马同学 首页 专栏 课程 解答 搜索

如何通俗地解释欧拉公式（e^πi+1=0）？

欧拉公式将指数函数的定义域扩大到了复数域，建立和三角函数和指数函数的关系，被誉为“数学中的天桥”。形式简单，结果惊人，欧拉本人都把这个公式刻在皇家科学院的大门上，看来必须好好推敲一番。

1 复数

在进入欧拉公式之前，我们先看一些重要的复数概念。

1.1 i的由来

$i=\sqrt{-1}$，这个就是i的定义。虚数的出现，把实数数系进一步扩张，扩张到了复平面。实数轴已经被自然数、整数、有理数、无理数塞满了，虚数只好向二维要空间了。

可是，这是最不能让人接受的一次数系扩张，听它的名字就感觉它是“虚”的：

- 从自然数扩张到整数： 增加的负数可以对应“欠债、减少”
- 从整数扩张到有理数： 增加的分数可以对应“分割、部分”
- 从有理数扩张到实数： 增加的无理数可以对应“单位正方形的对角线的长度（$\sqrt{2}$）”
- 从实数扩张到复数： 增加的虚数对应什么？

虚数似乎只是让开方运算在整个复数域封闭了（即复数开方运算之后得到的仍然是复数）。

看起来我们没有必要去理会$\sqrt{-1}$到底等于多少，我们规定$\sqrt{-1}$没有意义就可以了嘛，就好像$\frac{1}{0}$一样。

我们来看一下，一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的万能公式：其根可以表示为：$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，其判别式$\Delta=b^2-4ac$。

- $\Delta>0$： 有两个不等的实数根
- $\Delta=0$： 有两个相等的实数根
- $\Delta

我们再看一下，一元三次方程$ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq 0)$，一元三次方程的解太复杂了，这里写不下，大家可以参考 维基百科 ，但愿大家能够打开。

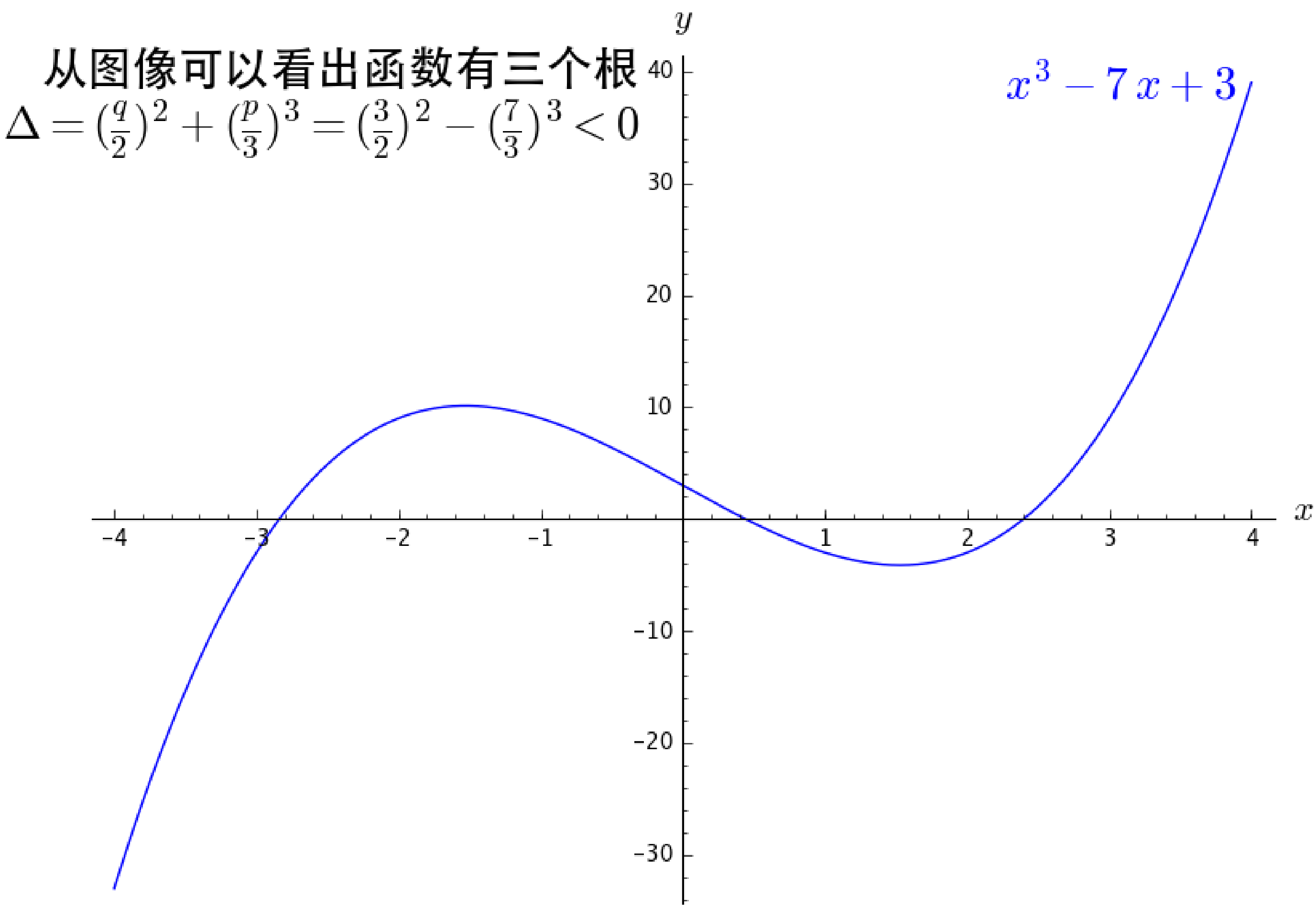
我们讨论一下$b=0$，此时，一元三次方程可以化为$x^3+px+q=0$，其根可以表示为：

$$\begin{cases} x_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}} \\ x_2=\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}}+\omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}} \\ x_3=\omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}}+\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}} \end{cases}$$

其中$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$。

判别式为$\Delta=(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3$，注意观察解的形式，Δ是被包含在根式里面的。

- $\Delta>0$：有一个实数根和两个复数根
- $\Delta=0$：有三个实数根，当$p=q=0$，根为0，当$p,q\neq0$，三个根里面有两个相等
- $\Delta

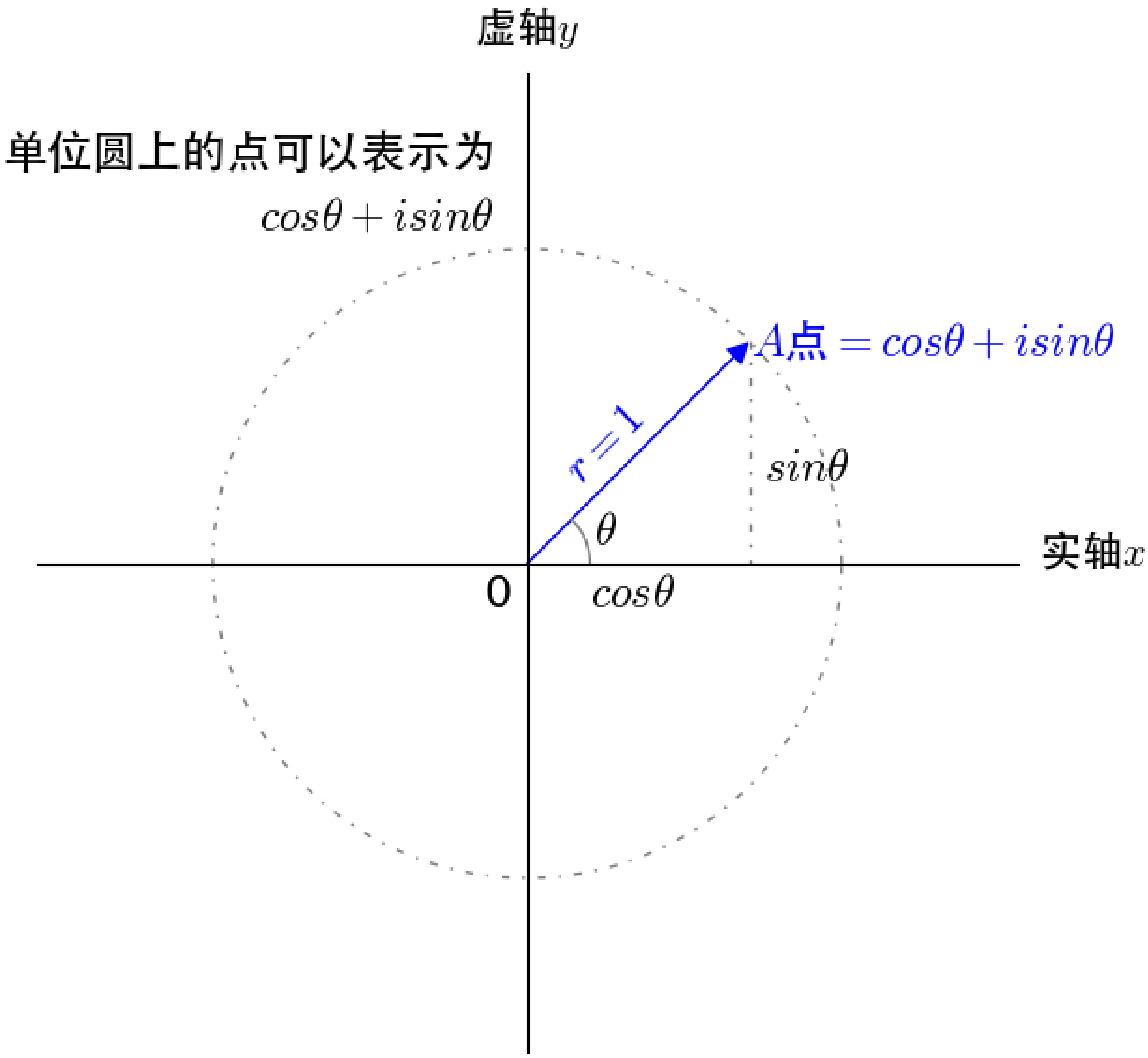


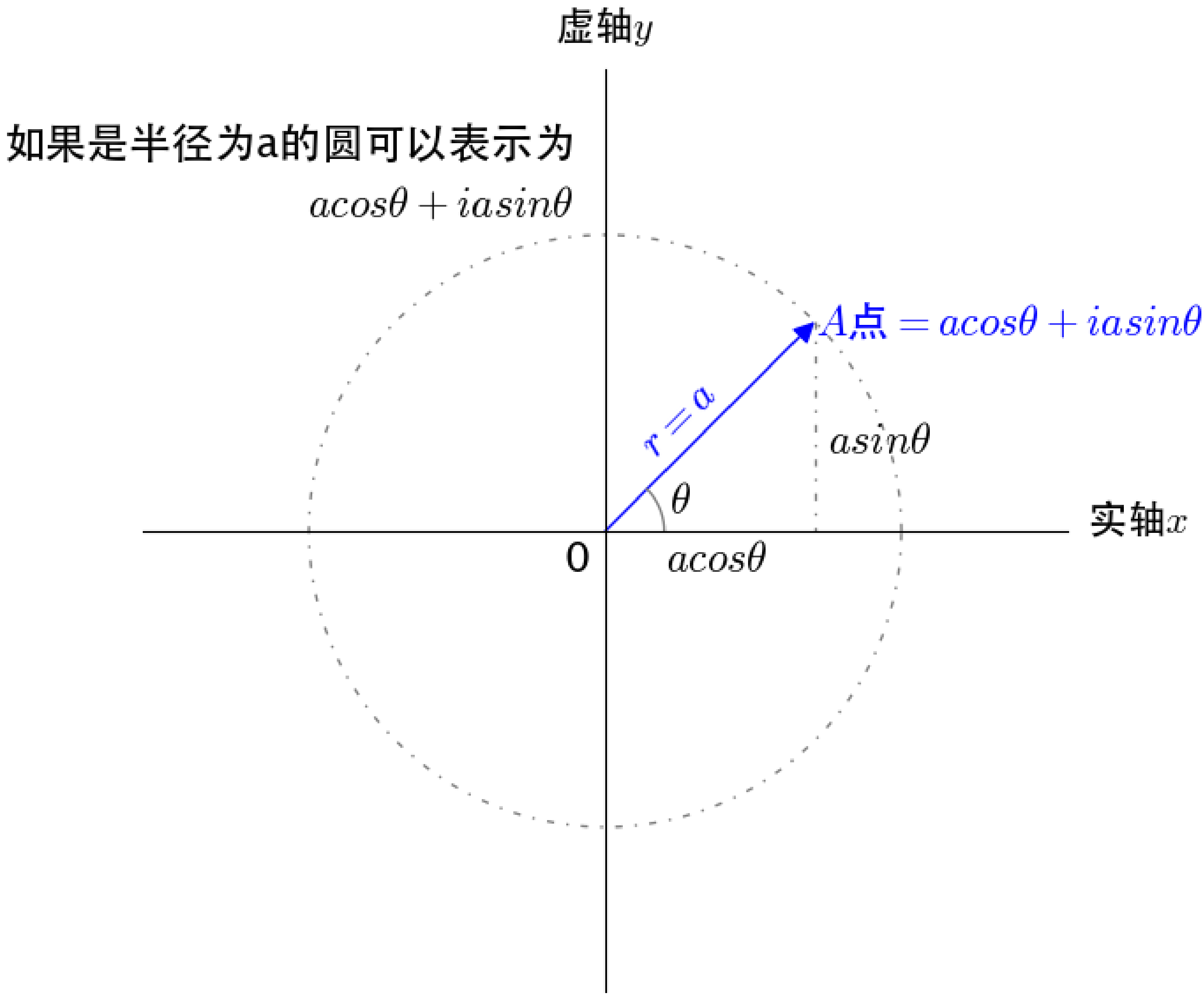
要想求解三次方程的根，就绕不开复数了吗？后来虽然发现可以在判别式为负的时候通过三角函数计算得到实根，但是在当时并不知道，所以开始思考复数到底是什么？

我们认为虚数可有可无，虚数却实力刷了存在感。虚数确实没有现实的对应物，只在形式上被定义，但又必不可少。数学界慢慢接受了复数的存在，并且成为重要的分支。

1.2 复平面上的单位圆

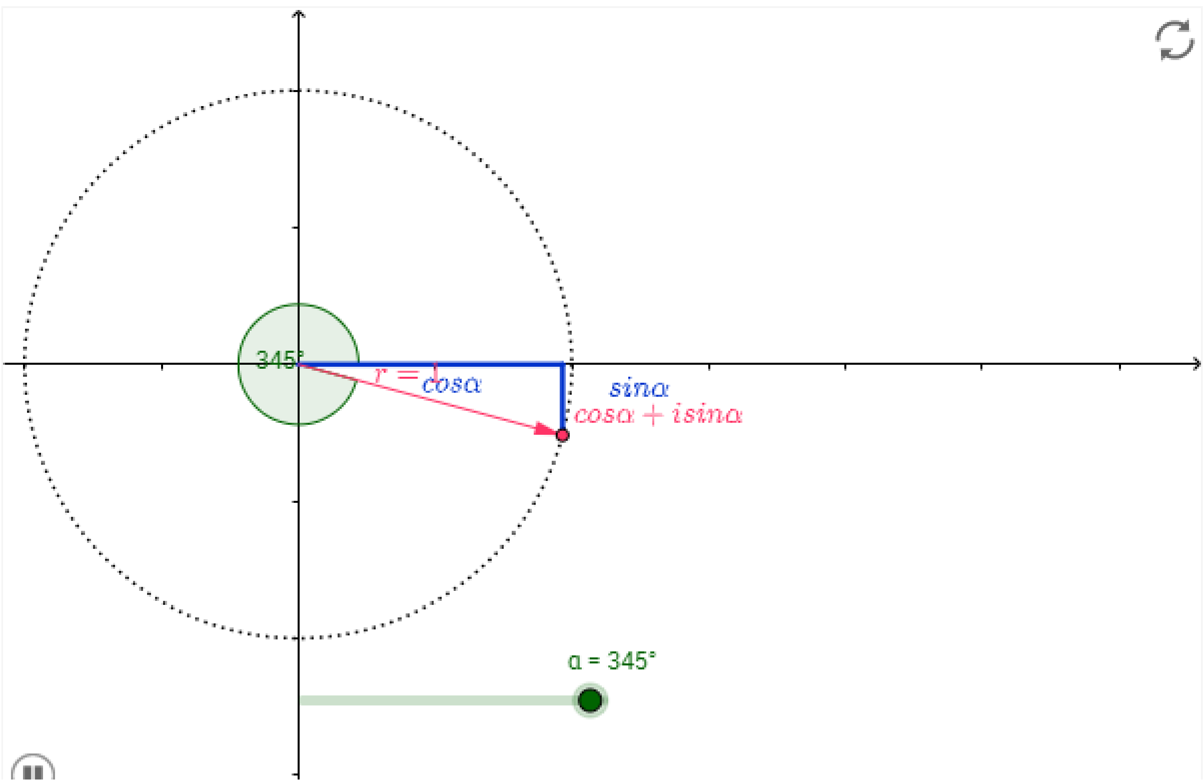
在复平面上画一个单位圆，单位圆上的点可以用三角函数来表示：


虚轴y
单位圆上的点可以表示为
$cos\theta + isin\theta$
A点 $= cos\theta + isin\theta$
$r = 1$
$sin\theta$
θ
实轴x
0
$cos\theta$



虚轴y
如果是半径为a的圆可以表示为
$acos\theta + iasin\theta$
A点 $= acos\theta + iasin\theta$
$r = a$
$asin\theta$
θ
实轴x
0
$acos\theta$

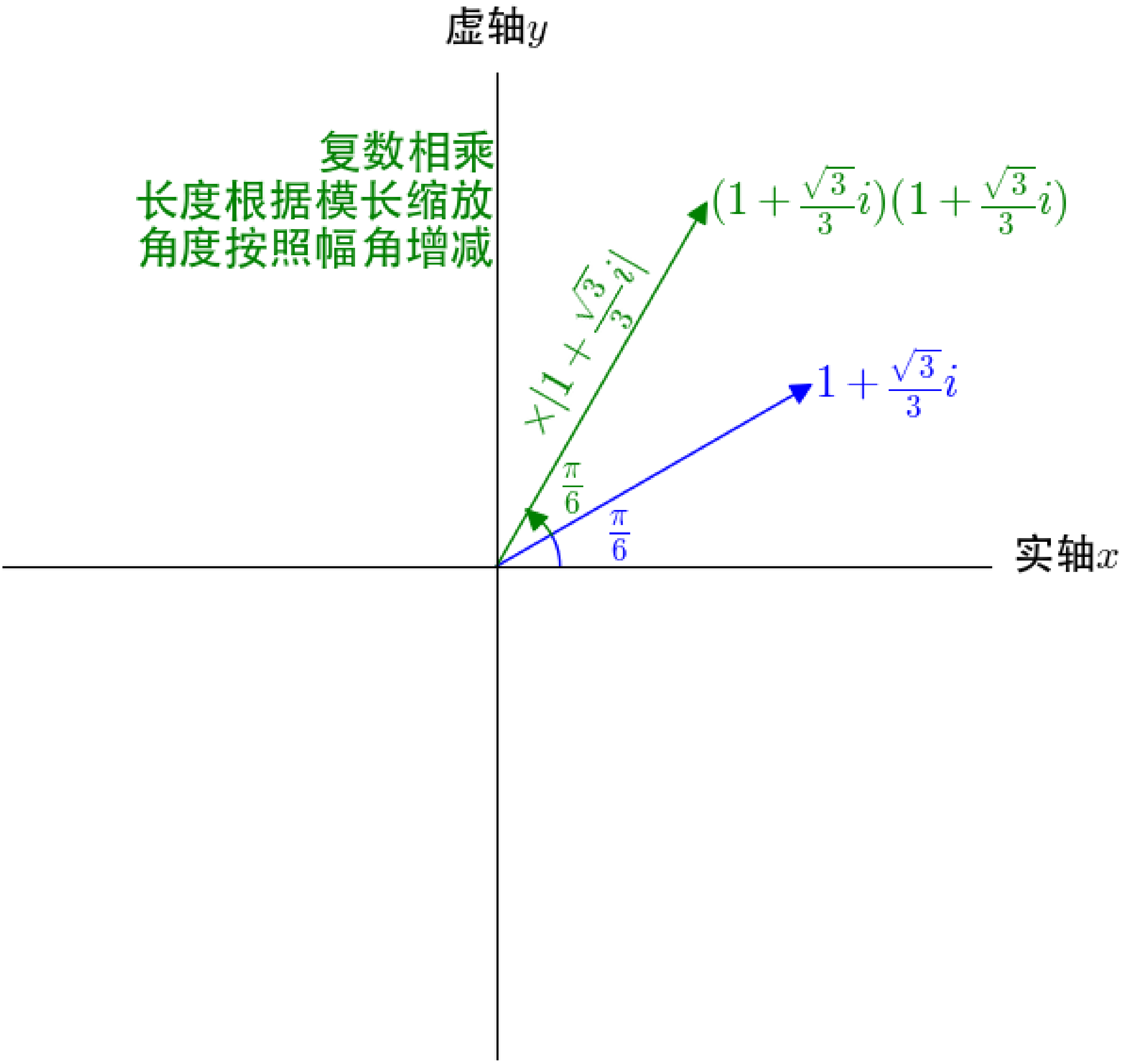
我们来动手玩玩单位圆：



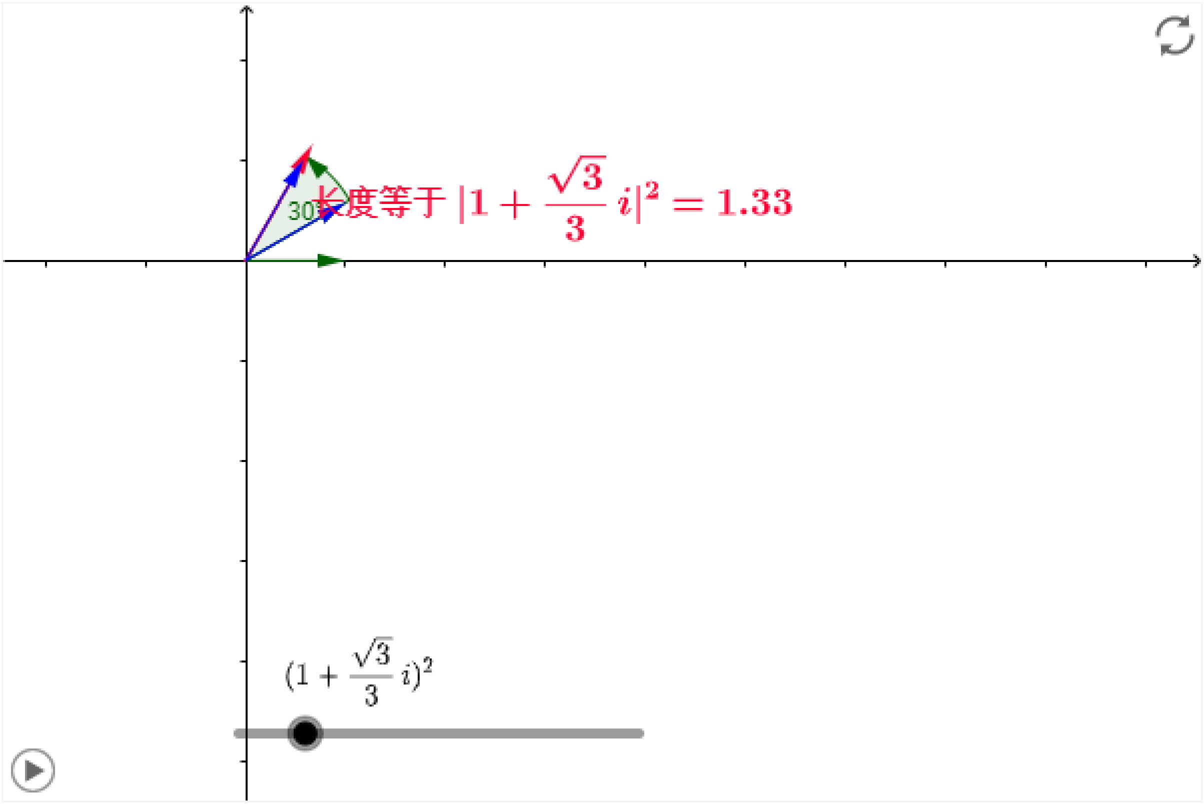
345°
$r = 1$
$cos\alpha$
$sin\alpha$
$cos\alpha + isin\alpha$
α = 345°

Created with GeoGebra

1.3 复平面上乘法的几何意义



同样来感受一下：



Created with GeoGebra

2 欧拉公式

对于$\theta\in\mathbb{R}$，有$e^{i\theta}=cos\theta+isin\theta$。

----维基百科

欧拉公式在形式上很简单，是怎么发现的呢？

2.1 欧拉公式与泰勒公式

关于泰勒公式可以参看这篇详尽的科普文章：

如何通俗地解释泰勒公式？ 。

欧拉最早是通过泰勒公式观察出欧拉公式的：

$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots$

$sin(x)=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots$

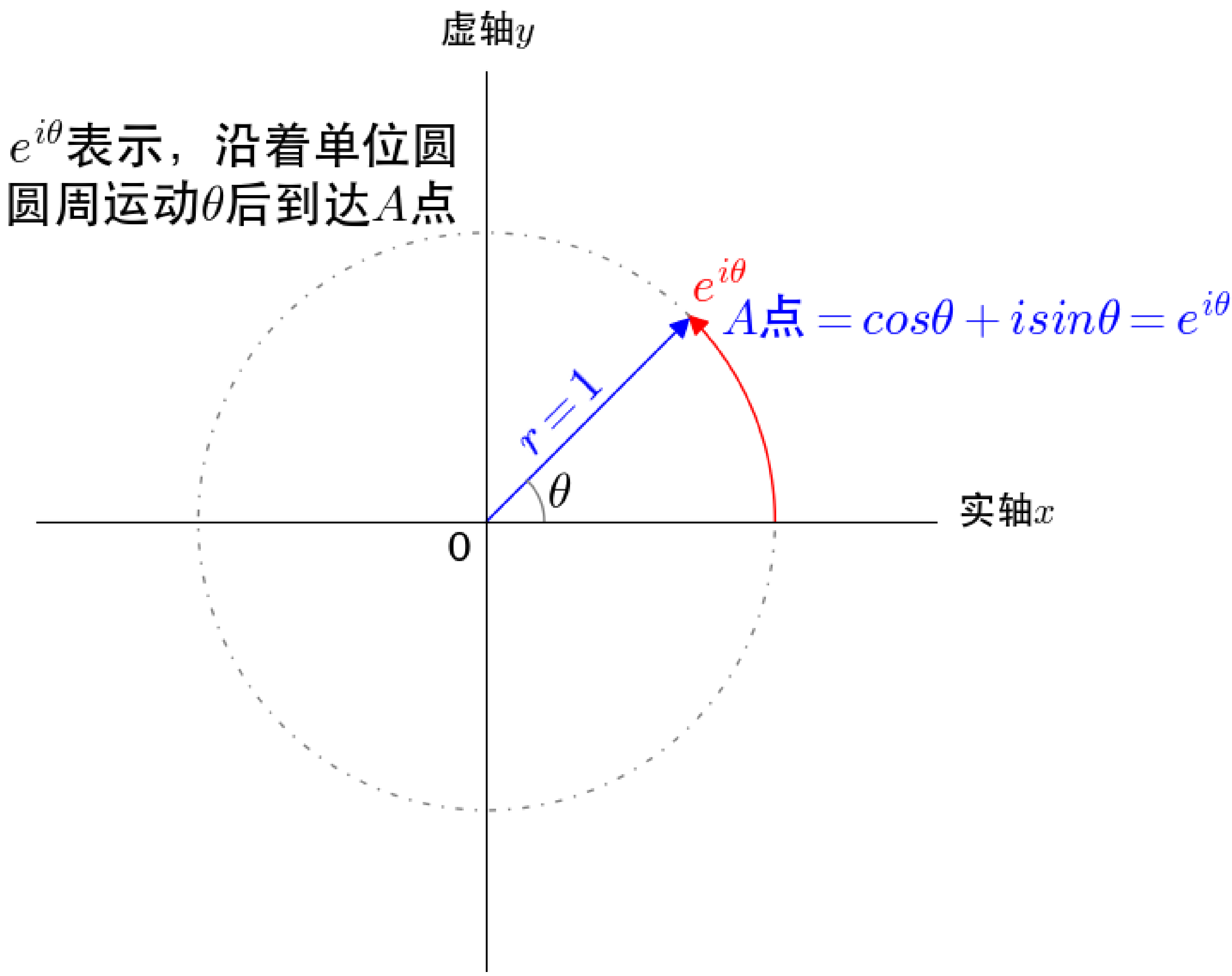
$cos(x)=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots$

将$x=i\theta$代入e可得：

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \frac{(i\theta)^8}{8!} + \cdots \\
&= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - \frac{i\theta^7}{7!} + \frac{\theta^8}{8!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} - \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right) \\
&= \cos\theta + i\sin\theta
\end{aligned}
$$

那欧拉公式怎么可以有一个直观的理解呢？

2.2 对同一个点不同的描述方式



我们可以把$e^{i\theta}$看作通过单位圆的圆周运动来描述单位圆上的点，$cos\theta+isin\theta$通过复平面的坐标来描述单位圆上的点，是同一个点不同的描述方式，所以有$e^{i\theta}=cos\theta+isin\theta$。

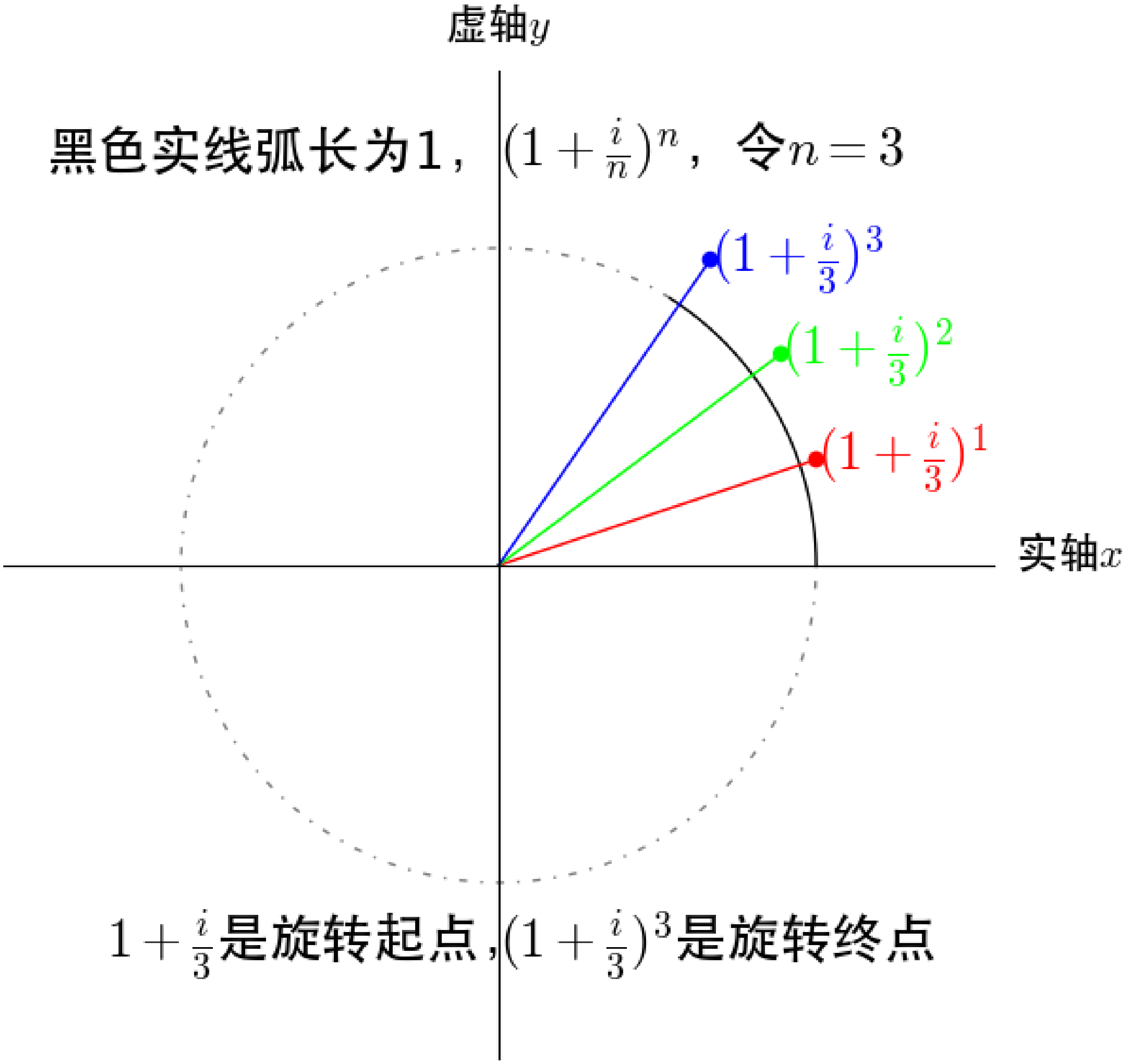
2.3 为什么$e^{i\theta}$是圆周运动？

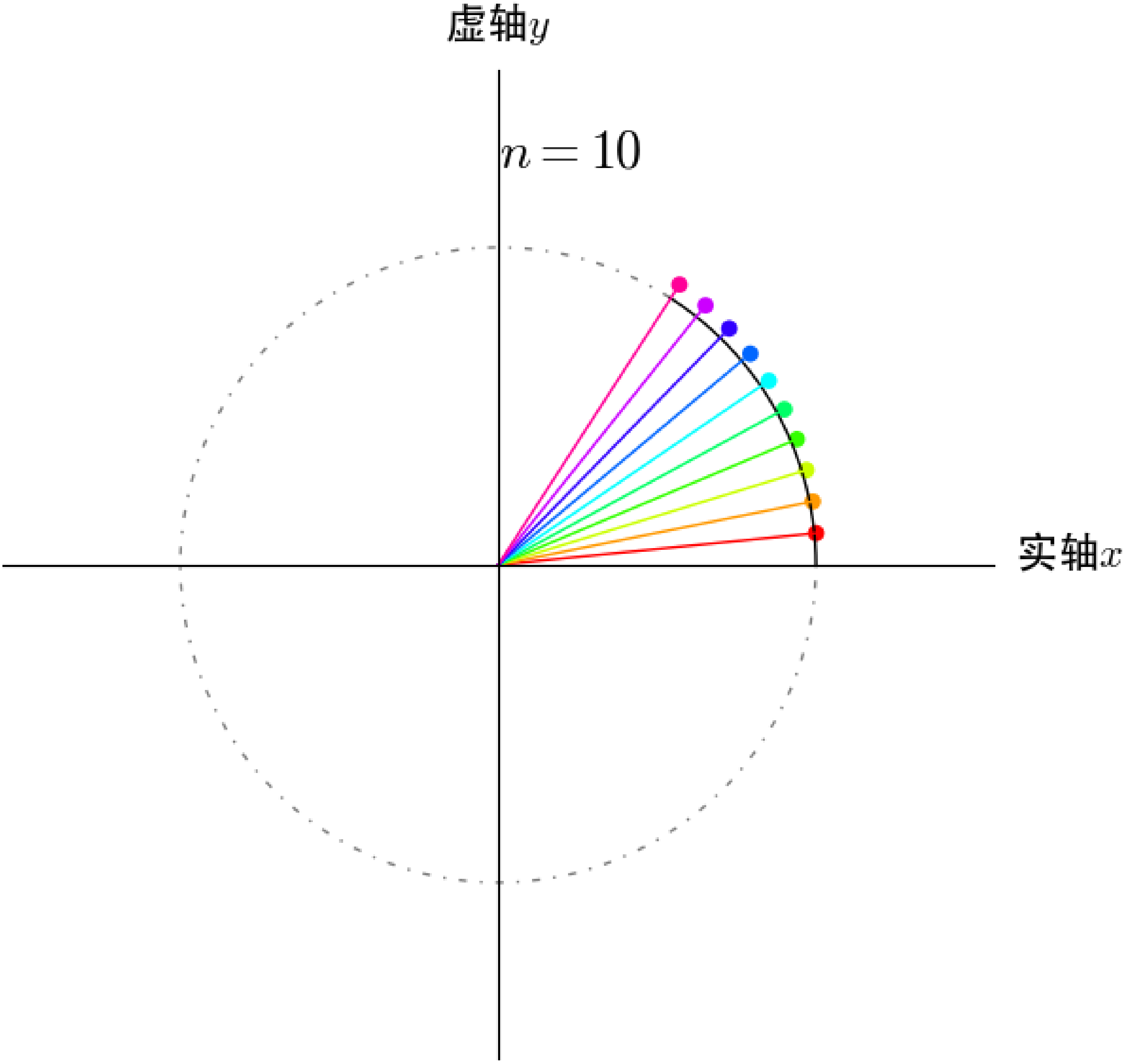
定义e为：$e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$

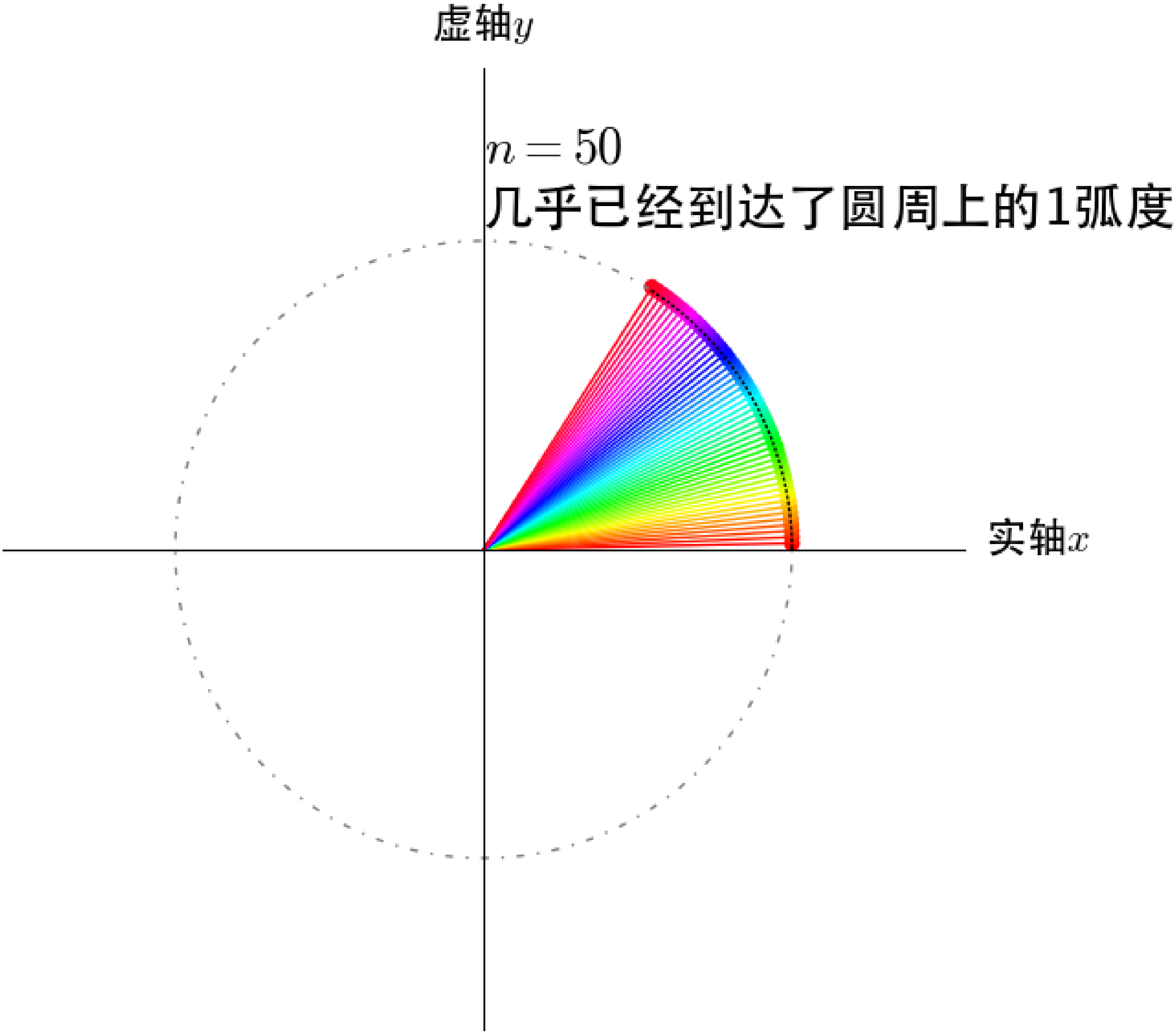
----维基百科

这是实数域上的定义，可以推广到复数域$e^i=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{i}{n})^n$。根据之前对复数乘法的描述，乘上$(1+\frac{i}{n})$是进行伸缩和旋转运动，$n$取值不同，伸缩和旋转的幅度不同。

我们来看看$e^i=e^{i\times 1}$如何在圆周上完成1弧度的圆周运动的：

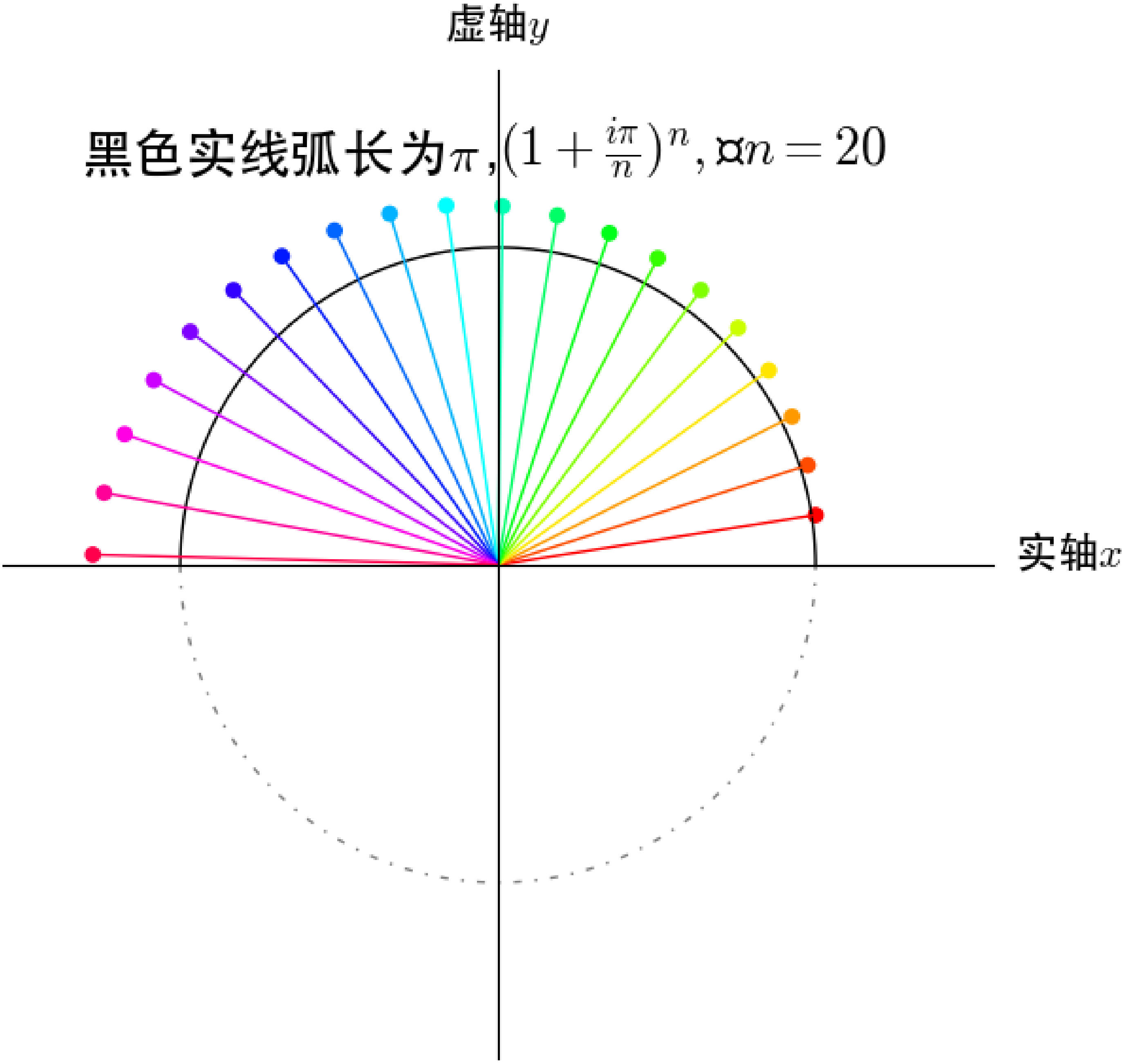


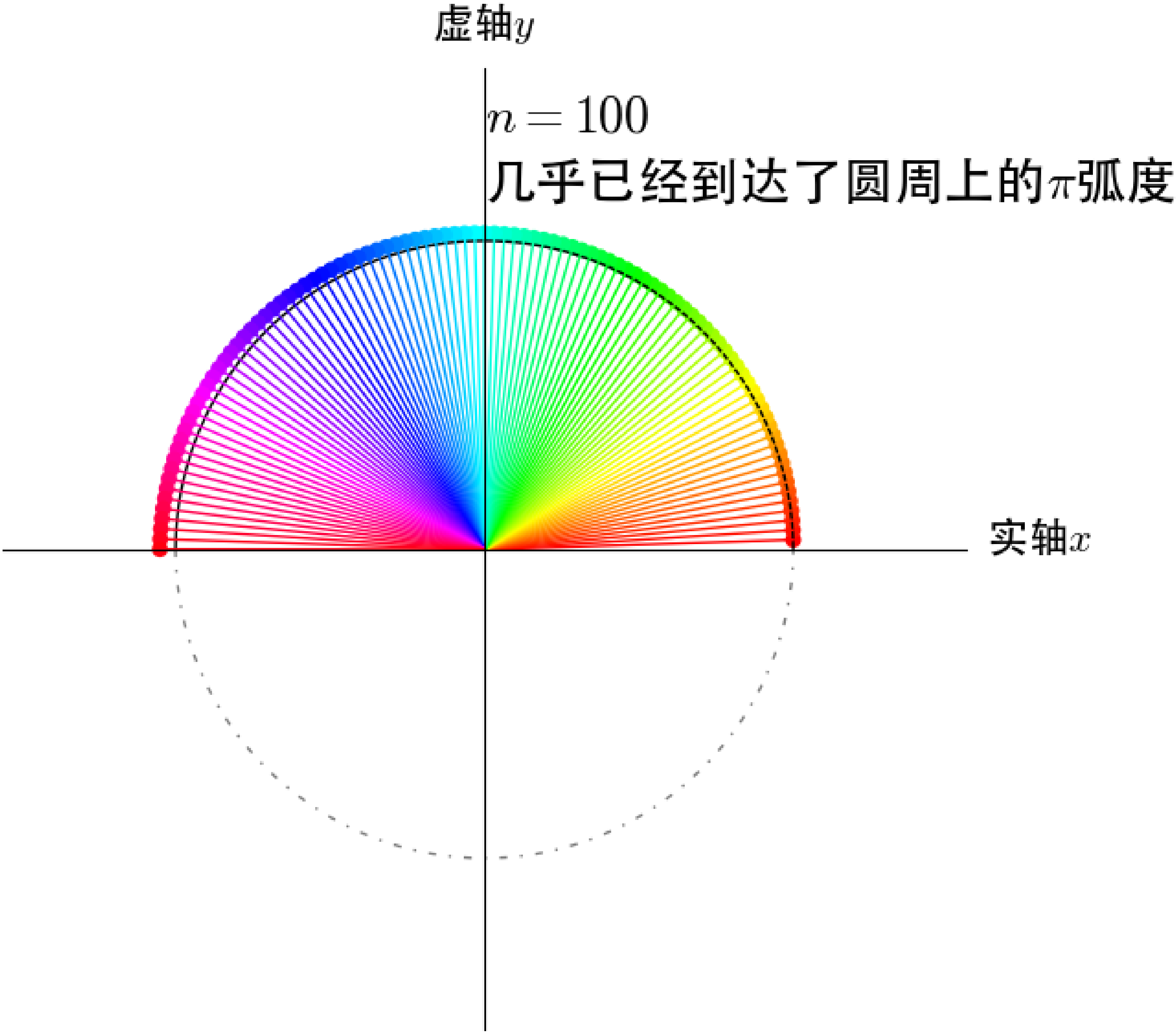

虚轴y
$n = 10$
实轴x



从图上可以推出$n\to\infty$时，e^i在单位圆上转动了1弧度。

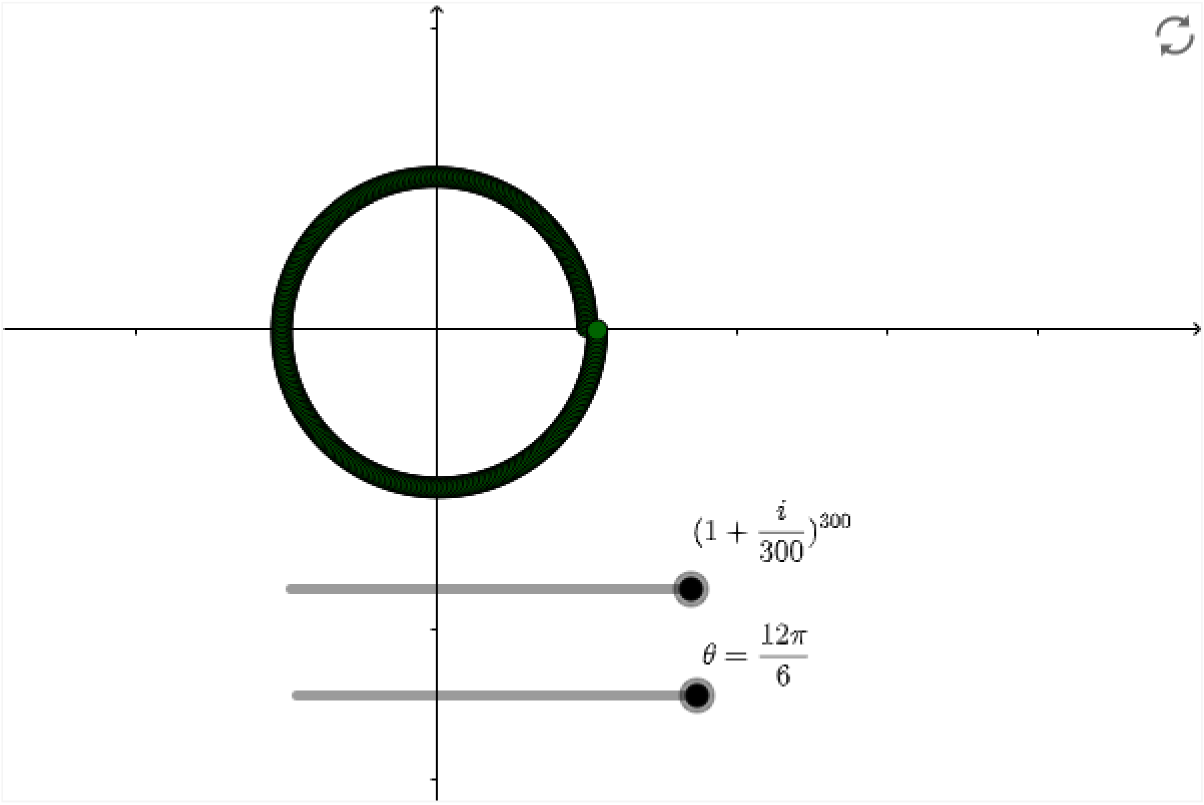
再来看看$e^{i\pi}$，这个应该是在单位圆上转动π弧度：


虚轴y
黑色实线弧长为π,$(1+\frac{i\pi}{n})^n$, ¤$n=20$
实轴x



看来$e^{i\theta}$确实是单位圆周上的圆周运动。

动手来看看$e^{i\theta}$是如何运动的吧：



Created with GeoGebra

2.4 2^i的几何含义是什么?

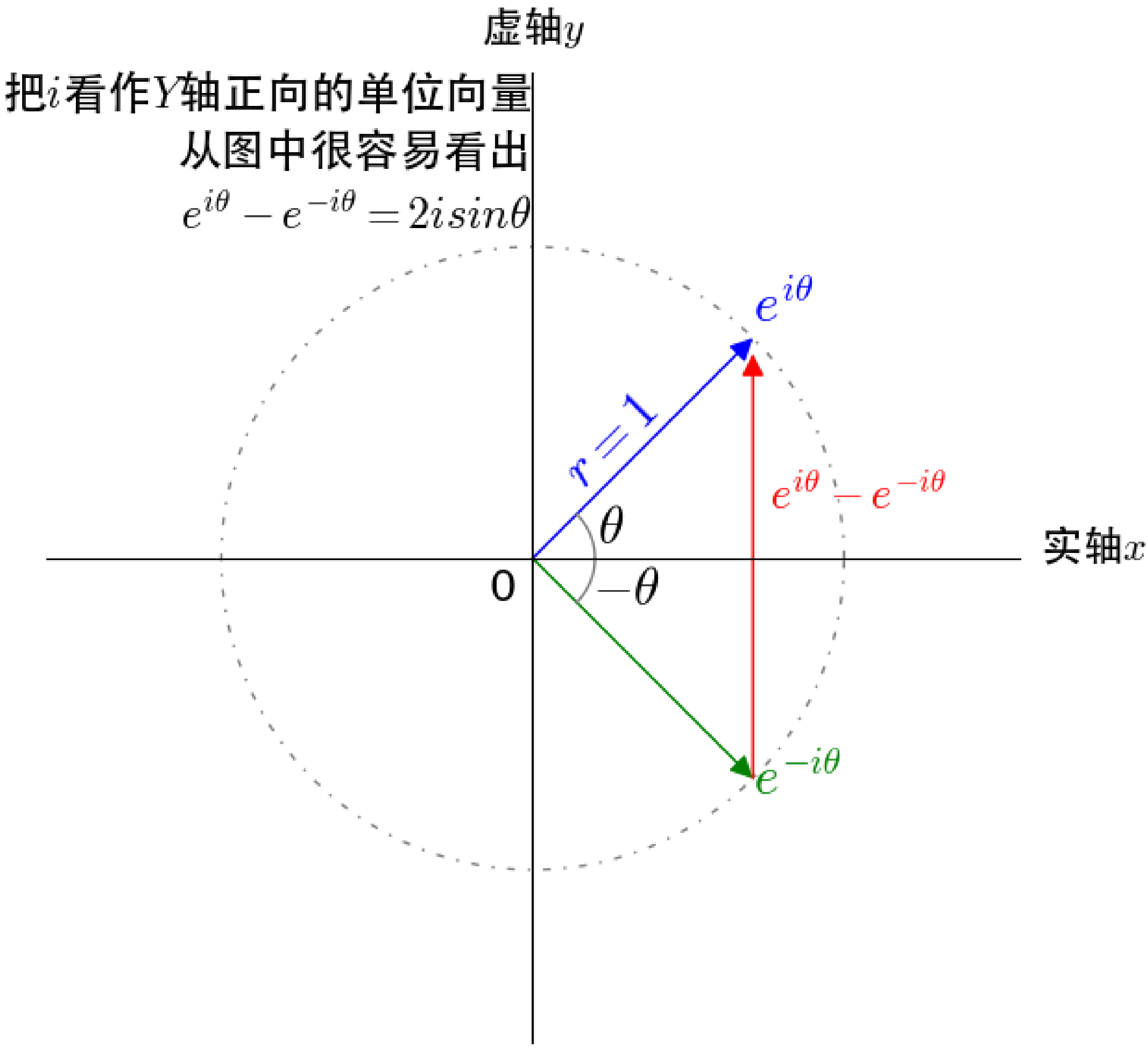
2^i看不出来有什么几何含义，不过我们稍微做个变换e^{iln2}，几何含义还是挺明显的，沿圆周运动$ln2$弧度。

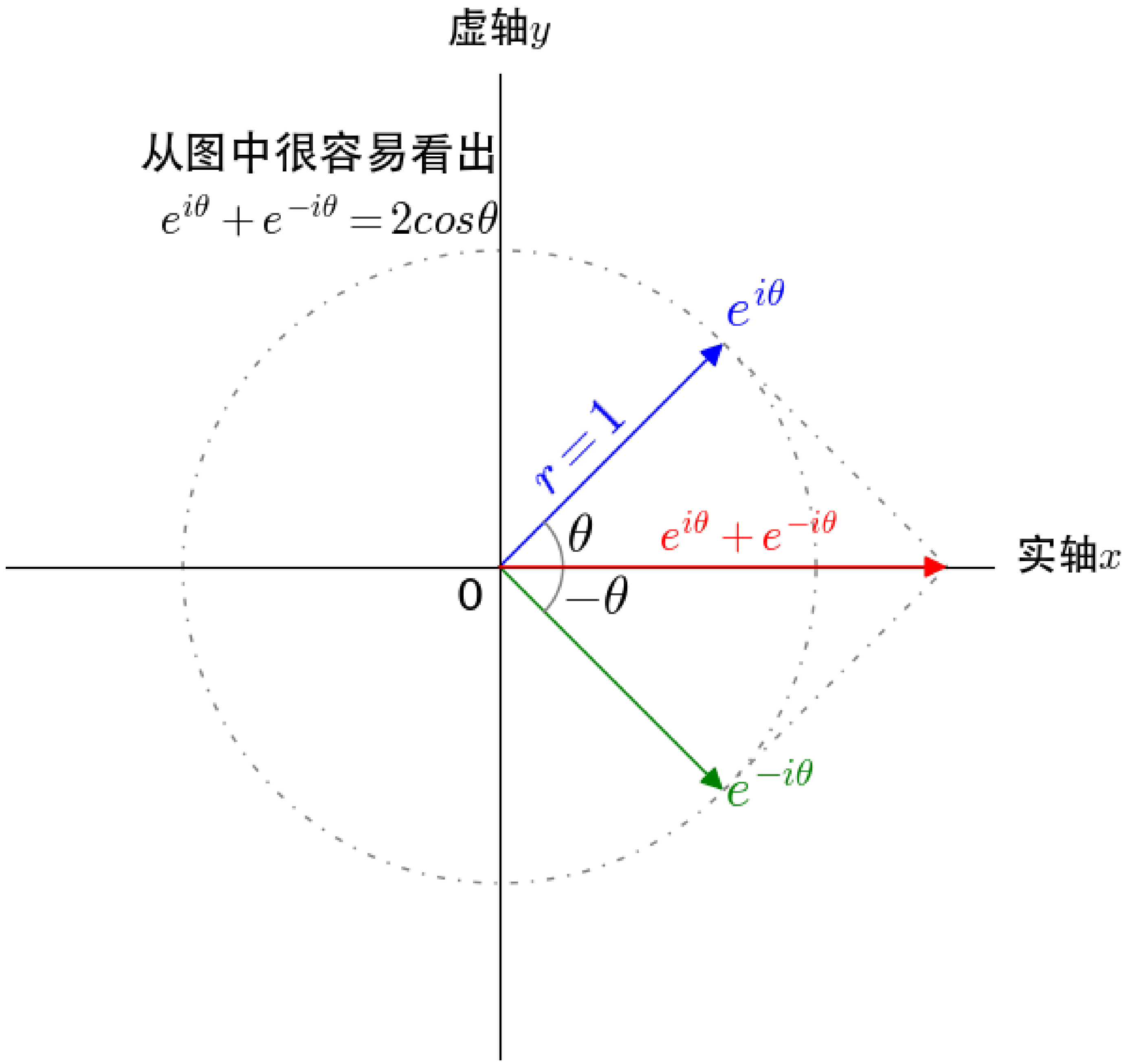
2.5 欧拉公式与三角函数

根据欧拉公式$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，可以轻易推出：

$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$和$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$。三角函数定义域被扩大到了复数域。

我们把复数当作向量来看待，复数的实部是x方向，虚部是y方向，很容易观察出其几何意义。


虚轴y
把i看作Y轴正向的单位向量
从图中很容易看出
$e^{i\theta}-e^{-i\theta}=2isin\theta$
$e^{i\theta}$
$r=1$
$e^{i\theta}-e^{-i\theta}$
θ
$-\theta$
0
实轴x
$e^{-i\theta}$



2.6 欧拉恒等式

当$\theta=\pi$的时候，代入欧拉公式：

$e^{i\pi}=cos\pi+isin\pi=-1 \implies e^{i\pi}+1=0$。

$e^{i\pi}+1=0$就是欧拉恒等式，被誉为上帝公式，e、π、i、乘法单位元1、加法单位元0，这五个重要的数学元素全部被包含在内，在数学爱好者眼里，仿佛一行诗道尽了数学的美好。

标签与声明

标签： 欧拉公式

声明：原创内容，未授权请勿转载，内容合作意见反馈联系公众号: matongxue314

关注马同学

微信公众号：matongxue314