Задание 1. Множества, отношения, функции.

1. а) Докажите, что $A \cup A = A$, $A \cup B = B \cup A$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, и что эти свойства остаются справедливыми при замене объединения на пересечение и наоборот.

б) Докажите, что операция $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ коммутативна и ассоциативна, $\cap$ дистрибутивна относительно $\triangle$, $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, $A \setminus (A \setminus B) = (A \cap B)$, и $A \setminus B = (A \setminus (A \cap B)$.

2. а) Докажите, что множество $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ обладает свойством упорядоченной пары, т.е. $(x, y) = (x_1, y_1)$ в точности тогда, когда $x = x_1$ и $y = y_1$.

б) Докажите, что операция композиции бинарных отношений на данном множестве ассоциативна, но, вообще говоря, не коммутативна. Задает ли эта операция группу на этом множестве? Ответ обоснуйте.

3. Перечислите все упорядоченные пары множеств из списка $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, для которых существует инъекция первого множества во второе. Ответ обоснуйте.

4. Существует ли биекция между следующими множествами:
$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$ и $Y \times X$,
$(X \times Y) \times Z$ и $X \times (Y \times Z)$,
$X^Y = \{f \mid f : Y \to X\}$ и Y^X,
$(X^Y)^Z$ и $X^{Y \times Z}$, $(X^Y)^Z$ и X^{Y^Z},
$(X \times Y)^Z$ и $X^Z \times Y^Z$,
$P(x) = \{y \mid y \subseteq x\}$ и $\{0, 1\}^X$?
Ответ обоснуйте.

5. а) Пусть $x' = x \cup \{x\}$. Найдите $\emptyset''''$ и $P^4(\emptyset) = P(P(P(P(\emptyset))))$. Сколько элементов в множестве $P^5(\emptyset)$?

б) Множество X называется индуктивным, если $\emptyset \in X$ и $x \in X \to x' \in X$. Может ли индуктивное множество быть конечным? Докажите, что существует наименьшее по включению индуктивное множество.