

7

$$16. (1). \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{2}c^2 = b^2 - a^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$\sin B - \sin^2 A = \pm \sin^2 C$$

$$\sin^2 A \cos^2 C + \pm \sin 2A \cdot \pm \sin 2C + \pm \sin 2C \cdot \pm \sin 2A + \sin^2 C \cos^2 A$$

$$-\sin^2 A = \pm \sin^2 C$$

$$\frac{1}{2} \cos^2 C + \frac{1}{2} \sin 2C + \frac{1}{2} \cos^2 C \pm \sin^2 C - \frac{1}{2} = \pm \sin^2 C$$

$$\cos^2 C + \sin 2C + \sin^2 C - 1 = \sin^2 C$$

$$\cos^2 C + 1 - 2\sin^2 C + \sin^2 C - 1 = \sin^2 C$$

$$\cos^2 C = 2\sin^2 C$$

$$\therefore \frac{\sin^2 C}{\cos^2 C} = \frac{1}{2} \quad \therefore \tan C = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \therefore \tan C = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$12) \sin C = \frac{\sqrt{2}}{3} \quad \cos C = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\sin B = \sin(A+C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{6} + \sqrt{3}}{6}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = 3$$

$$bc = 6\sqrt{2}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\therefore b = 2\sqrt{2}$$

AI Response:

(注意：以下内容已从结构化格式转换为纯文本)

学生的解答过程非常详细，但存在一些需要修正的地方。下面是批改和解析：

第一部分 (16. (1)) :

学生在计算 $\cos A$ 时, 利用了余弦定理, 这是正确的。但是, 学生在后面的推导过程中, 出现了几个错误和不清晰的地方。

1. $\sin^2 B - \sin^2 A = \frac{1}{2} \sin^2 C$

这一步没有明确的依据, 需要进一步解析。

2. $\cos^2 C + 1 - 2 \sin^2 C + \sin^2 C - 1 = \sin^2 C$

这一步的推导略显复杂, 实际上可以简化为 $\cos^2 C = 2 \sin^2 C$, 进而得出 $\tan^2 C = \frac{1}{2}$, 因此 $\tan C = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 这一步是正确的。

解析与修正:

从 $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 可知 $A = 45^\circ$ 或 $A = 135^\circ$ 。根据题目条件, 假设 $A = 45^\circ$ (因为 $A = 135^\circ$ 通常会导致三角形构不成或不符合题意)。

使用余弦定理: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

接下来, 利用正弦定理和余弦定理的关系进行推导。实际上, 学生在推导 $\sin^2 B - \sin^2 A = \frac{1}{2} \sin^2 C$ 时, 可能是在尝试利用三角恒等变换, 但步骤略显复杂。更直接的方法是利用三角恒等式和已知条件进行简化。

第二部分 (16. (2)) :

学生的解答基本正确, 但在最后一步的推导中, 可以更加详细。

1. $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{3}, \cos C = \frac{\sqrt{6}}{3}$

这一步是根据第一部分得出的 $\tan C = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 计算得出的, 是正确的。

2. $\sin B = \sin(A + C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C$

这一步使用了和差化积公式, 计算也是正确的。

3. $\Delta_{ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = 3$

这一步是根据三角形面积公式得出的, 计算结果 $bc = 6\sqrt{2}$ 是正确的。

4. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ 这一步是余弦定理的应用, 推导 $b = 2\sqrt{2}$ 是正确的, 但需要明确 c 的值。

综上所述:

学生的解答过程思路清晰, 但在某些推导步骤上略显复杂和不清晰。建议在推导过程中, 尽量使用简洁明了的方法, 并且每一步的变换都要有明确的依据。此外, 在最后的计算中, 需要明确所有未知数的值, 以确保结果的完整性。