

ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ — 2023

Виктор Львович Селиванов

v.selivanov@spbu.ru

Важная дополнительная информация:

<https://github.com/vseliv/SetTheory2023>

ЛИТЕРАТУРА:

1. Н.К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. ч. 1. Начала теории множеств. — М.: МЦНМО, 2012.
2. К. Куратовский, А. Мостовский, Теория множеств. М.: Мир, 1970.
3. Т. Йех, Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973.
4. И.А. Лавров, Л.Л.Максимова, Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Наука, 2001.

ОТНОШЕНИЯ И ОПЕРАЦИИ:

Равенство: $A = B$ означает

$$\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

Включение: $A \subseteq B$ означает

$$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B).$$

Объединение:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Пересечение:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Разность:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Симметрическая разность:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Дополнение: $\overline{A} = U \setminus A$

(если все рассматриваемые множества содержатся в U).

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА

$$A \cup A = A, A \cup B = B \cup A$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{\overline{A}} = A$$

Все написанные выше свойства справедливы при замене объединения на пересечение и наоборот.

Δ коммутативна и ассоциативна, \cap дистрибутивна относительно Δ

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

$$A \setminus (A \setminus B) = (A \cap B)$$

$$A \setminus B = (A \setminus (A \cap B))$$

БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ, ФУНКЦИИ

Произведение:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Подмножества $R \subseteq A \times B$ называются отношениями между A и B . Запись $(a, b) \in R$ иногда упрощают до aRb .

$R^{-1} := \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$, $R^{-1} \subseteq B \times A$ — обратное отношение. $(R^{-1})^{-1} = R$.

$\text{dom}(R) := \{a \mid \exists b(aRb)\}$ — область определения R ,

$\text{rng}(R) := \{b \mid \exists a(aRb)\}$ — область значений R . $R(a) := \{b \mid aRb\}$

R функционально, если $\forall a, b, b'(aRb \wedge aRb' \rightarrow b = b')$. В этом случае $R(a) = \emptyset$ или $R(a) = \{b\}$ для единственного b .

R — функция, если оно функционально и $\text{dom}(R) = A$. В этом случае $R(a) = \{b\}$ для единственного b , которое называют значением функции R в точке a и пишут $R(a) = b$.

КЛАССЫ ОТНОШЕНИЙ $R \subseteq A \times A$

$\forall a \in A (aRa)$ рефлексивность

$\forall a \in A \neg (aRa)$ антирефлексивность

$\forall a, b \in A (aRb \rightarrow bRa)$ симметричность

$\forall a, b \in A (aRb \wedge bRa \rightarrow a = b)$ антисимметричность

$\forall a, b, c \in A ((aRb \wedge bRc) \rightarrow aRc)$ транзитивность

Предпорядок = рефлексивность и транзитивность, $\leq, \preceq, \subseteq, \sqsubseteq$

Частичный порядок = антисимметричный предпорядок

Линейный порядок = Частичный порядок + $\forall a, b \in A (aRb \vee bRa)$

Строгий порядок = антирефлексивность и транзитивность $<, \prec, \subset, \sqsubset$

Эквивалентность = рефлексивность, симметричность и транзитивность $=, \simeq, \equiv$

НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА В ТМ

\mathbb{N} — наименьшее по включению множество, содержащее \emptyset и замкнутое относительно операции $x' = x \cup \{x\}$. $(\mathbb{N}; \emptyset, ')$ — структура Пеано (т.е. $x' \neq \emptyset$, $x' = y' \rightarrow x = y$, и $[\emptyset \in P \wedge \forall x \in P(x' \in P)] \rightarrow P = \mathbb{N}$, для любого $P \subseteq \mathbb{N}$).

$$x < y \leftrightarrow x \in y.$$

$+$ — единственная бинарная операция на \mathbb{N} такая, что $x + 0 = x$ и $x + y' = (x + y)'$.

\cdot — единственная бинарная операция на \mathbb{N} такая, что $x \cdot 0 = 0$ и $x \cdot y' = x \cdot y + x$.

СВОЙСТВА СТРУКТУРЫ $(\mathbb{N}; +, \cdot, <, 0, 1)$:

$+$, \cdot ассоциативны и коммутативны,

\cdot дистрибутивна относительно $+$,

$0, 1$ нейтральны относительно $+$, \cdot ,

$0 < 1 < 2 < \dots$ и между соседями нет других чисел,

$$[P(0) \wedge \forall x(P(x) \rightarrow P(x+1))] \rightarrow \forall x P(x),$$

$$\forall x(\forall y < x P(y) \rightarrow P(x)) \rightarrow \forall x P(x).$$

ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА В ТМ

Уже есть $(\mathbb{N}; +, \cdot, \leq, 0, 1)$.

$\mathbb{Z} := (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) / \sim$, где

$$(a, b) \sim (c, d) \leftrightarrow a + d = b + c.$$

$$[a, b] \tilde{+} [c, d] := [a + c, b + d],$$

$$[a, b] \tilde{\cdot} [c, d] := [ac + bd, ad + bc],$$

$$[a, b] \tilde{\leq} [c, d] \leftrightarrow a + d \leq b + c,$$

$$\tilde{0} := [0, 0], \tilde{1} := [1, 0].$$

СВОЙСТВА $(\mathbb{Z}; \tilde{+}, \tilde{\cdot}, \tilde{\leq}, \tilde{0}, \tilde{1})$:

Это упорядоченное кольцо

(т.е. $\tilde{+}, \tilde{\cdot}$ ассоциативны и коммутативны;

$\tilde{\cdot}$ дистрибутивна относительно $\tilde{+}$;

$\tilde{0}, \tilde{1}$ нейтральны относительно $\tilde{+}, \tilde{\cdot}$;

$$\forall x \exists y (x + y = 0),$$

$$\forall x, y, z (x \leq y \rightarrow (x + z \leq y + z)),$$

$$\forall x, y, z (x \leq y \wedge 0 < z \rightarrow (x \cdot z \leq y \cdot z))),$$

в котором любой элемент является разностью двух натуральных чисел.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА В ТМ

Уже есть $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

$\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\}) / \sim$, где

$$(a, b) \sim (c, d) \leftrightarrow ad = bc.$$

$$[a, b] \tilde{+} [c, d] := [ad + bc, bd],$$

$$[a, b] \tilde{\cdot} [c, d] := [ac, bd],$$

$$[a, b] \tilde{\leq} [c, d] \leftrightarrow ad \leq bc,$$

$$\tilde{0} := [0, 1], \tilde{1} := [1, 1].$$

СВОЙСТВА $(\mathbb{Q}; \tilde{+}, \tilde{\cdot}, \tilde{\leq}, \tilde{0}, \tilde{1})$:

Это упорядоченное поле (т.е. упорядоченное кольцо, в котором $\forall x \neq 0 \exists y (x \cdot y = 1)$)

такое, что любой элемент получается делением целого числа на положительное целое.

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА В ТМ

Уже есть $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

$\mathbb{R} := S / \sim$, где S — множество всех последовательностей Коши $\{q_i\}$ рациональных чисел (т.е. $\forall n \exists m \forall i, j > m (|q_i - q_j| < 2^{-n})$),

$$\{q_i\} \sim \{r_i\} \leftrightarrow \lim_i (q_i - r_i) = 0.$$

$$[\{q_i\}] \tilde{+} [\{r_i\}] := [\{q_i + r_i\}],$$

$$[\{q_i\}] \tilde{\cdot} [\{r_i\}] := [\{q_i \cdot r_i\}],$$

$$[\{q_i\}] \tilde{<} [\{r_i\}] \leftrightarrow \exists n, m \forall i > m (q_i - r_i < -2^{-n}),$$

$$\tilde{0} := [0, 0, \dots], \tilde{1} := [1, 1, \dots].$$

СВОЙСТВА $(\mathbb{R}; \tilde{+}, \tilde{\cdot}, \tilde{\leq}, \tilde{0}, \tilde{1})$:

Это полное упорядоченное поле (т.е. упорядоченное поле, в котором любое непустое ограниченное сверху множество имеет супремум).

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В ТМ

Уже есть $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. В любом упорядоченном кольце не существует элемента i со свойством $i^2 = -1$. Поле комплексных чисел есть наименьшее расширение поля вещественных чисел, обладающее таким элементом.

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

$$(x, y) \tilde{+} (x_1, y_1) := (x + x_1, y + y_1),$$

$$(x, y) \tilde{\cdot} (x_1, y_1) := (xx_1 - yy_1, xy_1 + yx_1),$$

$$\tilde{0} := (0, 0), \tilde{1} := (1, 0), \tilde{i} := (0, 1),$$

СВОЙСТВА $(\mathbb{C}; \tilde{+}, \tilde{\cdot}, \tilde{0}, \tilde{1})$:

Это поле, удовлетворяющее сформулированным в начале условиям (копия поля вещественных чисел “внутри” \mathbb{C} есть $\tilde{\mathbb{R}} := \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$).

АКСИОМЫ ZFC

0. $\exists x(x = x)$.
1. $\forall u(u \in X \leftrightarrow u \in Y) \rightarrow X = Y$.
2. $\forall u \forall v \exists x \forall z(z \in x \leftrightarrow z = u \vee z = v)$.
3. $\forall X \exists Y \forall u(u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi(u))$.
4. $\forall X \exists Y \forall u \forall z(u \in z \wedge z \in X \rightarrow u \in Y)$.
5. $\forall X \exists Y \forall u(u \in Y \leftrightarrow u \subseteq X)$.
6. $\forall x \forall y \forall y'(\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, y') \rightarrow y = y') \rightarrow \forall X \exists Y \forall x \forall y(x \in X \wedge \varphi(x, y) \rightarrow y \in Y)$.
7. $\exists Y(\emptyset \in Y \wedge \forall y(y \in Y \rightarrow y \cup \{y\} \in Y))$.
8. $\forall X(X \neq \emptyset \rightarrow \exists x(x \in X \wedge \forall u(u \in x \rightarrow u \notin X)))$.
9. $\forall X \exists f((f : (P(X) \setminus \{\emptyset\}) \rightarrow X) \wedge \forall Y(Y \subseteq X \wedge Y \neq \emptyset \rightarrow f(Y) \in Y))$.

ОРДИНАЛЫ

- 1) S транзитивно, если $x \in y \in S \rightarrow x \in S$
- 2) S ординал, если оно транзитивно и вполне упорядочено отношением \in .
- 3) Ординалы обозначаем $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, Ord — класс всех ординалов, сужение отношения \in на Ord обозначаем $<$

СВОЙСТВА ОРДИНАЛОВ

- 1) $x \in \alpha \rightarrow x \in Ord$, 2) $\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$
- 3) $(\alpha; \in) \simeq (\beta; \in) \iff \alpha = \beta$
- 4) $\alpha < \beta \vee \beta < \alpha \vee \alpha = \beta$
- 5) $\alpha \subseteq \beta \iff \alpha \leq \beta$
- 6) $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ — наименьший ординал, больший α
- 7) Любое множество A ординалов вполне упорядочено отношением $<$, причем $\bigcup A = \sup(A)$
- 8) Класс Ord не является множеством
- 9) Любое вполне упорядоченное множество изоморфно единственному ординалу.

АРИФМЕТИКА ОРДИНАЛОВ

$\alpha + \beta$ — порядковый тип в.у.м.

$$((\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta); \sqsubset),$$

где $(i, a) \sqsubset (j, b) \iff$

$$i < j \vee (i = j \wedge a < b);$$

$\alpha \cdot \beta$ — порядковый тип в.у.м.

$$(\alpha \times \beta; \sqsubset), \text{ где } (a, b) \sqsubset (a', b') \iff$$

$$b < b' \vee (b = b' \wedge a < a');$$

$$\alpha + 0 := \alpha, \alpha + (\beta + 1) := (\alpha + \beta) + 1,$$

$$\alpha + \gamma := \sup\{\alpha + \beta \mid \beta < \gamma\}, \gamma \text{ предель.}$$

$$\alpha \cdot 0 := 0, \alpha \cdot (\beta + 1) := (\alpha \cdot \beta) + \alpha,$$

$$\alpha \cdot \gamma := \sup\{\alpha \cdot \beta \mid \beta < \gamma\}, \gamma \text{ предельный.}$$

$$\alpha^0 := 1, \alpha^{\beta+1} := (\alpha^\beta) \cdot \alpha,$$

$$\alpha^\gamma := \sup\{\alpha^\beta \mid \beta < \gamma\}, \gamma \text{ предельный.}$$

СВОЙСТВА

1) $+$, \cdot ассоциативны и не коммутативны;

2) \cdot дистрибутивно слева, но не справа относительно $+$;

3) $0, 1$ нейтральны относительно $+$, \cdot ;

$$4) \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma};$$

$$5) (\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}.$$

АРИФМЕТИКА КАРДИНАЛОВ

Кардинал = ординал, не равномощный никакому меньшему ординалу. Любое множество равномощно единственному кардиналу, который называется мощностью этого множества. $\{\aleph_\alpha\}_{\alpha \in Ord}$ — последовательность всех бесконечных кардиналов в порядке возрастания.

\aleph^+ наименьший кардинал, больший \aleph ;

$$\aleph \dot{+} \lambda := |\aleph + \lambda|;$$

$$\aleph \tilde{\cdot} \lambda := |\aleph \times \lambda|;$$

$$\aleph^\lambda := |\{f \mid f : \lambda \rightarrow \aleph\}|.$$

СВОЙСТВА

1) $\dot{+}, \tilde{\cdot}$ ассоциативны и коммутативны;

2) $\tilde{\cdot}$ дистрибутивна относительно $\dot{+}$;

3) 0, 1 нейтральны относительно $\dot{+}, \tilde{\cdot}$;

$$4) (\aleph \tilde{\cdot} \lambda)^\mu = \aleph^{\mu \tilde{\cdot} \lambda^\mu};$$

$$5) (\aleph^\lambda)^\mu = \aleph^{\lambda \tilde{\cdot} \mu};$$

$$6) \aleph_\alpha \dot{+} \aleph_\beta = \aleph_\alpha \tilde{\cdot} \aleph_\beta = \max\{\aleph_\alpha, \aleph_\beta\};$$

$$7) \alpha \leq \beta \implies \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}.$$