Отчет по лабораторной работе №5

Дисциплина: Математическое моделирование

Выполнила Дяченко Злата Константиновна, НФИбд-03-18

Содержание

Список таблиц

Список иллюстраций

1 Цель работы

Изучить и построить математическую модель хищник-жертва - модель Лотки-Вольтерры.

2 Задание

Для модели хищник-жертва

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.54x(t) + 0.031x(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = 0.62y(t) - 0.07x(t)y(t) \end{cases}$$

Построить график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 10, y_0 = 30$. Найти стационарное состояние системы.

3 Объект и предмет исследования

Объектом исследования в данной лабораторной работе является модель хищник-жертва, а предметом исследования - графики зависимости численности популяций, графики изменения численности популяций для конкретного случая.

4 Теоретические вводные данные

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)

2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает

3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными

4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается

5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t)$$
$$\frac{dy}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t)$$

В этой модели x – число жертв, y - число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, c - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения).

Математический анализ этой модели показывает, что имеется стационарное состояние, всякое же другое начальное состояние приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в начальное состояние. Стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке: $x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{b}$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей $x(0), y(0)$. Колебания совершаются в противофазе.

5 Выполнение лабораторной работы

5.1 Шаг 1

Я построила модель с данными начальными условиями в Modelica. Увидеть его можно на Рисунке 1 (рис. 5.1)

```
model lab05 "Predator-prey equations"
parameter Real a=-0.54 "Reproduction rate of prey";
parameter Real b=-0.031 "Coefficient of change in the prey population";
parameter Real c=-0.62 "Mortality rate of predator";
parameter Real d=-0.07 "Coefficient of change in the predator population";
parameter Real x0=10 "Start value of prey population";
parameter Real y0=30 "Start value of predator population";
Real x(start=x0) "Prey population";
Real y(start=y0) "Predator population";
Real x1;
Real y1;
equation
 der(x)=a*x-b*x*y;
 der(y)=-c*y+d*x*y;
 x1=c/d;
 y1=a/b;
end lab05;
```

Рис. 5.1: Уравнения хищник-жертва

5.2 Шаг 2

Построила график зависимости численности хищников от численности жертв для этого случая на интервале $t \in [0; 400]$ и шагом 0.1. График изображен на следующем рисунке (рис. 5.2)

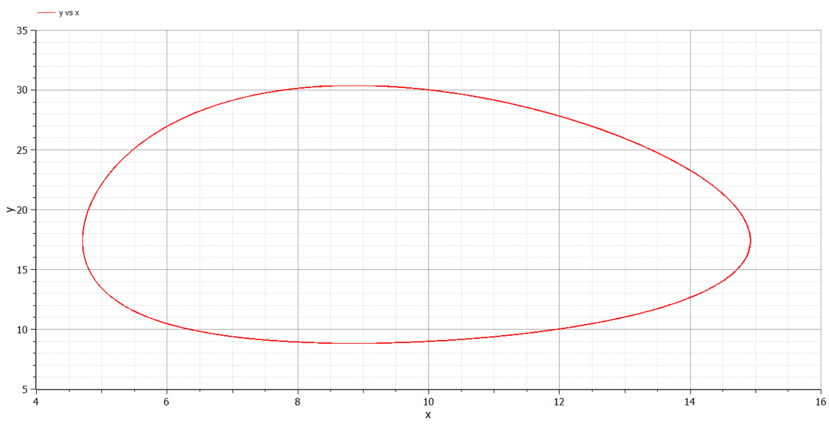

Рис. 5.2: График зависимости численности хищников от численности жертв

5.3 Шаг 3

Построила графики изменения численности хищников и численности жертв, которые изображены на Рисунке 3 (рис. 5.3)

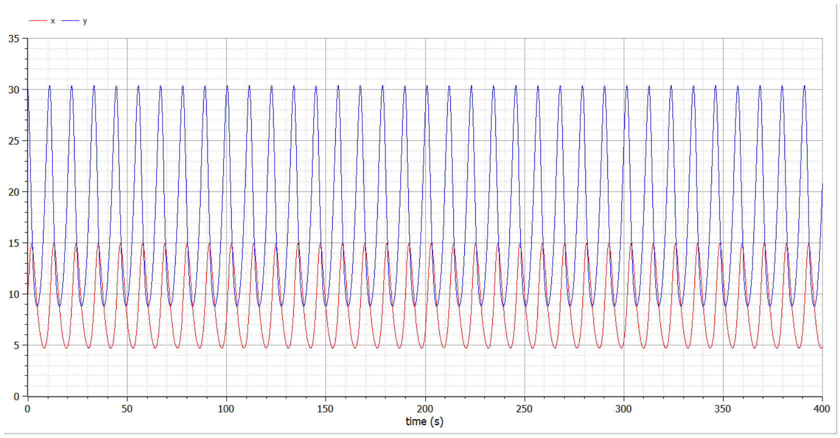

Рис. 5.3: Графики изменения численности хищников и численности жертв

5.4 Шаг 4

Нашла стационарное состояние системы. Стационарная точка имеет координаты $(x1, y1)$, значение которых не совпадает с начальными условиями, потому численность жертв и хищников колеблется вокруг этой точки, что можно увидеть на Рисунке 4 (рис. 5.4)

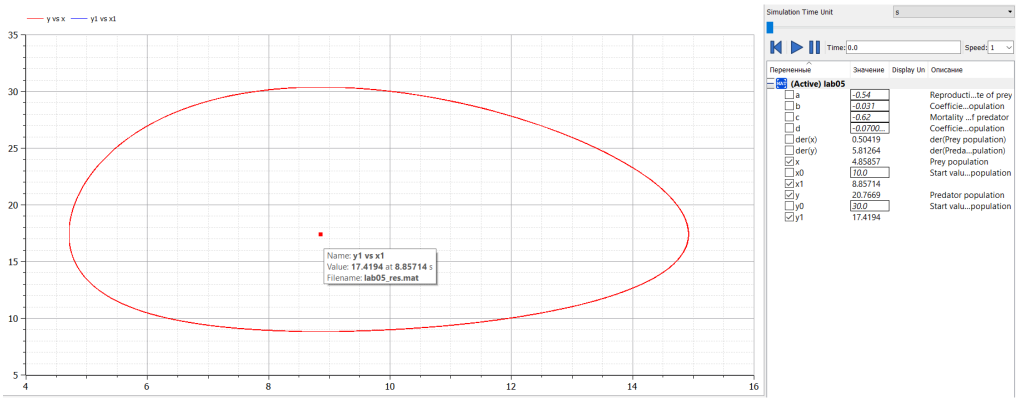

Рис. 5.4: Стационарная точка

6 Выводы

Я познакомилась с моделью Лотки-Вольтерры, рассмотрела ее при определенных начальных условиях, найдя стационарную точку системы, построив график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв. Результаты работы находятся в [репозитории на GitHub] (https://github.com/ZlataDyachenko/workD), а также есть [скринкаст выполнения лабораторной работы] (https://www.youtube.com/watch?v=hnTCNuxJn7s).