Основы теории множеств, 1 курс СМ и НоД

Виктор Львович Селиванов [1]

[1]ФМКН СПбГУ

Осенний семестр, 2024

Важная дополнительная информация

Мой адрес:
v.selivanov@spbu.ru

Страница курса в интернете:
https://github.com/vseliv/Sets-2024-1

Литература:

1. Н.К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. ч. 1. Начала теории множеств. — М.: МЦНМО, 2012.

2. К. Куратовский, А. Мостовский, Теория множеств. М.: Мир, 1970.

3. Т. Йех, Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973.

4. И.А. Лавров, Л.Л.Максимова, Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Наука, 2001.

Зачем нужна теория множеств?

Теория множеств имеет двоякую природу. С одной стороны, это совершенно самостоятельная дисциплина со своими задачами, открытыми вопросами, подходами и идеями, которой занимается ограниченный круг специалистов.

С другой же стороны, она является инструментом для других дисциплин. Эта её роль является особенно существенной, поскольку она выработала общий язык для всей математики.

Зачем нужна теория множеств?

Теория множеств имеет двоякую природу. С одной стороны, это совершенно самостоятельная дисциплина со своими задачами, открытыми вопросами, подходами и идеями, которой занимается ограниченный круг специалистов.

С другой же стороны, она является инструментом для других дисциплин. Эта её роль является особенно существенной, поскольку она выработала общий язык для всей математики.

Более того, она позволила преодолеть кризис оснований математики, позникший на рубеже 19 и 20 веков, когда в математике были обнаружены противоречия (парадоксы).

Зачем нужна теория множеств?

Важной идеей является возможность сведения одних математических объектов к другим. Один из известнейших примеров такого сведения принадлежит Рене Декарту, который предложил отождествлять вещественные числа с точками на обычной Евклидовой прямой. Это привычное нам сейчас, но тогда совершенно революционное соображение привело к созданию метода координат, перевернувшего всё тогдашнее естествознание, и позволило считать, что геометрия, в определённом смысле, сводится к вещественной арифметике.

Зачем нужна теория множеств?

Важной идеей является возможность сведения одних математических объектов к другим. Один из известнейших примеров такого сведения принадлежит Рене Декарту, который предложил отождествлять вещественные числа с точками на обычной Евклидовой прямой. Это привычное нам сейчас, но тогда совершенно революционное соображение привело к созданию метода координат, перевернувшего всё тогдашнее естествознание, и позволило считать, что геометрия, в определённом смысле, сводится к вещественной арифметике.

Выяснилось, что ВСЕ математические понятия сводятся к понятию множества, т.е. (почти) все математические дисциплины можно считать разделами теории множеств. Т.о., изучая ТМ мы лучше поймем и другие разделы математики. Создание теории множеств заложило прочный фундамент для математики и показало ее единство.

Этапы развития теории множеств

1. Наивная теория множеств.
Идеи, близкие к идеям ТМ, воникали у многих ученых, однако в явном виде она начала развиваться примерно полтора века назад в работах Георга Кантора и его последователей.

Этапы развития теории множеств

1. Наивная теория множеств.
Идеи, близкие к идеям ТМ, воникали у многих ученых, однако в явном виде она начала развиваться примерно полтора века назад в работах Георга Кантора и его последователей.

2. Аксиоматическая ТМ (ZFC и ее варианты).
Возникла как попытка преодоления противоречий, возникших в наивной ТМ (Цермело, Френкель, Гёдель, Бернайс, фон Нейман,...).

Этапы развития теории множеств

1. Наивная теория множеств.
Идеи, близкие к идеям ТМ, воникали у многих ученых, однако в явном виде она начала развиваться примерно полтора века назад в работах Георга Кантора и его последователей.

2. Аксиоматическая ТМ (ZFC и ее варианты).
Возникла как попытка преодоления противоречий, возникшихих в наивной ТМ (Цермело, Френкель, Гёдель, Бернайс, фон Нейман,...).

3. Альтернативы ZFC.
Рассел, Мычельский, Штейнгауз, Мартин-Лёф, Ловер,...

Множества и операции над ними

Все переменные обозначают множества. Принадлежность: $a \in A$.
Равенство: $A = B$ означает $\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$.
Включение: $A \subseteq B$ означает $\forall x (x \in A \to x \in B)$.

Множества часто задаются в виде $\{x \mid \varphi(x)\}$, где $\varphi(x)$ — выражение, построенное из переменных и отношений $=, \in$ с помощью логических операций $\wedge, \vee, \to, \neg, \forall, \exists$. Самое популярное множество: $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$.

Множества и операции над ними

Все переменные обозначают множества. Принадлежность: $a \in A$.
Равенство: $A = B$ означает $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$.
Включение: $A \subseteq B$ означает $\forall x(x \in A \to x \in B)$.

Множества часто задаются в виде $\{x \mid \varphi(x)\}$, где $\varphi(x)$ — выражение, построенное из переменных и отношений $=, \in$ с помощью логических операций $\wedge, \vee, \to, \neg, \forall, \exists$. Самое популярное множество: $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$.

Объединение: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.
Пересечение: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.
Разность: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.
Симметрическая разность: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
Дополнение: $\overline{A} = U \setminus A$ (если все рассматриваемые множества содержатся в U).

Свойства булевых операций

$A \cup A = A$, $A \cup B = B \cup A$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{C}$, $\overline{\overline{A}} = A$.

Все написанные выше свойства справедливы при замене объединения на пересечение и наоборот.

Свойства булевых операций

$A \cup A = A$, $A \cup B = B \cup A$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{C}$, $\overline{\overline{A}} = A$.

Все написанные выше свойства справедливы при замене объединения на пересечение и наоборот.

$\triangle$ коммутативна и ассоциативна, $\cap$ дистрибутивна относительно $\triangle$

$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

$A \setminus (A \setminus B) = (A \cap B)$

$A \setminus B = (A \setminus (A \cap B)$

Отношения

Декартово произведение: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$, где $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ — упорядоченная пара.
Подмножества $R \subseteq A \times B$ называются отношениями между A и B. Запись $(a, b) \in R$ иногда упрощают до aRb. Бывают также n-местные отношения (подмножества множества $A_1 \times \cdots \times A_n$).
$dom(R) := \{a \mid \exists b(aRb)\}$ — область определения R,
$rng(R) := \{b \mid \exists a(aRb)\}$ — область значений R,
$R(a) := \{b \mid aRb\}$ — значение R в точке A.

Отношения

Декартово произведение: $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$, где $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$ — упорядоченная пара.
Подмножества $R \subseteq A \times B$ называются отношениями между A и B. Запись $(a,b) \in R$ иногда упрощают до aRb. Бывают также n-местные отношения (подмножества множества $A_1 \times \cdots \times A_n$).
$dom(R) := \{a \mid \exists b(aRb)\}$ — область определения R,
$rng(R) := \{b \mid \exists a(aRb)\}$ — область значений R,
$R(a) := \{b \mid aRb\}$ — значение R в точке A.

Пусть $R^{-1} := \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$, тогда $R^{-1} \subseteq B \times A$ называется обратным отношением к R. $(R^{-1})^{-1} = R$.
Композицией отношений $R \subseteq A \times B$ и $S \subseteq B \times C$ называется отношение $S \circ R \subseteq A \times C$ такое, что
$a(S \circ R)c \overset{\text{def}}{\iff} \exists b \in B(aRb \wedge bSc)$. Композиция ассоциативна и $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

Функции

Отношение $R \subseteq A \times B$ *функционально*, если $\forall a, b, b'(aRb \wedge aRb' \to b = b')$. В этом случае $R(a) = \emptyset$ или $R(a) = \{b\}$ для единственного b; в последнем случае часто пишут $R(a) = b$. Функциональные отношения $R \subseteq A \times B$ известны также как *частичные функции* из A в B.

Функции

Отношение $R \subseteq A \times B$ *функционально*, если $\forall a, b, b'(aRb \wedge aRb' \to b = b')$. В этом случае $R(a) = \emptyset$ или $R(a) = \{b\}$ для единственного b; в последнем случае часто пишут $R(a) = b$. Функциональные отношения $R \subseteq A \times B$ известны также как *частичные функции* из A в B.

Отношение R называется *функцией*, если оно функционально и $dom(R) = A$. В этом случае $R(a) = \{b\}$ для единственного b, которое называют значением функции R в точке a и пишут $R(a) = b$. Для функций используется стандартная терминолгия. Функция f из A в B часто обозначается $f : A \to B$. Композиция функций является функцией.

Функции

Отношение $R \subseteq A \times B$ *функционально*, если $\forall a, b, b'(aRb \wedge aRb' \to b = b')$. В этом случае $R(a) = \emptyset$ или $R(a) = \{b\}$ для единственного b; в последнем случае часто пишут $R(a) = b$. Функциональные отношения $R \subseteq A \times B$ известны также как *частичные функции* из A в B.

Отношение R называется *функцией*, если оно функционально и $dom(R) = A$. В этом случае $R(a) = \{b\}$ для единственного b, которое называют значением функции R в точке a и пишут $R(a) = b$. Для функций используется стандартная терминолгия. Функция f из A в B часто обозначается $f : A \to B$. Композиция функций является функцией.

Функция $f : A \to B$ называется инъекцией (сюръекцией), если $\forall a, a_1 \in A(a \neq a_1 \to f(a) \neq f(a_1))$ $(\forall b \in B \exists a \in A(f(a) = b))$. Функция называется биекцией, если она является и инъекцией, и сюръекцией. Биекции из A на A образуют группу относительно композиции.

Предпорядки и эквивалентности

Некоторые важные свойства отношений $R \subseteq A \times A$:

$\forall a \in A(aRa)$ рефлексивность,
$\forall a \in A \neg(aRa)$ антирефлексивность,

$\forall a, b \in A(aRb \to bRa)$ симметричность,
$\forall a, b \in A(aRb \wedge bRa \to a = b)$ антисимметричность,

$\forall a, b, c \in A((aRb \wedge bRc) \to aRc)$ транзитивность

Предпорядки и эквивалентности

Некоторые важные свойства отношений $R \subseteq A \times A$:

$\forall a \in A(aRa)$ рефлексивность,
$\forall a \in A \neg(aRa)$ антирефлексивность,

$\forall a, b \in A(aRb \to bRa)$ симметричность,
$\forall a, b \in A(aRb \wedge bRa \to a = b)$ антисимметричность,

$\forall a, b, c \in A((aRb \wedge bRc) \to aRc)$ транзитивность

Предпорядок = рефлексивность и транзитивность; типичные обозначения $\leq$, $\preceq$, $\subseteq$, $\sqsubseteq$.
Частичный порядок = антисимметричный предпорядок.
Линейный порядок = Частичный порядок +
$\forall a, b \in A(aRb \vee bRa)$.
Строгий частичный порядок = антирефлексивность и транзитивность; типичные обозначения $<$, $\prec$, $\subset$, $\sqsubset$

Эквивалентность = рефлексивность, симметричность и транзитивность; типичные обозначения $=$, $\simeq$, $\equiv$

Эквивалентности и фактор-множества

Пусть $\equiv$ — эквивалентность на A. Каждому $a \in A$ сопоставим множество $[a] \stackrel{\text{def}}{=} \{a' \in A \mid a' \equiv a\}$, называемое его *классом эквивалентности*. Множество $A/_{\equiv}$ всех таких классов называется фактор-множеством множества A по отношению $\equiv$.

Эквивалентности и фактор-множества

Пусть $\equiv$ — эквивалентность на A. Каждому $a \in A$ сопоставим множество $[a] \stackrel{\text{def}}{=} \{a' \in A \mid a' \equiv a\}$, называемое его *классом эквивалентности*. Множество $A/_{\equiv}$ всех таких классов называется фактор-множеством множества A по отношению $\equiv$.

ТЕОРЕМА. Если $\equiv$ — эквивалентность на A, то классы эквивалентности непусты, попарно не пересекаются и их объединение равно A.

Эквивалентности и фактор-множества

Пусть $\equiv$ — эквивалентность на A. Каждому $a \in A$ сопоставим множество $[a] \stackrel{\text{def}}{=} \{a' \in A \mid a' \equiv a\}$, называемое его *классом эквивалентности*. Множество $A/_{\equiv}$ всех таких классов называется фактор-множеством множества A по отношению $\equiv$.

ТЕОРЕМА. Если $\equiv$ — эквивалентность на A, то классы эквивалентности непусты, попарно не пересекаются и их объединение равно A.

Д-ВО. В качестве объединения классов эквивалентности множество A представляется: любой элемент $a \in A$ эквивалентен самому себе, а значит принадлежит классу $[a]$. Остаётся показать, что разные классы не пересекаются. Покажем, что если $a \in [b] \cap [c]$, то $[b] = [c]$. В самом деле, пусть $b' \in [b]$, тогда $b' \equiv b$. Но также и $a \equiv b$, что по транзитивности означает, что $b' \equiv a$. Аналогично можно показать, что если $c' \in [c]$, то $c' \equiv a$. Отсюда по транзитивности $b' \equiv c'$, т.е. $b' \equiv c$, т.е. $b' \in [c]$. Таким образом, $[b] \subseteq [c]$.

Натуральные числа в теории множеств

Пусть $\mathbb{N}$ — наименьшее по включению множество, содержащее $\emptyset$ и замкнутое относительно операции $x' = x \cup \{x\}$.
Можно проверить, что $(\mathbb{N}; \emptyset, ')$ — структура Пеано (т.е. удовлетворяет условиям $x' \neq \emptyset$, $x' = y' \to x = y$, и $[\emptyset \in P \wedge \forall x \in P(x' \in P)] \to P = \mathbb{N}$, для любого $P \subseteq \mathbb{N}$). Такая структура единственна с точностью до изоморфизма.

Натуральные числа в теории множеств

Пусть $\mathbb{N}$ — наименьшее по включению множество, содержащее $\emptyset$ и замкнутое относительно операции $x' = x \cup \{x\}$.
Можно проверить, что $(\mathbb{N}; \emptyset, ')$ — структура Пеано (т.е. удовлетворяет условиям $x' \neq \emptyset$, $x' = y' \to x = y$, и $[\emptyset \in P \wedge \forall x \in P(x' \in P)] \to P = \mathbb{N}$, для любого $P \subseteq \mathbb{N}$). Такая структура единственна с точностью до изоморфизма.

Определим на $\mathbb{N}$ отношение $<$ и операции $+, \cdot$ так:
$x < y \leftrightarrow x \in y$. $+$ — единственная бинарная операция на $\mathbb{N}$ такая, что $x + 0 = x$ и $x + y' = (x + y)'$. $\cdot$ — единственная бинарная операция на $\mathbb{N}$ такая, что $x \cdot 0 = 0$ и $x \cdot y' = x \cdot y + x$.

Натуральные числа в теории множеств

Пусть $\mathbb{N}$ — наименьшее по включению множество, содержащее $\emptyset$ и замкнутое относительно операции $x' = x \cup \{x\}$.
Можно проверить, что $(\mathbb{N}; \emptyset, ')$ — структура Пеано (т.е. удовлетворяет условиям $x' \neq \emptyset$, $x' = y' \to x = y$, и $[\emptyset \in P \wedge \forall x \in P(x' \in P)] \to P = \mathbb{N}$, для любого $P \subseteq \mathbb{N}$). Такая структура единственна с точностью до изоморфизма.

Определим на $\mathbb{N}$ отношение $<$ и операции $+, \cdot$ так:
$x < y \leftrightarrow x \in y$. $+$ — единственная бинарная операция на $\mathbb{N}$ такая, что $x + 0 = x$ и $x + y' = (x + y)'$. $\cdot$ — единственная бинарная операция на $\mathbb{N}$ такая, что $x \cdot 0 = 0$ и $x \cdot y' = x \cdot y + x$.

Свойства $(\mathbb{N}; +, \cdot, <, 0, 1)$: $+, \cdot$ ассоциативны и коммутативны; $\cdot$ дистрибутивна относительно $+$; $0, 1$ нейтральны относительно $+, \cdot$; $0 < 1 < 2 < \cdots$ и между соседями нет других чисел;
$[P(0) \wedge \forall x(P(x) \to P(x+1))] \to \forall x P(x)$;
$\forall x(\forall y < x P(y) \to P(x)) \to \forall x P(x)$.

Целые числа в теории множеств

$\mathbb{Z} := (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$, где

$(a, b) \sim (c, d) \leftrightarrow a + d = b + c$.

$[a, b]\tilde{+}[c, d] := [a + c, b + d]$,
$[a, b]\tilde{\cdot}[c, d] := [ac + bd, ad + bc]$,

$[a, b]\tilde{\leq}[c, d] \leftrightarrow a + d \leq b + c$,
$\tilde{0} := [0, 0]$, $\tilde{1} := [1, 0]$.

Целые числа в теории множеств

$\mathbb{Z} := (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$, где

$(a, b) \sim (c, d) \leftrightarrow a + d = b + c$.

$[a, b] \tilde{+} [c, d] := [a + c, b + d]$,
$[a, b] \tilde{\cdot} [c, d] := [ac + bd, ad + bc]$,

$[a, b] \tilde{\leq} [c, d] \leftrightarrow a + d \leq b + c$,
$\tilde{0} := [0, 0]$, $\tilde{1} := [1, 0]$.

Свойства $(\mathbb{Z}; \tilde{+}, \tilde{\cdot}, \tilde{\leq}, \tilde{0}, \tilde{1})$:
Это упорядоченное кольцо
(т.е. $\tilde{+}, \tilde{\cdot}$ ассоциативны и коммутативны;
$\tilde{\cdot}$ дистрибутивна относительно $\tilde{+}$;
$\tilde{0}, \tilde{1}$ нейтральны относительно $\tilde{+}, \tilde{\cdot}$;
$\forall x \exists y (x + y = 0)$,
$\forall x, y, z (x \leq y \to (x + z \leq y + z))$,
$\forall x, y, z (x \leq y \land 0 < z \to (x \cdot z \leq y \cdot z)))$,
в котором любой элемент является разностью двух натуральных чисел.

Рациональные числа в теории множеств

$\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\})/\sim$, где

$(a, b) \sim (c, d) \leftrightarrow ad = bc$.

$[a, b]\tilde{+}[c, d] := [ad + bc, bd]$,
$[a, b]\tilde{\cdot}[c, d] := [ac, bd]$,

$[a, b]\tilde{\leq}[c, d] \leftrightarrow ad \leq bc$,
$\tilde{0} := [0, 1]$, $\tilde{1} := [1, 1]$.

Рациональные числа в теории множеств

$\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\})/\sim$, где

$(a, b) \sim (c, d) \leftrightarrow ad = bc$.

$[a, b]\tilde{+}[c, d] := [ad + bc, bd]$,
$[a, b]\tilde{\cdot}[c, d] := [ac, bd]$,

$[a, b]\tilde{\leq}[c, d] \leftrightarrow ad \leq bc$,
$\tilde{0} := [0, 1]$, $\tilde{1} := [1, 1]$.

Свойства $(\mathbb{Q}; \tilde{+}, \tilde{\cdot}, \tilde{\leq}, \tilde{0}, \tilde{1})$:
это упорядоченное поле (т.е. упорядоченное кольцо, в котором $\forall x \neq 0 \exists y (x \cdot y = 1)$)
такое, что любой элемент получается делением целого числа на положительное целое.

Вещественные числа в теории множеств

$\mathbb{R} := S/\sim$, где S — множество всех последовательностей Коши $\{q_i\}$ рациональных чсел
(т.е. $\forall n \exists m \forall i, j > m(|q_i - q_j| < 2^{-n})$),

$\{q_i\} \sim \{r_i\} \leftrightarrow \lim_i (q_i - r_i) = 0.$

$[\{q_i\}] \tilde{+} [\{r_i\}] := [\{q_i + r_i\}]$,
$[\{q_i\}] \tilde{\cdot} [\{r_i\}] := [\{q_i \cdot r_i\}]$,

$[\{q_i\}] \tilde{<} [\{r_i\}] \leftrightarrow \exists n, m \forall i > m(q_i - r_i < -2^{-n})$,
$\tilde{0} := [0, 0, \ldots]$, $\tilde{1} := [1, 1, \ldots]$.

Вещественные числа в теории множеств

$\mathbb{R} := S/\sim$, где S — множество всех последовательностей Коши $\{q_i\}$ рациональных чсел
(т.е. $\forall n \exists m \forall i, j > m(|q_i - q_j| < 2^{-n})$),

$\{q_i\} \sim \{r_i\} \leftrightarrow \lim_i (q_i - r_i) = 0.$

$[\{q_i\}]\tilde{+}[\{r_i\}] := [\{q_i + r_i\}]$,
$[\{q_i\}]\tilde{\cdot}[\{r_i\}] := [\{q_i \cdot r_i\}]$,

$[\{q_i\}]\tilde{<}[\{r_i\}] \leftrightarrow \exists n, m \forall i > m(q_i - r_i < -2^{-n})$,
$\tilde{0} := [0, 0, \ldots]$, $\tilde{1} := [1, 1, \ldots]$.

СВОЙСТВА $(\mathbb{R}; \tilde{+}, \tilde{\cdot}, \tilde{\leq}, \tilde{0}, \tilde{1})$:

Это полное упорядоченное поле (т.е. упорядоченное поле, в котором любое непустое ограниченное сверху множество имеет супремум).

Комплексные числа в теории множеств

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

$$(x, y)\tilde{+}(x_1, y_1) := (x + x_1, y + y_1),$$

$$(x, y)\tilde{\cdot}(x_1, y_1) := (xx_1 - yy_1, xy_1 + yx_1),$$

$$\tilde{0} := (0, 0),\ \tilde{1} := (1, 0),\ \tilde{i} := (0, 1),$$

Комплексные числа в теории множеств

$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$(x, y)\tilde{+}(x_1, y_1) := (x + x_1, y + y_1)$,

$(x, y)\tilde{\cdot}(x_1, y_1) := (xx_1 - yy_1, xy_1 + yx_1)$,

$\tilde{0} := (0, 0)$, $\tilde{1} := (1, 0)$, $\tilde{i} := (0, 1)$,

СВОЙСТВА $(\mathbb{C}; \tilde{+}, \tilde{\cdot}, \tilde{0}, \tilde{1})$:

Это поле, содержащее копию поля вещественных чисел $\tilde{\mathbb{R}} := \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\})$, в котором есть квадратный корень i из -1, и в котором каждый элемент представим в виде $x + i \cdot y$, $x, y \in \tilde{\mathbb{R}}$.

Мощность множества

О мощности множества можно думать, как о количестве его элементов. Однако непонятно, как быть с бесконечными множествами.

Мощность множества

О мощности множества можно думать, как о количестве его элементов. Однако непонятно, как быть с бесконечными множествами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. 1. A и B равномощны ($A \sim B$), если существует биекция $f : A \to B$.
2. A не превосходит по мощности B ($A \preceq B$), если существует инъекция $f : A \to B$.

Мощность множества

О мощности множества можно думать, как о количестве его элементов. Однако непонятно, как быть с бесконечными множествами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. 1. A и B равномощны ($A \sim B$), если существует биекция $f : A \to B$.
2. A не превосходит по мощности B ($A \preceq B$), если существует инъекция $f : A \to B$.

СВОЙСТВА. 1. Отношение $\sim$ рефлексивно, симметрично и транзитивно.
2. Отношение $\preceq$ рефлексивно и транзитивно.

Мощность множества

О мощности множества можно думать, как о количестве его элементов. Однако непонятно, как быть с бесконечными множествами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. 1. A и B равномощны ($A \sim B$), если существует биекция $f : A \to B$.
2. A не превосходит по мощности B ($A \preceq B$), если существует инъекция $f : A \to B$.

СВОЙСТВА. 1. Отношение $\sim$ рефлексивно, симметрично и транзитивно.
2. Отношение $\preceq$ рефлексивно и транзитивно.

Заметим, что $\sim$ "неформально" является отношением эквивалентности, но ввести фактор-множество нельзя, так как множества всех множеств не существует (покажем позже).

Мощность множества

О мощности множества можно думать, как о количестве его элементов. Однако непонятно, как быть с бесконечными множествами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. 1. A и B равномощны ($A \sim B$), если существует биекция $f : A \to B$.
2. A не превосходит по мощности B ($A \preceq B$), если существует инъекция $f : A \to B$.

СВОЙСТВА. 1. Отношение $\sim$ рефлексивно, симметрично и транзитивно.
2. Отношение $\preceq$ рефлексивно и транзитивно.

Заметим, что $\sim$ "неформально" является отношением эквивалентности, но ввести фактор-множество нельзя, так как множества всех множеств не существует (покажем позже).

ТЕОРЕМА. Если $A \preceq B$ и $B \preceq A$, то $A \sim B$.

Доказательство теоремы Шрёдера-Бернштейна

Пусть $f : A \to B$ и $g : B \to A$ — инъекции. Тогда $h = g \circ f : A \to A$ — инъекция.

Пусть $A_1 = g(B), A_2 = h(A)$. Заметим, что $A_2 \subseteq A_1 \subseteq A$ и $A_1 \sim B$, потому что $g : B \to A_1$ — биекция. Аналогично $h : A \to A_2$ — биекция.
Достаточно доказать, что $A \sim A_1$.

Доказательство теоремы Шрёдера-Бернштейна

Пусть $f : A \to B$ и $g : B \to A$ — инъекции. Тогда $h = g \circ f : A \to A$ — инъекция.

Пусть $A_1 = g(B), A_2 = h(A)$. Заметим, что $A_2 \subseteq A_1 \subseteq A$ и $A_1 \sim B$, потому что $g : B \to A_1$ — биекция. Аналогично $h : A \to A_2$ — биекция.
Достаточно доказать, что $A \sim A_1$.

Множество $X \subseteq A$ назовем хорошим, если $X \supseteq (A \setminus A_1) \cup h(X)$ (например, A хорошее).

Пусть C — пересечение всех хороших множеств. Тогда C хорошее, $C = (A \setminus A_1) \cup h(C)$, и $h(C) \subseteq A_2$.

Поэтому $u = id_{A \setminus C} \cup h|_C$ — биекция из A на A_1.

Теорема Кантора

ТЕОРЕМА. Для любого множества A справедливо $A \prec P(A)$, т.е. $A \preceq P(A)$ и $A \not\sim P(A)$.

Теорема Кантора

ТЕОРЕМА. Для любого множества A справедливо $A \prec P(A)$, т.е. $A \preceq P(A)$ и $A \not\sim P(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $A \preceq P(A)$, поскольку $a \mapsto \{a\}$ — инъекция из A в $P(A)$.

Теперь докажем, что $A \not\sim P(A)$. Предположим противное: $A \sim P(A)$, тогда есть биекция $g : A \to P(A)$.

Рассмотрим множество $B = \{a \in A \mid a \notin g(a)\}$. Поскольку $B \in P(A)$, $B = g(a)$ для некоторого $a \in A$. Но тогда

$$a \in B \leftrightarrow a \in g(a) \leftrightarrow a \notin B,$$

противоречие.

Конечные множества

Множество называется конечным, если оно равномощно n для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Множества, не являющиеся конечными, называются бесконечными.

Конечные множества

Множество называется конечным, если оно равномощно n для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Множества, не являющиеся конечными, называются бесконечными.

ТЕОРЕМА. Для множества A равносильны условия:

1. A конечно.

2. Любое непустое подмножество булеана $P(A)$ имеет максимальный элемент по включению.

3. Любая инъекция $f : A \to A$ является биекцией.

Конечные множества

Множество называется конечным, если оно равномощно n для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Множества, не являющиеся конечными, называются бесконечными.

ТЕОРЕМА. Для множества A равносильны условия:

1. A конечно.

2. Любое непустое подмножество булеана $P(A)$ имеет максимальный элемент по включению.

3. Любая инъекция $f : A \to A$ является биекцией.

ТЕОРЕМА. Если A конечно и B бесконечно, то $A \prec B$.

Счетные и несчетные множества

Множество называется счетным, если оно равномощно $\mathbb{N}$.
Множества, не являющиеся конечными или счетными, называются несчетными.
Множество называется континуальным, если оно равномощно $P(\mathbb{N})$.

Счетные и несчетные множества

Множество называется счетным, если оно равномощно $\mathbb{N}$. Множества, не являющиеся конечными или счетными, называются несчетными.
Множество называется континуальным, если оно равномощно $P(\mathbb{N})$.

ТЕОРЕМА. Если A счетно и B бесконечно, то $A \preceq B$.

Счетные и несчетные множества

Множество называется счетным, если оно равномощно $\mathbb{N}$.
Множества, не являющиеся конечными или счетными, называются несчетными.
Множество называется континуальным, если оно равномощно $P(\mathbb{N})$.

ТЕОРЕМА. Если A счетно и B бесконечно, то $A \preceq B$.

Шкала мощностей: 0,1,2,..., счетные, несчетные.

Счетные и несчетные множества

Множество называется счетным, если оно равномощно $\mathbb{N}$. Множества, не являющиеся конечными или счетными, называются несчетными.
Множество называется континуальным, если оно равномощно $P(\mathbb{N})$.

ТЕОРЕМА. Если A счетно и B бесконечно, то $A \preceq B$.

Шкала мощностей: 0,1,2,..., счетные, несчетные.

Континнум-гипотеза (первая проблема Гильберта): если A несчетно, то $P(\mathbb{N}) \preceq A$.

Более простая, но нетривиальная задача: верно ли, что $\forall A, B(A \preceq B \vee B \preceq A)$?

Противоречия наивной теории можеств

Пусть $V = \{x \mid x = x\}$ — множество всех множеств. Тогда $P(V) \subseteq V$, поэтому $P(V) \preceq V$. Однако по теореме Кантора $V \prec P(V)$ — противоречие.

Противоречия наивной теории можеств

Пусть $V = \{x \mid x = x\}$ — множество всех множеств. Тогда $P(V) \subseteq V$, поэтому $P(V) \preceq V$. Однако по теореме Кантора $V \prec P(V)$ — противоречие.

Рассмотрим множество $Y = \{x \mid x \notin x\}$. Имеем $Y \in Y \leftrightarrow Y \notin Y$ — противоречие.

Противоречия наивной теории можеств

Пусть $V = \{x \mid x = x\}$ — множество всех множеств. Тогда $P(V) \subseteq V$, поэтому $P(V) \preceq V$. Однако по теореме Кантора $V \prec P(V)$ — противоречие.

Рассмотрим множество $Y = \{x \mid x \notin x\}$. Имеем $Y \in Y \leftrightarrow Y \notin Y$ — противоречие.

Из каждого из этих противоречий (известных также как парадоксы) можно вывести вообще все возможные утверждения, и истинные, и ложные. Звучит неприятно.

Можно было бы, конечно, разочароваться в самой идее построения оснований математики, но мыслители начала XX века всё-таки не сдались и придумали ряд выходов из положения, предполагающих создание аксиоматической теории множеств, учитывающей ошибки наивного подхода и дающей надежные основания математики.