Задание 7. Арифметика ординалов и кардиналов.

1. а) Докажите, что: сложение и умножение ординалов ассоциативны, не коммутативны, и обладают нейтральными элементами.

б) Докажите, что умножение ординалов дистрибутивно слева, но не дистрибутивно справа относительно сложения.

2. а) Докажите, что $\alpha + \beta$ — порядковый тип в.у.м. $((\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta); \sqsubset)$, где $(i, a) \sqsubset (j, b) \iff i < j \vee (i = j \wedge a < b)$.

б) Докажите, что $\alpha \cdot \beta$ — порядковый тип в.у.м. $(\alpha \times \beta; \sqsubset)$, где $(a, b) \sqsubset (a', b') \iff b < b' \vee (b = b' \wedge a < a')$.

3. Докажите, что $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$ и $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$.

4. а) Докажите, что: сложение и умножение кардиналов ассоциативны, коммутативны и обладают нейтральными элементами; умножение кардиналов дистрибутивно относительно сложения.

б) Докажите, что $(\varkappa \cdot \lambda)^\mu = \varkappa^\mu \cdot \lambda^\mu$ и $(\varkappa^\lambda)^\mu = \varkappa^{\lambda \cdot \mu}$.

5. Докажите, что $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = max\{\aleph_\alpha, \aleph_\beta\}$, и $\alpha \leq \beta \implies \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Определение сложения, умножения, и возведения в степень ординалов и кардиналов см. в файле reminderSet.pdf. Вместо $\aleph_\alpha, \aleph_\beta$ можно взять любые бесконечные множества A, B и читать $A \subseteq B$ вместо $\alpha \leq \beta$ и “A равномощно B” вместо $\aleph_\alpha = \aleph_\beta$.