Задание 4. Аксиоматизируемость, полные теории

1. Пусть $\mathbb{N}$ — стандартная структура натуральных чисел в сигнатуре $\{=, +, \cdot\}$ и $Th(\mathbb{N}) := \{\varphi \mid \mathbb{N} \models \varphi\}$. Нестандартной моделью арифметики называется модель теории $Th(\mathbb{N})$, не изоморфная $\mathbb{N}$. Докажите, что существует нестандартная модель арифметики и опишите структуру порядка в счетной нестандартной модели.

2. Будут ли (конечно) аксиоматизируемыми следющие классы структур (подходящей сигнатуры):

– всех групп; всех конечных групп; всех бесконечных групп; всех абелевых групп; всех циклических групп; всех групп без кручения;

– всех полей; всех конечных полей; всех полей фиксированной характеристики; всех бесконечных полей; всех алгебраически замкнутых полей; всех алгебраически замкнутых полей фиксированной характеристики;

– всех упорядоченных полей; всех конечных упорядоченных полей; всех упорядоченных полей фиксированной характеристики; всех вещественно замкнутых упорядоченных полей.

3. Докажите, что любой аксиоматизируемый класс структур замкнут относительно элементарной эквивалентности и ультрапроизведений.

Докажите, что если предложение логически следует из данного множества предложений, то оно логически следует из некоторого конечного подмножества этого множества.

Докажите, что класс структур данной сигнатуры конечно аксиоматизируем в точности тогда, когда он сам и его дополнение (в классе всех структур этой сигнатуры) аксиоматизируемы.

4. Докажите, что класс фундированных частичных порядков не аксиоматизируем ни в каком константном обогащении сигнатуры $\{\leq\}$, а класс нефундированных частичных порядков не аксиоматизируем в сигнатуре $\{\leq\}$, но аксиматизируем в ее константном обогащении.

5. Докажите, что класс архимедовых упорядоченных полей не аксиоматизируем ни в каком константном обогащении его сигнатуры, а класс неархимедовых упорядоченных полей не аксиоматизируем в своей сигнатуре, но аксиматизируем в ее константном обогащении.

Докажите, что любое элементарное расширение поля вещественных чисел, не изоморфное этому полю, содержит бесконечно большие и бесконечно малые элементы.