

Задание 2. Предпорядки и эквивалентности

1. Проверьте, что: обращение любого частичного порядка на множестве X является частичным порядком на X ; декартово произведение $(x, y)T(x_1, y_1) \leftrightarrow xRx_1 \wedge ySy_1$, $T = R \times S$, частичных порядков R на X и S на Y является частичным порядком на $X \times Y$; объединение произвольной возрастающей по включению последовательности частичных порядков на X является частичным порядком на X ; пересечение частичных порядков на X является частичным порядком на X .

2. а) Пусть $\mathcal{P}(X)$ — множество всех частичных порядков на X . Докажите, что максимальные элементы в $(\mathcal{P}(X); \subseteq)$ — это в точности линейные порядки на X . Существует ли наименьший элемент в $(\mathcal{P}(X); \subseteq)$?

б) Является ли декартово произведение двух предпорядков (соотв. линейных порядков) снова предпорядком (соотв. линейным порядком)?

3. а) Докажите, что существует биекция между множеством всех частичных порядков на X и множеством всех строгих частичных порядков на X . Аналогично для линейных порядков.

б) Докажите, что существует биекция между множеством всех эквивалентностей на X и множеством всех разбиений множества X .

4. а) Линейный порядок на X называется полным, если любое непустое ограниченное сверху подмножество X имеет супремум. Являются ли полными обычные линейные порядки на множествах всех натуральных, целых, рациональных, и вещественных чисел? Ответ обоснуйте.

б) Проверьте, что любое подмножество множества $P(X)$ имеет инфимум и супремум по отношению включения.

5. а) Опишите фактор-множества для следующих эквивалентностей: эквивалентность “ $x - y$ делится на 5” на множестве \mathbb{Z} ; эквивалентность $x - y \in \mathbb{Z}$ на множестве \mathbb{R} ; отношение параллельности прямых на множестве всех прямых на плоскости.

б) Проверьте, что: если \leq — предпорядок на X , то отношение “ $x \leq y \wedge y \leq x$ ” есть эквивалентность на X ; если $f : X \rightarrow Y$, то отношение “ $f(x) = f(x_1)$ ” есть эквивалентность на X .