

Основы теории множеств, 1 курс СМ и НоД

Виктор Львович Селиванов¹

¹ФМКН СПбГУ

Осенний семестр, 2024

Важная дополнительная информация

Мой адрес:

v.selivanov@spbu.ru

Страница курса в интернете:

<https://github.com/vseliv/Sets-2024-1>

Литература:

1. Н.К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. ч. 1. Начала теории множеств. — М.: МЦНМО, 2012.
2. К. Куратовский, А. Мостовский, Теория множеств. М.: Мир, 1970.
3. Т. Йех, Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973.
4. И.А. Лавров, Л.Л.Максимова, Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Наука, 2001.

Зачем нужна теория множеств?

Теория множеств имеет двоякую природу. С одной стороны, это совершенно самостоятельная дисциплина со своими задачами, открытыми вопросами, подходами и идеями, которой занимается ограниченный круг специалистов.

С другой же стороны, она является инструментом для других дисциплин. Эта её роль является особенно существенной, поскольку она выработала общий язык для всей математики.

Зачем нужна теория множеств?

Теория множеств имеет двоякую природу. С одной стороны, это совершенно самостоятельная дисциплина со своими задачами, открытыми вопросами, подходами и идеями, которой занимается ограниченный круг специалистов.

С другой же стороны, она является инструментом для других дисциплин. Эта её роль является особенно существенной, поскольку она выработала общий язык для всей математики.

Более того, она позволила преодолеть кризис оснований математики, позникший на рубеже 19 и 20 веков, когда в математике были обнаружены противоречия (парадоксы).

Зачем нужна теория множеств?

Важной идеей является возможность сведения одних математических объектов к другим. Один из известнейших примеров такого сведения принадлежит Рене Декарту, который предложил отождествлять вещественные числа с точками на обычной Евклидовой прямой. Это привычное нам сейчас, но тогда совершенно революционное соображение привело к созданию метода координат, перевернувшего всё тогдашнее естествознание, и позволило считать, что геометрия, в определённом смысле, сводится к вещественной арифметике.

Зачем нужна теория множеств?

Важной идеей является возможность сведения одних математических объектов к другим. Один из известнейших примеров такого сведения принадлежит Рене Декарту, который предложил отождествлять вещественные числа с точками на обычной Евклидовой прямой. Это привычное нам сейчас, но тогда совершенно революционное соображение привело к созданию метода координат, перевернувшего всё тогдашнее естествознание, и позволило считать, что геометрия, в определённом смысле, сводится к вещественной арифметике.

Выяснилось, что ВСЕ математические понятия сводятся к понятию множества, т.е. (почти) все математические дисциплины можно считать разделами теории множеств. Т.о., изучая ТМ мы лучше поймем и другие разделы математики. Создание теории множеств заложило прочный фундамент для математики и показало ее единство.

Этапы развития теории множеств

1. Наивная теория множеств.

Идеи, близкие к идеям ТМ, возникали у многих ученых, однако в явном виде она начала развиваться примерно полтора века назад в работах Георга Кантора и его последователей.

Этапы развития теории множеств

1. Наивная теория множеств.

Идеи, близкие к идеям ТМ, возникали у многих ученых, однако в явном виде она начала развиваться примерно полтора века назад в работах Георга Кантора и его последователей.

2. Аксиоматическая ТМ (ZFC и ее варианты).

Возникла как попытка преодоления противоречий, возникших в наивной ТМ (Цермело, Френкель, Гёдель, Бернайс, фон Нейман,...).

Этапы развития теории множеств

1. Наивная теория множеств.

Идеи, близкие к идеям ТМ, возникали у многих ученых, однако в явном виде она начала развиваться примерно полтора века назад в работах Георга Кантора и его последователей.

2. Аксиоматическая ТМ (ZFC и ее варианты).

Возникла как попытка преодоления противоречий, возникших в наивной ТМ (Цермело, Френкель, Гёдель, Бернайс, фон Нейман,...).

3. Альтернативы ZFC.

Рассел, Мычельский, Штейнгауз, Мартин-Лёф, Ловер,...

Множества и операции над ними

Все переменные обозначают множества. Принадлежность:
 $a \in A$.

Равенство: $A = B$ означает $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$.

Включение: $A \subseteq B$ означает $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$.

Множества часто задаются в виде $\{x \mid \varphi(x)\}$, где $\varphi(x)$ — выражение, построенное из переменных и отношений $=, \in$ с помощью логических операций $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \forall, \exists$. Самое популярное множество: $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$.

Множества и операции над ними

Все переменные обозначают множества. Принадлежность:
 $a \in A$.

Равенство: $A = B$ означает $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$.

Включение: $A \subseteq B$ означает $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$.

Множества часто задаются в виде $\{x \mid \varphi(x)\}$, где $\varphi(x)$ — выражение, построенное из переменных и отношений $=, \in$ с помощью логических операций $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \forall, \exists$. Самое популярное множество: $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$.

Объединение: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.

Пересечение: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.

Разность: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.

Симметрическая разность: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Дополнение: $\overline{A} = U \setminus A$ (если все рассматриваемые множества содержатся в U).

Свойства булевых операций

$$A \cup A = A, A \cup B = B \cup A$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{\overline{A}} = A.$$

Все написанные выше свойства справедливы при замене объединения на пересечение и наоборот.

Свойства булевых операций

$$A \cup A = A, A \cup B = B \cup A$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{\overline{A}} = A.$$

Все написанные выше свойства справедливы при замене объединения на пересечение и наоборот.

Δ коммутативна и ассоциативна, \cap дистрибутивна относительно Δ

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

$$A \setminus (A \setminus B) = (A \cap B)$$

$$A \setminus B = (A \setminus (A \cap B))$$

Отношения

Декартово произведение: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$, где $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ — упорядоченная пара.

Подмножества $R \subseteq A \times B$ называются отношениями между A и B . Запись $(a, b) \in R$ иногда упрощают до aRb . Бывают также n -местные отношения (подмножества множества $A_1 \times \dots \times A_n$).

$\text{dom}(R) := \{a \mid \exists b(aRb)\}$ — область определения R ,

$\text{rng}(R) := \{b \mid \exists a(aRb)\}$ — область значений R ,

$R(a) := \{b \mid aRb\}$ — значение R в точке A .

Отношения

Декартово произведение: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$, где $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ — упорядоченная пара.

Подмножества $R \subseteq A \times B$ называются отношениями между A и B . Запись $(a, b) \in R$ иногда упрощают до aRb . Бывают также n -местные отношения (подмножества множества $A_1 \times \dots \times A_n$).

$\text{dom}(R) := \{a \mid \exists b(aRb)\}$ — область определения R ,

$\text{rng}(R) := \{b \mid \exists a(aRb)\}$ — область значений R ,

$R(a) := \{b \mid aRb\}$ — значение R в точке A .

Пусть $R^{-1} := \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$, тогда $R^{-1} \subseteq B \times A$ называется обратным отношением к R . $(R^{-1})^{-1} = R$.

Композицией отношений $R \subseteq A \times B$ и $S \subseteq B \times C$ называется отношение $S \circ R \subseteq A \times C$ такое, что

$a(S \circ R)c \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists b \in B(aRb \wedge bSc)$. Композиция ассоциативна и $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

Функции

Отношение $R \subseteq A \times B$ функционально, если $\forall a, b, b'(aRb \wedge aRb' \rightarrow b = b')$. В этом случае $R(a) = \emptyset$ или $R(a) = \{b\}$ для единственного b ; в последнем случае часто пишут $R(a) = b$. Функциональные отношения $R \subseteq A \times B$ известны также как *частичные функции* из A в B .

Функции

Отношение $R \subseteq A \times B$ функционально, если $\forall a, b, b'(aRb \wedge aRb' \rightarrow b = b')$. В этом случае $R(a) = \emptyset$ или $R(a) = \{b\}$ для единственного b ; в последнем случае часто пишут $R(a) = b$. Функциональные отношения $R \subseteq A \times B$ известны также как *частичные функции* из A в B .

Отношение R называется *функцией*, если оно функционально и $\text{dom}(R) = A$. В этом случае $R(a) = \{b\}$ для единственного b , которое называют значением функции R в точке a и пишут $R(a) = b$. Для функций используется стандартная терминология. Функция f из A в B часто обозначается $f : A \rightarrow B$. Композиция функций является функцией.

Функции

Отношение $R \subseteq A \times B$ функционально, если $\forall a, b, b'(aRb \wedge aRb' \rightarrow b = b')$. В этом случае $R(a) = \emptyset$ или $R(a) = \{b\}$ для единственного b ; в последнем случае часто пишут $R(a) = b$. Функциональные отношения $R \subseteq A \times B$ известны также как *частичные функции* из A в B .

Отношение R называется *функцией*, если оно функционально и $\text{dom}(R) = A$. В этом случае $R(a) = \{b\}$ для единственного b , которое называют значением функции R в точке a и пишут $R(a) = b$. Для функций используется стандартная терминология. Функция f из A в B часто обозначается $f : A \rightarrow B$. Композиция функций является функцией.

Функция $f : A \rightarrow B$ называется *инъекцией* (сюръекцией), если $\forall a, a_1 \in A (a \neq a_1 \rightarrow f(a) \neq f(a_1))$ ($\forall b \in B \exists a \in A (f(a) = b)$). Функция называется *биекцией*, если она является и инъекцией, и сюръекцией. Биекции из A на A образуют группу относительно композиции.

Предпорядки и эквивалентности

Некоторые важные свойства отношений $R \subseteq A \times A$:

$\forall a \in A (aRa)$ рефлексивность,

$\forall a \in A \neg (aRa)$ антирефлексивность,

$\forall a, b \in A (aRb \rightarrow bRa)$ симметричность,

$\forall a, b \in A (aRb \wedge bRa \rightarrow a = b)$ антисимметричность,

$\forall a, b, c \in A ((aRb \wedge bRc) \rightarrow aRc)$ транзитивность

Предпорядки и эквивалентности

Некоторые важные свойства отношений $R \subseteq A \times A$:

$\forall a \in A (aRa)$ рефлексивность,

$\forall a \in A \neg (aRa)$ антирефлексивность,

$\forall a, b \in A (aRb \rightarrow bRa)$ симметричность,

$\forall a, b \in A (aRb \wedge bRa \rightarrow a = b)$ антисимметричность,

$\forall a, b, c \in A ((aRb \wedge bRc) \rightarrow aRc)$ транзитивность

Предпорядок = рефлексивность и транзитивность; типичные обозначения $\leq, \preceq, \subseteq, \sqsubseteq$.

Частичный порядок = антисимметричный предпорядок.

Линейный порядок = Частичный порядок +

$\forall a, b \in A (aRb \vee bRa)$.

Строгий частичный порядок = антирефлексивность и транзитивность; типичные обозначения $<, \prec, \subset, \sqsubset$

Эквивалентность = рефлексивность, симметричность и транзитивность; типичные обозначения $=, \simeq, \equiv$

Эквивалентности и фактор-множества

Пусть \equiv — эквивалентность на A . Каждому $a \in A$ сопоставим множество $[a] \stackrel{\text{def}}{=} \{a' \in A \mid a' \equiv a\}$, называемое его *классом эквивалентности*. Множество A/\equiv всех таких классов называется фактор-множеством множества A по отношению \equiv .

Эквивалентности и фактор-множества

Пусть \equiv — эквивалентность на A . Каждому $a \in A$ сопоставим множество $[a] \stackrel{\text{def}}{=} \{a' \in A \mid a' \equiv a\}$, называемое его *классом эквивалентности*. Множество A/\equiv всех таких классов называется фактор-множеством множества A по отношению \equiv .

ТЕОРЕМА. Если \equiv — эквивалентность на A , то классы эквивалентности непусты, попарно не пересекаются и их объединение равно A .

Эквивалентности и фактор-множества

Пусть \equiv — эквивалентность на A . Каждому $a \in A$ сопоставим множество $[a] \stackrel{\text{def}}{=} \{a' \in A \mid a' \equiv a\}$, называемое его *классом эквивалентности*. Множество A/\equiv всех таких классов называется фактор-множеством множества A по отношению \equiv .

ТЕОРЕМА. Если \equiv — эквивалентность на A , то классы эквивалентности непусты, попарно не пересекаются и их объединение равно A .

Д-ВО. В качестве объединения классов эквивалентности множество A представляется: любой элемент $a \in A$ эквивалентен самому себе, а значит принадлежит классу $[a]$. Остаётся показать, что разные классы не пересекаются.

Покажем, что если $a \in [b] \cap [c]$, то $[b] = [c]$. В самом деле, пусть $b' \in [b]$, тогда $b' \equiv b$. Но также и $a \equiv b$, что по транзитивности означает, что $b' \equiv a$. Аналогично можно показать, что если $c' \in [c]$, то $c' \equiv a$. Отсюда по транзитивности $b' \equiv c'$, т.е. $b' \equiv c$, т.е. $b' \in [c]$. Таким образом, $[b] \subseteq [c]$.

Натуральные числа в теории множеств

Пусть \mathbb{N} — наименьшее по включению множество, содержащее \emptyset и замкнутое относительно операции $x' = x \cup \{x\}$.

Можно проверить, что $(\mathbb{N}; \emptyset, ')$ — структура Пеано (т.е. удовлетворяет условиям $x' \neq \emptyset$, $x' = y' \rightarrow x = y$, и $[\emptyset \in P \wedge \forall x \in P (x' \in P)] \rightarrow P = \mathbb{N}$, для любого $P \subseteq \mathbb{N}$). Такая структура единственна с точностью до изоморфизма.

Натуральные числа в теории множеств

Пусть \mathbb{N} — наименьшее по включению множество, содержащее \emptyset и замкнутое относительно операции $x' = x \cup \{x\}$.

Можно проверить, что $(\mathbb{N}; \emptyset, ')$ — структура Пеано (т.е. удовлетворяет условиям $x' \neq \emptyset$, $x' = y' \rightarrow x = y$, и $[\emptyset \in P \wedge \forall x \in P (x' \in P)] \rightarrow P = \mathbb{N}$, для любого $P \subseteq \mathbb{N}$). Такая структура единственна с точностью до изоморфизма.

Определим на \mathbb{N} отношение $<$ и операции $+$, \cdot так:

$x < y \leftrightarrow x \in y$. $+$ — единственная бинарная операция на \mathbb{N} такая, что $x + 0 = x$ и $x + y' = (x + y)'$. \cdot — единственная бинарная операция на \mathbb{N} такая, что $x \cdot 0 = 0$ и $x \cdot y' = x \cdot y + x$.

Натуральные числа в теории множеств

Пусть \mathbb{N} — наименьшее по включению множество, содержащее \emptyset и замкнутое относительно операции $x' = x \cup \{x\}$.

Можно проверить, что $(\mathbb{N}; \emptyset, ')$ — структура Пеано (т.е. удовлетворяет условиям $x' \neq \emptyset$, $x' = y' \rightarrow x = y$, и $[\emptyset \in P \wedge \forall x \in P (x' \in P)] \rightarrow P = \mathbb{N}$, для любого $P \subseteq \mathbb{N}$). Такая структура единственна с точностью до изоморфизма.

Определим на \mathbb{N} отношение $<$ и операции $+$, \cdot так:

$x < y \leftrightarrow x \in y$. $+$ — единственная бинарная операция на \mathbb{N} такая, что $x + 0 = x$ и $x + y' = (x + y)'$. \cdot — единственная бинарная операция на \mathbb{N} такая, что $x \cdot 0 = 0$ и $x \cdot y' = x \cdot y + x$.

Свойства $(\mathbb{N}; +, \cdot, <, 0, 1)$: $+$, \cdot ассоциативны и коммутативны; \cdot дистрибутивна относительно $+$; $0, 1$ нейтральны относительно $+$, \cdot ; $0 < 1 < 2 < \dots$ и между соседями нет других чисел;

$[P(0) \wedge \forall x (P(x) \rightarrow P(x + 1))] \rightarrow \forall x P(x)$;

$\forall x (\forall y < x P(y) \rightarrow P(x)) \rightarrow \forall x P(x)$.

Целые числа в теории множеств

$\mathbb{Z} := (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) / \sim$, где

$$(a, b) \sim (c, d) \leftrightarrow a + d = b + c.$$

$$[a, b] \tilde{+} [c, d] := [a + c, b + d],$$

$$[a, b] \tilde{\cdot} [c, d] := [ac + bd, ad + bc],$$

$$[a, b] \tilde{\leq} [c, d] \leftrightarrow a + d \leq b + c,$$

$$\tilde{0} := [0, 0], \tilde{1} := [1, 0].$$

Целые числа в теории множеств

$\mathbb{Z} := (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) / \sim$, где

$$(a, b) \sim (c, d) \leftrightarrow a + d = b + c.$$

$$[a, b] \tilde{+} [c, d] := [a + c, b + d],$$

$$[a, b] \tilde{\cdot} [c, d] := [ac + bd, ad + bc],$$

$$[a, b] \tilde{\leq} [c, d] \leftrightarrow a + d \leq b + c,$$

$$\tilde{0} := [0, 0], \tilde{1} := [1, 0].$$

Свойства $(\mathbb{Z}; \tilde{+}, \tilde{\cdot}, \tilde{\leq}, \tilde{0}, \tilde{1})$:

Это упорядоченное кольцо

(т.е. $\tilde{+}, \tilde{\cdot}$ ассоциативны и коммутативны;

$\tilde{\cdot}$ дистрибутивна относительно $\tilde{+}$;

$\tilde{0}, \tilde{1}$ нейтральны относительно $\tilde{+}, \tilde{\cdot}$;

$$\forall x \exists y (x + y = 0),$$

$$\forall x, y, z (x \leq y \rightarrow (x + z \leq y + z)),$$

$$\forall x, y, z (x \leq y \wedge 0 < z \rightarrow (x \cdot z \leq y \cdot z)),$$

в котором любой элемент является разностью двух натуральных чисел.

Рациональные числа в теории множеств

$\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\}) / \sim$, где

$$(a, b) \sim (c, d) \leftrightarrow ad = bc.$$

$$[a, b] \tilde{+} [c, d] := [ad + bc, bd],$$

$$[a, b] \tilde{\cdot} [c, d] := [ac, bd],$$

$$[a, b] \tilde{\leq} [c, d] \leftrightarrow ad \leq bc,$$

$$\tilde{0} := [0, 1], \quad \tilde{1} := [1, 1].$$

Рациональные числа в теории множеств

$\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\}) / \sim$, где

$$(a, b) \sim (c, d) \leftrightarrow ad = bc.$$

$$[a, b] \tilde{+} [c, d] := [ad + bc, bd],$$

$$[a, b] \tilde{\cdot} [c, d] := [ac, bd],$$

$$[a, b] \tilde{\leq} [c, d] \leftrightarrow ad \leq bc,$$

$$\tilde{0} := [0, 1], \tilde{1} := [1, 1].$$

Свойства $(\mathbb{Q}; \tilde{+}, \tilde{\cdot}, \tilde{\leq}, \tilde{0}, \tilde{1})$:

это упорядоченное поле (т.е. упорядоченное кольцо, в котором $\forall x \neq 0 \exists y (x \cdot y = 1)$)

такое, что любой элемент получается делением целого числа на положительное целое.

Вещественные числа в теории множеств

$\mathbb{R} := S / \sim$, где S — множество всех последовательностей Коши
 $\{q_i\}$ рациональных чисел

(т.е. $\forall n \exists m \forall i, j > m (|q_i - q_j| < 2^{-n})$),

$\{q_i\} \sim \{r_i\} \leftrightarrow \lim_i (q_i - r_i) = 0$.

$[\{q_i\}] \tilde{+} [\{r_i\}] := [\{q_i + r_i\}]$,

$[\{q_i\}] \tilde{\cdot} [\{r_i\}] := [\{q_i \cdot r_i\}]$,

$[\{q_i\}] \tilde{<} [\{r_i\}] \leftrightarrow \exists n, m \forall i > m (q_i - r_i < -2^{-n})$,

$\tilde{0} := [0, 0, \dots]$, $\tilde{1} := [1, 1, \dots]$.

Вещественные числа в теории множеств

$\mathbb{R} := S / \sim$, где S — множество всех последовательностей Коши $\{q_i\}$ рациональных чисел

(т.е. $\forall n \exists m \forall i, j > m (|q_i - q_j| < 2^{-n})$),

$\{q_i\} \sim \{r_i\} \leftrightarrow \lim_i (q_i - r_i) = 0$.

$[\{q_i\}] \tilde{+} [\{r_i\}] := [\{q_i + r_i\}]$,

$[\{q_i\}] \tilde{\cdot} [\{r_i\}] := [\{q_i \cdot r_i\}]$,

$[\{q_i\}] \tilde{<} [\{r_i\}] \leftrightarrow \exists n, m \forall i > m (q_i - r_i < -2^{-n})$,

$\tilde{0} := [0, 0, \dots]$, $\tilde{1} := [1, 1, \dots]$.

СВОЙСТВА $(\mathbb{R}; \tilde{+}, \tilde{\cdot}, \tilde{\leq}, \tilde{0}, \tilde{1})$:

Это полное упорядоченное поле (т.е. упорядоченное поле, в котором любое непустое ограниченное сверху множество имеет супремум).

Комплексные числа в теории множеств

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

$$(x, y) \tilde{+} (x_1, y_1) := (x + x_1, y + y_1),$$

$$(x, y) \tilde{\cdot} (x_1, y_1) := (xx_1 - yy_1, xy_1 + yx_1),$$

$$\tilde{0} := (0, 0), \tilde{1} := (1, 0), \tilde{i} := (0, 1),$$

Комплексные числа в теории множеств

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

$$(x, y) \tilde{+} (x_1, y_1) := (x + x_1, y + y_1),$$

$$(x, y) \tilde{\cdot} (x_1, y_1) := (xx_1 - yy_1, xy_1 + yx_1),$$

$$\tilde{0} := (0, 0), \tilde{1} := (1, 0), \tilde{i} := (0, 1),$$

СВОЙСТВА $(\mathbb{C}; \tilde{+}, \tilde{\cdot}, \tilde{0}, \tilde{1})$:

Это поле, содержащее копию поля вещественных чисел $\tilde{\mathbb{R}} := \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, в котором есть квадратный корень i из -1 , и в котором каждый элемент представим в виде $x + i \cdot y$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Мощность множества

О мощности множества можно думать, как о количестве его элементов. Однако непонятно, как быть с бесконечными множествами.

Мощность множества

О мощности множества можно думать, как о количестве его элементов. Однако непонятно, как быть с бесконечными множествами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. 1. A и B равномощны ($A \sim B$), если существует биекция $f : A \rightarrow B$.

2. A не превосходит по мощности B ($A \preceq B$), если существует инъекция $f : A \rightarrow B$.

Мощность множества

О мощности множества можно думать, как о количестве его элементов. Однако непонятно, как быть с бесконечными множествами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. 1. A и B равномощны ($A \sim B$), если существует биекция $f : A \rightarrow B$.

2. A не превосходит по мощности B ($A \preceq B$), если существует инъекция $f : A \rightarrow B$.

СВОЙСТВА. 1. Отношение \sim рефлексивно, симметрично и транзитивно.

2. Отношение \preceq рефлексивно и транзитивно.

Мощность множества

О мощности множества можно думать, как о количестве его элементов. Однако непонятно, как быть с бесконечными множествами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. 1. A и B равномощны ($A \sim B$), если существует биекция $f : A \rightarrow B$.

2. A не превосходит по мощности B ($A \preceq B$), если существует инъекция $f : A \rightarrow B$.

СВОЙСТВА. 1. Отношение \sim рефлексивно, симметрично и транзитивно.

2. Отношение \preceq рефлексивно и транзитивно.

Заметим, что \sim “неформально” является отношением эквивалентности, но ввести фактор-множество нельзя, так как множества всех множеств не существует (покажем позже).

Мощность множества

О мощности множества можно думать, как о количестве его элементов. Однако непонятно, как быть с бесконечными множествами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. 1. A и B равномощны ($A \sim B$), если существует биекция $f : A \rightarrow B$.
2. A не превосходит по мощности B ($A \preceq B$), если существует инъекция $f : A \rightarrow B$.

СВОЙСТВА. 1. Отношение \sim рефлексивно, симметрично и транзитивно.
2. Отношение \preceq рефлексивно и транзитивно.

Заметим, что \sim “неформально” является отношением эквивалентности, но ввести фактор-множество нельзя, так как множества всех множеств не существует (покажем позже).

ТЕОРЕМА. Если $A \preceq B$ и $B \preceq A$, то $A \sim B$.

Доказательство теоремы Шрёдера-Бернштейна

Пусть $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow A$ — инъекции. Тогда $h = g \circ f : A \rightarrow A$ — инъекция.

Пусть $A_1 = g(B)$, $A_2 = h(A)$. Заметим, что $A_2 \subseteq A_1 \subseteq A$ и $A_1 \sim B$, потому что $g : B \rightarrow A_1$ — биекция. Аналогично $h : A \rightarrow A_2$ — биекция.

Достаточно доказать, что $A \sim A_1$.

Доказательство теоремы Шрёдера-Бернштейна

Пусть $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow A$ — инъекции. Тогда $h = g \circ f : A \rightarrow A$ — инъекция.

Пусть $A_1 = g(B)$, $A_2 = h(A)$. Заметим, что $A_2 \subseteq A_1 \subseteq A$ и $A_1 \sim B$, потому что $g : B \rightarrow A_1$ — биекция. Аналогично $h : A \rightarrow A_2$ — биекция.

Достаточно доказать, что $A \sim A_1$.

Множество $X \subseteq A$ назовем хорошим, если $X \supseteq (A \setminus A_1) \cup h(X)$ (например, A хорошее).

Пусть C — пересечение всех хороших множеств. Тогда C хорошее, $C = (A \setminus A_1) \cup h(C)$, и $h(C) \subseteq A_2$.

Поэтому $u = id_{A \setminus C} \cup h|_C$ — биекция из A на A_1 .

Теорема Кантора

ТЕОРЕМА. Для любого множества A справедливо $A \prec P(A)$, т.е. $A \preceq P(A)$ и $A \not\approx P(A)$.

Теорема Кантора

ТЕОРЕМА. Для любого множества A справедливо $A \prec P(A)$, т.е. $A \preceq P(A)$ и $A \not\sim P(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $A \preceq P(A)$, поскольку $a \mapsto \{a\}$ — инъекция из A в $P(A)$.

Теперь докажем, что $A \not\sim P(A)$. Предположим противное: $A \sim P(A)$, тогда есть биекция $g : A \rightarrow P(A)$.

Рассмотрим множество $B = \{a \in A \mid a \notin g(a)\}$.

Поскольку $B \in P(A)$, $B = g(a)$ для некоторого $a \in A$. Но тогда

$$a \in B \leftrightarrow a \in g(a) \leftrightarrow a \notin B,$$

противоречие.

Конечные множества

Множество называется конечным, если оно равномощно n для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Множества, не являющиеся конечными, называются бесконечными.

Конечные множества

Множество называется конечным, если оно равномощно n для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Множества, не являющиеся конечными, называются бесконечными.

ТЕОРЕМА. Для множества A равносильны условия:

1. A конечно.
2. Любое непустое подмножество булеана $P(A)$ имеет максимальный элемент по включению.
3. Любая инъекция $f : A \rightarrow A$ является биекцией.

Конечные множества

Множество называется конечным, если оно равномощно n для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Множества, не являющиеся конечными, называются бесконечными.

ТЕОРЕМА. Для множества A равносильны условия:

1. A конечно.
2. Любое непустое подмножество булеана $P(A)$ имеет максимальный элемент по включению.
3. Любая инъекция $f : A \rightarrow A$ является биекцией.

ТЕОРЕМА. Если A конечно и B бесконечно, то $A \prec B$.

Счетные и несчетные множества

Множество называется счетным, если оно равномощно \mathbb{N} .
Множества, не являющиеся конечными или счетными, называются несчетными.

Множество называется континуальным, если оно равномощно $P(\mathbb{N})$.

Счетные и несчетные множества

Множество называется счетным, если оно равномощно \mathbb{N} .
Множества, не являющиеся конечными или счетными, называются несчетными.

Множество называется континуальным, если оно равномощно $P(\mathbb{N})$.

ТЕОРЕМА. Если A счетно и B бесконечно, то $A \preceq B$.

Счетные и несчетные множества

Множество называется счетным, если оно равномощно \mathbb{N} .
Множества, не являющиеся конечными или счетными, называются несчетными.

Множество называется континуальным, если оно равномощно $P(\mathbb{N})$.

ТЕОРЕМА. Если A счетно и B бесконечно, то $A \preceq B$.

Шкала мощностей: $0, 1, 2, \dots$, счетные, несчетные.

Счетные и несчетные множества

Множество называется счетным, если оно равномощно \mathbb{N} .
Множества, не являющиеся конечными или счетными, называются несчетными.

Множество называется континуальным, если оно равномощно $P(\mathbb{N})$.

ТЕОРЕМА. Если A счетно и B бесконечно, то $A \preceq B$.

Шкала мощностей: $0, 1, 2, \dots$, счетные, несчетные.

Континуум-гипотеза (первая проблема Гильберта): если A несчетно, то $P(\mathbb{N}) \preceq A$.

Более простая, но нетривиальная задача: верно ли, что $\forall A, B (A \preceq B \vee B \preceq A)$?

Противоречия наивной теории множеств

Пусть $V = \{x \mid x = x\}$ — множество всех множеств. Тогда $P(V) \subseteq V$, поэтому $P(V) \preceq V$. Однако по теореме Кантора $V \prec P(V)$ — противоречие.

Противоречия наивной теории множеств

Пусть $V = \{x \mid x = x\}$ — множество всех множеств. Тогда $P(V) \subseteq V$, поэтому $P(V) \preceq V$. Однако по теореме Кантора $V \prec P(V)$ — противоречие.

Рассмотрим множество $Y = \{x \mid x \notin x\}$. Имеем $Y \in Y \leftrightarrow Y \notin Y$ — противоречие.

Противоречия наивной теории множеств

Пусть $V = \{x \mid x = x\}$ — множество всех множеств. Тогда $P(V) \subseteq V$, поэтому $P(V) \preceq V$. Однако по теореме Кантора $V \prec P(V)$ — противоречие.

Рассмотрим множество $Y = \{x \mid x \notin x\}$. Имеем $Y \in Y \leftrightarrow Y \notin Y$ — противоречие.

Из каждого из этих противоречий (известных также как парадоксы) можно вывести вообще все возможные утверждения, и истинные, и ложные. Звучит неприятно.

Можно было бы, конечно, разочароваться в самой идее построения оснований математики, но мыслители начала XX века всё-таки не сдались и придумали ряд выходов из положения, предполагающих создание аксиоматической теории множеств, учитывающей ошибки наивного подхода и дающей надежные основания математики.

Множества и классы

Формулы аксиоматической теории множеств строятся так же, как и раньше: с помощью логических операций из простейших формул $x = y$, $x \in y$; переменные в формулах обозначают множества. Разница с наивной теорией множеств состоит в ограничении способов построения множеств. Например, парадоксы показывают, что выражение $\{x \mid \varphi(x)\}$ для некоторых формул не может задавать множества.

Множества и классы

Формулы аксиоматической теории множеств строятся так же, как и раньше: с помощью логических операций из простейших формул $x = y$, $x \in y$; переменные в формулах обозначают множества. Разница с наивной теорией множеств состоит в ограничении способов построения множеств. Например, парадоксы показывают, что выражение $\{x \mid \varphi(x)\}$ для некоторых формул не может задавать множества.

Удобно считать, что такие выражения задают классы $C_\varphi = \{x \mid \varphi(x)\}$, т.е. совокупности объектов x , для которых $\varphi(x)$ истинно. Любое множество является классом, но обратное неверно (например, классы V, Y с предыдущего слайда не являются множествами). Элемент класса всегда является множеством.

Множества и классы

Формулы аксиоматической теории множеств строятся так же, как и раньше: с помощью логических операций из простейших формул $x = y$, $x \in y$; переменные в формулах обозначают множества. Разница с наивной теорией множеств состоит в ограничении способов построения множеств. Например, парадоксы показывают, что выражение $\{x \mid \varphi(x)\}$ для некоторых формул не может задавать множества.

Удобно считать, что такие выражения задают классы $C_\varphi = \{x \mid \varphi(x)\}$, т.е. совокупности объектов x , для которых $\varphi(x)$ истинно. Любое множество является классом, но обратное неверно (например, классы V, Y с предыдущего слайда не являются множествами). Элемент класса всегда является множеством.

Для классов можно определить булевские операции $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, что на самом деле просто модифицирует задающие классы формулы. Так, $A \cap B = \{x \mid \phi_A(x) \wedge \phi_B(x)\}$.

Аксиомы ZFC

0. $\exists x(x = x).$
1. $\forall u(u \in X \leftrightarrow u \in Y) \rightarrow X = Y.$
2. $\forall u \forall v \exists x \forall z(z \in x \leftrightarrow z = u \vee z = v).$
3. $\forall X \exists Y \forall u(u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi(u)).$
4. $\forall X \exists Y \forall u \forall z(u \in z \wedge z \in X \rightarrow u \in Y).$
5. $\forall X \exists Y \forall u(u \in Y \leftrightarrow u \subseteq X).$
6. $\forall x \forall y \forall y'(\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, y') \rightarrow y = y') \rightarrow \forall X \exists Y \forall x \forall y(x \in X \wedge \varphi(x, y) \rightarrow y \in Y).$
7. $\exists Y(\emptyset \in Y \wedge \forall y(y \in Y \rightarrow y \cup \{y\} \in Y)).$
8. $\forall X(X \neq \emptyset \rightarrow \exists x(x \in X \wedge \forall u(u \in x \rightarrow u \notin X))).$
9. $\forall X \exists f((f : (P(X) \setminus \{\emptyset\}) \rightarrow X) \wedge \forall Y(Y \subseteq X \wedge Y \neq \emptyset \rightarrow f(Y) \in Y)).$

Примеры следствий аксиом ZFC

1. Существует упорядоченная пара любых двух множеств.
2. Существует пустое множество.
3. Существует объединение всех элементов любого множества, а также пересечение всех элементов данного непустого множества.
4. Существуют объединение, пересечение и разность любых двух данных множеств.

Примеры следствий аксиом ZFC

1. Существует упорядоченная пара любых двух множеств.
2. Существует пустое множество.
3. Существует объединение всех элементов любого множества, а также пересечение всех элементов данного непустого множества.
4. Существуют объединение, пересечение и разность любых двух данных множеств.
5. Теорема о фактор-множестве.
6. Существует декартово произведение любых двух данных множеств.
7. Теоремы Кантора и Шрёдера-Бернштейна.
8. Существует наименьшее по включению индуктивное множество.
9. Существуют изоморфные копии всех числовых структур.

Фундированные порядки

ОПР. 1. Частичный порядок $\mathbb{A} = (A; <_A)$ называют фундированным, если любое непустое подмножество его элементов содержит минимальный элемент.

2. Фундированные линейные порядки называют также вполне упорядоченными множествами.

3. Начальным сегментом $\mathbb{A} = (A; <_A)$ называют любое подмножество A , замкнутое вниз относительно $<_A$. Пример — множество $\hat{a} = \{x \mid x <_A a\}$ для любого $a \in A$.

Фундированные порядки

ОПР. 1. Частичный порядок $\mathbb{A} = (A; <_A)$ называют фундированным, если любое непустое подмножество его элементов содержит минимальный элемент.

2. Фундированные линейные порядки называют также вполне упорядоченными множествами.

3. Начальным сегментом $\mathbb{A} = (A; <_A)$ называют любое подмножество A , замкнутое вниз относительно $<_A$. Пример — множество $\hat{a} = \{x \mid x <_A a\}$ для любого $a \in A$.

ОПР. 1. Изоморфизмом \mathbb{A} на \mathbb{B} называется биекция $f : A \rightarrow B$ такая, что $a <_A a_1 \leftrightarrow f(a) <_B f(a_1)$ для любых $a, a_1 \in A$.

Инъекция с таким свойством называется вложением \mathbb{A} в \mathbb{B} .

2. Частичные порядки \mathbb{A} и \mathbb{B} называются изоморфными ($\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$), если существует изоморфизм \mathbb{A} на \mathbb{B} .

3. Запись $\mathbb{A} \sqsubseteq \mathbb{B}$ ($\mathbb{A} \sqsubset \mathbb{B}$) означает, что \mathbb{A} изоморфно некоторому (собственному) начальному сегменту \mathbb{B} .

Свойства вполне упорядоченных множеств

1. Отношение \simeq рефлексивно, симметрично и транзитивно.
2. Отношение \sqsubseteq рефлексивно и транзитивно.
3. Для любого вложения $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ верно: $\forall a (a \leq_{\mathbb{A}} f(a))$.
4. Отношение \sqsubset антирефлексивно и транзитивно.
5. $\mathbb{A} \sqsubseteq \mathbb{B}$ или $\mathbb{B} \sqsubseteq \mathbb{A}$.
6. $\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$ или $\mathbb{A} \sqsubset \mathbb{B}$ или $\mathbb{B} \sqsubset \mathbb{A}$, причем выполняется ровно одно из условий.
7. Если $\mathbb{A} \sqsubseteq \mathbb{B}$ и $\mathbb{B} \sqsubseteq \mathbb{A}$, то $\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$.

Доказательства свойств в.у.м.

3. Пусть нет: $f(a) <_A a$ для некоторого $a \in A$, и возьмем наименьшее a . Тогда $f(f(a)) <_A f(a) <_A a$ — противоречие.

4. Пусть \sqsubset не антирефлексивно, т.е. $\mathbb{A} \sqsubset \mathbb{A}$ для некоторого \mathbb{A} . Тогда $f : \mathbb{A} \simeq \hat{a}$ для некоторых $a \in A$ и f . Тогда $f(a) <_A a$ — противоречие.

5. Отношение $I = \{(a, b) \mid \hat{a} \simeq \hat{b}\}$, а также обратное отношение I^{-1} , функциональны. Поэтому I — биекция из $D = \text{dom}(I)$ на $R = \text{rng}(I)$. Если $a_1 <_A a \in D$, то существует $f : \hat{a} \simeq \widehat{I(a)}$, откуда $\hat{a}_1 \simeq \widehat{f(a_1)}$, а значит $I(a_1) = f(a_1) <_B I(a)$. Поэтому D — начальный сегмент \mathbb{A} , R — начальный сегмент \mathbb{B} , и ограничение $I|_D$ — изоморфизм из \mathbb{D} на \mathbb{R} .

Заметим, что $D = A$ или $R = B$ (в противном случае $D = \hat{d}$ и $R = \hat{r}$ для некоторых $d \in A$ и $r \in B$, откуда $I(d) = r$ и $d \in D$ — противоречие). В случае $D = A$ получаем $\mathbb{A} \sqsubseteq \mathbb{B}$, а в случае $R = B$ получаем $\mathbb{B} \sqsubseteq \mathbb{A}$.

Фундированность и индукция

ТЕОРЕМА. Фундированность порядка $(X; <)$ равносильна правилу индукции в $(X; <)$, утверждающему, что для любого свойства $P(x)$ элементов множества X выполняется условие $\forall x(\forall y < x P(y) \rightarrow P(x)) \rightarrow \forall x P(x)$.

Фундированность и индукция

ТЕОРЕМА. Фундированность порядка $(X; <)$ равносильна правилу индукции в $(X; <)$, утверждающему, что для любого свойства $P(x)$ элементов множества X выполняется условие $\forall x(\forall y < x P(y) \rightarrow P(x)) \rightarrow \forall x P(x)$.

Теорема справедлива для произвольных фундированных отношений. Отношение $\rho \subseteq X \times X$ называется фундированным, если любое непустое множество $A \subseteq X$ имеет минимальный элемент $a \in A$ (т.е. не существует $b \in A$ такого, что $b\rho a$). Это верно и для случая, когда X является классом (например, это верно для фундированного отношения \in на классе V всех множеств).

Фундированность и индукция

ТЕОРЕМА. Фундированность порядка $(X; <)$ равносильна правилу индукции в $(X; <)$, утверждающему, что для любого свойства $P(x)$ элементов множества X выполняется условие $\forall x(\forall y < x P(y) \rightarrow P(x)) \rightarrow \forall x P(x)$.

Теорема справедлива для произвольных фундированных отношений. Отношение $\rho \subseteq X \times X$ называется фундированным, если любое непустое множество $A \subseteq X$ имеет минимальный элемент $a \in A$ (т.е. не существует $b \in A$ такого, что $b\rho a$). Это верно и для случая, когда X является классом (например, это верно для фундированного отношения \in на классе V всех множеств).

Нетрудно показать, что на фундированных множествах и классах можно также определять функции по рекурсии; важный частный случай рассмотрим ниже.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. 1. Множество S называется транзитивным, если $\bigcup S \subseteq S$, т.е.
 $x \in y \in S \rightarrow x \in S$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. 1. Множество S называется транзитивным, если $\bigcup S \subseteq S$, т.е.
 $x \in y \in S \rightarrow x \in S$.

2. Множество S называется ординалом, если оно транзитивно и линейно упорядочено отношением \in , т.е. $\forall x, y \in S (x \in y \vee y \in x \vee x = y)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. 1. Множество S называется транзитивным, если $\bigcup S \subseteq S$, т.е.
 $x \in y \in S \rightarrow x \in S$.

2. Множество S называется ординалом, если оно транзитивно и линейно упорядочено отношением \in , т.е. $\forall x, y \in S (x \in y \vee y \in x \vee x = y)$.

3. Ординалы обозначаем $\alpha, \beta, \gamma, \dots$,
класс всех ординалов обозначаем Ord ,
сужение отношения \in на Ord обозначаем $<$.

Свойства ординалов

1. $x \in \alpha \rightarrow x \in Ord$.
2. $\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$.
3. $(\alpha; <) \simeq (\beta; <) \iff \alpha = \beta$.
4. $\alpha < \beta \vee \beta < \alpha \vee \alpha = \beta$.
5. $\alpha \subseteq \beta \iff \alpha \leq \beta$.
6. $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ — наименьший ординал, больший α .
7. Для любого множества A ординалов, $(A; <)$ есть в.у.м., а $\bigcup A$ — ординал, являющийся супремумом этого множества.
8. Класс Ord не является множеством.
9. Любое в.у.м. A изоморфно единственному ординалу.

Доказательства свойств ординалов

3. Проверим, что $\alpha \simeq \beta \rightarrow \alpha = \beta$. Пусть $f : \alpha \simeq \beta$; достаточно показать $\alpha \subseteq \beta$, а для этого достаточно $\forall x \in \alpha (x = f(x))$.

Пусть нет, т.е. $x \neq f(x)$ для некоторого (наименьшего) $x \in \alpha$.

Тогда $x = \{z \mid z < x\}$. С другой стороны,

$f(x) = \{f(z) \mid z < x\}$, откуда $x = f(x)$, противоречие.

Доказательства свойств ординалов

3. Проверим, что $\alpha \simeq \beta \rightarrow \alpha = \beta$. Пусть $f : \alpha \simeq \beta$; достаточно показать $\alpha \subseteq \beta$, а для этого достаточно $\forall x \in \alpha (x = f(x))$.

Пусть нет, т.е. $x \neq f(x)$ для некоторого (наименьшего) $x \in \alpha$.

Тогда $x = \{z \mid z < x\}$. С другой стороны,

$f(x) = \{f(z) \mid z < x\}$, откуда $x = f(x)$, противоречие.

7. Первое — по аксиоме фундирования.

Для второго достаточно транзитивности $\bigcup A$. Пусть

$x \in y \in \bigcup A$. Тогда $\exists \alpha \in A (y \in \alpha)$. Тогда $x \in \alpha$ по

транзитивности, откуда $x \in \bigcup A$. $\bigcup A$ — верхняя граница A по

отношению $<$, поскольку $\forall \alpha \in A (\alpha \leq \bigcup A)$ и $\leq = \subseteq$. Покажем,

что для любой верхней границы β имеем $\bigcup A \leq \beta$, так как

$\forall \alpha \in A (\alpha \subseteq \beta)$.

Доказательства свойств ординалов

3. Проверим, что $\alpha \simeq \beta \rightarrow \alpha = \beta$. Пусть $f : \alpha \simeq \beta$; достаточно показать $\alpha \subseteq \beta$, а для этого достаточно $\forall x \in \alpha (x = f(x))$.

Пусть нет, т.е. $x \neq f(x)$ для некоторого (наименьшего) $x \in \alpha$.

Тогда $x = \{z \mid z < x\}$. С другой стороны,

$f(x) = \{f(z) \mid z < x\}$, откуда $x = f(x)$, противоречие.

7. Первое — по аксиоме фундирования.

Для второго достаточно транзитивности $\bigcup A$. Пусть

$x \in y \in \bigcup A$. Тогда $\exists \alpha \in A (y \in \alpha)$. Тогда $x \in \alpha$ по

транзитивности, откуда $x \in \bigcup A$. $\bigcup A$ — верхняя граница A по

отношению $<$, поскольку $\forall \alpha \in A (\alpha \leq \bigcup A)$ и $\leq = \subseteq$. Покажем,

что для любой верхней границы β имеем $\bigcup A \leq \beta$, так как

$\forall \alpha \in A (\alpha \subseteq \beta)$.

9. Рассмотрим $I = \{(a, \alpha) \mid \hat{a} \simeq \alpha\}$. Как для в.у.м., I —

изоморфизм \mathbb{D} на \mathbb{R} для начальных сегментов $D \subseteq A$,

$R \subseteq Ord$ причем $D = A$ или $R = Ord$. Последнее невозможно

(поскольку Ord было бы множеством), значит $D = A$ и I —

искомый изоморфизм на ординал R .

Рекурсия по ординалам

ТЕОРЕМА. Для любой функции-класса $G : V \rightarrow V$ существует единственная функция-класс $F : Ord \rightarrow V$ такая, что $F(\alpha) = G(F|_\alpha)$, где $F|_\alpha$ — ограничение F на α , т.е. $F|_\alpha = \{(\beta, y) \in F \mid \beta < \alpha\}$.

Рекурсия по ординалам

ТЕОРЕМА. Для любой функции-класса $G : V \rightarrow V$ существует единственная функция-класс $F : Ord \rightarrow V$ такая, что $F(\alpha) = G(F|_\alpha)$, где $F|_\alpha$ — ограничение F на α , т.е. $F|_\alpha = \{(\beta, y) \in F \mid \beta < \alpha\}$.

Д-ВО. Единственность: пусть есть две такие функции F, F' , проверим $\forall \alpha \in Ord : F(\alpha) = F'(\alpha)$. Предположим, что это не так и возьмём наименьшее α такое, что $F(\alpha) \neq F'(\alpha)$. Тогда $F|_\alpha = F'|_\alpha$, откуда $F(\alpha) = G(F|_\alpha) = F'(\alpha)$ — противоречие.

Рекурсия по ординалам

ТЕОРЕМА. Для любой функции-класса $G : V \rightarrow V$ существует единственная функция-класс $F : Ord \rightarrow V$ такая, что $F(\alpha) = G(F|_\alpha)$, где $F|_\alpha$ — ограничение F на α , т.е. $F|_\alpha = \{(\beta, y) \in F \mid \beta < \alpha\}$.

Д-ВО. Единственность: пусть есть две такие функции F, F' , проверим $\forall \alpha \in Ord : F(\alpha) = F'(\alpha)$. Предположим, что это не так и возьмём наименьшее α такое, что $F(\alpha) \neq F'(\alpha)$. Тогда $F|_\alpha = F'|_\alpha$, откуда $F(\alpha) = G(F|_\alpha) = F'(\alpha)$ — противоречие.

Существование: рассмотрим класс функций $C = \{f : \alpha \rightarrow V \mid \forall \beta < \alpha (f(\beta) = G(f|_\beta))\}$. Заметим, что если $f, f' \in C$, то $f \subseteq f' \vee f' \subseteq f$. Утверждается, что $F = \bigcup C$ годится, в частности, $dom(F) = Ord$. В самом деле, если $\alpha \notin dom(F)$ для наименьшего α , то $f = F|_\alpha \in C$, откуда $\tilde{f} = f \cup \{(\alpha, G(f))\} \in C$ — противоречие.

Эквиваленты аксиомы выбора

Пусть ZF — множество аксиом $0 - 8$ (т.е. все аксиомы, кроме аксиомы выбора AC).

ЛЕММОЙ ЦОРНА (ZL) называется утверждение: Если любое линейно упорядоченное подмножество частичного порядка X имеет верхнюю границу, то в X есть максимальный элемент.

ТЕОРЕМОЙ ЦЕРМЕЛО (ZT) называется утверждение: Любое множество можно вполне упорядочить, т.е. на любом множестве A существует фундированный линейный порядок.

Эквиваленты аксиомы выбора

Пусть ZF — множество аксиом $0 - 8$ (т.е. все аксиомы, кроме аксиомы выбора AC).

ЛЕММОЙ ЦОРНА (ZL) называется утверждение: Если любое линейно упорядоченное подмножество частичного порядка X имеет верхнюю границу, то в X есть максимальный элемент.

ТЕОРЕМОЙ ЦЕРМЕЛО (ZT) называется утверждение: Любое множество можно вполне упорядочить, т.е. на любом множестве A существует фундированный линейный порядок.

ТЕОРЕМА. Из аксиом ZF следует эквивалентность аксиомы выбора, леммы Цорна, и теоремы Цермело.

Эквиваленты аксиомы выбора

Пусть ZF — множество аксиом $0 - 8$ (т.е. все аксиомы, кроме аксиомы выбора AC).

ЛЕММОЙ ЦОРНА (ZL) называется утверждение: Если любое линейно упорядоченное подмножество частичного порядка X имеет верхнюю границу, то в X есть максимальный элемент.

ТЕОРЕМОЙ ЦЕРМЕЛО (ZT) называется утверждение: Любое множество можно вполне упорядочить, т.е. на любом множестве A существует фундированный линейный порядок.

ТЕОРЕМА. Из аксиом ZF следует эквивалентность аксиомы выбора, леммы Цорна, и теоремы Цермело.

Доказательство по схеме $AC \implies ZL \implies ZT \implies AC$.

Аксиома выбора влечет лемму Цорна

Пусть AC истинна, а ZL ложна, тогда существует чум \mathbb{X} , в котором любое л.у.м. $L \subseteq X$ имеет верхнюю границу, и $\forall x \exists y (x <_X y)$. Тогда $\forall L \exists y (L <_X y)$, т.е.

$B(L) = \{y \in X \mid L <_X y\} \neq \emptyset$ для любого л.у.м. $L \subseteq X$.

Пусть f — функция выбора на X , и $g(L) = f(B(L))$. Тогда $L <_X g(L)$ для любого л.у.м. $L \subseteq X$.

Аксиома выбора влечет лемму Цорна

Пусть AC истинна, а ZL ложна, тогда существует чум \mathbb{X} , в котором любое л.у.м. $L \subseteq X$ имеет верхнюю границу, и $\forall x \exists y (x <_X y)$. Тогда $\forall L \exists y (L <_X y)$, т.е.

$B(L) = \{y \in X \mid L <_X y\} \neq \emptyset$ для любого л.у.м. $L \subseteq X$.

Пусть f — функция выбора на X , и $g(L) = f(B(L))$. Тогда $L <_X g(L)$ для любого л.у.м. $L \subseteq X$.

Определим функцию-класс $F : Ord \rightarrow X$ рекурсией:

$F(\alpha) = g(F|_\alpha)$ и заметим, что F — вложение частичных порядков (поскольку $\beta < \alpha \rightarrow F(\beta) <_X F(\alpha)$), в частности инъекция. По аксиоме выделения, $X = rng(F) \subseteq X$ — множество. Поскольку F^{-1} — биекция из R на Ord , Ord по аксиоме замены есть множество. Противоречие.

Лемма Цорна влечет теорему Цермело

Пусть лемма Цорна верна, надо проверить, что на любом множестве A существует фундированный линейный порядок. Рассмотрим класс X всех инъекций $f : \alpha \rightarrow A$, $\alpha \in Ord$. Любому $f \in X$ сопоставим в.у.м. $\mathbb{A}_f = (f(\alpha); \sqsubset)$, $a \sqsubset a_1 \Leftrightarrow f^{-1}(a) < f^{-1}(a_1)$. По аксиоме выделения $\mathcal{X} = \{\mathbb{A}_f \mid f \in X\}$ — множество. Поскольку $\alpha \simeq \mathbb{A}_f$ и X — область значений функции $\mathbb{A}_f \mapsto f$, определенной на \mathcal{X} , X есть множество по аксиоме замены.

Лемма Цорна влечет теорему Цермело

Пусть лемма Цорна верна, надо проверить, что на любом множестве A существует фундированный линейный порядок. Рассмотрим класс X всех инъекций $f : \alpha \rightarrow A$, $\alpha \in Ord$. Любому $f \in X$ сопоставим в.у.м. $\mathbb{A}_f = (f(\alpha); \sqsubset)$, $a \sqsubset a_1 \Leftrightarrow f^{-1}(a) < f^{-1}(a_1)$. По аксиоме выделения $\mathcal{X} = \{\mathbb{A}_f \mid f \in X\}$ — множество. Поскольку $\alpha \simeq \mathbb{A}_f$ и X — область значений функции $\mathbb{A}_f \mapsto f$, определенной на \mathcal{X} , X есть множество по аксиоме замены.

В чуме $(X; \subseteq)$ всякое л.у.м. $L \subseteq X$ имеет верхнюю границу $\bigcup L$. По лемме Цорна $(X; \subseteq)$ имеет максимальный элемент $f : \alpha \rightarrow A$. Заметим, что $rng(f) = A$ (иначе, $f \cup \{(\alpha, a)\}$, где $a \in A \setminus rng(f)$, — собственное расширение f , противоречие). Поскольку $\alpha \simeq \mathbb{A}_f$, \sqsubset — фундированный линейный порядок на A .

Теорема Цермело влечет аксиому выбора

Предполагая терему Цермело, покажем, что на любом множестве A существует функция выбора $f : P(A) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow A$, $f(X) \in X$. По теореме Цермело, существует фундированный линейный порядок $<_A$ на A . Для непустого $X \subseteq A$ определим $f(X)$ как $<_A$ -наименьший элемент множества X . Иными словами, $f = \{(X, x) \mid x \in X \subseteq A \wedge \forall y <_A x (y \notin X)\}$.

Теорема Цермело влечет аксиому выбора

Предполагая терему Цермело, покажем, что на любом множестве A существует функция выбора $f : P(A) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow A$, $f(X) \in X$. По теореме Цермело, существует фундированный линейный порядок $<_A$ на A . Для непустого $X \subseteq A$ определим $f(X)$ как $<_A$ -наименьший элемент множества X . Иными словами, $f = \{(X, x) \mid x \in X \subseteq A \wedge \forall y <_A x (y \notin X)\}$.

Теперь можем легко доказать, что в теории ZFC доказуема сравнимость любых двух множеств по мощности.

ТЕОРЕМА. Для любых множеств A и B имеем:
 $A \preceq B \vee B \preceq A$.

Д-ВО. По теореме Цермело, существуют фундированные линейные порядки $<_A$ на A и $<_B$ на B . По свойству в.у.м., $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B} \vee \mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$. Отсюда следует заключение теоремы.

Числа, измеряющие мощность множеств

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ. 1. Мощность множества A — наименьший ординал $|A|$, равномощный A .
2. Кардинал — ординал, не равномощный никакому меньшему ординалу. Класс всех кардиналов обозначается $Card$.
3. Шкала ординалов — упорядоченный класс $(Ord; <)$.
4. Шкала кардиналов — упорядоченный класс $(Card; <)$.
5. Для кардинала κ существует наименьший ординал, больший κ ; он обозначается κ^+ .

Числа, измеряющие мощность множеств

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. 1. Мощность множества A — наименьший ординал $|A|$, равномощный A .

2. Кардинал — ординал, не равномощный никакому меньшему ординалу. Класс всех кардиналов обозначается $Card$.

3. Шкала ординалов — упорядоченный класс $(Ord; <)$.

4. Шкала кардиналов — упорядоченный класс $(Card; <)$.

5. Для кардинала κ существует наименьший ординал, больший κ ; он обозначается κ^+ .

Любое в.у.м. \mathbb{A} изоморфно единственному ординалу $o(\mathbb{A})$, а любое множество равномощно единственному кардиналу.

Ординалы — числа, измеряющие в.у.м., а кардиналы — числа, измеряющие мощность множества. Заметим, что каждый кардинал является ординалом, но не наоборот.

Начало шкалы ординалов:

$0, 1, 2, \dots, \mathbb{N} = \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega + \omega, \dots$

Начало шкалы кардиналов: $0, 1, 2, \dots, \omega, \omega^+, (\omega^+)^+, \dots$