Задание 5. ZFC, вполне упорядоченные множества.

1. Приведите выводы доказанных ранее утверждений из аксиом ZFC (теорема о фактор-множестве, теорема Кантора, теорема Шрёдера-Бернштейна, существование наименьшего по включению индуктивного множества).

2. Докажите, что объединение, пересечение и разность двух множеств является множеством, и что любое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

3. Какие из следующих линейных порядков являются фундированными: $(\mathbb{N}; <)$, $(\mathbb{Z}; <)$, $(\mathbb{Q}; <)$, $(\mathbb{R}; <)$, $(\mathbb{N}^2; \prec)$ (где $(x, y) \prec (x_1, y_1) \iff x < x_1 \vee (x = x_1 \wedge y < y_1)$), $(\{(n+1)^{-1} \mid n \in \mathbb{N}\}; <)$, $(\{-(n+1)^{-1} \mid n \in \mathbb{N}\}; <)$? Ответ обоснуйте.

4. а) Для любой пары $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ структур из предыдущей задачи выясните, какие из соотношений $\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$, $\mathbb{A} \sqsubseteq \mathbb{B}$ имеют место. Ответ обоснуйте.

б) Докажите, что все счетные плотные линейные порядки без наибольшего и наименьшего элемента изоморфны между собой.

5. Строгий частичный порядок $<$ на множестве X называется фундированным, если любое непустое подмножество множества X имеет минимальный элемент. Докажите, что:

фундированность равносильна тому, что не существует бесконечно убывающей последовательности элементов;

фундированность равносильна правилу индукции в $(X; <)$, утверждающему, что для любого свойства $P(x)$ элементов множества X выполняется условие $\forall x(\forall y < x P(y) \to P(x)) \to \forall x P(x)$.