GeekBrains

Производная функции одной переменной (часть 1,5)

Введение в математический анализ

План вебинара

1. Разбор ДЗ – ключевые моменты.

2 . Производные функции одной переменной.

+ основы;

+ приближённые вычисления;

+ производная неявной, обратной, заданной параметрически функций.

Предложить пример **функции**, не имеющей предела в **нуле** и в **бесконечностях**.

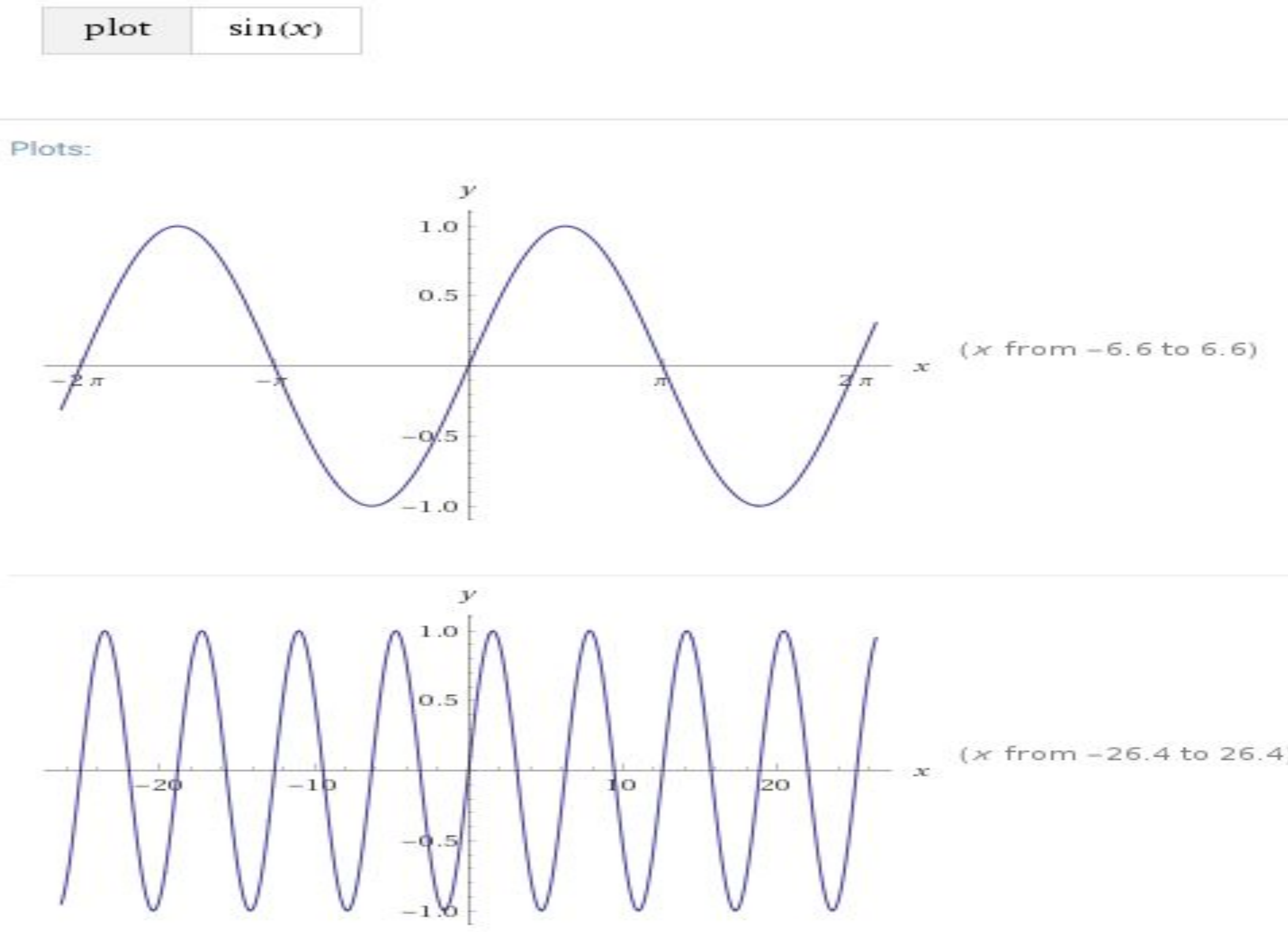
Есть два вида отсутствия предела функции:

- □
- осцилляция

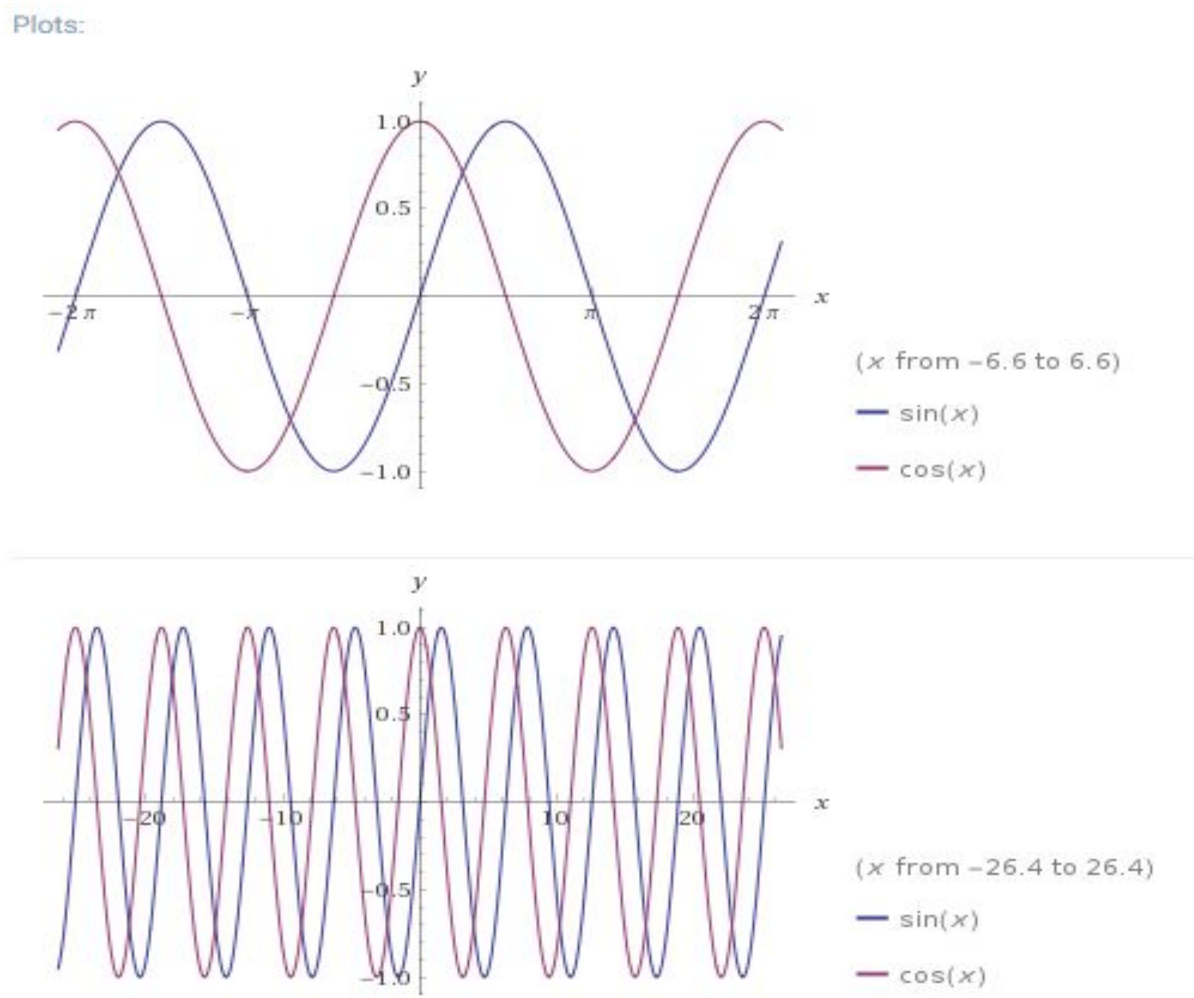
$$\lim_{x \to *} f(x) = A$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ => \ \forall x: |x - *| < \delta: \ \ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

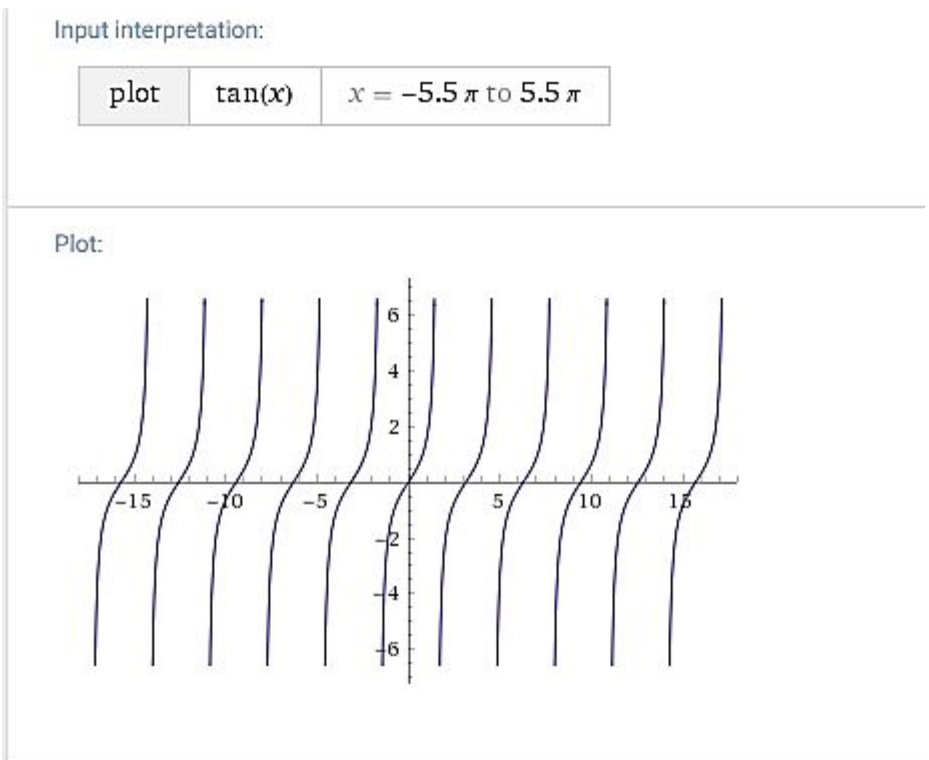
y = sin(x) (как пример осцилляции)

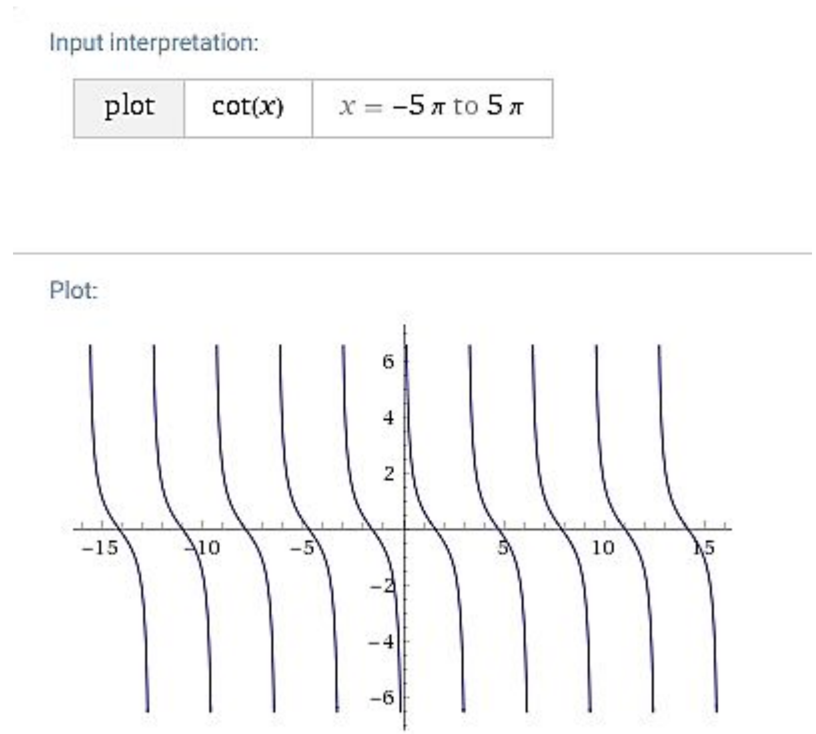


y = sin(x); y = cos(x)


Plots:
y
1.0
0.5
−0.5
−1.0
x
−2 π
−π
π
2 π
(x from −6.6 to 6.6)
sin(x)
cos(x)
y
1.0
0.5
−0.5
−1.0
x
−20
−10
10
20
(x from −26.4 to 26.4)
sin(x)
cos(x)

y = tg(x), y = ctg(x)


Input interpretation:
plot
tan(x)
x = −5.5 π to 5.5 π
Plot:
6
4
2
−2
−4
−6
−15
−10
−5
5
10
15


Input interpretation:
plot
cot(x)
x = −5 π to 5 π
Plot:
6
4
2
−2
−4
−6
−15
−10
−5
5
10
15

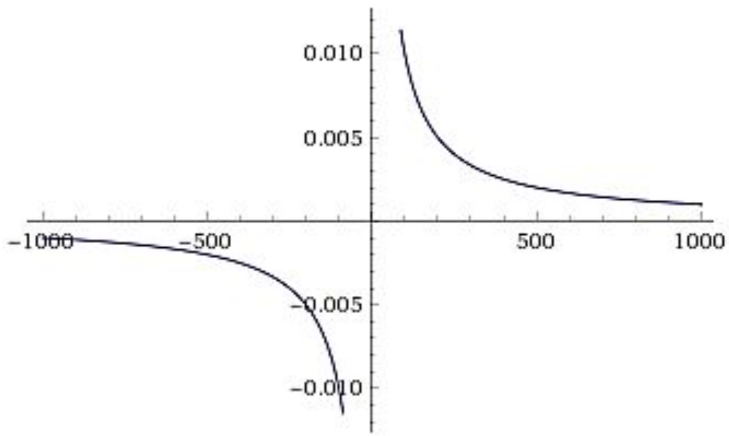
y = 1/x

plot (1/x) from -1000 to 1000

Input interpretation:

plot	$\frac{1}{x}$	$x = -1000$ to 1000

Plot:



1) Предложить пример функции, не имеющей предела в нуле и в бесконечностях.
2) Привести пример функции, не имеющей предела в точке, но определенной в ней.

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$sgn(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \sin(x + \tfrac{1}{x})$$

Из ДЗ

Задание 3 $f(x) = x^3 - x^2$

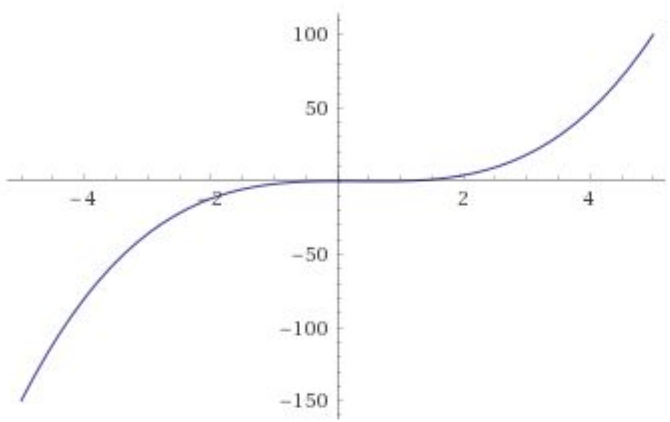
1. Определена и имеет значения на всей числовой прямой
2. Нули в $x_1 = 0$ (кратность 2), $x_2 = 1$ (кратность 1)
3. Неположительна в $N = (-\infty, 1]$
4. Возрастает на $G = (-\infty, 0) \cup (\frac{2}{3}, +\infty)$
5. Четности общего вида
6. Неограничена
7. Апериодична

Монотонность
+убывает

Если есть возможность, для исследования функции полезно построить график в програме.

plot	$x^3 - x^2$	$x = -5$ to 5

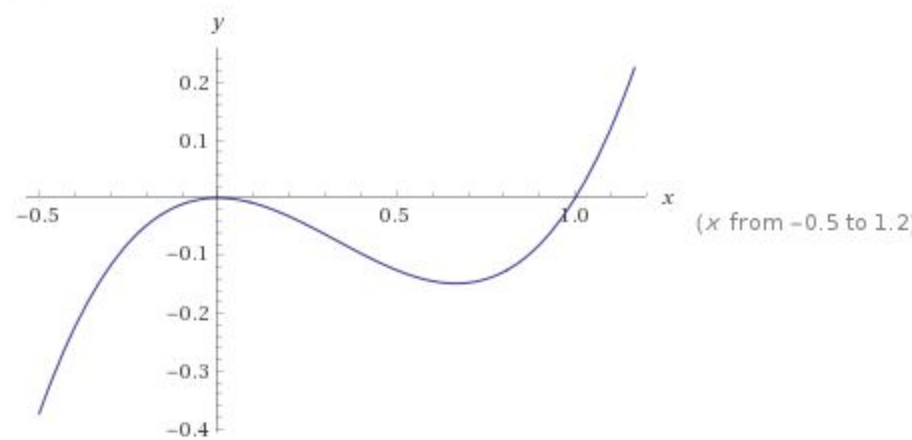
Plot:



Input interpretation:

plot	$x^3 - x^2$

Plots:



№4 а, б)

$$\lim_{x\to0}\frac{3x^3-2x^2}{4x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^2(3x-2)}{4x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3x-2}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}\cdot\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+x-1}{1+x-1}\cdot\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1+1+1}{1+1}=\frac{3}{2}$$

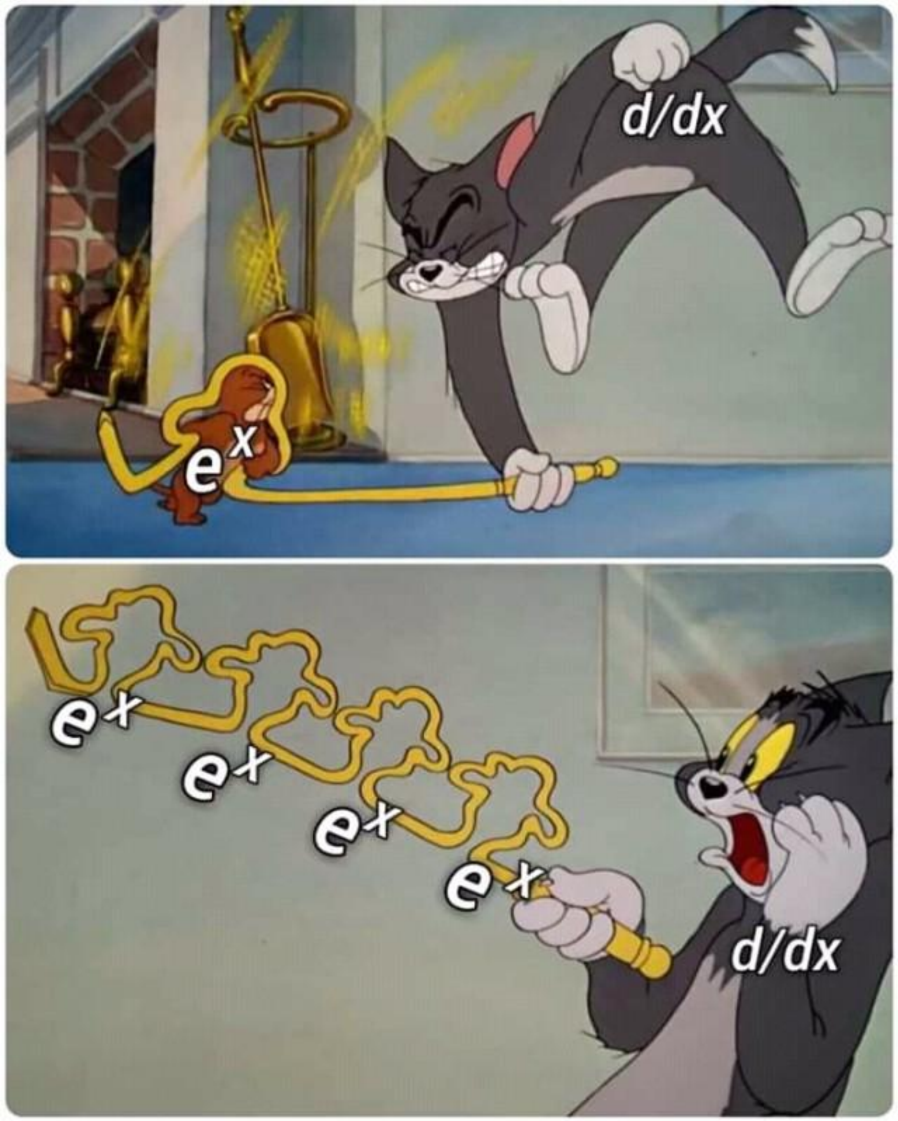
Теоремы о пределах: a, b, c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{4x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2\cdot 2x}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{-1}=(1)^{-1}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1$$

Вернёмся к производным



На прошлом занятии:

1. Определение производной
2. Основные формулы для вычисления производных:

- производная суммы, разности, произведения и частного функций;
- производная сложной функции;
- вычисление производных с помощью логарифмировния.

- **производная от произведения:**

$$(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'$$

- **производная от частного:**

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}$$

- **производная от сложной функции:**

$$f'(g(x)) = f' \cdot g'$$

- **вынесение константы:**

$$(af(x))' = af'(x)$$

- **производная от суммы:**

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Правило Лопиталя

Как известно, вычисление предела частного
Может сделать из обычного человека
несчастного
(с, «Правило Лопиталя», НТР)

Если:

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ или ∞;
2. $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности a;
3. $g'(x) \neq 0$ в окрестности a;
4. существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$;

то существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Пределы также могут быть односторонними.

Пример применения правила Лопиталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(2x)'} =$$

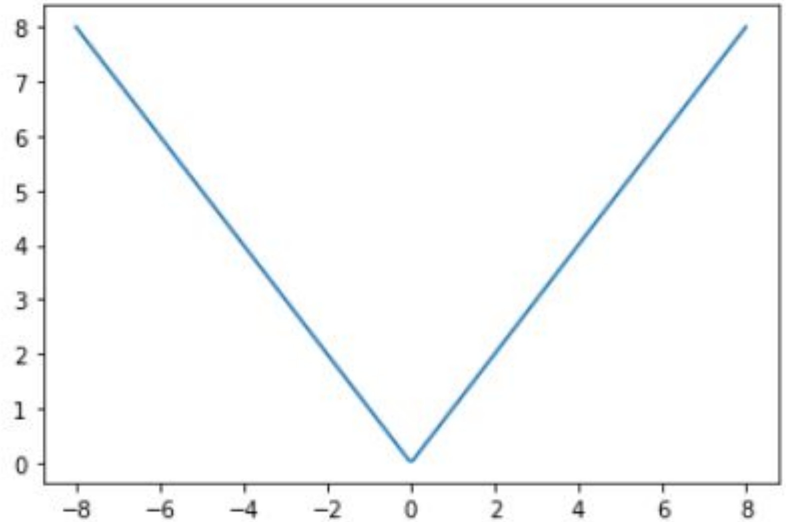
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

Производная модуля

```
from matplotlib import pylab as plt
import numpy as np
%matplotlib inline

x=np.linspace(-8, 8, 200)
y=np.fabs(x)
plt.plot(x,y)
```

```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x1e9347510b8>]
```



$$|x|' = \frac{x}{|x|}, x \neq 0$$

Приближенное вычисление

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + y'(x)\cdot\Delta x$$

$$\sqrt{3} \approx 1.7320508075688772935274463415059$$

$$\sqrt{3} = \sqrt{4-1} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}\cdot(-1) = 2 - 0.25 = 1.75$$

Приближенное вычисление

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + y'(x)\cdot \Delta x$$
$$\sqrt{3} \approx 1.7320508075688772935274463415059$$

$$\sqrt{3} = \sqrt{4-1} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}\cdot(-1) = 2 - 0.25 = 1.75$$

$$\sqrt{3} = \sqrt{3.00} = \sqrt{2.89+0.11} \approx \sqrt{2.89} + \frac{1}{2\sqrt{2.89}}\cdot 0.11 =$$

$$= 1.7 + \frac{0.11}{2\cdot 1.7} \approx 1.7323529411764705882352941176471$$

Производная неявной функции

$$F\big(x, y(x)\big) = 0$$

$$x^3 + y^3 + \cos y \cdot \sin^4 x = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' - \sin y \cdot y' \cdot \sin^4 x + \cos y \cdot 4\sin^3 x \cdot \cos x = 0$$

$$(3y^2 - \sin y \cdot \sin^4 x) \cdot y' = -\cos y \cdot 4\sin^3 x \cdot \cos x - 3x^2$$

$$y' = -\frac{\cos y \cdot 4\sin^3 x \cdot \cos x + 3x^2}{3y^2 - \sin y \cdot \sin^4 x}$$

Производная неявной функции

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$2x + 2y \cdot y' = 0$$

$$2y \cdot y' = -2x$$

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Производная обратной функции

У большого класса явных функций, существуют обратные. Например у функции $y = x^3$ мы можем выразить $x = \sqrt[3]{y}$

Оказывается, существует связь между производной функции y'_x и ей обратнойx'_y.

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

Проверка

$$y'_x = (x^3)'_x = 3x^2$$

$$x'_y = (\sqrt[3]{y})'_y = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$$

$$3x^2 = \frac{1}{\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}}$$

$$3x^2 = 3\sqrt[3]{y^2}$$

$$x^2 = \sqrt[3]{y^2}$$

$$x^6 = y^2$$

$$y = x^3$$

С помощью этой связи были выведены производные от обратных функций.

Производная обратной функции

$$y = \arcsin(x)$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'_y} =$$

$$= \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Производная от функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} y = \varphi(t), \\ x = \psi(t) \end{cases}$$

Из второго уравнения можно выразить $t = \psi^{-1}(x)$. Подставить в первое и получить сложную функцию $y = \varphi(\psi^{-1}(x))$

Отсюда следует, что:

$$y'_x = \varphi' \cdot (\psi^{-1})' = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Производная от функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} y = t - t^2, \\ x = t^2 - t^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'_t = 1 - 2t, \\ x'_t = 2t - 3t^2 \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1 - 2t}{2t - 3t^2}$$

Производная от функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} y = 3\sin t, \\ x = 3\cos t \end{cases}$$

$$y'_x = -\frac{\cos t}{\sin t} =$$

$$= -\cos t : \sin t = -\frac{x}{3} : \frac{y}{3} = -\frac{x}{y}$$

Производная с помощью логарифмирования

$$\mathrm{y} = f(x)$$

$$\ln \mathrm{y} = \ln[f(x)]$$

$$\frac{y'}{y} = (\ln[f(x)])'$$

$$y' = y \cdot (\ln[f(x)])'$$

$$y' = f(x) \cdot (\ln[f(x)])'$$

Производная с помощью логарифмирования

$$\mathrm{y} = \frac{(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4}{(x-4)^5 \sin x}$$

Производная с помощью логарифмирования

$$\text{y} = \frac{(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4}{(x-4)^5 \sin x}$$

$$y' = f(x) \cdot (\ln[f(x)])'$$

$$y' = \frac{(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4}{(x-4)^5 \sin x} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{2}{(x-1)} + \frac{3}{(x-2)} + \frac{4}{(x-3)} - \frac{5}{(x-4)} - \frac{\cos x}{\sin x} \right)$$

Уравнение касательной к графику функции в заданной точке

Геометрический смысл производной: тангенс угла наклона касательной к графику функции y = f(x) в точке x_0.

Уравнение касательной в точке x_0 к явной функции $y = f(x)$ равна:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Уравнение касательной в точке (x_0, y_0) к неявной функции $F(x, y) = 0$ равна:

$$y = y_0 + y'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)$$

Уравнение касательной в точке t_0 к параметрической функции $y = \varphi(t), x = \psi(t)$ равна:

$$y = \varphi(t_0) + y'_x(t_0) \cdot (x - \psi(t_0))$$

Уравнение нормали к графику функции в заданной точке

Нормаль перпендикулярна касательной.

У перпендикулярных прямых: $k_1 \cdot k_2 = -1$

Уравнение нормальной прямой в точке x_0 к явной функции $y = f(x)$ равна:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

Уравнение нормальной прямой в точке (x_0, y_0) к неявной функции $F(x, y) = 0$ равна:

$$y = y_0 - \frac{1}{y'_x(x_0, y_0)} \cdot (x - x_0)$$

Уравнение нормальной прямой в точке t_0 к параметрической функции $y = \varphi(t), x = \psi(t)$ равна:

$$y = \varphi(t_0) - \frac{1}{y'_x(t_0)} \cdot (x - \psi(t_0))$$

Пример для явной функции

$$y = x^3 - x^2$$

Найдем уравнения касательной и нормальной прямой в точке $x_0 = 1$:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x$$

Отсюда получаем уравнение касательной:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$y = 1^3 - 1^2 + (3 - 2) \cdot (x - 1)$$

$$y = x - 1$$

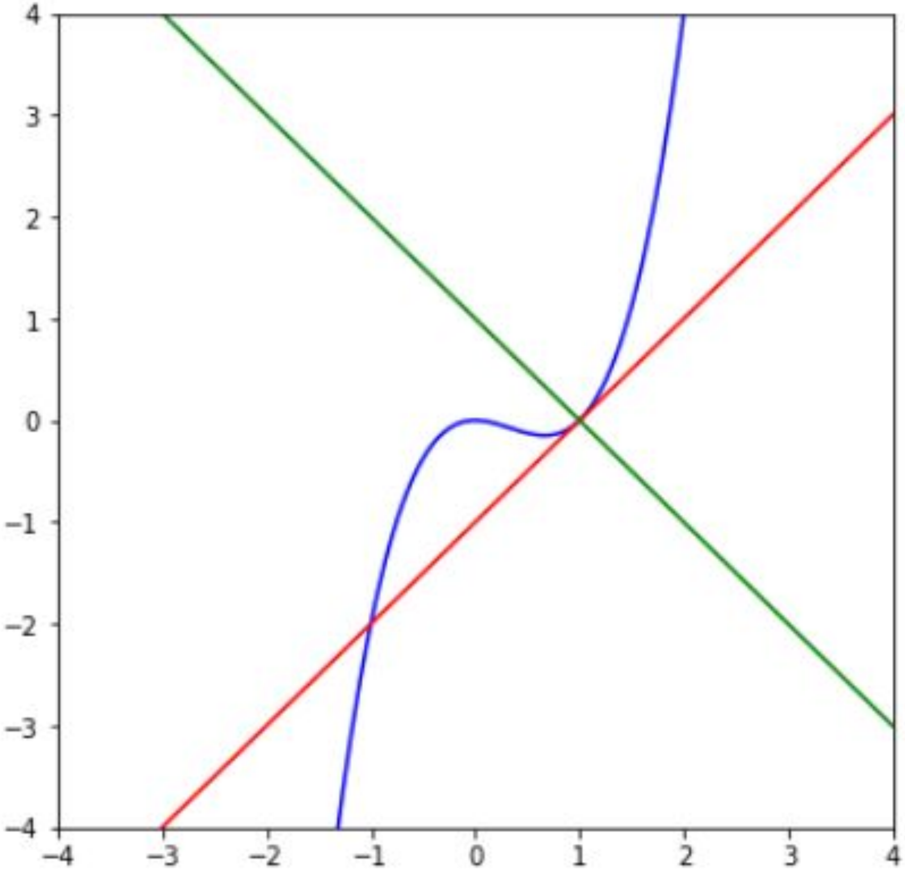
Пример для явной функции

Уравнение нормали:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

$$y = 1^3 - 1^2 - \frac{1}{3-2} \cdot (x - 1)$$

$$y = -x + 1$$



$$y = x^3 - x^2$$

$$y = x - 1$$

$$y = -x + 1$$

Пример для неявной функции

2. В качестве второго примера возьмем уже знакомое уравнение окружности в неявном виде

$$x^2 + y^2 = 9$$

Найдем уравнения касательной и нормальной прямой в точке $(2, \sqrt{5})$:

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{x}{y}$$

Отсюда получаем уравнение касательной:

$$y = y_0 + y'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)$$

$$y = \sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot (x - 2)$$

$$y = -\frac{2\sqrt{5}}{5}x + \frac{9\sqrt{5}}{5}$$

Пример для неявной функции

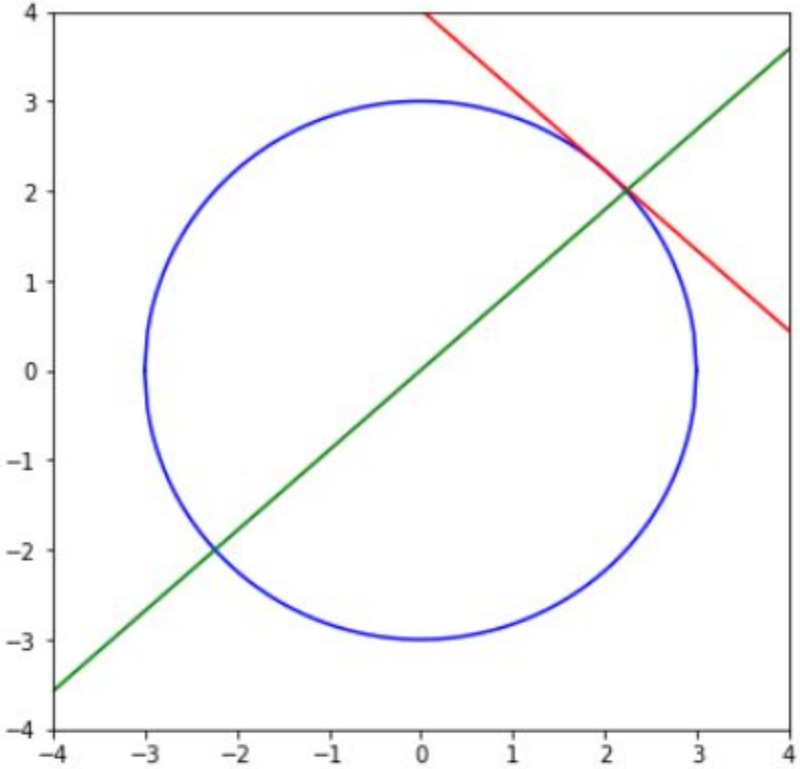
Уравнение нормали:

$$y = y_0 - \frac{1}{y'_x(x_0, y_0)} \cdot (x - x_0)$$

$$y = \sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot (x - 2)$$

$$y = \frac{\sqrt{5}}{2} x$$

Пример для неявной функции



$$x^2 + y^2 = 9$$

$$y = -\frac{2\sqrt{5}}{5}x + \frac{9\sqrt{5}}{5}$$

$$y = \frac{\sqrt{5}}{2}x$$

Пример для функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} y = 3\sin t, \\ x = 3\cos t \end{cases}$$

Найдем уравнения касательной и нормальной прямой в точке $t_0 = \frac{\pi}{2}$:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{\cos t}{\sin t}$$

Отсюда получаем уравнение касательной:

$$y = \varphi(t_0) + y'_x(t_0) \cdot (x - 0)$$

$$y = 3 - \frac{0}{1} \cdot (x - 0)$$

$$y = 3$$

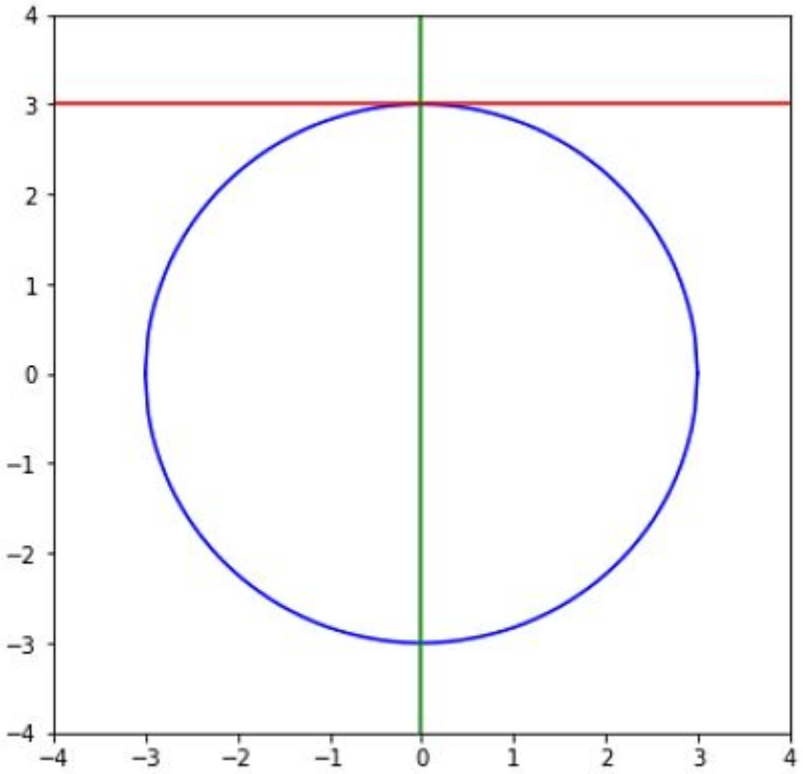
Пример для функции, заданной параметрически

$$y = \varphi(t_0) - \frac{1}{y'_x(t_0)} \cdot (x - \psi(t_0))$$

$$y = 3 + \frac{1}{0} \cdot (x - 0)$$

?

Тогда строим график



$$x^2 + y^2 = 9$$

(x=0;y=3)

$$y = 3$$

x=0

Ваши вопросы:

Спасибо!