Задание 3. Модели числовых структур

1. Пусть $\mathbb{N}$ — наименьшее по включению индуктивное множество, $x < y \leftrightarrow x \in y$, $+$ — единственная бинарная операция на $\mathbb{N}$ такая, что $x + 0 = x$ и $x + y' = (x + y)'$, $\cdot$ — единственная бинарная операция на $\mathbb{N}$ такая, что $x \cdot 0 = 0$ и $x \cdot y' = x \cdot y + x$.

Докажите, что: $+, \cdot$ ассоциативны и коммутативны; $\cdot$ дистрибутивна относительно $+$; $0, 1$ нейтральны относительно $+, \cdot$; $0 < 1 < 2 < \cdots$ и между соседями нет других элементов.

2. Пусть $\mathbb{Z} := (\mathbb{N}\times\mathbb{N})/_\sim$, где $(a, b) \sim (c, d) \leftrightarrow a+d = b+c$, $[a, b]\tilde{+}[c, d] := [a + c, b + d]$, $[a, b]\tilde{\cdot}[c, d] := [ac + bd, ad + bc]$, $[a, b]\tilde{\leq}[c, d] \leftrightarrow a + d \leq b + c$, $\tilde{0} := [0, 0]$, $\tilde{1} := [1, 0]$.

Докажите, что: $\sim$ — эквивалентность на $\mathbb{Z}$; определения $\tilde{+}, \tilde{\cdot}, \tilde{\leq}$ корректны; $(\mathbb{Z}; \tilde{+}, \tilde{\cdot}, \tilde{\leq}, \tilde{0}, \tilde{1})$ есть упорядоченное кольцо, любой элемент которого является разностью двух натуральных чисел.

3. Пусть $\mathbb{Q} := (\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\setminus\{0\})/_\sim$, где $(a, b) \sim (c, d) \leftrightarrow ad = bc$, $[a, b]\tilde{+}[c, d] := [ad + bc, bd]$, $[a, b]\tilde{\cdot}[c, d] := [ac, bd]$, $[a, b]\tilde{\leq}[c, d] \leftrightarrow ad \leq bc$, $\tilde{0} := [0, 1]$, $\tilde{1} := [1, 1]$.

Докажите, что: $\sim$ — эквивалентность на $\mathbb{Q}$; определения $\tilde{+}, \tilde{\cdot}, \tilde{\leq}$ корректны; $(\mathbb{Q}; \tilde{+}, \tilde{\cdot}, \tilde{\leq}, \tilde{0}, \tilde{1})$ есть упорядоченное поле (т.е. упорядоченное кольцо, в котором $\forall x \neq 0 \exists y(x \cdot y = 1)$) такое, что любой элемент является отношнием целого числа и положительного целого числа.

4. Пусть $\mathbb{R} := S/_\sim$, где S — множество всех последовательностей Коши $\{q_i\}$ рациональных чисел (т.е. $\forall n \exists m \forall i, j > m(|q_i - q_j| < 2^{-n})$), $\{q_i\} \sim \{r_i\} \leftrightarrow \lim_i(q_i - r_i) = 0$, $[\{q_i\}]\tilde{+}[\{r_i\}] := [\{q_i + r_i\}]$, $[\{q_i\}]\tilde{\cdot}[\{r_i\}] := [\{q_i \cdot r_i\}]$, $[\{q_i\}]\tilde{<}[\{r_i\}] \leftrightarrow \exists n, m \forall i > m(q_i - r_i < -2^{-n})$, $\tilde{0} := [0, 0, \ldots]$, $\tilde{1} := [1, 1, \ldots]$.

Докажите, что: $\sim$ — эквивалентность на S; определения $\tilde{+}, \tilde{\cdot}, \tilde{<}$ корректны; $(\mathbb{R}; \tilde{+}, \tilde{\cdot}, \tilde{\leq}, \tilde{0}, \tilde{1})$ есть упорядоченное поле, в котором любое непустое ограниченное сверху множество имеет супремум.

5. Пусть $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x, y)\tilde{+}(x_1, y_1) := (x + x_1, y + y_1)$, $(x, y)\tilde{\cdot}(x_1, y_1) := (xx_1 - yy_1, xy_1 + yx_1)$, $\tilde{0} := (0, 0)$, $\tilde{1} := (1, 0)$, $\tilde{i} := (0, 1)$.

Докажите, что $(\mathbb{C}; \tilde{+}, \tilde{\cdot}, \tilde{0}, \tilde{1})$ есть поле, являющееся наименьшим расширением поля вещественных чисел (точнее, "копии" $\tilde{\mathbb{R}} := \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ этого поля "внутри" $\mathbb{C}$), в котором уравнение $z^2 = -1$ имеет решение.