\bar{\eta}_3 & \cdots & \eta_1\bar{\eta}_{m+1} \\ \bar{\eta}_1\eta_2 & |\eta_2|^2 & \eta_2\bar{\eta}_3 & \cdots & \eta_2\bar{\eta}_{m+1} \\ \bar{\eta}_1\eta_3 & \bar{\eta}_2\eta_3 & |\eta_3|^2 & \cdots & \eta_3\bar{\eta}_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\eta}_1\eta_{m+1} & \bar{\eta}_2\eta_{m+1} & \bar{\eta}_3\eta_{m+1} & \cdots & |\eta_{m+1}|^2 \end{pmatrix} /n,$$

其中,

$$
\begin{aligned}
&\eta_r = \xi_r \ (1 \le r \le m),\\
&\eta_{m+1} = \xi_{m+1} e^{zx+z^3 t},\\
&n = \sum_{l=1}^{m+1} |\eta_l|^2.
\end{aligned}
$$

因此, 显式解为

$$
\widetilde{q}_r = -(z+\bar{z})\frac{\eta_r \bar{\eta}_{m+1}}{n} \ (1 \le r \le m).
$$

$k=1$ 时, 真空标架为

$$
E(x,t,\lambda) = \begin{pmatrix} I_m & \\ & \begin{pmatrix} \cosh(\lambda x + \lambda^j t) & \sinh(\lambda x + \lambda^j t) \\ \sinh(\lambda x + \lambda^j t) & \cosh(\lambda x + \lambda^j t) \end{pmatrix} \end{pmatrix}.
$$

给定 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \cup \mathbb{R}i$, $Im\pi = (\xi_1, \cdots, \xi_{m+2})^T$, $\xi_1, \cdots, \xi_{m+2} \neq 0$, 通过计算可以得到

$$
\begin{aligned}
&Im\widetilde{\pi} = E(z)(Im\pi) = (\eta_1, \cdots, \eta_{m+2})^T,\\
&\widetilde{\pi} = \begin{pmatrix} |\eta_1|^2 & \eta_1\bar{\eta}_2 & \eta_1\bar{\eta}_3 & \cdots & \eta_1\bar{\eta}_{m+2} \\ \bar{\eta}_1\eta_2 & |\eta_2|^2 & \eta_2\bar{\eta}_3 & \cdots & \eta_2\bar{\eta}_{m+2} \\ \bar{\eta}_1\eta_3 & \bar{\eta}_2\eta_3 & |\eta_3|^2 & \cdots & \eta_3\bar{\eta}_{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\eta}_1\eta_{m+2} & \bar{\eta}_2\eta_{m+2} & \bar{\eta}_3\eta_{m+2} & \cdots & |\eta_{m+2}|^2 \end{pmatrix} /n,\\
&\widetilde{\rho} = \begin{pmatrix} |\eta_1|^2 & \eta_1\bar{\eta}_2 & \eta_1\bar{\eta}_3 & \cdots & \eta_1\bar{\eta}_{m+2}\frac{b^2}{|b|^2} \\ \bar{\eta}_1\eta_2 & |\eta_2|^2 & \eta_2\bar{\eta}_3 & \cdots & \eta_2\bar{\eta}_{m+2}\frac{b^2}{|b|^2} \\ \bar{\eta}_1\eta_3 & \bar{\eta}_2\eta_3 & |\eta_3|^2 & \cdots & \eta_3\bar{\eta}_{m+2}\frac{b^2}{|b|^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\eta}_1\eta_{m+2}\frac{\bar{b}^2}{|b|^2} & \bar{\eta}_2\eta_{m+2}\frac{\bar{b}^2}{|b|^2} & \bar{\eta}_3\eta_{m+2}\frac{\bar{b}^2}{|b|^2} & \cdots & |\eta_{m+2}|^2 \end{pmatrix} /n,
\end{aligned}
$$

其中,

$$
\begin{aligned}
&\eta_r = \xi_r \ (1 \le r \le m),\\
&\eta_{m+1} = \xi_{m+1}\cosh(zx + z^3 t) + \xi_{m+2}\sinh(zx + z^3 t),\\
&\eta_{m+2} = \xi_{m+1}\sinh(zx + z^3 t) + \xi_{m+2}\cosh(zx + z^3 t),\\
&n = \sum_{l=1}^{m+2} |\eta_l|^2,\\
&b = z\sum_{l=1}^{m+1} |\eta_l|^2 - \bar{z}|\eta_{m+2}|^2.
\end{aligned}
$$

因此, 显式解为

$$
\begin{cases}
\widetilde{q}_r = (z+\bar{z})(\frac{b^2}{|b|^2} - 1)\frac{\eta_r\bar{\eta}_{m+2}}{n} \ (1 \le r \le m),\\
\widetilde{u} = (z+\bar{z})((\frac{b^2}{|b|^2} - 1)\frac{\eta_{m+1}\bar{\eta}_{m+2}}{n} - (\frac{\bar{b}^2}{|b|^2} - 1)\frac{\bar{\eta}_{m+1}\eta_{m+2}}{n}).
\end{cases}
$$

下面我们导出复数值 modified KdV 方程和纯虚数值 modified KdV 方程的显式解.

5.3 结论

令 $k=0, m=1, z=1, Im\pi = (1, \frac{\sqrt{2}(1+i)}{2})^T$, 则

$$
\widetilde{q} = -\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2\cosh(x+t)} \tag{5-4}
$$

是复数值 modified KdV 方程 $q_{t_3} = q_{xxx} + 6|q|^2 q_x$ 的一个光滑解. 此外, 令 $Im\pi = (1, i)^T$, 则

$$
\widetilde{q} = \frac{i}{\cosh(x+t)} \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}i) \tag{5-5}
$$

是纯虚数值 modified KdV 方程 $q_{t_3} = q_{xxx} - 6q^2 q_x$ 的一个光滑解.

令 $k=1, m=0, z=-1+i, Im\pi = (1,2)^T$, 则

$$
\widetilde{q} = -4Im\frac{9e^{-2(x-2t)} - e^{2(x-2t)} - 6(\cos 1 + i\sin 1)\sinh 2(x+2t)}{9e^{-2(x-2t)} + e^{2(x-2t)} + 6(\sin 1 - i\cos 1)\cosh 2(x+2t)} i \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}i) \tag{5-6}
$$

也是纯虚数值 modified KdV 方程 $q_{t_3} = \frac{1}{4}q_{xxx} - \frac{3}{2}q^2 q_x$ 的一个显式解.

第六章 总结

本文通过拟微分算子构造 KP 序列的拉克斯对, 并给出 KP 序列的几类特殊不变子流形, 从而诱导出 KdV 方程, modified KdV 方程, Gelfand-Dickey 序列和 restricted modified constrained KP 序列等. 此外, 本文也从代数角度研究约束 KP 序列, 例如 $n \times n$ AKNS 序列, $n \times n$ KdV 序列, $SU(n)$ 序列, $\frac{SU(n)}{SO(n)}$ 序列和本文的第一个创新点–矩阵 rmcKP 序列等. 最后, 通过圈群分解理论和交换公式等具体给出本文的第二个创新点–几种矩阵 rmcKP 序列的贝克隆变换, 并给出复数值 modified KdV 方程和纯虚数值 modified KdV 方程的显式解.

未来的工作可以考虑: 证明 rmcKP 序列和矩阵 rmcKP 序列间的等价性; 不通过交换公式, 并用更简洁的方法构造矩阵 rmcKP 序列 ($k \in \mathbb{N}$) 的贝克隆变换以及给出矩阵 rmcKP 序列的双哈密顿结构等.

参考文献

[1] Gu C. Soliton theory and its applications[M]. Springer Science & Business Media, 2013.

[2] Munteanu L, Donescu S. Introduction to soliton theory: applications to mechanics: volume 143[M]. Springer Science & Business Media, 2004.

[3] Taylor R. Optical solitons[M]. 1992.

[4] Lamb Jr L. Elements of soliton theory[J]. New York, 1980:29.

[5] Toda M. Nonlinear waves and solitons: volume 5[M]. Springer Science & Business Media, 1989.

[6] Russel S. Report on waves, 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science[M]. John Murray, London, 1844.

[7] Korteweg J, De Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves[J]. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1895, 39(240):422-443.

[8] Fermi E, Pasta J, Ulam S. Studies of nonlinear problems: volume 2[M]. 1974: 143.

[9] Zabusky J, Kruskal D. Interaction of ”solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states[J]. Physical Review Letters, 1965, 15(6):240.

[10] Lax D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1968, 21(5):467-490.

[11] Lax D. Outline of a theory of the KdV equation[J]. 1996:70-102.

[12] Wahlquist D, Estabrook B. Prolongation structures of nonlinear evolution equations[J]. Journal of Mathematical Physics, 1975, 16(1):1-7.

[13] 谷超豪, 胡和生, 周子翔. 孤立子理论中的达布变换及其几何应用[M]. 上海科学技术出版社, 1999.

[14] 耿献国. 二维 Sawada-Kotera 方程的 Darboux 变换[J]. 高校应用数学学报 A 辑 (中文版), 1989, 4.

[15] Bäcklund V. Concerning surfaces with constant negative curvature[M]. New Era, 1899.

[16] Gardner S, Greene M, Kruskal D, Miura M. Method for solving the Korteweg-de Vries equation[J]. Physical Review Letters, 1967, 19(19):1095.

[17] 耿献国, 李梦如. 两类离散型反散射问题的归范等价性[J]. 数学物理学报, 1988, 3.

[18] 胡星标, 李勇. Hietarinta 方程及其变形方程的 Bäcklund 变换和非线性叠加公式[J]. 高校应用数学学报 A 辑 (中文版), 1990, 1.

[19] 李诩神. 孤子与可积系统[M]. 上海上海科技出版社, 1999.

[20] Shabat A, Zakharov V. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media[J]. Soviet Physics JETP, 1972, 34(1):62.

[21] 胡星标, 李勇. DJKM 方程的 Bäcklund 变换及非线性叠加公式[J]. 数学物理学报, 1991, 2.

[22] 范恩贵, 张鸿庆. 非线性波动方程的孤波解[D]. 1997.

[23] 闫振亚, 张鸿庆. 非线性演化方程显式精确解的新算法[D]. 2000.

[24] Ablowitz J, Kaup D, Newell C, Segur H. The inverse scattering transform - Fourier analysis for nonlinear problems[J]. Studies in Applied Mathematics, 1974, 53(249–315).

[25] Adler M. On a trace functional for formal pseudodifferential operators and the symplectic structure of the Korteweg-de Vries type equations[J]. Inventiones Mathematicae, 1979, 50(219–248).

[26] Kupershmidt A, Wilson G. Modifying Lax equations and the second Hamiltonian structure[J]. Inventions Mathematicae, 1981, 62(403–436).

[27] Drinfeld G, Sokolov V. Lie algebras and equations of Korteweg-de Vries type[J]. Current Problems in Mathematics, 1984, 24(81–180).

[28] 闫振亚, 张鸿庆. 新的耦合 mKdV 方程族及其 Liouville 可积的无限维 Hamilton 结构[D]. 2000.

[29] Zhang D, Chen D. Hamiltonian structure of discrete soliton systems[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2002, 35(33):7225.

[30] Tenenblat K, Terng C L. Bäcklund's theorem for n-dimensional submanifolds of $\mathbb{R}^{2n-1}$ [J]. Annals of Mathematics, 1980, 111(3):477-490.

[31] Tenenblat K, Terng C L. A higher dimension generalization of the sine-Gordon equation and its Bäcklund transformation[J]. Bulletin American Mathematical Society, 1979.

[32] Dickey A. Soliton equations and Hamiltonian systems[J]. Advanced Series in Mathematical Physics, 2003, 2(26).

[33] Washimi H, Taniuti T. Propagation of ion-acoustic solitary waves of small amplitude[J]. Physical Review Letters, 1966, 17(19):996.

[34] Terng C L, Uhlenbeck K. The n × n KdV hierarchy[J]. Journal of Fixed Point Theory and Applications, 2011, 10(37).

[35] Terng C L, Uhlenbeck K. Bäcklund transformations and loop group actions[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2000, 53(1-75).

[36] Wu Z. On the modified constrained Kadomtsev-Petviashvili equations[J]. Journal of Mathematical Physics, 2012, 53(103710).

[37] Kulkarni S. Sigurdur helgason, differential geometry, lie groups and symmetric spaces [J]. Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, 1980, 2(3):468-476.

[38] Miura M. Korteweg-de Vries equation and generalizations. I. A remarkable explicit nonlinear transformation[J]. Journal of Mathematical Physics, 1968, 9(8):1202-1204.

[39] Terng C L, Wu Z. Bäcklund transformations for Gelfand–Dickey flows, revisited[J]. Journal of Integrable Systems, 2017, 2(1-19).

[40] Chiao Y, Garmire E, Townes H. Self-trapping of optical beams[J]. Physical Review Letters, 1964, 13(15):479.

[41] Terng C L, Uhlenbeck K. Poisson actions and scattering theory for integrable systems [J]. Surveys in Differential Geometry: Integral Systems [Integrable Systems], 1998, 4 (315-402).

致谢

本论文在吴志伟导师的悉心指导和严格要求下业已完成，从课题选择、文献查找、定理论证到写作过程，无不凝聚着老师的心血和汗水。在三年的硕士学习和生活期间，也始终感受着老师的指导和关怀，我受益匪浅。在此向吴志伟老师表示深深的感谢和崇高的敬意。

不积跬步何以至千里，本论文能够顺利的完成，也归功于学院提供的丰富的学习资源，比如北京应用物理与计算数学研究所的暑期科研项目等，基于此，我独立思考的能力有所增强，思维框架也更加系统化，才能充分运用专业知识解决难题。

最后，感谢我的父母、妹妹们、朋友们和草叔，论文的主体是疫情期间在家完成的，正是他们的陪伴和鼓励使我有动力和决心顺利完成毕业论文。顺便也感谢一下自己吧！

中山大學

SUN YAT-SEN UNIVERSITY

1924