Задание 5. ЛВ. Элиминация кванторов.

1. Функциональным элементом (ФЭ) называют устройство с несколькими входами и одним выходом. Любой набор булевых значений (И,Л) на входах ФЭ перерабатывает в единственное булево значение на выходе; таким образом, ФЭ с n входами и одним выходом реализует n-местную булеву функцию.

Пусть есть набор ФЭ, реализующих $\wedge$, $\vee$, и $\neg$, Присоединяя выходы одних ФЭ к входам других (циклы не допускаются), можно строить т.н. схемы из ФЭ, также реализующие булевы функции. Можно строить и схемы с несколькими выходами (соответствующими наборам булевых функций).

Нарисуйте схемы с 4 входами и 4 выходами, реализующие сложение и умножение двух натуральных двузначных чисел в двоичной системе счисления.

2. Докажите, что теория плотного линейного порядка без наименьшего и наибольшего элемента допускает элиминацию кванторов.

Опишите одноместные и двухместные определимые отношения в структуре $(\mathbb{Q}; =, <)$.

Какие элементы определимы в структуре $(\mathbb{Q}; =, <)$?

3. Докажите, что структура $(\mathbb{Z}; =, S, <)$ допускает элиминацию кванторов.

Опишите одноместные и двухместные определимые отношения в структуре $(\mathbb{Z} =, S, <)$.

Определима ли функция S в структуре $(\mathbb{Z} =, <)$ бескванторной формулой?

4. Докажите, что структура $(\mathbb{Z}; =, 0, S)$, где $S(x) = x + 1$, допускает элиминацию кванторов.

Опишите одноместные и двухместные определимые отношения в структуре $(\mathbb{Z}; =, 0, S)$.

Определимо ли отношение $<$ в этой структуре?

5. Докажите, что бесконечная структура $(A; =, \sim)$, где $\sim$ — эквивалентность с бесконечными классами, допускает элиминацию кванторов.