

重修

Date: / /

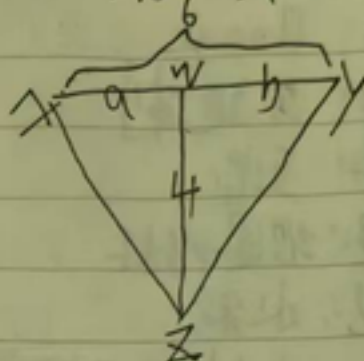
已知 $a+b=6$, $a>0$, $b>0$. 求 $\sqrt{a^2+16} + \sqrt{b^2+16}$ 最小值

如图.

求 $\sqrt{a^2+16} + \sqrt{b^2+16}$ 最小值.

则 $\sqrt{x^2+4^2} + \sqrt{y^2+4^2}$

则求 $xz + yz$ 的最小值



如图, $X'Y'Z$ 是 XYZ 的反转

$\therefore YZ = Y'Z, XZ = X'Z$

$\therefore XZ + ZY$ 最小值为 $XZ + ZY' / YZ + ZX'$

\therefore 两点之间线段最短

$\therefore XZ + ZY / YZ + ZX'$ 的最小值为线段 XY' / YX'

\therefore C点只能同时在 XY' 和 YX' 上

$\therefore XYX'Y'$ 是长方形

\therefore C点为 XY 中点的正下方

$\therefore XZ + YZ$ 的最短为双方相等

即 $XZ = YZ = 6 \div 2 = 3$

因此 $\sqrt{a^2+16} + \sqrt{b^2+16}$ 最小值为 $\sqrt{3^2+16} + \sqrt{3^2+16}$

$= 2\sqrt{25}$

$= 10$

€•, f„ ...†‡^‰ Š €< Œ• Ž••' ' " " • Š— —™Š>
" œ• Šž Ÿ• ĩ Ħ^ £ ¤Š‰ ^ ¥| ¤§

.. ©• €ª™« ¬- \ (a + b = 6\) ® \ (a > 0

b > 0\) • « ^ ° \ (\sqrt{a^2 + 16} + \sqrt{b^2 + 16}\)

^ ±²³ § ´ μ• ¶• ¸¹º € « \ (XZ + YZ\)

^ ±²³ • »> ' ¼½^ §¾¿¹ \ (YZ\) Å \ (YZ\) ' ÁÂ ¬ Ã ^ Ä Å

\ (YZ'\)• Æ¹º €Ç « ÈÉÊ ±ËŒ Ĩ §

Í Æ• « μÎ Ĩ „ Đ...> ' ' " ^ — ÑÒ§¾¿ ÓÔ \ (XZ = YZ = \frac{6}{2} =

3\)• Ž ŒÖ> × Ø • Ù \ (a\) Š \ (b\) ŒÖ> × ÚÁ

³§Ø ^ Û » ÜÝ ÞßÜÚ à á ¸ â « ±²³ §

ãä å â• æ¿ Ç ÜÝ ÞßÜÚ â «

\

(\sqrt{a^2 + 16} + \sqrt{b^2 + 16})^2 \leq (a^2 + 16 + b^2 + 16)(1^2 + 1^2)

\

èÁ \ (a + b = 6\)• æ¿ Ç š> " — \ (a^2 + b^2\)

\

a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 36 - 2ab

\

éê ÖÚ ĩ

\

(\sqrt{a^2 + 16} + \sqrt{b^2 + 16})^2 \leq (36 - 2ab + 32) \cdot 2 = 2(68 - 2ab)

\

...ë ^ ° ±² • æ¿ ~™± ĩ \ (ab\)• Æ \ (ab\) ^ ± ĩ ³ \ (a = b = 3\)

• ° í • î • \ (ab = 9\)§ é ê — ĩ í

\

(\sqrt{a^2 + 16} + \sqrt{b^2 + 16})^2 \leq 2(68 - 18) = 100

\

Ûî • \ (\sqrt{a^2 + 16} + \sqrt{b^2 + 16}\) ^ ±²³ \ (\sqrt{100} = 10\)§

õñ• €< Œñ» Ø ^ • Ž ~™ò Ø — μÎ • ĩ ó> " ^ £ ¤§ôõ

€• ö ÷ ø• Õù úÝ ö û• ¸ üý þ• ÿ €^ £ ¤Š ¤§