ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ — 2023

Виктор Львович Селиванов
v.selivanov@spbu.ru

Важная дополнительная информация:
https://github.com/vseliv/SetTheory2023

ЛИТЕРАТУРА:

1. Н.К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. ч. 1. Начала теории множеств. — М.: МЦНМО, 2012.

2. К. Куратовский, А. Мостовский, Теория множеств. М.: Мир, 1970.

3. Т. Йех, Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973.

4. И.А. Лавров, Л.Л.Максимова, Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Наука, 2001.

ОТНОШЕНИЯ И ОПЕРАЦИИ:

Равенство: $A = B$ означает $\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$.

Включение: $A \subseteq B$ означает $\forall x (x \in A \to x \in B)$.

Объединение: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.

Пересечение: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.

Разность: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.

Симметрическая разность: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Дополнение: $\overline{A} = U \setminus A$ (если все рассматриваемые множества содержатся в U).

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА

$A \cup A = A$, $A \cup B = B \cup A$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{C}$, $\overline{\overline{A}} = A$

Все написанные выше свойства справедливы при замене объединения на пересечение и наоборот.

$\triangle$ коммутативна и ассоциативна, $\cap$ дистрибутивна относительно $\triangle$

$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

$A \setminus (A \setminus B) = (A \cap B)$

$A \setminus B = (A \setminus (A \cap B)$

БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ, ФУНКЦИИ

Произведение:
$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$.
Подмножества $R \subseteq A \times B$ называются отношениями между A и B. Запись $(a, b) \in R$ иногда упрощают до aRb.

$R^{-1} := \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$, $R^{-1} \subseteq B \times A$ — обратное отношение. $(R^{-1})^{-1} = R$.

$dom(R) := \{a \mid \exists b(aRb)\}$ — область определения R,
$rng(R) := \{b \mid \exists a(aRb)\}$ — область значений R. $R(a) := \{b \mid aRb\}$

R функционально, если $\forall a, b, b'(aRb \wedge aRb' \to b = b')$. В этом случае $R(a) = \emptyset$ или $R(a) = \{b\}$ для единственного b.

R — функция, если оно функционально и $dom(R) = A$. В этом случае $R(a) = \{b\}$ для единственного b, которое называют значением функции R в точке a и пишут $R(a) = b$.

КЛАССЫ ОТНОШЕНИЙ $R \subseteq A \times A$

$\forall a \in A(aRa)$ рефлексивность
$\forall a \in A \neg(aRa)$ антирефлексивность

$\forall a, b \in A(aRb \to bRa)$ симметричность
$\forall a, b \in A(aRb \wedge bRa \to a = b)$ антисимметричность

$\forall a, b, c \in A((aRb \wedge bRc) \to aRc)$ транзитивность

Предпорядок = рефлексивность и транзитивность, $\leq$, $\preceq$, $\subseteq$, $\sqsubseteq$
Частичный порядок = антисимметричный предпорядок
Линейный порядок = Частичный порядок + $\forall a, b \in A(aRb \vee bRa)$
Строгий порядок = антирефлексивность и транзитивность $<$, $\prec$, $\subset$, $\sqsubset$

Эквивалентность = рефлексивность, симметричность и транзитивность $=$, $\simeq$, $\equiv$

НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА В ТМ

$\mathbb{N}$ — наименьшее по включению множество, содержащее $\emptyset$ и замкнутое относительно операции $x' = x \cup \{x\}$. Справедливо свойство индукции $[P(\emptyset) \wedge \forall x(P(x) \to P(x'))] \to \forall x P(x)$, т.е. $(\mathbb{N}; \emptyset, ')$ — структура Пеано.

$+$ — единственная бинарная операция на $\mathbb{N}$ такая, что $x + 0 = x$ и $x + y' = (x + y)'$.
$\cdot$ — единственная бинарная операция на $\mathbb{N}$ такая, что $x \cdot 0 = 0$ и $x \cdot y' = x \cdot y + x$.
$x \leq y \leftrightarrow \exists z(x + z = y)$.
СВОЙСТВА СТРУКТУРЫ $(\mathbb{N}; +, \cdot, \leq, 0, 1)$:

$+, \cdot$ ассоциативны и коммутативны,
$\cdot$ дистрибутивна относительно $+$,
$0, 1$ нейтральны относительно $+, \cdot$,
$0 < 1 < 2 < \cdots$ и между соседями нет других чисел,
$[P(0) \wedge \forall x(P(x) \to P(x+1))] \to \forall x P(x)$,
$\forall x(\forall y < x P(y) \to P(x)) \to \forall x P(x)$.

ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА В ТМ

Уже есть $(\mathbb{N}; +, \cdot, \leq, 0, 1)$.

$\mathbb{Z} := (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$, где

$(a, b) \sim (c, d) \leftrightarrow a + d = b + c$.

$[a, b]\tilde{+}[c, d] := [a + c, b + d]$,
$[a, b]\tilde{\cdot}[c, d] := [ac + bd, ad + bc]$,

$[a, b]\tilde{\leq}[c, d] \leftrightarrow a + d \leq b + c$,
$\tilde{0} := [0, 0]$, $\tilde{1} := [1, 0]$.

СВОЙСТВА $(\mathbb{Z}; \tilde{+}, \tilde{\cdot}, \tilde{\leq}, \tilde{0}, \tilde{1})$:

Это упорядоченное кольцо
(т.е. $\tilde{+}, \tilde{\cdot}$ ассоциативны и коммутативны;
$\tilde{\cdot}$ дистрибутивна относительно $\tilde{+}$;
$\tilde{0}, \tilde{1}$ нейтральны относительно $\tilde{+}, \tilde{\cdot}$;
$\forall x \exists y (x + y = 0)$,
$\forall x, y, z (x \leq y \to (x + z \leq y + z))$,
$\forall x, y, z (x \leq y \wedge 0 < z \to (x \cdot z \leq y \cdot z)))$,
в котором любой элемент является разностью двух натуральных чисел.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА В ТМ

Уже есть $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

$\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\})/\sim$, где

$(a, b) \sim (c, d) \leftrightarrow ad = bc$.

$[a, b]\tilde{+}[c, d] := [ad + bc, bd]$,
$[a, b]\tilde{\cdot}[c, d] := [ac, bd]$,

$[a, b]\tilde{\leq}[c, d] \leftrightarrow ad \leq bc$,
$\tilde{0} := [0, 1]$, $\tilde{1} := [1, 1]$.

СВОЙСТВА $(\mathbb{Q}; \tilde{+}, \tilde{\cdot}, \tilde{\leq}, \tilde{0}, \tilde{1})$:

Это упорядоченное поле (т.е. упорядоченное кольцо, в котором $\forall x \neq 0 \exists y (x \cdot y = 1)$) такое, что любой элемент получается делением целого числа на положительное целое.

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА В ТМ

Уже есть $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

$\mathbb{R} := S/\sim$, где S — множество всех последовательностей Коши $\{q_i\}$ рациональных чсел (т.е. $\forall n \exists m \forall i, j > m(|q_i - q_j| < 2^{-n})$),

$\{q_i\} \sim \{r_i\} \leftrightarrow \lim_i (q_i - r_i) = 0$.

$[\{q_i\}]\tilde{+}[\{r_i\}] := [\{q_i + r_i\}]$,
$[\{q_i\}]\tilde{\cdot}[\{r_i\}] := [\{q_i \cdot r_i\}]$,

$[\{q_i\}]\tilde{<}[\{r_i\}] \leftrightarrow \exists n, m \forall i > m(q_i - r_i < -2^{-n})$,
$\tilde{0} := [0, 0, \ldots]$, $\tilde{1} := [1, 1, \ldots]$.

СВОЙСТВА $(\mathbb{R}; \tilde{+}, \tilde{\cdot}, \tilde{\leq}, \tilde{0}, \tilde{1})$:

Это полное упорядоченное поле (т.е. упорядоченное поле, в котором любое непустое ограниченное сверху множество имеет супремум).

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В ТМ

Уже есть $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. В любом упорядоченном кольце не существует элемента i со свойством $i^2 = -1$. Поле комплексных чисел есть наименьшее расширение поля вещественных чисел, обладающее таким элементом.

$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$(x, y)\tilde{+}(x_1, y_1) := (x + x_1, y + y_1)$,

$(x, y)\tilde{\cdot}(x_1, y_1) := (xx_1 - yy_1, xy_1 + yx_1)$,

$\tilde{0} := (0, 0)$, $\tilde{1} := (1, 0)$, $\tilde{i} := (0, 1)$,

СВОЙСТВА $(\mathbb{C}; \tilde{+}, \tilde{\cdot}, \tilde{0}, \tilde{1})$:

Это поле, удовлетворяющее сформулированным в начале условиям (копия поля вещественных чисел “внутри” $\mathbb{C}$ есть $\tilde{\mathbb{R}} := \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$).

АКСИОМЫ ZFC

0. $\exists x(x = x)$.

1. $\forall u(u \in X \leftrightarrow u \in Y) \to X = Y$.

2. $\forall u \forall v \exists x \forall z(z \in x \leftrightarrow z = u \vee z = v)$.

3. $\forall X \exists Y \forall u(u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi(u))$.

4. $\forall X \exists Y \forall u \forall z(u \in z \wedge z \in X \to u \in Y)$.

5. $\forall X \exists Y \forall u(u \in Y \leftrightarrow u \subseteq X)$.

6. $\forall x \forall y \forall y'(\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, y') \to y = y')$
$\to \forall X \exists Y \forall x \forall y(x \in X \wedge \varphi(x, y) \to y \in Y)$.

7. $\exists Y(\emptyset \in Y \wedge \forall y(y \in Y \to y \cup \{y\} \in Y))$.

8. $\forall X(X \neq \emptyset \to \exists x(x \in X \wedge \forall u(u \in x \to u \notin X)))$.

9. $\forall X \exists f((f : (P(X) \setminus \{\emptyset\}) \to X) \wedge \forall Y(Y \subseteq X \wedge Y \neq \emptyset \to f(Y) \in Y))$.

ОРДИНАЛЫ

1) S транзитивно, если $x \in y \in S \to x \in S$

2) S ординал, если оно транзитивно и $\forall x, y \in S (x \in y \vee y \in x \vee x = y)$

3) Ординалы обозначаем $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, Ord — класс всех ординалов, сужение отношения $\in$ на Ord обозначаем $<$

СВОЙСТВА ОРДИНАЛОВ

1) $x \in \alpha \to x \in Ord$, 2) $\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$

3) $(\alpha; \in) \simeq (\beta; \in) \iff \alpha = \beta$

4) $\alpha < \beta \vee \beta < \alpha \vee \alpha = \beta$

5) $\alpha \subseteq \beta \iff \alpha \leq \beta$

6) $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ — наименьший ординал, больший α

7) Любое множество A ординалов вполне упорядочено отношением $<$, причем $\bigcup A = sup(A)$

8) Класс Ord не является множеством

9) Любое вполне упорядоченное множество изоморфно единственному ординалу.

АРИФМЕТИКА ОРДИНАЛОВ

$\alpha + \beta$ — порядковый тип в.у.м. $((\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta); \sqsubset)$, где $(i, a) \sqsubset (j, b) \iff i < j \vee (i = j \wedge a < b)$;

$\alpha \cdot \beta$ — порядковый тип в.у.м. $(\alpha \times \beta; \sqsubset)$, где $(a, b) \sqsubset (a', b') \iff b < b' \vee (b = b' \wedge a < a')$;

$\alpha + 0 := \alpha$, $\alpha + (\beta + 1) := (\alpha + \beta) + 1$,
$\alpha + \gamma := sup\{\alpha + \beta \mid \beta < \gamma\}$, γ предель.

$\alpha \cdot 0 := 0$, $\alpha \cdot (\beta + 1) := (\alpha \cdot \beta) + \alpha$,
$\alpha \cdot \gamma := sup\{\alpha \cdot \beta \mid \beta < \gamma\}$, γ предельный.

$\alpha^0 := 1$, $\alpha^{\beta+1} := (\alpha^\beta) \cdot \alpha$,
$\alpha^\gamma := sup\{\alpha^\beta \mid \beta < \gamma\}$, γ предельный.

СВОЙСТВА

1) $+, \cdot$ ассоциативны и не коммутативны;
2) $\cdot$ дистрибутивно слева, но не справа относительно $+$;
3) $0, 1$ нейтральны относительно $+, \cdot$;
4) $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$;
5) $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$.

АРИФМЕТИКА КАРДИНАЛОВ

Кардинал = ординал, не равномощный никакому меньшему ординалу. Любое множество равномощно единственному кардиналу, который называется мощнстью этого множества.

$\varkappa^+$ наименьший кардинал, бoльший $\varkappa$;
$\varkappa + \lambda := |(\{0\} \times \varkappa) \cup (\{1\} \times \lambda)|$;
$\varkappa \cdot \lambda := |\varkappa \times \lambda|$;
$\varkappa^\lambda := |\{f \mid f : \lambda \to \varkappa\}|$.

СВОЙСТВА

1) $+, \cdot$ ассоциативны и коммутативны;
2) $\cdot$ дистрибутивна относительно $+$;
3) $0, 1$ нейтральны относительно $+, \cdot$;
4) $(\varkappa \cdot \lambda)^\mu = \varkappa^\mu \cdot \lambda^\mu$;
5) $(\varkappa^\lambda)^\mu = \varkappa^{\lambda \cdot \mu}$;
6) $(\varkappa^+)^\lambda = \varkappa^+ \cdot \varkappa^\lambda$;
7) $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = max\{\aleph_\alpha, \aleph_\beta\}$;
8) $\alpha \le \beta \implies \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$.