Задание 3. Фильтрованные произведения и компактность

1. Говорят, что формула $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ условно фильтруется по фильтру F на множестве I, если для любого семейства структур $\{\mathbb{A}_i\}_{i \in I}$ из $\{i \mid \mathbb{A}_i \models \varphi(a_1(i), \ldots, a_k(i))\} \in F$ следует $\mathbb{A}_F \models \varphi([a_1], \ldots, [a_k])$. Говорят, что $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ фильтруется по F, если $\{i \mid \mathbb{A}_i \models \varphi(a_1(i), \ldots, a_k(i))\} \in F$ равносильно $\mathbb{A}_F \models \varphi([a_1], \ldots, [a_k])$.

Докажите, что если φ, ψ условно фильтруются по F, то и $\varphi \wedge \psi$, $\forall x \varphi$, $\exists x \varphi$ также условно фильтруются по F.

Докажите, что если φ, ψ фильтруются по F, то и $\varphi \wedge \psi$, $\exists x \varphi$ также фильтруются по F.

2. Докажите, что любое фильтрованное произведение групп (предпорядков, частичных порядков) является группой (предпорядком, частичным порядком).

Докажите, что для линейых порядков аналогичное утверждение, вообще говоря, неверно, но оно верно для ультрапроизведений.

3. Теория (т.е. множество предложений) называется категоричной, если она имеет единственную модель (с точностью до изоморфизма).

Докажите, что если теория категорична, то ее единственная модель конечна.

Докажите, что любая конечная структура конечной сигнатуры является единственной (с точностью до изоморфизма) моделью подходящей теории.

4. Докажите, что если теория не более чем счетной сигнатуры не имеет конечных моделей и категорична в некоторой мощности (т.е. имеет единственную (с точностью до изоморфизма) модель этой мощности), то она полна (т.е. любое предложение или само следует из этой теории, или его отрицание следует из этой теории).

5. Выведите из теоремы компактности, что существует полное упорядоченное поле (т.е. упорядоченное поле, в котором каждое непустое ограниченное сверху множество имеет супремум). Докажите, что полное упорядоченное поле единственно с точностью до изоморфизма.