Задание 6. Ординалы. Применения аксиомы выбора.

1. Докажите, что: любой элемент ординала есть ординал;
любой ординал совпадает с множеством всех меньших ординалов;
$(\alpha; \in) \simeq (\beta; \in) \iff \alpha = \beta$.

2. Докажите, что: любые два ординала сравнимы по отношению $<$;
$\alpha \subseteq \beta \iff \alpha \leq \beta$;
$\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ есть наименьший ординал, бо́льший α.

3. Докажите, что любой частичный порядок на произвольном множестве содержится в некотором линейном порядке на этом множестве. Можно ли в этом утверждении заменить “линейном” на “фундированном линейном”?

4. Множество векторов в вещественном векторном пространстве называется линейно независимым, если любое его конечное подмножество линейно независимо. Базисом векторного пространства называется линейно независимое множество B векторов такое, что любой вектор можно представить конечной линейной комбинацией векторов из B. Докажите, что любое линейно независимое множество векторов содержится в некотором базисе.

5. Декартовым произведением семейства множеств $\{A_i\}_{i \in I}$ называется множество $\{f : I \to \bigcup_i A_i \mid \forall i \in I(f(i) \in A_i)\}$. Докажите, что декартово произведение любого семейства непустых множеств непусто.