参考资料

https://blog.csdn.net/zaishuiyifangxym/article/details/81673491

1、向量的范数

向量的1-范数： $\|A\|_\infty = \max_{X\neq 0} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$; 各个元素的绝对值之和；

向量的2-范数： $\|A\|_\infty = \max_{X\neq 0} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$; 每个元素的平方和再开平方根；

向量的无穷范数： $\|A\|_\infty = \max_{X\neq 0} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

***p*-范数：** $\|A\|_\infty = \max_{X\neq 0} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$，其中正整数*p*≥1，并且有

$$\|A\|_\infty = \max_{X\neq 0} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

例：向量*X*=[2, 3, -5, -7]，求向量的1-范数，2-范数和无穷范数。

向量的1-范数：各个元素的绝对值之和；$\|A\|_\infty = \max_{X\neq 0} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

=2+3+5+7=17；

Matlab代码：*X*=[2, 3, -5, -7]; XLfs1=norm(*X*,1);

向量的2-范数：每个元素的平方和再开平方根；$\|A\|_\infty = \max_{X\neq 0} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$;

Matlab代码：*X*=[2, 3, -5, -7]; XLfs2=norm(X,2);

向量的无穷范数：

（1）正无穷范数：向量的所有元素的绝对值中**最大**的；即*X*的正无穷范数为：7；

Matlab代码：*X*=[2, 3, -5, -7]; XLfsz=norm(*X*,inf);

（2）负无穷范数：向量的所有元素的绝对值中**最小**的；即*X*的负无穷范数为：2；

Matlab代码：*X*=[2, 3, -5, -7]; XLfsf=norm(*X*,-inf);

2、矩阵的范数

设：向量$\|A\|_{\infty} = \max\limits_{X\neq 0}\frac{\|AX\|_{\infty}}{\|X\|_{\infty}} = \max\limits_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$，矩阵$\|A\|_{\infty} = \max\limits_{X\neq 0}\frac{\|AX\|_{\infty}}{\|X\|_{\infty}} = \max\limits_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$，例如矩阵*A*为：

A=[2, 3, -5, -7;

4, 6, 8, -4;

6, -11, -3, 16];

（1）矩阵的1-范数（列模）：$\|A\|_{\infty} = \max\limits_{X\neq 0}\frac{\|AX\|_{\infty}}{\|X\|_{\infty}} = \max\limits_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$；矩阵的每一列上的元素绝对值先求和，再从中取个最大的，（列和最大）；即矩阵*A*的1-范数为：27

Matlab代码：fs1=norm(A,1);

（2）矩阵的2-范数（谱模）：$\|A\|_{\infty} = \max\limits_{X\neq 0}\frac{\|AX\|_{\infty}}{\|X\|_{\infty}} = \max\limits_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$，其中$\|A\|_{\infty} = \max\limits_{X\neq 0}\frac{\|AX\|_{\infty}}{\|X\|_{\infty}} = \max\limits_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$为$\|A\|_{\infty} = \max\limits_{X\neq 0}\frac{\|AX\|_{\infty}}{\|X\|_{\infty}} = \max\limits_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$的特征值；矩阵 A^TA 的最大特征值开平方根。

Matlab代码：fs2=norm(A,2);

（3）矩阵的无穷范数（行模）：$\|A\|_{\infty} = \max\limits_{X\neq 0}\frac{\|AX\|_{\infty}}{\|X\|_{\infty}} = \max\limits_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$；矩阵的每一行上的元素绝对值先求和，再从中取个最大的，（行和最大）

Matlab代码：fswq=norm(A,inf);

下面要介绍关于机器学习中稀疏表示等一些地方用到的范数，一般有核范数，L0范数，L1范数（有时很多人也叫1范数，这就让初学者很容易混淆），L21范数（有时也叫2范数），F范数等，这些范数都是为了解决实际问题中的困难而提出的新的范数定义，不同于前面矩阵的范数。

关于核范数，L0范数，L1范数等解释见博客：

http://www.cnblogs.com/MengYan-LongYou/p/4050862.html

https://blog.csdn.net/u013066730/article/details/51145889

http://blog.sina.com.cn/s/blog_7103b28a0102w73g.html

（4）矩阵的核范数：矩阵的奇异值（将矩阵svd分解）之和，这个范数可以用来低秩表示（因为最小化核范数，相当于最小化矩阵的秩——低秩）；

Matlab代码：JZhfs=sum(svd(A));

（5）矩阵的L0范数：矩阵的非0元素的个数，通常用它来表示稀疏，L0范数越小0元素越多，也就越稀疏。

（6）矩阵的L1范数：矩阵中的每个元素绝对值之和，它是L0范数的最优凸近似，因此它也可以近似表示稀疏；

Matlab代码：JZL1fs=sum(sum(abs(A)));

（7）矩阵的F范数：矩阵的各个元素平方之和再开平方根，它通常也叫做矩阵的L2范数，它的有点在它是一个凸函数，可以求导求解，易于计算；

Matlab代码：JZFfs=norm(A,'fro');

（8）矩阵的L21范数：矩阵先以每一列为单位，求每一列的F范数（也可认为是向量的2范数），然后再将得到的结果求L1范数（也可认为是向量的1范数），很容易看出它是介于L1和L2之间的一种范数

Matlab代码：JZL21fs=norm(A(:,1),2) + norm(A(:,2),2) + norm(A(:,3),2)++ norm(A(:,4),2);