Дніпровський національний університет

імЕНІ Олеся Гончара

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

КАФЕДРА ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА

МАТЕМАТИЧНОЇ КІБЕРНЕТИКИ

**КУРСОВА РОБОТА**

за спеціальністю

на тему **«Розв’язання диференціального рівняння теплопровідності методом скінченних різниць»**

Виконав:

студент групи ПС–16–1

спеціальності 124 «Системний аналіз»

Орлов Станіслав Костянтинович

Керівник: доцент кафедри ОМ та МК

П І П

Кількість балів\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Національна шкала \_\_\_\_\_\_\_\_

Оцінка ECTS \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Члени комісії :

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(підпис) (прізвище та ініціали)

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(підпис) (прізвище та ініціали)

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(підпис) (прізвище та ініціали)

м. Дніпро

2019

Зміст

[Вступ 3](#_Toc9594092)

[Постановка задачі 4](#_Toc9594093)

[РОЗДІЛ 1. РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ 5](#_Toc9594094)

[РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ 9](#_Toc9594095)

[РОЗДІЛ 3. ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ 19](#_Toc9594096)

Вступ

Основною перевагою чисельних методів є можливість заміни дорогого або важко виконуваного фізичного експерименту, а також можливість моделювання процесів, що не піддаються аналітичному рішенню. Необхідність в чисельному моделюванні процесу теплопровідності виникає в багатьох галузях сучасної техніки. Одним з найбільш простих чисельних методів рішення рівняння теплопровідності є методи скінченних різниць.

Об'єкт дослідження - початково-крайова задача для нестаціонарного рівняння теплопровідності. Предмет дослідження - рішення крайової задачі для нестаціонарного рівняння теплопровідності методами скінченних різниць.

Постановка задачі

Метою даної курсової роботи є розробка програми для чисельного рішення одномірного нестаціонарного рівняння теплопровідності з однорідними граничними умовами методами скінченних різниць, та порівняння результатів з точним рішенням.

Для досягнення зазначеної мети необхідно вирішити такі завдання:

1. Вивчення теорії побудови різницевих схем.

2. Вивчення методів розв'язання СЛАР.

3. Порівняння та візуалізація отриманих результатів.

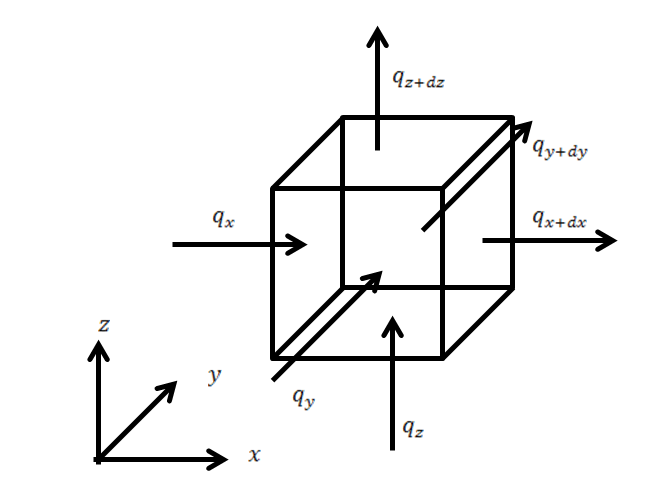
РОЗДІЛ 1. РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Рівняння теплопровідності описує поширення тепла в заданій області простору в залежності від часу.

Воно є параболічним диференціальним рівнянням в частинних похідних. У одномірному випадку рівняння має вигляд:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1.1) |

1.1 Виведення рівняння теплопровідності

Уявімо однорідне тіло і вичленуємо з нього елементарний обсяг зі сторонами , , (Малюнок 1).

Малюнок 1. Контрольний об'єм в прямокутній системі координат

Вхідні потоки тепла, розташовані перпендикулярно до поверхонь позначимо як , , . Потоки на протилежних поверхнях виразимо з рядів Тейлора:

|  |
| --- |
|  |

(1.1.1)

Усередині тіла так само можуть бути внутрішні джерела тепла, якщо і стоки, якщо :

Зміна внутрішньої енергії:

(1.1.2)

(1.1.3)

(1.1.4)

Підставами рівняння (1.1.1), (1.1.3) і (1.1.4) в рівняння (1.1.2) і отримаємо:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1.1.5) |

Підставами рівняння (1.1.1) в вийшло рівняння (1.1.5):

(1.1.6)

Потоки тепла висловимо з закону Фур'є:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.1.7) |

Підставивши їх в рівняння (1.1.6), отримаємо рівняння теплопровідності в загальному вигляді для тривимірного простору:

Введемо коефіцієнт температуропровідності:

і опустимо внутрішні джерела тепла. Отримаємо рівняння теплопровідності в тривимірному просторі без внутрішніх джерел тепла:

1.2 Умови однозначності

Рівняння (1.1) описує процес в загальному вигляді. Для її застосування до конкретного завдання необхідні додаткові умови, звані умовами однозначності. Дані умови включають в себе геометричні (форма і розміри тіла), фізичні (фізичні властивості тіла), тимчасові (початковий розподіл температури) і граничні умови (описують процес теплообміну з навколишнім середовищем).

У цій роботі роздивимось однорідне рівняння теплопровідності з однорідними граничними умовами, де об’єктом дослідження є скінченний абсолютно твердий стержень:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.1.8) |
|  |  |

РОЗДІЛ 2. МЕТОД СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ

2.1 Формулювання методу за рядами Тейлора

Суть методу скінченних різниць може бути виражена через визначення похідної функції u в точці :

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.1.1) |

Дана формула може стати відповідною заміною похідною в разі, якщо функція u є неперервною і Δx є досить малою, але скінченною величиною.

Уявімо розкладання в ряд Тейлора функції u (x) в околі точки в правому і лівому напрямках:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.1.2) |
|  |  | (2.1.3) |

Дані вирази формують основу для скінченно-різницевої апроксимації похідної першого порядку в околиці точки . Після перестановок в формулах (2.1.2) і (2.1.3) отримаємо праву і ліву скінченно-різницеві апроксимації похідної першого порядку відповідно:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.1.4) |
|  |  | (2.1.5) |

де позначає похибку апроксимації, яка ніколи різницю між похідною і її скінченно-різницевим поданням.

Для правої скінченної різниці похибка має вигляд:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.1.6) |

Отримаємо центральну скінченну різницю шляхом віднімання (2.1.5) з (2.1.4):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.1.7) |
|  |  |  |

Отримана апроксимація має похибку:

2.2 Побудова різницевої схеми

Для побудови різницевої схеми необхідно:

1. Здійснити перехід з області безперервного зміни аргументу в її дискретний аналог.

2. Замінити похідні їх скінченно-різницевими аналогами.

3. Для заміни області безперервного зміни аргументу дискретним аналогом його зміни необхідно вибрати в даній області скінченно безліч точок - сітку.

Зафіксуємо на відрізку [*0, l*] точок з кроком  
 .

Так само на відрізку точок з кроком  
 .

Множину всіх пар будемо називати сіткою і позначати а кожну окрему точку – вузлом сітки.

Сітковою функцією будемо називати таблицю значень невідомої функції у вузлах сітки.

*–* множина точних значень функції у вузлах сітки

*–* множина наближених значень функції у вузлах сітки.

Перепишемо рівняння (1.1.8) у точках сітки:

Замінимо похідні в точках , такими розкладаннями:

Тоді апроксимацію похідної першого порядку в вузлі можна зробити за допомогою:

Правою скінченної різниці:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.2.1) |

Лівою скінченної різниці:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.2.2) |

Центральної скінченної різниці:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Зробимо апроксимацію похідної другого порядку

Для цього представимо похідну другого порядку функції u як похідну першого порядку деякої функції v:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Апроксимуємо похідну функції v в точці правою скінченною різницею (2.2.1):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Апроксимуємо похідні функції u лівої скінченною різницею (2.2.2):

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | |  |
|  |  |  |  |
|  |  | | | (2.2.3) |

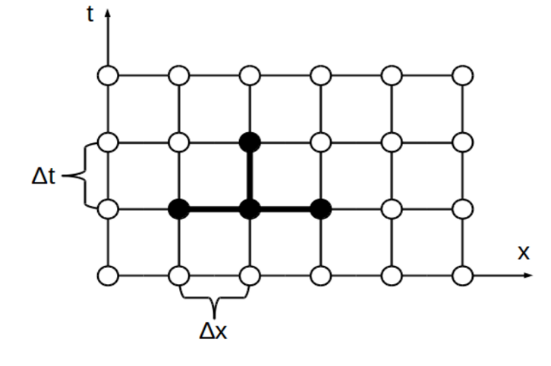
Залежно від вибору способу апроксимації похідної за часом можна отримати два основних види різницевих схем:

1. Явна схема: значення вузла на новому часовому шарі залежить тільки від значень вузлів на попередньому шарі, тобто значення може бути обчислено явно з попереднього шару (малюнок 2).

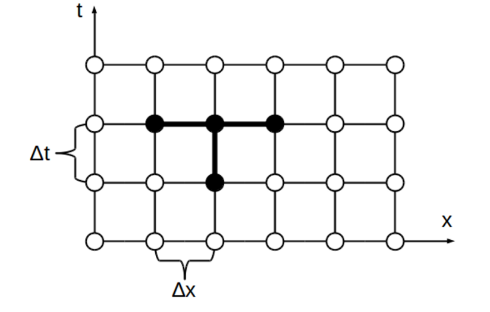
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

Ця ітераційна формула допоможе знайти усі значення невідомої функції у всіх невідомих вузлах сітки, за умови що відомі початковий шар часу, та крайові умови, але ця схема має обмеження за стійкістю.

Дана різницева схема є стійкою тільки за таких умов:

Малюнок 2. Явний різницевий шаблон

2. Неявна схема: значення вузла на новому шарі залежить і від сусідніх вузлів на новому шарі, і від значення на попередньому шарі (малюнок 3). Дана схема завжди є стійкою.

Малюнок 3. Неявний різницевий шаблон

Апроксимуємо частинні похідну функції u по змінній t в точці використовуючи праву скінченну різницю (2.2.1):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.2.4) |

Апроксимуємо частинну похідну другого порядку функції u по змінній x в точці за допомогою (2.2.3):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.2.5) |

Підставами отримані вирази (2.2.4), (2.2.5) в рівняння теплопровідності (1.1) і отримаємо:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Елементи з n-им кроком по часу перенесемо вправо, елементи з (n + 1) -им кроком по часу перенесемо вліво:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  | |  |
|  |  | | | (2.2.7) |

При цьому для обліку граничних умов, значення зовнішніх вузлів, що межують з внутрішніми вузлами необхідно перенести в праву частину.

Запишемо отриману різницеву схему (2.2.7) у вигляді СЛАР:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.2.8) |
|  | | |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| (1+2s) | -s | 0 | .. | 0 | 0 | 0 | … | 0 | 0 |  |  |  |  |
| -s | (1+2s) | -s | … | 0 | 0 | 0 | … | 0 | 0 |  |  |  |  |
|  |  |  | .  .  . |  |  |  | .  .  . |  |  |  | .  .  . |  | .  .  . |
| 0 | 0 | 0 | … | (1+2s) | -s | 0 | … | 0 | 0 |  |  |  |  |
| 0 | 0 | 0 | … | -s | (1+2s) | -s | … | 0 | 0 |  |  |  |  |
| 0 | 0 | 0 |  | 0 | -s | (1+2s) | … | 0 | 0 | X |  | = |  |
| 0 | 0 | 0 | … | 0 | 0 | -s | … | 0 | 0 |  |  |  |  |
|  |  |  | .  .  . |  |  |  | .  .  . |  |  |  | .  .  . |  | .  .  . |
| 0 | 0 | 0 | … | 0 | 0 | 0 | … | (1+2s) | -s |  |  |  |  |
| 0 | 0 | 0 | … | 0 | 0 | 0 | … | -s | (1+2s) |  |  |  |  |

(2.2.9)

Розв’язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь (2.2.9) описує (n+1)-й шаг часу, якщо відомий n-й.

Така СЛАР називається тридіагональною. Можна знайти більш ефективний метод розв’язання такої СЛАР, ніж звичайний метод Гауса. Такий метод ми опишемо далі.

2.3 Розв’язання СЛАР методом прогонки

Система рівнянь рівносильна співвідношенню:



Метод прогонки грунтується на припущенні, що шукані невідомі пов'язані рекурентним співвідношенням:

 (2)

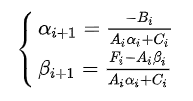
Використовуючи це співвідношення, висловимо і через і підставимо в рівняння (1):



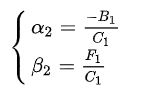
де - права частина i-го рівняння. Це співвідношення буде виконуватися незалежно від рішення, якщо потребувати:



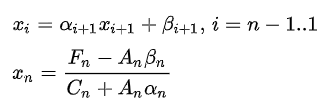
Звідси випливає:



З першого рівняння отримаємо:



Після знаходження прогоночних коефіцієнтів , використовуючи рівняння (2), отримаємо рішення системи. При цьому,



РОЗДІЛ 3. ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

Програму написано мовою *C#* за допомогою середовища програмування *Visual Studio 2015.* У проекті використано бібліотеку роботи з матрицями *Extreme.Numerics* та бібліотеку для роботи з файлами EXCEL *Bytescout.Spreadsheet .* Проект містить модулі, у яких описані класи та методи наближеного розв’язання рівняння теплопровідності:

* IDiffusionGridMethod.cs
* MainForm.cs
* ExplicitGridMethod.cs
* ImplicitGridMethod.cs
* Solution.cs

3.1 Опис модулів програми

Інтерфейс IDiffusionGridMethod.cs

Інтерфейс IDiffusionGridMethod декларує основні методи, які будуть реалізовуватися у всіх наступних методах.

Віртуальні методи інтерфейсу IDiffusionGridMethod:

void calculate() – заповнює невідомі значення функції у всіх вузлах сітки.

int getTimeLayersNum() – повертає кількість часових шарів.

List<PointD> getTimeLayer(int j) – повертає масив значень невідомої функції у часовий шар.

void writeResult(Spreadsheet document) – записує результуючі таблиці у файл формату EXCEL

Клас ImplicitGridMethod.cs

Клас ImplicitGridMethod описує метод неявної скінченно-різнецевої схеми.

Клас ExplicitGridMethod.cs

Клас ExplicitGridMethod описує явної скінченно-різнецевої схеми.

Клас Solution.cs

Клас Solution описує точний розв’зок невідомої функції у заданих вузлах сітки. Цей клас реалізовує метод Фур’є у методі calculate.

Клас MainForm.cs

Клас MainForm являє собою форму користувача, де можна побачити графік зміни температури стержня з плином часу.