Вебинар «Производные функции нескольких переменных, часть 2»

Введение в математический анализ

Вокзал. П.Ситроен, Веймар. 1921

План

1. Разбор ДЗ.
2. Градиент.
3. Производная по направлению.
4. Условный экстремум – метод множителей Лагранжа.
5. Градиентный спуск.

Задание 3

$$\left(\sqrt{\sin^2(\ln(x^3))}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\sin^2(\ln(x^3))}} \cdot (\sin^2(\ln(x^3)))' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin^2(\ln(x^3))}} \cdot 2\sin(\ln(x^3)) \cdot (\sin(\ln(x^3)))' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin^2(\ln(x^3))}} \cdot 2\sin(\ln(x^3)) \cdot \cos(\ln(x^3)) \cdot (\ln(x^3))' =$$

$$= \frac{\sin(\ln(x^3))}{\sqrt{\sin^2(\ln(x^3))}} \cdot \cos(\ln(x^3)) \cdot \frac{1}{x^3} \cdot (x^3)' = \frac{\sin(\ln(x^3))}{\sqrt{\sin^2(\ln(x^3))}} \cdot \cos(\ln(x^3)) \cdot \frac{3x^2}{x^3}$$

Задание 5

$$f(x) = \cos(x^2 + 3x),\ x_0 = \sqrt{\pi}$$

$$f'(x) = -\sin(x^2 + 3x) \cdot (2x + 3)$$

$$f'(\sqrt{\pi}) = -\sin((\sqrt{\pi})^2 + 3\sqrt{\pi}) \cdot (2\sqrt{\pi} + 3)$$

- (2pi^(1/2)+3)*sin(pi+3pi^(1/2)) =
-(2pi^(1/2)+3)*(sin(pi)cos(3pi^(1/2))+ cos(pi)sin(3pi^(1/2)))=
- (2pi^(1/2)+3)*(0 - sin(3pi^(1/2)))=
(2pi^(1/2)+3)*sin(3pi^(1/2)) = -5,38 (с округлением).

Задание 6

$$\left(\frac{x^3 - x^2 - x - 1}{1 + 2x + 3x^2 - 4x^3}\right)\Bigg|'_{x=0} =$$

$$= \left(\frac{(3x^2 - 2x - 1) \cdot (1 + 2x + 3x^2 - 4x^3) - (x^3 - x^2 - x - 1) \cdot (2 + 6x - 12x^2)}{(1 + 2x + 3x^2 - 4x^3)^2}\right)\Bigg|_{x=0}$$

$$= 1$$

Задание 6

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x - 1}{1 + 2x + 3x^2 - 4x^3}, \, x_0 = 0$$

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$$

$$a(0) = -1, \, b(0) = 1$$

$$f'(0) = \frac{a'(0)b(0) - a(0)b'(0)}{b^2(0)}$$

$$a'(0) = -1, \, b(0) = 2$$

Задание 7

$$f'(x) = (\sqrt{3x} \cdot \ln x)' = (\sqrt{3x})' \cdot \ln x + \sqrt{3x} \cdot (\ln x)' =$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{(3x)}} \cdot \ln x + \sqrt{3x} \cdot \frac{1}{x}\Big|_{x=1} = \frac{3}{2\sqrt{(3x)}} \cdot \ln 1 + \sqrt{3} \cdot \frac{1}{1} = \sqrt{3}$$

$$tg(\alpha) = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = arctg(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

На прошлом вебинаре

- Частные производные функций нескольких переменных;
- Смешанные производные ФНП;
- Локальные экстремумы.

По мотивам ДЗ

- Квадрат! Есть разница между $(\sin x)^2$ и $\sin(x^2)$.

- $\sin 2$, $\sin 1$, $\cos 2$ можно не упрощать.

- Единицы измерения угла:
  - градусы (если есть значок);
  - радианы – по умолчанию.

По мотивам ДЗ

Найти область определения функции:

Z = ln(4-x^2) + (y^3-27)^(1/2)

Метод
интервалов

По мотивам ДЗ

Найти область определения функции:

$Z = \ln(4-x^2) + (y^3-27)^{(1/2)}$

Найти частные производные $Z=\sin x/\sin y$

- $Z'(x)$
- $Z'(y)$

Найти частные производные
$Z=\sin x/\sin y$

Градиент

Определение

Градиентом функции $z = f(x; y)$ **в точке** $M_0(x_0; y_0)$ называется направленный отрезок $grad\, z(M_0) = z'_x(M_0) \cdot \bar{i} + z'_y(M_0) \cdot \bar{j}$, отложенный от точки M_0, который показывает **направление и скорость** *наискорейшего роста* функции $z = f(x; y)$ в данной точке.

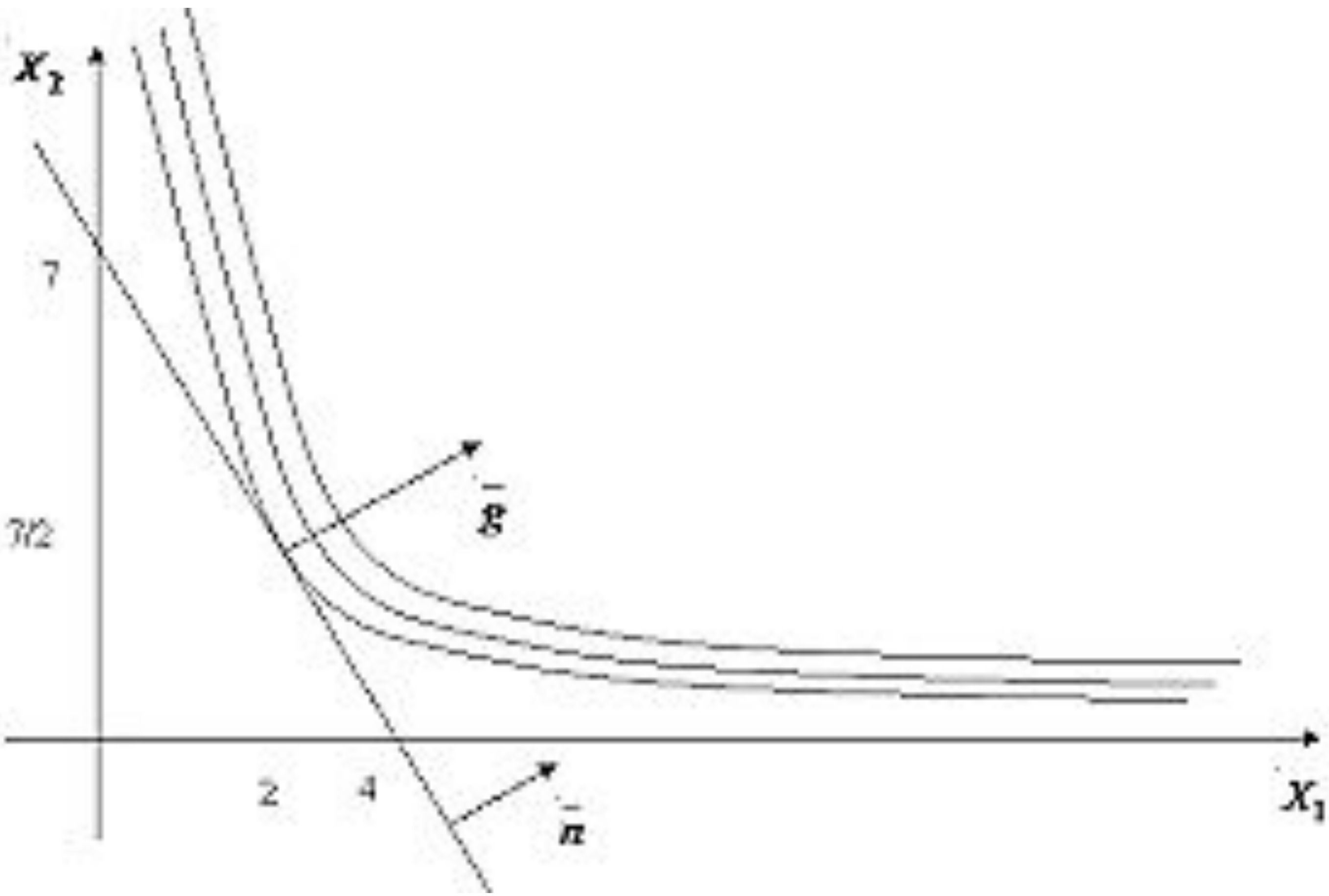
$$U = f(x, y)$$

$$\operatorname{grad} U = \left(U'_x, U'_y\right)$$

$$U = f(x, y, z)$$

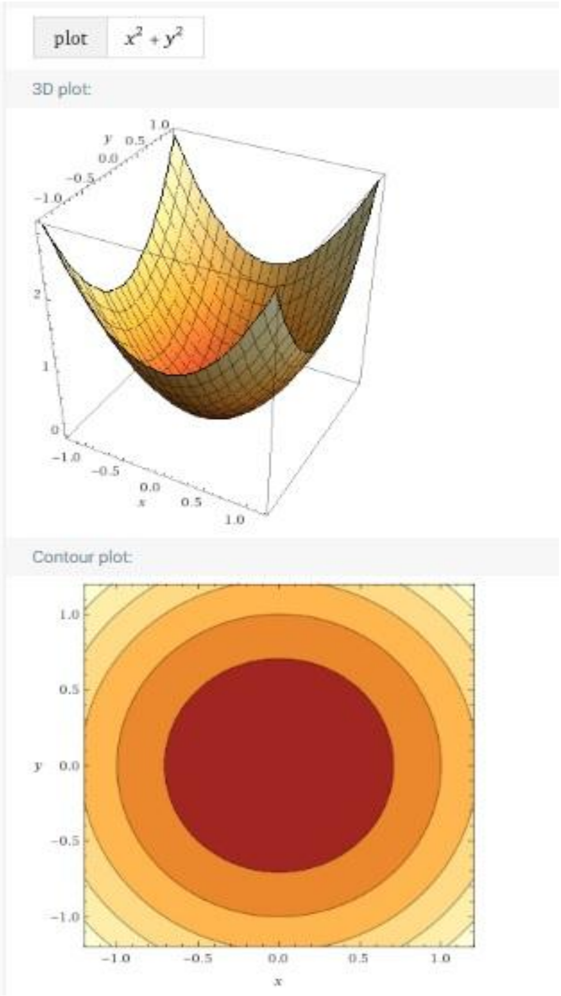
$$\operatorname{grad} U = \left(U'_x, U'_y, U'_z\right)$$

Иллюстрация: линии уровня



Линии уровня

Линией **уровня** функции двух переменных называется **линия** (множество точек) на координатной плоскости, в которых функция принимает одинаковые значения.



Физический смысл

Частные производные показывают скорость изменения функции по направлению роста оси. U'_x - по оси X, U'_y - по оси Y и т.д..

Градиент показывает направление самого быстрого изменения функции.

Градиент
Пример

$$U = 4\sin x + 3\cos y + 2x^4y^3 + 4$$

$$U'_x = 4\cos x + 8x^3y^3$$

$$U'_y = -3\sin y + 6x^4y^2$$

$$\operatorname{grad} U = (4\cos x + 8x^3y^3, -3\sin y + 6x^4y^2)$$

$$\operatorname{grad} U\Big|_{(0,0)} = (4, 0)$$

Производная по направлению

Если в точке $M_0(x_0; y_0)$ существует производная по направлению луча l *(исходящего из точки M_0 и лежащего в плоскости XOY)*, то её можно рассчитать по следующей формуле:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = z'_x(x_0; y_0) \cdot \cos\alpha + z'_y(x_0; y_0) \cdot \cos\beta$$, где:

$z'_x(x_0; y_0), z'_y(x_0; y_0)$ – **частные производные 1-го порядка** в точке M_0;

$\cos\alpha, \cos\beta$ – **направляющие косинусы** *(координаты **вектора** единичной длины)*, однозначно определяющие данное направление.

Источник: http://mathprofi.ru/proizvodnaja_po_napravleniju_i_gradient.html

Физический смысл производной по направлению

$\frac{\partial z}{\partial l}$ – это ЧИСЛО, характеризующее скорость изменения функции, причём:

– если $\frac{\partial z}{\partial l} > 0$, то функция $z = f(x; y)$ в точке M_0 по данному направлению **возрастает** (поверхность «идёт в гору»);

– если $\frac{\partial z}{\partial l} < 0$, то функция $z = f(x; y)$ в точке M_0 по данному направлению **убывает** («склон» поверхности);

– если $\frac{\partial z}{\partial l} = 0$, то функция $z = f(x; y)$ в точке M_0 по данному направлению **постоянна** (поверхность параллельна плоскости XOY).

Найти производную функции $z(x,y) = 3x^2y - 4x^2y^3$ в точке $M(1, 2)$ в направлении $\bar{l}$ (4, -3).

Найти производную функции $z(x,y) = 3x^2y - 4x^2y^3$ в точке $M(1, 2)$ в направлении $\bar{l}$ (4, -3).

1. Найдём частные производные в точке M(1;2)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy - 8y^3x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 12y^2x^2,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} = 12 - 64 = -52,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)} = 3 - 48 = -45,$$

Найти производную функции $z(x,y) = 3x^2y - 4x^2y^3$

в точке $M(1, 2)$ в направлении $\bar{l}$ (4, -3).

2. Найдём координаты направляющего вектора единичной длины

$$\left|\bar{l}\right| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5,$$

$$\bar{l}_0 = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right),$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos\beta = -\frac{3}{5},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0} = -52 \cdot \frac{4}{5} + 45 \cdot \frac{3}{5} = -14{,}6$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta}$$

!Производная по направлению градиента принимает наибольшее значение!

68,77

Найти производную функции $U = xy^2 + z^3 - xyz$ по направлению вектора $\vec{b}(12, -8,9)$ в точку $P(1,1,2)$.

$$|\vec{b}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = \sqrt{12^2 + (-8)^2 + 9^2} = \sqrt{144 + 64 + 81} = \sqrt{289} = 17$$

$$\overrightarrow{b_0} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \left(\frac{12}{17}, -\frac{8}{17}, \frac{9}{17}\right)$$

$$U = xy^2 + z^3 - xyz$$

$$U'_x = y^2 - yz$$

$$U'_y = 2xy - xz$$

$$U'_z = 3z^2 - xy$$

$$\operatorname{grad} U\Big|_{(1,1,2)} = (-1, 0, 11)$$

$$\overrightarrow{b_0} = \left(\frac{12}{17}, -\frac{8}{17}, \frac{9}{17}\right)$$

$$\operatorname{grad} U\Big|_{(1,1,2)} = (-1, 0, 11)$$

$$U'_{\vec{b}}\Big|_{(1,1,2)} = \frac{12}{17} \cdot (-1) - \frac{8}{17} \cdot 0 + \frac{9}{17} \cdot 11 = \frac{-12 + 99}{17} = \frac{87}{17}$$

По мотивам прошлого вебинара

1. Локальный экстремум ФНП

Опр. $u = f(\boldsymbol{x})$ имеет ***локальный максимум (минимум)*** в точке M_0, если в некоторой окрестности точки $U(M_0)$: $\forall \boldsymbol{x} \in U(M_0)$

$f(\boldsymbol{x}) \le f(M_0)$ $\qquad\qquad (f(\boldsymbol{x}) \ge f(M_0))$.

Теорема 1 (необходимое условие экстремума**).**
Пусть $f(\boldsymbol{x})$ имеет в точке M_0 локальный экстремум, тогда

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_{M_0} = 0,\ j = 1,2,\dots,n \ \text{ или } \nabla f|_{M_0} = 0.$$

M_0 - ***стационарная точка***.

2. Экстремум ФНП. Достаточное условие

Теорема 2 (достаточное условие экстремума). Если в стационарной точке M_0 второй дифференциал положительно определенная квадратичная форма, то M_0 - точка локального минимума, если второй дифференциал отрицательно определенная квадратичная форма, то M_0 - точка локального максимума.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2. Экстремум ФНП. Достаточное условие

Критерий Сильвестра.
Если матрица Гессе (матрица производных второго порядка) такая, что все ее главные миноры положительны

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0,$$

то второй дифференциал – положительно определенная квадратичная форма;
а если главные миноры нечетного порядка отрицательны, а четного – положительны

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0 \ldots,$$

То второй дифференциал – отрицательно определенная квадратичная форма

Локальный экстремум функции двух переменных

Задача. Найти локальный экстремум $u = f(x, y)$

1. Область определения функции.

2. Частные производные: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

3. Необходимое условие $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Находим стационарную точку M_0.

4. Пусть $A = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{M_0}, C = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{M_0}, B = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{M_0}$, то если $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{M_0} > 0$ и $AC - B^2 > 0$, то M_0 - точка минимума,

если $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{M_0} < 0$ и $AC - B^2 > 0$, то M_0 - точка максимума

$$U = x^2 + y^2$$

$$\begin{cases} U'_x = 2x = 0 \\ U'_y = 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad (0,0)$$

$$U''_{xx} = 2, \qquad U''_{xy} = U''_{yx} = 0, \qquad U''_{yy} = 2$$

$$\begin{pmatrix} U''_{xx} & U''_{xy} \\ U''_{yx} & U''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 2 > 0\,, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (0)^2 = 4 > 0$$

График

$$U = -x^2 - y^2$$

$$\begin{cases} U'_x = -2x = 0 \\ U'_y = -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \ (0,0)$$

$$U''_{xx} = -2, \qquad U''_{xy} = U''_{yx} = 0, \qquad U''_{yy} = -2$$

$$\begin{pmatrix} U''_{xx} & U''_{xy} \\ U''_{yx} & U''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = -2 < 0\,, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-2) - (0)^2 = 4 > 0$$

$$U = x^2 - y^2$$

$$\begin{cases} U'_x = 2x = 0 \\ U'_y = -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad (0,0)$$

$$U''_{xx} = 2, \qquad U''_{xy} = U''_{yx} = 0, \qquad U''_{yy} = -2$$

$$\begin{pmatrix} U''_{xx} & U''_{xy} \\ U''_{yx} & U''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 2 > 0\,, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - (0)^2 = -4 < 0$$

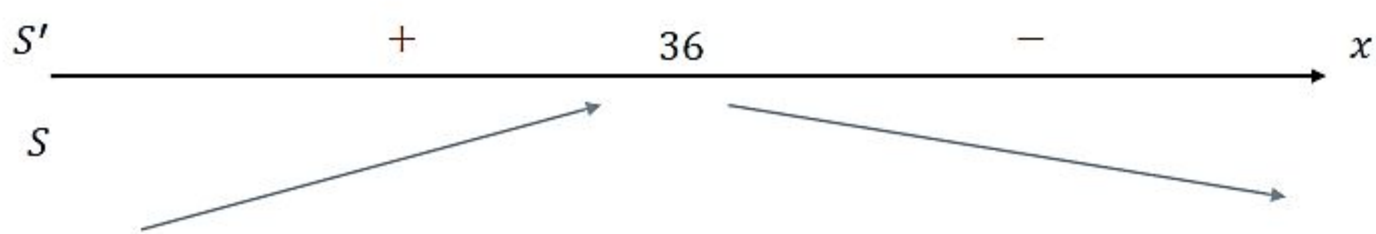
14^*. Найти длину x и ширину y прямоугольника при заданном периметре $P = 144$ см, при которых данный прямоугольник имеет наибольшую площадь S.

14*. Найти длину x и ширину y прямоугольника при заданном периметре $P = 144$ см, при которых данный прямоугольник имеет наибольшую площадь S.

$$S = xy, \qquad P = 2(x+y) = 144$$

$$y = 72 - x \qquad \Rightarrow \qquad S = 72x - x^2$$

$$S' = 72 - 2x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 36$$



3. Условный экстремум

Задача. Найти экстремум функции $f(\boldsymbol{x})$, при условии, что переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ связаны соотношениями:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \qquad\qquad \dots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

- уравнения связи

Исследование функции на условный экстремум

Функция Лагранжа

$$L = f(x;y) + \lambda \cdot \varphi(x;y)$$

Необходимые условия экстремума

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ \varphi(x;y) = 0 \end{cases}$$

Достаточные условия экстремума

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{yx} & L''_{yy} \end{pmatrix}$$

Если в стационарной точке **определитель матрицы A > 0**, то в этой точке у функции **максимум.**
Если в стационарной точке **определитель матрицы A < 0**, то в этой точке у функции **минимум.**

Условный экстремум (метод множителей Лагранжа).

Найти длину x и ширину y прямоугольника при заданном периметре $P = 144$ см, при которых данный прямоугольник имеет наибольшую площадь S.

$$S = xy, \qquad P = 2(x + y) = 144 \quad \Rightarrow \quad x + y = 72$$

$$L(\lambda_1, x, y) = xy + \lambda_1 \cdot (x + y - 72)$$

Условный экстремум (метод множителей Лагранжа).

Найти длину x и ширину y прямоугольника при заданном периметре $P = 144$ см, при которых данный прямоугольник имеет наибольшую площадь S.

$$L(\lambda_1, x, y) = xy + \lambda_1 \cdot (x + y - 72)$$

$$\begin{cases} L'_x = y + \lambda_1 = 0 \\ L'_y = x + \lambda_1 = 0 \\ L'_{\lambda_1} = x + y - 72 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\lambda_1 \\ x = -\lambda_1 \\ -2\lambda_1 = 72 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 36 \\ x = 36 \\ \lambda_1 = -36 \end{cases}$$

Условный экстремум (метод множителей Лагранжа).

$$L'_x = y + \lambda_1$$
$$L'_y = x + \lambda_1$$
$$L'_{\lambda_1} = x + y - 72$$

$$L''_{xx} = 0, \qquad L''_{yy} = 0, \qquad L''_{\lambda_1\lambda_1} = 0$$

$$L''_{xy} = 1, \qquad L''_{x\lambda_1} = 1, \qquad L''_{y\lambda_1} = 1$$

$$\begin{pmatrix} L''_{\lambda_1\lambda_1} & L''_{\lambda_1 x} & L''_{\lambda_1 y} \\ L''_{x\lambda_1} & L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{y\lambda_1} & L''_{yx} & L''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Условный экстремум (метод множителей Лагранжа).

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} =$$

$$= 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - 1 \cdot (1 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + 1 \cdot (1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = 1 + 1 = 2 > 0$$

Условный экстремум (метод множителей Лагранжа). 2 пример

$$U = 3x + 4y - 10, \qquad x^2 + y^2 = 25$$

$$L(\lambda_1, x, y) = 3x + 4y - 10 + \lambda_1 \cdot (x^2 + y^2 - 25)$$

$$\begin{cases} L'_x = 3 + \lambda_1 \cdot 2x = 0 \\ L'_y = 4 + \lambda_1 \cdot 2y = 0 \\ L'_{\lambda_1} = x^2 + y^2 - 25 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2\lambda_1} \\ y = -\dfrac{4}{2\lambda_1} \\ \dfrac{9}{4\lambda_1^2} + \dfrac{16}{4\lambda_1^2} = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2\lambda_1} \\ y = -\dfrac{4}{2\lambda_1} \\ \lambda_1^2 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{2}, -3, -4\right), \qquad \left(-\frac{1}{2}, 3, 4\right)$$

Условный экстремум (метод множителей Лагранжа).

$$L'_x = 3 + \lambda_1 \cdot 2x$$
$$L'_y = 4 + \lambda_1 \cdot 2y$$
$$L'_{\lambda_1} = x^2 + y^2 - 25$$

$$L''_{xx} = 2\lambda_1, \qquad L''_{yy} = 2\lambda_1, \qquad L''_{\lambda_1\lambda_1} = 0$$

$$L''_{xy} = 0, \qquad L''_{x\lambda_1} = 2x, \qquad L''_{y\lambda_1} = 2y$$

$$\begin{pmatrix} L''_{\lambda_1\lambda_1} & L''_{\lambda_1 x} & L''_{\lambda_1 y} \\ L''_{x\lambda_1} & L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{y\lambda_1} & L''_{yx} & L''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda_1 & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda_1 \end{pmatrix}$$

Условный экстремум (метод множителей Лагранжа).

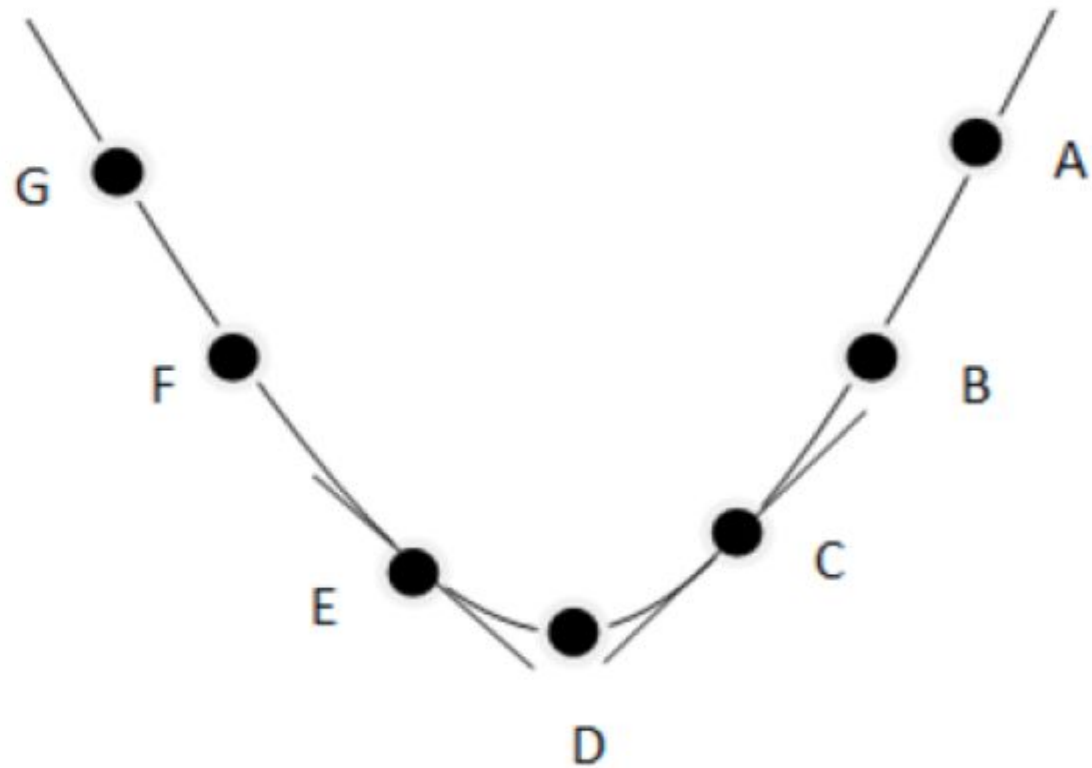
$$\begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda_1 & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda_1 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2\lambda_1 & 0 \\ 0 & 2\lambda_1 \end{vmatrix} - 2x \cdot \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 2y & 2\lambda_1 \end{vmatrix} + 2y \cdot \begin{vmatrix} 2x & 2\lambda_1 \\ 2y & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - 2x \cdot (2x \cdot 2\lambda_1 - 0) + 2y \cdot (0 - 2y \cdot 2\lambda_1) =$$

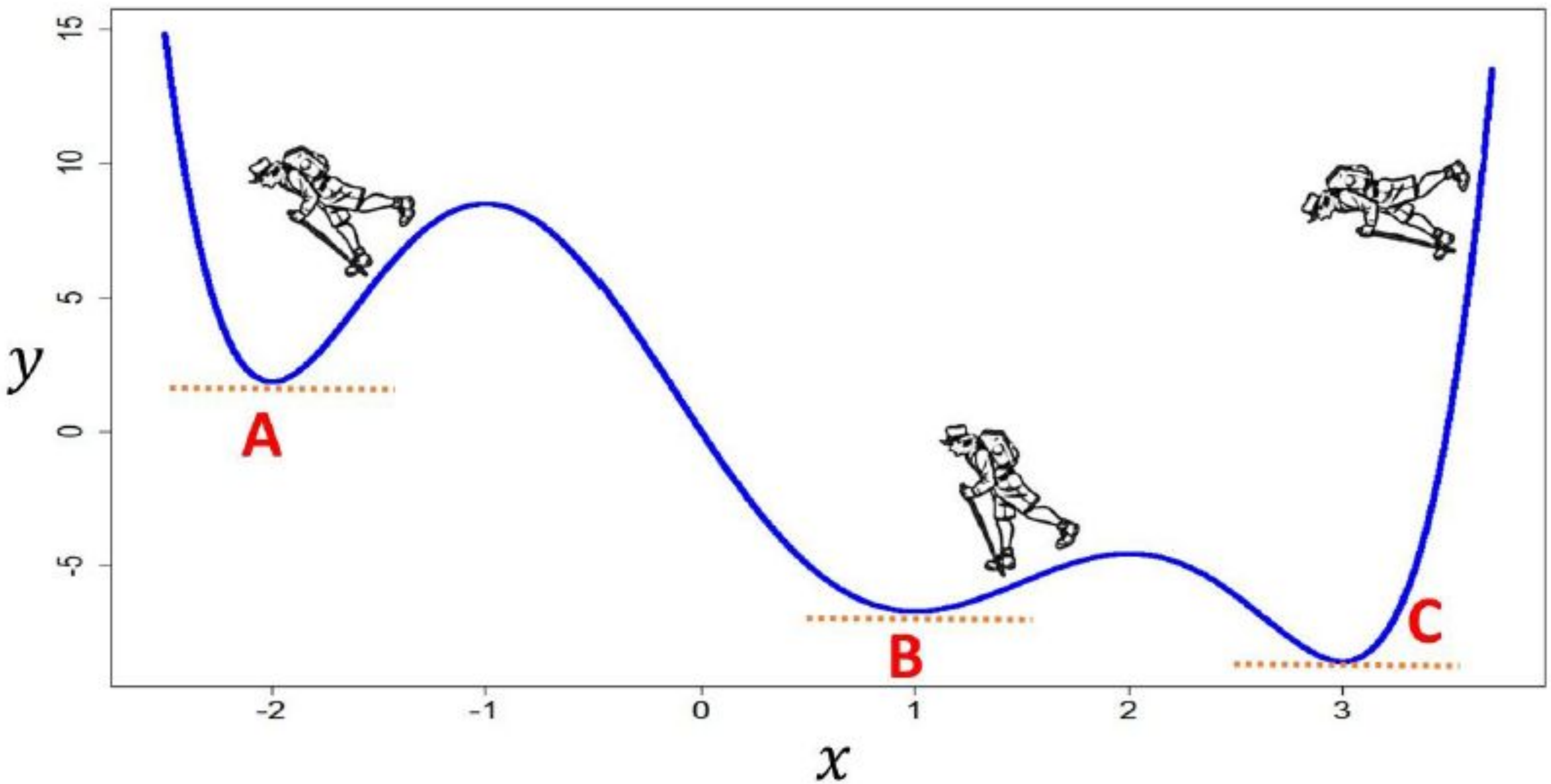
$$= -8x^2\lambda_1 - 8y^2\lambda_1 = -8\lambda_1(x^2 + y^2)$$

$$\left(\frac{1}{2}, -3, -4\right), \qquad \left(-\frac{1}{2}, 3,4\right)$$

Градиентный спуск



Градиентный спуск



Градиентный спуск

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = U(\vec{x})$$

$$U(\vec{x}) \to \min$$

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - \alpha(\vec{x}_n) \cdot \mathrm{grad}(U)\Big|_{\vec{x}_n}$$

Реализация градиентного спуска

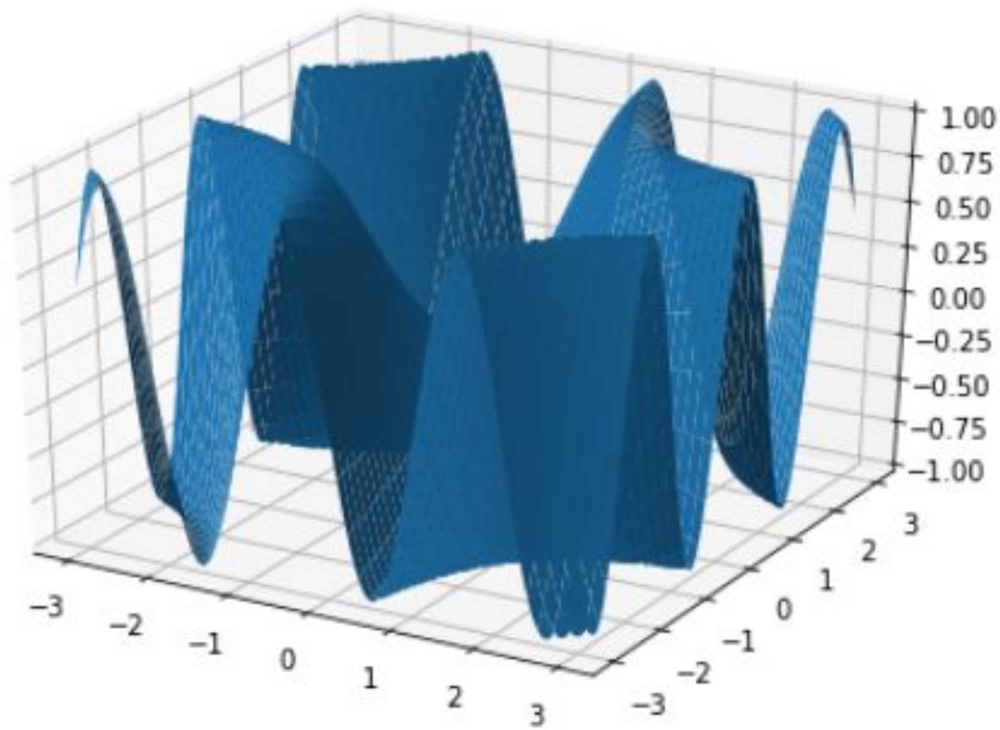
- http://kayumov.ru/401/

Проблема: «овражные» функции

Градиентный спуск

пример

$z=sin(xy)$



Имитация отжига

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = U(\vec{x})$$

$$P(\vec{x}_* \to \vec{x}_i) = \begin{cases} 1, & U(\vec{x}_*) - U(\vec{x}_i) < 0 \\ e^{\frac{U(\vec{x}_i) - U(\vec{x}_*)}{t(\vec{x}_i)}}, & U(\vec{x}_*) - U(\vec{x}_i) \geq 0 \end{cases}$$

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d5/Hill_Climbing_with_Simulated_Annealing.gif

Время вопросов

Спасибо!