

7

$$16. (1). \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{2}c^2 = b^2 - a^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$\sin B - \sin^2 A = \pm \sin^2 C$$

$$\sin^2 A \cos^2 C + \pm \sin 2A \cdot \pm \sin 2C + \pm \sin 2C \cdot \pm \sin 2A + \sin^2 C \cos^2 A$$

$$-\sin^2 A = \pm \sin^2 C$$

$$\frac{1}{2} \cos^2 C + \frac{1}{2} \sin 2C + \frac{1}{2} \cos^2 C \pm \sin^2 C - \frac{1}{2} = \pm \sin^2 C$$

$$\cos^2 C + \sin 2C + \sin^2 C - 1 = \sin^2 C$$

$$\cos^2 C + 1 - 2\sin^2 C + \sin^2 C - 1 = \sin^2 C$$

$$\cos^2 C = 2\sin^2 C$$

$$\therefore \frac{\sin^2 C}{\cos^2 C} = \frac{1}{2} \quad \therefore \tan C = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \therefore \tan C = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$12) \sin C = \frac{\sqrt{2}}{3} \quad \cos C = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\sin B = \sin(A+C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{6} + \sqrt{3}}{6}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = 3$$

$$bc = 6\sqrt{2}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\therefore b = 2\sqrt{2}$$

AI Response:

这位同学的解答过程在一些关键步骤上存在错误和不清晰的地方，尤其是在符号使用和逻辑推理上。以下是详细的批改和解释：

第一问 (i)

1. **余弦定理的应用**:

学生正确地使用了余弦定理来表示 $\cos A$ ，并且得到了 $\sqrt{3/2}$ ，这表明 $A = 30^\circ$ 或 $A = 330^\circ$ （在三角形中，我们通常只考虑 $A = 30^\circ$ ）。

2. **表达式 $\sin^2 B - \sin^2 A = 1/2 \sin^2 C$ **:

学生试图通过三角恒等变换来证明这个等式，但过程中的符号使用和逻辑推导存在一些问题。

– 学生在推导中直接使用了 $\sin^2 A \cos^2 C + 1/4 \sin^2 2C$ ，但没有明确说明这两个项是如何得到的。

– 在推导过程中，学生使用了 $1/2 \cos^2 C + 1/8 \sin^2 2C + 1/2 \cos^2 C$ ，但没有解释这一步骤的来源和合理性。

– 学生在最后得出 $\tan C = \sqrt{3/3}$ ，但没有明确指出这一步骤的逻辑推理过程。

第二问 (ii)

1. **正弦和余弦的值**:

学生正确地给出了 $\sin C = \sqrt{3/3}$ 和 $\cos C = \sqrt{6/3}$ 。

2. **正弦定理的应用**:

学生使用了正弦定理来计算 $\sin B$ ，但计算过程中存在一些符号错误和逻辑不清晰的地方。

– 在计算 $\sin B$ 时，学生使用了 $\sin A \cos C + \cos A \sin C$ ，这是正确的，但计算结果 $3\sqrt{2} + \sqrt{6/6}$ 需要简化。

– 学生在计算三角形面积时，直接使用了 $1/2 bc \sin A = 3$ ，但没有给出 $bc = 6\sqrt{2}$ 的具体推导过程。

– 在最后计算 b 时，学生使用了余弦定理，但没有给出详细的计算步骤和解释。

总结

1. **符号使用和逻辑推理**：学生在符号使用和逻辑推理上需要更加严谨和清晰，每一步骤需要有明确的来源和解释。

2. **计算过程**：在计算过程中，学生需要更加细致，避免符号错误和逻辑不清晰的地方。

3. **简化和解释**：在得出结果后，学生需要进行适当的简化和解释，使解答过程更加完整和清晰。

建议学生在解答过程中，每一步骤都要有明确的来源和解释，避免符号错误和逻辑不清晰的地方。同时，学生需要在计算过程中更加细致，避免一些不必要的错误。