Задание 7. Кардиналы, арифметика ординалов и кардиналов.

1. а) Докажите, что: сложение и умножение ординалов ассоциативны, не коммутативны, и обладают нейтральными элементами.

б) Докажите, что умножение ординалов дистрибутивно слева, но не дистрибутивно справа относительно сложения.

2. а) Докажите, что $\alpha + \beta$ — порядковый тип в.у.м. $((\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta); \sqsubset)$, где $(i, a) \sqsubset (j, b) \iff i < j \vee (i = j \wedge a < b)$.

б) Докажите, что $\alpha \cdot \beta$ — порядковый тип в.у.м. $(\alpha \times \beta; \sqsubset)$, где $(a, b) \sqsubset (a', b') \iff b < b' \vee (b = b' \wedge a < a')$.

3. Докажите, что $\alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta+\gamma}$ и $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$.

4. а) Докажите, что: сложение и умножение кардиналов ассоциативны, коммутативны и обладают нейтральными элементами; умножение кардиналов дистрибутивно относительно сложения.

б) Докажите, что ${}^{\mu}(\varkappa \tilde{\cdot} \lambda) = {}^{\mu}\varkappa \tilde{\cdot} {}^{\mu}\lambda$ и ${}^{\mu}({}^{\lambda}\varkappa) = {}^{\mu \tilde{\cdot} \lambda}\varkappa$.

5. Докажите, что $\aleph_{\alpha} \tilde{+} \aleph_{\beta} = \aleph_{\alpha} \tilde{\cdot} \aleph_{\beta} = max\{\aleph_{\alpha}, \aleph_{\beta}\}$.