

Задание 2. Определимость и автоморфизмы

1. Докажите, что вещественное число определимо в структуре $(\mathbb{R}; =, +, \cdot, 0, 1)$ тогда и только тогда, когда оно алгебраическое. Охарактеризуйте вещественные числа, определимые в структуре $(\mathbb{R}; =, +, 0, 1)$. (Примите без доказательства, что в упорядоченном поле вещественных чисел любая формула равносильна подходящей бескванторной формуле.)

2. Докажите, что комплексное число определимо в структуре $(\mathbb{C}; =, +, \cdot, 0, 1)$ тогда и только тогда, когда оно рациональное. (Примите без доказательства, что в поле комплексных чисел любая формула равносильна подходящей бескванторной формуле.)

3. Докажите, что в стандартной модели арифметики $(\mathbb{N}; +, \cdot, =)$ определимы: любое конкретное натуральное число; отношения строгого порядка и делимости; множество всех простых чисел; отношение быть простыми близнецами; множества степеней двойки, тройки, четверки, пятерки.

4. Пусть A — k -буквенный алфавит, $k \geq 2$. Определим бинарные отношения $\leq_p, \leq_s, \leq_i, \preceq$ на A^* следующим образом:

$u \leq_p v$, если $ux = v$ для некоторого $x \in A^*$;

$u \leq_s v$, если $xu = v$ для некоторого $x \in A^*$;

$u \leq_i v$, если $xuy = v$ для некоторых $x, y \in A^*$;

$u \preceq v$, если u получается из v стиранием некоторых букв.

Докажите, что:

отношение \leq_i определимо в A^* через отношения \leq_p и \leq_s ;

пустое слово определимо через любое из этих отношений;

множество всех слов фиксированной длины определимо через любое из этих отношений;

никакое фиксированное непустое слово не определимо через все эти отношения;

существует двухбуквенное слово, не определяемое через отношения \leq_i, \preceq и однобуквенные слова;

опишите все слова, не определяемые как в предыдущем вопросе.

5. Докажите, что любой элемент структуры $(A^*; \leq_i)$, обогащенной константами для всех слов длины не более двух, определим. Охарактеризуйте группу автоморфизмов структуры $(A^*; \leq_i)$. Докажите аналогичные результаты для отношения \preceq вместо \leq_i .