Логика-1, 1 курс М

Виктор Львович Селиванов [1]

[1]ФМКН СПбГУ

Весенний семестр, 2024

v.selivanov@spbu.ru

Важная дополнительная информация:
https://github.com/vseliv/Logic1-2023/tree/main

Литература

1. Н.К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления. — 4-е изд., доп. — М.: МЦНМО, 2012. — 240 с.

2. И.А. Лавров, Л.Л. Максимова, Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. Издание четвертое, М.: Наука, 2001. 256 с.

3. Дж. Шенфилд. Математическая логика. М.: Наука, 1975. 528 с.

Исходные символы ЛП$^\sigma$

Выражения ЛП$^\sigma$ строятся из следующих исходных различных символов:

- Множество σ предикатных и функциональных символов, каждому из которых сопоставлено натуральное число — местность этого символа; будем считать, что σ содержит хотя бы один предикатный символ.

Исходные символы ЛП$^\sigma$

Выражения ЛП$^\sigma$ строятся из следующих исходных различных символов:

- Множество σ предикатных и функциональных символов, каждому из которых сопоставлено натуральное число — местность этого символа; будем считать, что σ содержит хотя бы один предикатный символ.
- Счетное множество Var переменных $v_0\ v_1\ v_2 \ldots$

Исходные символы ЛП$^\sigma$

Выражения ЛП$^\sigma$ строятся из следующих исходных различных символов:

- Множество σ предикатных и функциональных символов, каждому из которых сопоставлено натуральное число — местность этого символа; будем считать, что σ содержит хотя бы один предикатный символ.
- Счетное множество Var переменных $v_0\ v_1\ v_2 \ldots$
- Логические символы $\wedge\ \vee\ \rightarrow\ \neg\ \forall\ \exists$

Исходные символы ЛП$^\sigma$

Выражения ЛП$^\sigma$ строятся из следующих исходных различных символов:

- Множество σ предикатных и функциональных символов, каждому из которых сопоставлено натуральное число — местность этого символа; будем считать, что σ содержит хотя бы один предикатный символ.
- Счетное множество Var переменных $v_0\ v_1\ v_2 \ldots$
- Логические символы $\wedge\ \vee\ \ \rightarrow\ \ \neg\ \forall\ \exists$
- Вспомогательные символы ( ) ,

Осмысленные выражения ЛП$^\sigma$

σ-ТЕРМЫ:

любая переменная есть терм;

если f — n-местный функциональный символ из σ и $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то выражение $f(t_1, \ldots, t_n)$ тоже терм.

Осмысленные выражения ЛП$^\sigma$

σ-ТЕРМЫ:

любая переменная есть терм;

если f — n-местный функциональный символ из σ и $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то выражение $f(t_1, \ldots, t_n)$ тоже терм.

σ-ФОРМУЛЫ:

выражение $P(t_1, \ldots, t_n)$,

где $t_1, \ldots, t_n$ — термы, а P - n-местный предикатный символ из σ, является формулой;

если φ и ψ — формулы, а x — переменная, то выражения

$(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $\neg\varphi$, $\forall x\varphi$, $\exists x\varphi$

суть формулы.

Свободные и связанные переменные

Множество $FV(\varphi)$ свободных переменных формулы φ определяется по индукции:

$FV(P(t_1, \ldots, t_n))$ состоит из переменных, входящих хотя бы в один из термов $t_1, \ldots, t_n$;

$FV(\varphi \wedge \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$, и аналогично для $\vee, \rightarrow, \neg$;

$FV(\forall x \varphi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$, и аналогично для $\exists$.

Свободные и связанные переменные

Множество $FV(\varphi)$ свободных переменных формулы φ определяется по индукции:

$FV(P(t_1, \dots, t_n))$ состоит из переменных, входящих хотя бы в один из термов $t_1, \dots, t_n$;

$FV(\varphi \wedge \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$, и аналогично для $\vee, \rightarrow, \neg$;

$FV(\forall x \varphi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$, и аналогично для $\exists$.

Переменные, которые входят в формулу, но не являются свободными, называются связанными. Формулы без свободных переменных называются предложениями.

Запись $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_m)$ означает, что $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_m\}$. Аналогично для термов.

σ-Структуры

σ-Структура — пара $\mathbb{A} = (A; I)$, состоящая из непустого множества A и интерпретации I всех сигнатурных символов в A (I сопоставляет n-местному предикатному символу $P \in \sigma$ некоторый n-местный предикат $P^I = P^{\mathbb{A}} : A^n \to \{\text{И},\text{Л}\}$, а каждому n-местному функциональному символу f из σ — некоторую n-местную функцию $f^I = f^{\mathbb{A}}$ на A).

σ-Структуры

σ-Структура — пара $\mathbb{A} = (A; I)$, состоящая из непустого множества A и интерпретации I всех сигнатурных символов в A (I сопоставляет n-местному предикатному символу $P \in \sigma$ некоторый n-местный предикат $P^I = P^{\mathbb{A}} : A^n \to \{\text{И,Л}\}$, а каждому n-местному функциональному символу f из σ — некоторую n-местную функцию $f^I = f^{\mathbb{A}}$ на A).

Изоморфизмом $\mathbb{A}$ на $\mathbb{B}$ называется биекция g множества A на множество B такая, что $P^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_n) = P^{\mathbb{B}}(g(a_1), \ldots, g(a_n))$ и $g(f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathbb{B}}(g(a_1), \ldots, g(a_n))$ для любых $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{A}$.

Структуры $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ называются изоморфными ($\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$), если существует изоморфизм $\mathbb{A}$ на $\mathbb{B}$.

Значения термов и формул

Для любой σ-структуры $\mathbb{A}$ и означивания $\nu : Var \to A$ определяем значения $t^{\mathbb{A},\nu} \in A$ и $\varphi^{\mathbb{A},\nu} \in \{$И,Л$\}$ индукцией:

$x^{\mathbb{A},\nu} = \nu(x)$, $f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathbb{A},\nu} = f^{\mathbb{A}}(t_1^{\mathbb{A},\nu}, \ldots, t_n^{\mathbb{A},\nu})$;

Значения термов и формул

Для любой σ-структуры $\mathbb{A}$ и означивания $\nu : Var \to A$ определяем значения $t^{\mathbb{A},\nu} \in A$ и $\varphi^{\mathbb{A},\nu} \in \{\text{И},\text{Л}\}$ индукцией:

$x^{\mathbb{A},\nu} = \nu(x)$, $f(t_1,\ldots,t_n)^{\mathbb{A},\nu} = f^{\mathbb{A}}(t_1^{\mathbb{A},\nu},\ldots,t_n^{\mathbb{A},\nu})$;

$P(t_1,\ldots,t_n)^{\mathbb{A},\nu} = P^{\mathbb{A}}(t_1^{\mathbb{A},\nu},\ldots,t_n^{\mathbb{A},\nu})$;
$(\varphi \wedge \psi)^{\mathbb{A},\nu} = \varphi^{\mathbb{A},\nu} \wedge \psi^{\mathbb{A},\nu}$, аналогично для $\vee, \to, \neg$;

$$(\forall x \varphi)^{\mathbb{A},\nu} = \bigwedge_{a\in A} \varphi^{\mathbb{A},\nu_a^x} \text{ и } (\exists x \varphi)^{\mathbb{A},\nu} = \bigvee_{a\in A} \varphi^{\mathbb{A},\nu_a^x}$$

,
где ν_a^x — означивание, полученное из ν изменением значения x на a.

Значения термов и формул

Пусть $t = t(x_1, \ldots, x_m)$ и $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_m)$.

- Если означивания μ и ν согласованы на $x_1, \ldots, x_m$, то $t^{\mathbb{A},\mu} = t^{\mathbb{A},\nu}$ и $\varphi^{\mathbb{A},\mu} = \varphi^{\mathbb{A},\nu}$. Поэтому вместо $t^{\mathbb{A},\nu}$ часто пишут $t^{\mathbb{A}}(x_1/a_1, \ldots, x_m/a_m)$ или, короче, $t^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m)$, где $a_i = \nu(x_i)$; аналогично для формул. Вместо $\varphi^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m) =$И часто пишут $\mathbb{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_m)$.
- Если g — изоморфизм $\mathbb{A}$ на $\mathbb{B}$, то $g(t^{\mathbb{A},\nu}) = t^{\mathbb{B},g\circ\nu}$ и $\varphi^{\mathbb{A},\nu} = \varphi^{\mathbb{B},g\circ\nu}$. Иными словами, $g(t^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m)) = t^{\mathbb{B}}(g(a_1), \ldots, g(a_m))$ и $\varphi^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m) = \varphi^{\mathbb{B}}(g(a_1), \ldots, g(a_m))$.
- Если $\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$, то эти структуры элементарно эквивалентны ($\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$), т.е. в них истинны одни и те же σ-предложения.

Определимость и автоморфизмы

Предикат $P(x_1, \ldots, x_k)$ на σ-структуре $\mathbb{A}$ называется *определимым*, если он определяется подходящей σ-формулой $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$, т.е. $P(a_1, \ldots, a_k) = \varphi^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_k)$ для любых $a_1, \ldots, a_k \in A$.

Функция на A *определима*, если определим ее график. Элемент $a \in A$ определим, если множество $\{a\}$ (равносильно, предикат $x = a$) определимо. τ-Структура $\mathbb{B}$ определима в $\mathbb{A}$, если определимы ее универсум и интерпретации всех τ-символов.

Определимость и автоморфизмы

Предикат $P(x_1, \dots, x_k)$ на σ-структуре $\mathbb{A}$ называется *определимым*, если он определяется подходящей σ-формулой $\varphi(x_1, \dots, x_k)$, т.е. $P(a_1, \dots, a_k) = \varphi^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_k)$ для любых $a_1, \dots, a_k \in A$.

Функция на A *определима*, если определим ее график. Элемент $a \in A$ определим, если множество $\{a\}$ (равносильно, предикат $x = a$) определимо. τ-Структура $\mathbb{B}$ определима в $\mathbb{A}$, если определимы ее универсум и интерпретации всех τ-символов.

Определимость в структуре $\mathbb{A}$ связана с автоморфизмами этой структуры, которые составляют группу $Aut(\mathbb{A})$: любой определимый предикат инвариантен относительно всех автоморфизмов. Это свойство часто используют для доказательства неоределимости: если предикат не инвариантен, то он не определим.

Общезначимость и ее варианты

- φ общезначима (тождественно истинна), если $\varphi^{\mathbb{A},\nu}$ =И для любых $\mathbb{A}$ и ν.
- φ и ψ равносильны ($\varphi \equiv \psi$), если $\varphi^{\mathbb{A},\nu} = \psi^{\mathbb{A},\nu}$ для любых $\mathbb{A}$ и ν.
- Моделью множества предложений T называется структура, в которой все предложения из T истинны.
- Предложение φ логически следует из множества педложений T ($T \models \varphi$), если φ истинно в любой модели множества T.

Общезначимость и ее варианты

- φ общезначима $\iff$ $\models \varphi$.
- $\varphi \equiv \psi \iff (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ общезначима.
- $\varphi(\bar{x})$ общезначима $\iff$ $\forall \bar{x} \varphi$ общезначима.
- $T \models (\varphi \to \psi) \iff T \cup \{\varphi\} \models \psi$.
- $T \models \varphi \iff T \cup \{\neg\varphi\}$ не имеет модели.
- $T \models \varphi \iff \bigwedge T \to \varphi$ общезначима, где T — конечное множество предложений.

Фильтры и ультрафильтры

Фильтр F на множестве I — это собственное подмножество множества $P(I)$, замкнутое относительно пересечения и надмножеств. Фильтр F называется ультрафильтром, если $J \in F \vee \bar{J} \in F$ для любого $J \subseteq I$, где $\bar{J} = I \setminus J$.

Фильтры и ультрафильтры

Фильтр F на множестве I — это собственное подмножество множества $P(I)$, замкнутое относительно пересечения и надмножеств. Фильтр F называется ультрафильтром, если $J \in F \vee \bar{J} \in F$ для любого $J \subseteq I$, где $\bar{J} = I \setminus J$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ.

1. Ультрафильтры на I — это в точности максимальные фильтры по включению.
2. Если F — ультрафильтр, то $J \notin F \iff \bar{J} \in F$ и $J \cup K \in F \iff (J \in F \vee K \in F) \in F$, для любых $J, K \subseteq I$.
3. Любой фильтр на I содержится в некотором ультрафильтре.

Фильтрованные произведения

Пусть $\{\mathbb{A}_i\}_{i\in I}$ — семейство σ-структур и F — фильтр на I. Тогда отношение $a \equiv_F b \iff \{i \mid a(i) = b(i)\} \in F$ есть эквивалентность на $A = \{a : I \to \bigcup_i A_i \mid \forall i (a(i) \in A_i)\}$.
Определим σ-структуру $\mathbb{A}_F$ на $A/_{\equiv_F}$ так:
$P^{\mathbb{A}_F}([a_1], \ldots, [a_n]) \iff \{i \mid P^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i))\} \in F$,
$f^{\mathbb{A}_F}([a_1], \ldots, [a_n]) = [a]$, где $a(i) = f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i))$;
это определение корректно.

Фильтрованные произведения

Пусть $\{\mathbb{A}_i\}_{i\in I}$ — семейство σ-структур и F — фильтр на I. Тогда отношение $a \equiv_F b \iff \{i \mid a(i) = b(i)\} \in F$ есть эквивалентность на $A = \{a : I \to \bigcup_i A_i \mid \forall i(a(i) \in A_i)\}$. Определим σ-структуру $\mathbb{A}_F$ на $A/_{\equiv_F}$ так:
$P^{\mathbb{A}_F}([a_1], \ldots, [a_n]) \iff \{i \mid P^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i))\} \in F$,
$f^{\mathbb{A}_F}([a_1], \ldots, [a_n]) = [a]$, где $a(i) = f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i))$;
это определение корректно.

ТЕОРЕМА. Для любых ультрафильтра F, σ-формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ и $a_1, \ldots, a_m \in A$ имеем:
$\mathbb{A}_F \models \varphi([a_1], \ldots, [a_m]) \iff \{i \mid \mathbb{A}_i \models \varphi(a_1(i), \ldots, a_m(i))\} \in F$.

В частности, при $m = 0$: $\mathbb{A}_F \models \varphi \iff \{i \mid \mathbb{A}_i \models \varphi\} \in F$.

Теорема компактности

ТЕОРЕМА. Если любое конечное подмножество данного множества предложений T имеет модель, то и все множество T имеет модель.

Теорема компактности

ТЕОРЕМА. Если любое конечное подмножество данного множества предложений T имеет модель, то и все множество T имеет модель.

Далее предполагаем, что σ содержит символ равенства $=$ (двухместный предикатный символ). σ-Структура называется нормальной, если символ равенства в ней интерпретируется стандартным образом, как отношение равенства элементов.

Теорема компактности

ТЕОРЕМА. Если любое конечное подмножество данного множества предложений T имеет модель, то и все множество T имеет модель.

Далее предполагаем, что σ содержит символ равенства $=$ (двухместный предикатный символ). σ-Структура называется нормальной, если символ равенства в ней интерпретируется стандартным образом, как отношение равенства элементов.

Аксиомы равенства $\forall x(x = x)$, $\forall x \forall y(x = y \to y = x)$,
$\forall x \forall y \forall z(x = y \wedge y = z \to x = z)$,
$\forall x_1 \forall y_1 \ldots \forall x_n \forall y_n (x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \to f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n))$,
$\forall x_1 \forall y_1 \ldots \forall x_n \forall y_n (x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \wedge P(x_1, \ldots, x_n) \to P(y_1, \ldots, y_n))$
истинны в любой нормальной структуре.

Нормальные модели, компактность для них

ТЕОРЕМА. Если теория содержит аксиомы равенства и имеет модель, то она имеет и нормальную модель.

Нормальные модели, компактность для них

ТЕОРЕМА. Если теория содержит аксиомы равенства и имеет модель, то она имеет и нормальную модель.

Следующий результат есть теорема компактности для нормальных моделей.
ТЕОРЕМА. Если любое конечное подмножество данного множества предложений T сигнатуры с равенством имеет нормальную модель, то и все множество T имеет нормальную модель.

Для доказательства надо применить теорему компактности к множеству $T \cup E_\sigma$, где E_σ — аксиомы равенства, и профакторизовать полученную модель $\mathbb{A}$ по $=^{\mathbb{A}}$.

Понижение мощности

- $\mathbb{A}$ — *подструктура* $\mathbb{B}$ ($\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$), если $A \subseteq B$, $P^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n) = P^{\mathbb{B}}(a_1, \dots, a_n)$ и $f^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathbb{B}}(a_1, \dots, a_n)$ для всех $a_1, \dots, a_n \in A$;
- *вложение* структуры $\mathbb{A}$ в структуру $\mathbb{B}$ — это изоморфизм $\mathbb{A}$ на подструктуру структуры $\mathbb{B}$;
- $\mathbb{A}$ — *элементарная подструктура* $\mathbb{B}$ ($\mathbb{A} \preceq \mathbb{B}$), если $A \subseteq B$ и $\varphi^{\mathbb{A}}(\overline{a}) = \varphi^{\mathbb{B}}(\overline{a}))$ для всех $\overline{a} \in \mathbb{A}$ и для всех формул $\varphi(\overline{x})$;
- *элементарное вложение* $\mathbb{A}$ в $\mathbb{B}$ — это изоморфизм $\mathbb{A}$ на элементарную подструктуру структуры $\mathbb{B}$;
- $\mathbb{A}$ *элементарно эквивалентно* $\mathbb{B}$ ($\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$), если они удовлетворяют одни и те же предложения.

Понижение мощности

ТЕОРЕМА. Пусть есть $\mathbb{A}$, $X \subseteq A$, $|X| \leq |\mathsf{For}_\sigma|$.
Тогда существует $\mathbb{B} \preceq \mathbb{A}$: $X \subseteq B$ и $|\mathbb{B}| \leq |\mathsf{For}_\sigma|$.

Понижение мощности

ТЕОРЕМА. Пусть есть $\mathbb{A}$, $X \subseteq A$, $|X| \leq |\mathrm{For}_\sigma|$. Тогда существует $\mathbb{B} \preceq \mathbb{A}$: $X \subseteq B$ и $|\mathbb{B}| \leq |\mathrm{For}_\sigma|$.

Д. Определим последовательность $X = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \ldots$ по индукции: $S_{n+1} = S_n \cup \{\eta(e) \mid e \in E_n\}$, где E_n и $\eta : E_n \to A$ определены так: $E_n = \{(\overline{a}, \varphi(\overline{x}, y)) \mid \overline{a} \in S_n$ и $\mathbb{A} \models \exists y\ \varphi(\overline{a}, y)\}$ и $\mathbb{A} \models \varphi(\overline{a}, \eta(e))$ для всех $e \in E_n$. $B = \bigcup_n S_n$.

Понижение мощности

ТЕОРЕМА. Пусть есть $\mathbb{A}$, $X \subseteq A$, $|X| \leq |\mathrm{For}_\sigma|$. Тогда существует $\mathbb{B} \preceq \mathbb{A}$: $X \subseteq B$ и $|\mathbb{B}| \leq |\mathrm{For}_\sigma|$.

Д. Определим последовательность $X = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \ldots$ по индукции: $S_{n+1} = S_n \cup \{\eta(e) \mid e \in E_n\}$, где E_n и $\eta : E_n \to A$ определены так: $E_n = \{(\overline{a}, \varphi(\overline{x}, y)) \mid \overline{a} \in S_n$ и $\mathbb{A} \models \exists y\ \varphi(\overline{a}, y)\}$ и $\mathbb{A} \models \varphi(\overline{a}, \eta(e))$ для всех $e \in E_n$. $B = \bigcup_n S_n$.

Известен следующий важный результат: Не существует логики, собственным образом расширяющей логику предикатов и удовлетворяющей теоремам компактности и понижения мощности.

Константное обогащение

Если $\sigma \subseteq \tau$, то сигнатура τ называется *обогащением* сигнатуры σ. Если $\mathbb{A}$ — σ-структура, то, определив интерпретацию символов из $\tau \backslash \sigma$ в A, получим τ-структуру $\mathbb{B}$, называемую обогащением структуры $\mathbb{A}$. Наоборот: если $\mathbb{B}$ — τ-структура, то, "забывая" интерпретацию символов из $\tau \backslash \sigma$, получим *σ-обеднение* $B|_\sigma$ структуры $\mathbb{B}$. Чаще всего сигнатуры обогащаются константными символами.

Константное обогащение

Если $\sigma \subseteq \tau$, то сигнатура τ называется *обогащением* сигнатуры σ. Если $\mathbb{A}$ — σ-структура, то, определив интерпретацию символов из $\tau \backslash \sigma$ в A, получим τ-структуру $\mathbb{B}$, называемую обогащением структуры $\mathbb{A}$. Наоборот: если $\mathbb{B}$ — τ-структура, то, "забывая" интерпретацию символов из $\tau \backslash \sigma$, получим *σ-обеднение* $B|_\sigma$ структуры $\mathbb{B}$. Чаще всего сигнатуры обогащаются константными символами.

Например, пусть $\mathbb{A}$ — σ-структура, а $\sigma_A = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\}$ ее обогащение новыми константными символами c_a такими, что $c_a \neq c_b$ при $a \neq b$. Стандартным константным обогащением структуры $\mathbb{A}$ называется ее σ_A-обогащение, в котором новые символы интерпретируются так: $c_a \mapsto a$, для любого $a \in A$.

Аксиоматизируемые классы

- *Теория* T — множество σ-предложений.
- Теории T соответствует класс ее моделей $\mathsf{Mod}(T) = \{\mathbb{A} \mid \mathbb{A} \models T\}$
- Классу структур $K \subseteq \mathsf{Str}_\sigma$ соответствует его теория $\mathsf{Th}(K) = \{\varphi \in \mathsf{Sent}_\sigma \mid \forall \mathbb{A} \in K \ (\mathbb{A} \models \varphi)\}$.
- Класс структур K *аксиоматизируем*, если $K = \mathsf{Mod}(T)$ для некоторой теории T.
- Класс структур K *конечно аксиоматизируем*, если $K = \mathsf{Mod}(T)$ для некоторой конечной теории $T = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. Это равносильно аксиоматизируемости одной формулой $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$.

Аксиоматизируемые классы: свойства

1. Если $T \subseteq T'$, то $\mathsf{Mod}(T) \supseteq \mathsf{Mod}(T')$;
2. Если $K \subseteq K'$, то $\mathsf{Th}(K) \supseteq Th(K')$;
3. $K \subseteq \mathsf{Mod}(\mathsf{Th}(K))$ и $T \subseteq \mathsf{Th}(\mathsf{Mod}(T))$;
4. Класс K аксиоматизируем тогда и только тогда, когда $K = \mathsf{Mod}(\mathsf{Th}(K))$;
5. Любое пересечение аксиоматизируемых классов является аксиоматизируемым классом. Объединение двух аксиоматизируемых классов является аксиоматизируемым классом;
6. Класс K конечно аксиоматизируем тогда и только тогда, когда K и $\mathsf{Str}_\sigma \backslash K$ аксиоматизируемы;
7. Класс K — аксиоматизируем тогда и только тогда, когда K замкнут относительно элементарной эквивалентности и ультрапроизведений.

Логика высказываний

Пусть σ бесконечна и состоит только из нульместных предикатных символов $p, q, r, \ldots$. Бескванторные σ-формулы называются формулами логики высказываний (ЛВ) сигнатуры σ. Они называются также булевыми формулами (изучались в курсе дискретной математики).

Общезначимые формулы ЛВ называются также тавтологиями.

Хотя ЛВ составляет маленький фрагмент ЛП, она очень важна для применений, поскольку широко используется в проектировании микросхем.

Логика высказываний

Пусть σ бесконечна и состоит только из нульместных предикатных символов $p, q, r, \dots$. Бескванторные σ-формулы называются формулами логики высказываний (ЛВ) сигнатуры σ. Они называются также булевыми формулами (изучались в курсе дискретной математики).

Общезначимые формулы ЛВ называются также тавтологиями.

Хотя ЛВ составляет маленький фрагмент ЛП, она очень важна для применений, поскольку широко используется в проектировании микросхем.

Множество булевых формул счетной сигнатуры, имеющих модель, является NP-полным. Вопрос “P=?NP” является одной из основных открытых проблем информатики.

Основные тавтологии

1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$;
2. $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \theta)) \to (\varphi \to \theta))$;
3. $\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$;
4. $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$;
5. $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$;
6. $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$;
7. $\psi \to (\varphi \vee \psi)$;
8. $(\varphi \to \theta) \to ((\psi \to \theta) \to ((\varphi \vee \psi) \to \theta))$;
9. $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$;
10. $\neg\neg\varphi \to \varphi$.

Основные равносильности

1. $(\varphi \to \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \psi)$; 2. $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$;
3. $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \neg\psi)$; 4. $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$;
5. $(\varphi \wedge \psi) \equiv (\psi \wedge \varphi)$; 6. $(\varphi \vee \psi) \equiv (\psi \vee \varphi)$;
7. $\varphi \wedge (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \theta$;
8. $\varphi \vee (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee \theta$;
9. $\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)$;
10. $\varphi \vee (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)$.
11. $\neg(\forall x\varphi) \equiv \exists x(\neg\varphi)$;
12. $\neg(\exists x\varphi) \equiv \forall x(\neg\varphi)$;
13. $\psi \wedge \forall x\varphi \equiv \forall x(\psi \wedge \varphi)$;
14. $\psi \vee \exists x\varphi \equiv \exists x(\psi \vee \varphi)$;
15. $\psi \vee \forall x\varphi \equiv \forall x(\psi \vee \varphi)$ (x не входит свободно в ψ);
16. $\psi \wedge \exists x\varphi \equiv \exists x(\psi \wedge \varphi)$ (x не входит свободно в ψ);
17. $\forall x\varphi(x) \equiv \forall y\varphi(y)$ (y не входит в φ);
18. $\exists x\varphi(x) \equiv \exists y\varphi(y)$ (y не входит в φ).

Ограниченные кванторы

На практике часто используют так называемые формулы с ограниченными кванторами
$\forall x_{\psi(x)} \varphi$ и $\exists x_{\psi(x)} \varphi$,
где формула ψ является ограничением.

Такие выражения являются сокращениями обычных формул
$\forall x(\psi \to \varphi)$ и $\exists x(\psi \wedge \varphi)$.

Ограниченные кванторы

На практике часто используют так называемые формулы с ограниченными кванторами
$\forall x_{\psi(x)}\varphi$ и $\exists x_{\psi(x)}\varphi$,
где формула ψ является ограничением.

Такие выражения являются сокращениями обычных формул
$\forall x(\psi \to \varphi)$ и $\exists x(\psi \wedge \varphi)$.

Законы Де Моргана справедливы и для ограниченных кванторов:
$\neg(\forall x_{\psi}\varphi) \equiv \exists x_{\psi}(\neg\varphi)$,
$\neg(\exists x_{\psi}\varphi) \equiv \forall x_{\psi}(\neg\varphi)$.

Свойства равносильности

- Отношение $\equiv$ рефлексивно, симметрично и транзитивно.
- Если $\varphi \equiv \psi$ и $\varphi_1 \equiv \psi_1$, то $\varphi \wedge \varphi_1 \equiv \psi \wedge \psi_1$, $\varphi \vee \varphi_1 \equiv \psi \vee \psi_1$, $\varphi \to \varphi_1 \equiv \psi \to \psi_1$, $\neg\varphi \equiv \neg\psi$ и $\forall x\varphi \equiv \forall x\psi$,$\exists x\varphi \equiv \exists x\psi$ для любой предметной переменной x.
- Пусть ψ — подформула формулы φ, а φ' — результат замены некоторого вхождения ψ в φ на формулу ψ'. Тогда из $\psi \equiv \psi'$ следует $\varphi \equiv \varphi'$.

ДНФ и КНФ

Элементарной дизъюнкцией называется формула, являющаяся либо переменной, либо отрицанием переменной, либо дизъюнкцией нескольких переменных и отрицаний переменных.
Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется формула, являющаяся либо элементарной дизъюнкцией, либо конъюнкцией нескольких элементарных дизъюнкций.
Элементарные конъюнкции и ДНФ определяются так же, с заменой $\wedge$ на $\vee$ и наоборот.

ДНФ и КНФ

Элементарной дизъюнкцией называется формула, являющаяся либо переменной, либо отрицанием переменной, либо дизъюнкцией нескольких переменных и отрицаний переменных.
Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется формула, являющаяся либо элементарной дизъюнкцией, либо конъюнкцией нескольких элементарных дизъюнкций. Элементарные конъюнкции и ДНФ определяются так же, с заменой $\wedge$ на $\vee$ и наоборот.

Для любой формулы найдется равносильная ей КНФ.
Алгоритм приведения к КНФ (ДНФ):
Исключаем все импликации. По законам де Моргана проносим все отрицания как можно дальше вглубь формулы. Убираем все двойные отрицания. Раскрываем все скобки по закону дистрибутивности 9 (10).

Формулы предваренного вида

Формулу называют предваренной, если она либо бескванторная, либо имеет вид $Q_1 x_1 \dots Q_k x_k \psi$, где Q_i — кванторы, x_i — попарно различные переменные и формула ψ не содержит кванторов.

Формулы предваренного вида

Формулу называют предваренной, если она либо бескванторная, либо имеет вид $Q_1x_1 \ldots Q_kx_k\psi$, где Q_i — кванторы, x_i — попарно различные переменные и формула ψ не содержит кванторов.

Любая формула логики предикатов равносильна некоторой предваренной формуле. Алгоритм приведения к предваренному виду:
Исключаем все импликации. По законам де Моргана проносим все отрицания как можно дальше вглубь формулы. Убираем все двойные отрицания. Переименовываем все связанные переменные по равносильностям 17, 18 так, чтобы новые переменные отличались от всех свободных переменных. Выносим по очереди кванторы вперед по равносильностям 13 — 16.

Элиминация кванторов

Говорят, что формулы $\varphi(\bar{x})$ и $\psi(\bar{x})$ *равносильны в теории* T ($\varphi \equiv_T \psi$), если $T \models \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$.

Элиминация кванторов

Говорят, что формулы $\varphi(\bar{x})$ и $\psi(\bar{x})$ *равносильны в теории* T ($\varphi \equiv_T \psi$), если $T \models \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$.

Теория T *допускает элиминацию кванторов*, если любая формула $\varphi(\bar{x})$ равносильна подходящей бескванторной формуле $\psi(\bar{x})$ в теории T.

Элиминация кванторов

Говорят, что формулы $\varphi(\bar{x})$ и $\psi(\bar{x})$ *равносильны в теории* T ($\varphi \equiv_T \psi$), если $T \models \forall\bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$.

Теория T *допускает элиминацию кванторов*, если любая формула $\varphi(\bar{x})$ равносильна подходящей бескванторной формуле $\psi(\bar{x})$ в теории T.

Аналогично, структура $\mathbb{A}$ допускает элиминацию кванторов, если любая формула $\varphi(\bar{x})$ равносильна подходящей бескванторной формуле $\psi(\bar{x})$ в этой структуре.
$\mathbb{A}$ допускает элиминацию кванторов в точности тогда, когда теория $Th(\mathbb{A}) = \{\varphi \mid T \models \varphi\}$ допускает элиминацию кванторов (эта теория называется теорией структуры $\mathbb{A}$).

Элиминация кванторов в $\mathbb{R}$

ТЕОРЕМА. Упорядоченное поле $(\mathbb{R}; =, <, +, \cdot, 0, 1)$ вещественных чисел допускает элиминацию кванторов.

Элиминация кванторов в $\mathbb{R}$

ТЕОРЕМА. Упорядоченное поле $(\mathbb{R}; =, <, +, \cdot, 0, 1)$ вещественных чисел допускает элиминацию кванторов.

Доказательство разобьем на вспомогательные утверждения, в которых все формулы имеют сигнатуру $\{=, <, +, \cdot, 0, 1\}$, $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ — набор различных переменных, а структура из формулировки теоремы сокращенно обозначается $\mathbb{R}$.

Элиминация кванторов в $\mathbb{R}$

ТЕОРЕМА. Упорядоченное поле $(\mathbb{R}; =, <, +, \cdot, 0, 1)$ вещественных чисел допускает элиминацию кванторов.

Доказательство разобьем на вспомогательные утверждения, в которых все формулы имеют сигнатуру $\{=, <, +, \cdot, 0, 1\}$, $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ — набор различных переменных, а структура из формулировки теоремы сокращенно обозначается $\mathbb{R}$.

1) Достаточно проверить, что для любой бескванторной формулы $\theta(x, \bar{x})$ формула $\varphi(\bar{x}) = \exists x \theta(x, \bar{x})$ равносильна в $\mathbb{R}$ подходящей бескванторной формуле.

Элиминация кванторов в $\mathbb{R}$

ТЕОРЕМА. Упорядоченное поле $(\mathbb{R}; =, <, +, \cdot, 0, 1)$ вещественных чисел допускает элиминацию кванторов.

Доказательство разобьем на вспомогательные утверждения, в которых все формулы имеют сигнатуру $\{=, <, +, \cdot, 0, 1\}$, $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ — набор различных переменных, а структура из формулировки теоремы сокращенно обозначается $\mathbb{R}$.

1) Достаточно проверить, что для любой бескванторной формулы $\theta(x, \bar{x})$ формула $\varphi(\bar{x}) = \exists x \theta(x, \bar{x})$ равносильна в $\mathbb{R}$ подходящей бескванторной формуле.

2) Любая бескванторная формула $\psi(\bar{x})$ равносильна в $\mathbb{R}$ дизъюнкции нескольких формул, каждая из которых является конъюнкцией нескольких атомарных формул $t = t_1$, $t < t_1$.

Элиминация кванторов в $\mathbb{R}$

Отношение $(t = t_1)^{\mathbb{R}}$ (соотв. $(t < t_1)^{\mathbb{R}}$) совпадает с множеством всех решений уравнения $Q(\bar{x}) = 0$ (соотв. неравенства $Q(\bar{x}) > 0$), для подходящего полинома $Q \in \mathbb{Z}[\bar{x}]$. Поэтому предикат $\psi(\bar{x})^{\mathbb{R}}$ (рассматриваемый как подмножество $\mathbb{R}^m$) совпадает с конечным объединением множеств всех решений системы уравнений и неравенств указанного вида. Такие конечные объединения называются *полуалгебраическими множествами*.

Элиминация кванторов в $\mathbb{R}$

Отношение $(t = t_1)^{\mathbb{R}}$ (соотв. $(t < t_1)^{\mathbb{R}}$) совпадает с множеством всех решений уравнения $Q(\bar{x}) = 0$ (соотв. неравенства $Q(\bar{x}) > 0$), для подходящего полинома $Q \in \mathbb{Z}[\bar{x}]$. Поэтому предикат $\psi(\bar{x})^{\mathbb{R}}$ (рассматриваемый как подмножество $\mathbb{R}^m$) совпадает с конечным объединением множеств всех решений системы уравнений и неравенств указанного вида. Такие конечные объединения называются *полуалгебраическими множествами*.

Для бескванторной формулы $\theta(x, \bar{x})$ докажем, что формула $\varphi(\bar{x}) = \exists x \theta(x, \bar{x})$ равносильна в $\mathbb{R}$ подходящей бескванторной формуле (т.е. $\varphi(\bar{x})^{\mathbb{R}}$ полуалгебраическое). Согласно предыдущему абзацу, можем найти полиномы $Q_1, \ldots, Q_k$ из кольца $\mathbb{Z}[x, \bar{x}] = K[x]$, где $K = \mathbb{Z}[\bar{x}]$, определяющие полуалгебраическое множество $\theta(x, \bar{x})^{\mathbb{R}}$, содержащееся в $\mathbb{R}^{m+1}$.

Элиминация кванторов в $\mathbb{R}$

При любых значениях $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$, $Q_1, \ldots, Q_k$ становятся вещественными полиномами; пусть $\alpha_1 < \cdots < \alpha_l$ — все вещественные корни всех этих полиномов.

Элиминация кванторов в $\mathbb{R}$

При любых значениях $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$, $Q_1, \ldots, Q_k$ становятся вещественными полиномами; пусть $\alpha_1 < \cdots < \alpha_l$ — все вещественные корни всех этих полиномов.

Пусть $T_{\bar{x}}$ — таблица размера $k \times (2l+1)$, строки которой помечены данными полиномами, столбцы помечены интервалами
$(-\infty, \alpha_1), [\alpha_1, \alpha_1], (\alpha_1 \alpha_2), [\alpha_2, \alpha_2], \ldots, [\alpha_l, \alpha_l], (\alpha_l, +\infty)$,
и любая клетка (i, j) содержит один из знаков $+, -, 0$ в соответствии со знаком полинома Q_i в интервале I_j.

Элиминация кванторов в $\mathbb{R}$

При любых значениях $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$, $Q_1, \dots, Q_k$ становятся вещественными полиномами; пусть $\alpha_1 < \dots < \alpha_l$ — все вещественные корни всех этих полиномов.

Пусть $T_{\bar{x}}$ — таблица размера $k \times (2l+1)$, строки которой помечены данными полиномами, столбцы помечены интервалами $(-\infty, \alpha_1), [\alpha_1, \alpha_1], (\alpha_1 \alpha_2), [\alpha_2, \alpha_2], \dots, [\alpha_l, \alpha_l], (\alpha_l, +\infty)$, и любая клетка (i, j) содержит один из знаков $+, -, 0$ в соответствии со знаком полинома Q_i в интервале I_j.

Определим отношение эквивалентности $\sim$ на $\mathbb{R}^m$ соотношением: $\bar{x} \sim \bar{y}$, если $T_{\bar{x}} = T_{\bar{y}}$. Тогда соответсвующее фактор-множество конечно. Поскольку $\varphi(\bar{x})^{\mathbb{R}}$ инвариантно относительно $\sim$, получаем:

Элиминация кванторов в $\mathbb{R}$

3) Достаточно доказать, что для любых $Q_1, \ldots, Q_k \in K[x]$, где $K = \mathbb{Z}[\bar{x}]$, любой класс эквивалентности $[\bar{x}]$ является полуалгебраическим множеством.

Элиминация кванторов в $\mathbb{R}$

3) Достаточно доказать, что для любых $Q_1, \ldots, Q_k \in K[x]$, где $K = \mathbb{Z}[\bar{x}]$, любой класс эквивалентности $[\bar{x}]$ является полуалгебраическим множеством.

4) Если все классы эквивалентности для $Q_1, \ldots, Q_k, Q_{k+1}$ полуалгебраические, то и все классы эквивалентности для $Q_1, \ldots, Q_k$ полуалгебраические.

Элиминация кванторов в $\mathbb{R}$

3) Достаточно доказать, что для любых $Q_1, \ldots, Q_k \in K[x]$, где $K = \mathbb{Z}[\bar{x}]$, любой класс эквивалентности $[\bar{x}]$ является полуалгебраическим множеством.

4) Если все классы эквивалентности для $Q_1, \ldots, Q_k, Q_{k+1}$ полуалгебраические, то и все классы эквивалентности для $Q_1, \ldots, Q_k$ полуалгебраические.

5) Пусть $[\mathcal{Q}]$ — замыкание множества $\mathcal{Q} = \{Q_1, \ldots, Q_k\}$ относительно следующих операций на $K[x]$: взятие старшего коэффициента; вычеркивание старшего члена; взятие производной; сопоставление полиномам P, Q остатка от деления $P \cdot R^{p-q+1}$ на Q, где R — старший коэффициент Q, а $p \geq q$ — степени P и Q, соответственно. Тогда множество $[\mathcal{Q}]$ конечно.