XXIV республиканский конкурс работ исследовательского характера(конференция) учащихся по астрономии, биологии, информатике, математике, физике, химии

Секция «Математика»

Транзитивные графы

Мурманцева Злата Ильинична, 10 класс
ГУО «Гимназия №41 г.Минска»

Научный руководитель: Прохоров Николай Петрович, магистрант ФПМИ БГУ

Содержание

Введение

В данной работе мы исследуем класс транзитивных графов. Неориентированный граф $G = (V; E)$ назовем n-транзитивным графом, если для любых двух вершин $u, v \in V$, между которыми в G существует простой путь длины n, верно следующее: $u, v \in E$. Назовем n-пополнением графа G такой минимальный по включению граф H, который является n-транзитивным и содержит в качестве подграфа граф G. Аналогичным образом введем понятия n-транзитивности и n-пополнения для орграфов. Также будем считать орграф G n-сильно-транзитивным в том случае, если от вершины u до v существует путь длины n, в котором все вершины не обязательно различны, то в G проведено ребро (u, v).

Класс неориентированных n-транзитивных графов встречается в литературе лишь для случая $n = 2$, например в статье [10] исследуется задача о нахождении минимального числа рёбер, которые требуется добавить/удалить в графе, чтобы он стал 2-транзитивным. Аналогичная задача для ориентированных 2-транзитивных графов рассматривается в статье [4], более того, данная задача имеет приложения в биоинформатике. [2], [8]

Класс k-транзитивных ориентированных графов является более исследованым. В статьях [3], [5], [7] полностью классифицируются классы 3- и 4-транзитивных сильно связных графов. В статьях [6], [9] исследуются свойства сильно связных k-транзитивных графов, которые содержат ориентированный цикл достаточно большой длины.

В первой части работы нами были исследованы n-транзитивные неориентированные графы и их n-пополнения. В *Лемме 4* и *Теоремах 1, 2, 3 и 4* нами были полностью классифицированы n-пополнения таких графов. Также как следствия данных теорем мы описали все n-транзитивные графы, а также предложили способ вычисления числа транзитивности графа, то есть минимального $n \geq 2$, что граф G является n-транзитивным. В дополнении были исследованы некоторые свойства n-транзитивных графов. В частности, доказана *Теорема 5* и исследована алгоритмическая составляющая задачи.

Для ориентированных графов нами была исследовано свойство n-сильной-транзитивности, которое ранее исследовано не было. Были описаны структуры n-сильно-транзитивных графов при $2 \leq n \leq 4$. Также успешно была исследована структура 5-сильно-транзитивных орграфов. Как следствие из результатов для неориентированных графов, были полностью были описаны n-транзитивные сильно связные орграфы без циклов длины больше 2.

Неориентированные графы

Далее в работе, рассматривая n-транзитивность и n-пополнения будем рассматривать графы порядка не менее $n+1$, потому что графы порядка n и меньше не будут содержать простого пути длины n. Более того, мы не будем рассматривать графы в которых нет простого пути длины n, так как они уже транзитивны и их пополнение это сам граф.

Замечание 1. *Каждый граф G можно дополнить до n-транзитивного. Данное утверждение верно как для неориентированных графов, так и для ориентированных.*

Замечание 2. *n-пополнение графа G единственно, с точностью до изоморфизма.*

Лемма 1. *В n-транзитивном графе любой порожденный подграф также n-транзитивен.*

Лемма 2. *Если связный граф G содержит в качестве порожденного подграфа граф K_n, то n-пополнением графа G является полный граф.*

Лемма 3. *Соединение концевых вершин подцепи P_{2k+2} двудольного графа G сохраняет четность путей (не обязательно простых) между всеми вершинами.*

Следствие. $2k+1$*-пополнение двудольного графа G сохраняет четность путей между всеми вершинами.*

Замечание 3. *Далее будем рассматривать связные графы, так как граф является n-транзитивным тогда и только тогда, когда кажая его компонента связности является n-транзитивной. Следовательно для несвязных графов задача просто разобьется на несколько задач для каждой компоненты связности.*

n-транзитивные графы при $2 \leq n \leq 4$

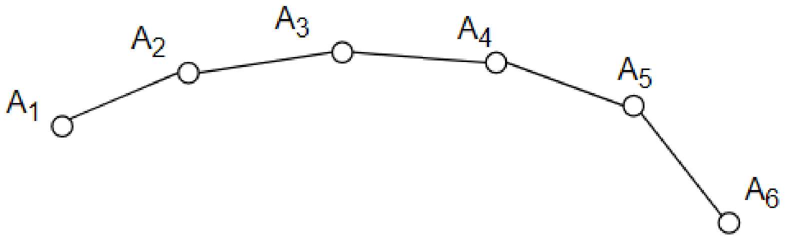
Лемма 4. *Граф является 2-транзитивным тогда и только тогда, когда он является полным.*

Следствие. *2-пополнением произвольного графа G на n вершинах является полный граф на n вершинах.*

Лемма 5. *Пусть G - граф, а H - его* 3*-пополнение. Тогда две различные вершины $u, v \in V(G), V(H)$ являются смежными в H, если в G между ними существует путь нечетной длины.*

Лемма 6. *Возьмем $n \geq 2$, тогда 3-пополнением цепи P_{2n} является $K_{n,n}$, а цепи P_{2n+1} - $K_{n,n+1}$.*

Рис. 1: Простая цепь



Доказательство. P_n является двудольным графом. Пронумеруем вершины $A_1, A_2, A_3, ..A_n$. Тогда вершины стоящие на нечетных позициях образуют одну долю, а стоящие на четных - другую. Из Леммы *5* следует, что потребуется соединить ребром каждые две вершины, находящиеся в разных долях, а *Лемма 3* говорит о том, что таких ребер достаточно. Следовательно 3-пополнением цепи на четном количестве вершин P_{2n} является $K_{n,n}$, а на нечетном P_{2n+1} это $K_{n,n+1}$. □

Лемма 7. *Возьмем $n \geq 2$, тогда 3-пополнением цикла C_{2n} является $K_{n,n}$. При $n \geq 1$ 3-пополнением цикла C_{2n+1} является K_{2n+1}.*

Теорема 1. *Рассмотрим связный граф G. Тогда верно следующее:*

1) *Если наибольшая длина простой пути в G не превосходит 2, то G - 3-транзитивный граф.*

2) *Если наибольшая длина простой цепи не менее 3, то, если G не является двудольным, то его 3-пополнением является полный граф на n вершинах.*

3) *Если наибольшая длина простой цепи не менее 3, то, если G является двудольным, то его 3-пополнением является полный двудольный граф.*

Лемма 8. *4-пополнением графов, в которых существует простая цепь длины 5, является полный граф.*

Доказательство. Рассмотрим такую простую цепь на 6 вершинах(рис1).

□

Теорема 2. *Рассмотрим связный граф G. Тогда верно следующее:*

1) *Если наибольшая длина простой пути в G не превосходит 3, то G - 4-транзитивный граф.*

2) Если G представляет собой C_5, то он является 4-транзитивным, а 4-пополнением P_5 является C_5.

3) Если наибольшая длина цепи не менее 4 и G не является C_5 или P_5 , то его 4-пополнением является полный граф.

Доказательство. □

Следствие. *4-транзитивными графами графы, длины простых цепей которых не превосходят 3, все полные графы и C_5.*

n-транзитивные графы при $n = 2k$

Лемма 9. *Пусть $n \geq 5$. Тогда при $n = 2k$ n-пополнением C_{n+2} является K_{n+2} .*

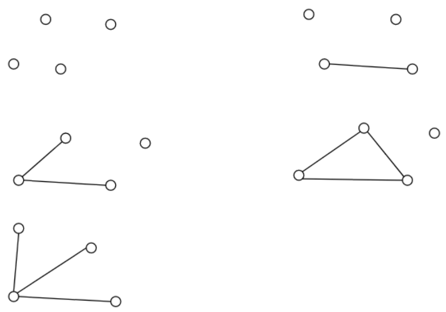
Лемма 10. *Пусть $n \geq 5$. Тогда при $n = 2k$ n-пополнением P_{n+2} является K_{n+2} .*

Теорема 3. *Рассмотрим связный граф G. Тогда, если n-четное, то верно следующее:*

1) Если наибольшая длина простой пути в G равна $n - 1$, то G - n-транзитивный граф.

2) Если G представляет собой C_{n+1}, то он является n-транзитивным, а n-пополнением P_{n+1} является C_{n+1}.

(a) первая картинка



(b) вторая картинка

Рис. 2

3) Если наибольшая длина цепи не менее n и G не является C_{n+1} или P_{n+1} , то его n-пополнением является полный граф.

Доказательство.

1) Следует из определения n-транзитивного графа.

2) Легко заметить, что C_{n+1} - n-транзитивный граф, так как в нем любые две вершины, между которыми существует путь длины n, смежны. Откуда следует, что n-пополнением P_{n+1} является C_{n+1}.

3) Если граф содержит в качестве подграфа P_{n+2}, то из *лемм 1, 2 и 10* следует, что его n-пополнение это полный граф. Графы, в которых не существует простой цепи длиннее $n+1$ ребер рассматривать не будем.

□

Следствие. *$2k$-транзитивными графами являются графы, длины простых цепей которых не превосходят $2k$, все полные графы и C_{2k+1}.*

n-транзитивные графы при $n = 2k+1$

Лемма 11. *Пусть $n \geq 5$ Тогда при $n = 2k+1$ n-пополнением C_{n+2} является K_{n+2} .*

Лемма 12. *Пусть $n \geq 5$ Тогда при $n = 2k+1$ n-пополнением P_{n+2} является $K_{k+1,k+2}$.*

Теорема 4. *Рассмотрим связный граф G. Тогда, если n-нечетное, то верно следующее:*

1) Если наибольшая длина простой цепи в G не превосходит $n-1$, то G - n-транзитивный граф.

2) Если G представляет собой C_{n+1}, то он является n-транзитивным, а n-пополнением P_{n+1} является C_{n+1}.

3) Если G - двудольный, то, если наибольшая простой длина цепи не менее n и G не является C_{n+1} или P_{n+1}, то его n-пополнением является полный двудольный граф.

4) Если G - не двудольный, то, если наибольшая длина цепи не менее n, то его n-пополнением является полный граф.

Следствие. *$2k+1$-транзитивными графами являются графы, которые не содержат простой цепи длины не менее $2k+1$, все полные графы, все полные двудольные графы и C_{2k+2}.*

Алгоритмическая составляющая задачи

Проверка графа на n-транзитивность.

Заметим, что для того, чтобы проверить граф на n-транзитивность нам потребуется применить два алгоритма:

1. Проверка на связность(в том случае, если граф окажется не связным, потребуется найти все компоненты связности и проверить их на n-транзитивность), проверка степеней вершин, проверка на двудольность, полную двудольность, полноту. Все указанные проверки мы можем выполнить с помощью алгоритма по поиску в ширину ([11]).

2. Проверка существует ли простой путь длины n.

		Простые числа			
		2	3	5	7
В степени	5	32	243	3125	16807
	3	8	27	125	343
Остаток от деления	134	0	2	4	1
	345	1	0	0	2

Построение $2k$-пополнения произвольного связного графа G на m вершинах.

Для начала нам требуется определить длину наибольшего пути в графе. Если она меньше $2k$, то он уже является $2k$-транзитивным. Если длина наибольшего пути не менее $2k$, то нам потребуется проверить является ли граф полным или является ли он C_{n+1} . Если да, то он уже является $2k$-транзитивным, если нет, то для того, чтобы дополнить его до $2k$-транзитивного потребуется дополнить G до K_m либо до C_{n+1}, если граф представляет собой P_{n+1} .

Построение $2k+1$-пополнения произвольного связного графа G на m вершинах.

Для начала нам требуется определить длину наибольшего пути в графе. Если она меньше $2k+1$, то он уже является $2k+1$-транзитивным. Если длина наибольшего пути не менее $2k+1$, то нам потребуется проверить является ли граф двудольным. Если граф является двудольным, то, если это P_{n+1}, то ее потребуется дополнить до C_{n+1}, в противном случае нам потребуется найти две доли в G и достроить его до полного двудольного графа. Если G не является двудольным, то, если он представляет собой C_{n+1}, то он уже n-транзитивен, в противном случае нам потребуется достроить его до полного графа.

Утверждение 1. *Пусть известно, что в связном графе порядка n существует простой путь длины k. Тогда проверку графа на k-транзитивность можно выполнить за $O(n^2)$.*

Доказательство. Действительно, если в графе существует простой путь длины k, то нам только требуется проверить его на полноту или на полную двудольность. А осуществить мы это можем с помощью поиска в ширину за $O(n^2)$ [11].

□

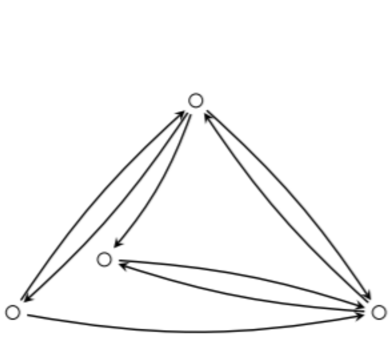
Определение 1. *$\mathcal{G}(n)$ – множество всех помеченных графов с набором вершин $V = \{1, 2, .., n\}$. Пусть P – некоторое свойство, которым каждый граф из $\mathcal{G}(n)$ может обладать или не обладать. $\mathcal{G}P(n)$ – множество помеченных графов, которые обладают свойством P. Будем говорить, что почти нет графов, обладающих свойством P, если $\lim\limits_{n\to\infty} |\mathcal{G}P(n)|/|\mathcal{G}(n)| = 0$*

	Полные графы	Двудольные графы
2-транзитивные	Да	Нет
3-транзитивные	Да	Да

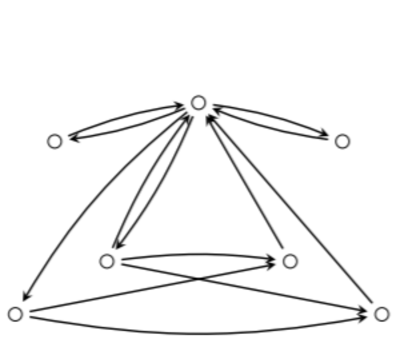
Теорема 5. *Почти все графы [11] не являются k-транзитивными при любом фиксированном $k \geq 2$.*

Доказательство. Заметим, что число всех помеченных неориентированных графов на n вершинах равно $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Для начала покажем, что почти все графы содержат простую цепь длины k при фиксированном k. Заметим, что все графы порядка не менее $k+1$, которые содержат гамильтонову цепь, содержат простую цепь длины k. Тогда, из того, что почти все графы содержат гамильтонову цепь следует, что почти все графы порядка не менее $k+1$ удовлетворяют данному условию. А так как k – фиксированное, то почти все графы содержат $k+1$ вершину. Следовательно почти все графы содержат простую цепь длины k при фиксированном k.

Рассмотрим k-транзитивные графы, которые содержат хотя бы одну простую цепь длины k. Тогда таковыми являются либо полные, либо полные двудольные. Посчитаем количество полных и полных двудольных графов на n вершинах. Оно равно 2^{n-1}. Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n-1}}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} = 0$, откуда следует, что почти все графы таковыми не являются. □



(a)



(b)

Рис. 3

Таблица 1: Таблица истинности логических выражений

A	B	$\neg A$	A $\wedge B$	A $\vee B$	A $\oplus B$	A $\implies B$
0	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0
1	1	0	1	1	0	1

Ориентированные графы

Определение 2.

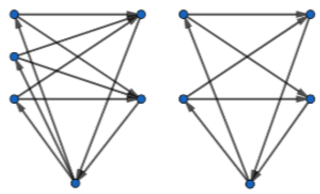
- Ориентированный граф $G = (V, E)$ назовем k-транзитивным графом, если для любых двух вершин $u, v \in V$, между которыми в G существует простой путь длины k, выполнено $(u, v) \in E$.

- Назовем k-пополнением графа G такой минимальный по включению граф H, который содержит в качестве подграфа G и является k-транзитивным. Аналогичным образом вводится и сильное-k-транзитивное пополнение.

Определение 3. Будем считать орграф $G = (V, E)$ k-сильно-транзитивным, если для любых двух вершин $u, v \in V$, между которыми в G существует путь длины k(в котором вершины не обязательно различны) выполнено $(u, v) \in E$.

Определение 4. d-циклическое расширение – это d-дольный ориентированный граф с долями U_1, U_2, $\ldots$, U_d, в котором $v \in U_i$ смежна с $u \in U_j$ тогда и только тогда, когда $j \equiv i + 1 \bmod d$.

3-циклические расширения



Замечание 4. *Далее во всей задаче под циклом будем понимать ориентированный однонаправленный простой цикл.*

Замечание 5. *Все ориентированные n-сильно-транзитивные графы являются n-транзитивными.*

Доказательство. Следует из определения n-сильно-транзитивного орграфа. □

Теорема 6. *(Cesar Hern ́andez-Cruz, Juan Jose Montellano-Ballesteros, [12]). Пусть k – целое число, $k \geq 2$. Пусть D – сильно-связный k-транзитивный орграф. Предположим, что D содержит в качестве подграфа ориентированный цикл длины k такой, что $(n, k-1) = d$ и $n > k+1$. Тогда верно следующее:*

1) *Если $d = 1$, то D – полный орграф.*

2) *Если $d \geq 2$, то D – либо полный орграф, либо полный двудольный орграф, или d-циклическое расширение.*

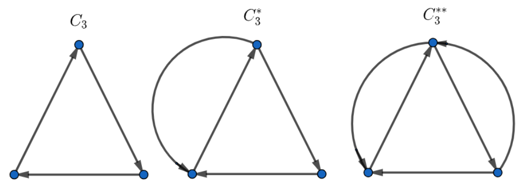
Теорема 7. *(Cesar Hern ́andez-Cruz, Juan Jose Montellano-Ballesteros, [12]). Пусть k – целое число, $k \geq 2$. Пусть D – сильно-связный k-транзитивный орграф порядка хотя бы $k+1$. Тогда, если D содержит цикл длины k, то D – это полный орграф*

Определение 5. Биориентация неориентированного графа G это орграф D, полученный из G заменой каждого ребра $\{x, y\} \in E(G)$ на либо ребро (x, y), либо ребро (y, x), либо на пару ребер (x, y) и (y, x). Полная биориентация неорграфа G это орграф D, полученный заменой каждого ребра $\{x, y\} \in E(G)$ на пару ребер (x, y) и (y, x).

Лемма 13. *Пусть G является сильно-связным k-сильно-транзитивным орграфом. Тогда верно следующее:*

1) *Если $k = 2$, то G – это полный орграф.*

2) *Если $k = 3$, то G либо полный орграф, либо полный двудольный, либо один из следующих графов: C_3, C_3^*, C_3^{**}.*



3) *Если $k = 4$, то G либо полный орграф, либо 3-циклическое расширение, либо сильно-связный 4-сильно-транзитивный орграф порядка меньшего 5, либо орграф вида H.*

Теорема 8. *Пусть G – сильно-связный 5-сильно-транзитивный орграф. Тогда возможны следующие случаи:*

(1) *Если порядок G не менее 6 и он содержит хотя бы один нечетный цикл, то G – полный орграф, либо орграф вида H.*

(2) *Если порядок G не менее 6 и, если G является двудольным и $\mathcal{C}(G) = 2$ либо $\mathcal{C}(G)$ четно и не менее 6, то G – это либо полный двудольный орграф, либо 4-циклическое расширение.*

(a) рис1.　　　(b) рис2.

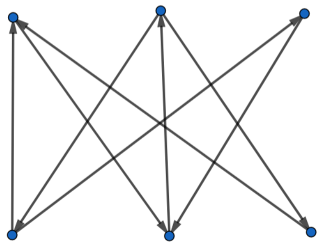
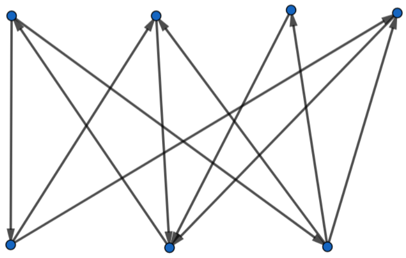
(c) рис3.　　　(d) рис4.

Рис. 4: картинки

Доказательство. (1) В статье [12] доказывается данный результат для 5-транзитивных графов для случая, если G содержит нечетный цикл длины хотя бы 5. В таком случае G – полный орграф. Несложно заметить, что полный орграф является 5-сильно-транзитивным. А из *Леммы 19* следует данный результат при $\mathcal{C}(G) = 3$.

(2) Из *Теоремы 3* и *Леммы 16* следует данный результат при $\mathcal{C}(G) = 2$. В статье [12] доказывается то, что, если $\mathcal{C}(G)$ четно и не менее 6, то, если G – 5-транзитивный орграф, то G – это либо полный двудольный орграф, либо 4-циклическое расширение, либо симметричный цикл на 6 вершинах. Нетрудно заметить, что полный двудольный орграф и 4-циклическое расширение являются 5-сильно-транзитивными орграфами. Рассмотрим симметричный цикл на 6 вершинах. Тогда пронумеруем вершины $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$. Покажем, что потребуется провести все ребра вида $v_i v_j$, где $|i - j| = 3$. Для начала покажем, что потребуется провести ребро $v_1 v_4$. Действительно, это так, так как существует путь $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_4$ длины 5. А так как нумерацию мы можем начать с любой вершины, то потребуется провести все ребра вида $v_i v_j$, где $|i - j| = 3$. Заметим, что тогда образуется полный двудольный орграф $K_{3,3}$. Нетрудно проверить, что он, в свою очередь, уже является 5-сильно-транзитивным. □

Замечание 6. Примеры сильно-связных 5-сильно-транзитивных орграфов, которые являются двудольными, и у которых $\mathcal{C}(G) = 4$

Заключение

Были полностью классифицированы все n-транзитивные неориентированные графы, n-пополнения и числа транзитивности произвольных неориентированных графов, исследована алгоритмическая составляющая задачи. Для ориентированных графов было рассмотрено свойство n-сильной-транзитивности, в частности, были описаны структуры n-сильно-транзитивных графов при $2 \leq n \leq 4$ и успешно исследована структура 5-сильно-транзитивных орграфов, а также описаны n-пополнения сильно связных орграфов не содержащих циклов длины больше 2.

Интересные формулы

- Формула для вычисления простых чисел, основанная на теореме Вильсона:

$$p_n = 1 + \sum_{i=1}^{2^n} \left\lfloor \left(\frac{n}{\sum_{j=1}^{i} \left\lfloor \left(\cos \frac{(j-1)!+1}{j} \pi \right)^2 \right\rfloor} \right)^{1/n} \right\rfloor$$

- Интегралы:

1.
$$\int \sqrt{\sqrt{x + 2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x - 2\sqrt{2x-4}}}\,\mathrm{d}x$$

2.
$$\int \log(\log x) + \frac{2}{\log x} - \frac{1}{(\log x)^2}\mathrm{d}x$$

3.
$$\int (1+2x^2)e^{x^2}\,\mathrm{d}x$$

4.
$$\int \left(\frac{\arctan x}{x - \arctan x} \right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1 + x\arctan x}{\arctan x - x} = \frac{1}{\tan(\beta - \tan\beta)}$$

- Пределы:

1.
$$\lim_{x\to\infty} \frac{8x^4}{4x^4 - 8x^3 - 8x^2 - 6x} \times -28e^{\pi i} + \lim_{x\to\infty} xe^{-x}$$

2.
$$\left(\lim_{x\to 0} \frac{e^{4x}-1}{x} \right)^5 - \left(\left(\left(\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^k}{(\cos^2 x + \sin^2 x)} \right) \right) + -16e^{\pi i} \right)$$

Список литературы

[1] Харари Ф. Теория графов. /пер. с англ. - изд. 2-е - М.: Едиториал УРСС, 2003.

[2] J. Jacob, M. Jentsch, D. Kostka, S. Bentink, R. Spang, Detecting hierarchical structure in molecular characteristics of disease using transitive approximations of directed graphs, Bioinform. 24 (7) (2008) 995–1001.

[3] H. Galeana-Sánchez, I.A. Goldfeder, I. Urrutia, On the structure of strong 3-quasi-transitive digraphs, Discrete Math., 310 (19) (2010)

[4] Mathias Weller, Christian Komusiewicz, Rolf Niedermeier, Johannes Uhlmann, On making directed graph transitive, Journal of Computer and System Science, 78 (2012) 559-574.

[5] C. Hernandez-Cruz, 3-transitive digraphs, Discuss. Math. Graph Theory 32 (2012) 205–219. doi:10.7151/dmgt.1613

[6] J. Bang-Jensen and J. Huang; Quasi-transitive digraphs, J. Graph Theory, 20 (1995), 41–161

[7] Cesar Hernandez-Cruz, 4-transitive digraph I: the structure of strong 4-transitive digraph, Discussiones Mathematicae Graph Theory 33 (2013) 247–260.

[8] S. Böcker, S. Briesemeister, G.W. Klau, On optimal comparability editing with applications to molecular diagnostics, BMC Bioinform. 10 (1) (2009) S61

[9] César Hernández-Cruz, Hortensia Galeana-Sánchez, k-kernels in k-transitive and k-quasi-transitive digraphs, Discrete Mathematics 312 (2012) 2522-2530.

[10] C. T. Zahn, Jr., Approximation Symmetric Relations by Equivalence Relations, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol. 12, No. 4 (Dec., 1964), pp. 840-847

[11] В.А.Емеличев, Мельников О.И. , Сарванов В.И. Тышкевич Р.И.. Лекции по теории графов. Москва "Наука 1990 - 348 с.

[12] César Hernández-Cruz, Juan Jose Montellano-Ballesteros, Some remarks in the structure of strong k-transitive digraph, Discrete Mathematics, Discussiones Mathematicae Graph Theory 34 (2014) 651–671. doi:10.7151/dmgt.1765