GeekBrains

Интегралы

Введение в математический анализ

План вебинара

1)Разбор ДЗ.

2) Интегралы:

2.1) неопределённые интегралы;

2.2) определённые интегралы

--

3) Дифференциальные уравнения.

Разбор ДЗ (ФНП). Часть 1.

1. Найти область определения функ

$$z=\sqrt{1-x^3}+\ln\left(y^2-1\right)$$

$$\begin{cases}1-x^3\geq 0\\ y^2-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3\leq 1\\ (y-1)(y+1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 1\\ \left[\begin{array}{l}y<-1\\ y>1\end{array}\right.\end{cases}$$

2. Найти частные производные 1-го порядка функции.

$$z = \left(1 + \frac{\ln x}{\ln y}\right)^3$$

$$z = \left(1 + \frac{\ln x}{\ln y}\right)^3$$

$$z'_x = 3\left(1 + \frac{\ln x}{\ln y}\right)^2 \cdot \frac{1}{\ln y} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{3}{x \cdot \ln y} \cdot \left(1 + \frac{\ln x}{\ln y}\right)^2$$

$$z = \left(1 + \frac{\ln x}{\ln y}\right)^3$$

$$z'_y = \underbrace{3 \cdot \left(1 + \frac{\ln x}{\ln y}\right)^2 \cdot \ln x}_{A} \cdot \left(\frac{1}{\ln y}\right)'_y = A \cdot \left(\left(\ln y\right)^{-1}\right)'_y =$$

$$= A \cdot \frac{-1}{\ln^2 y} \cdot \frac{1}{y} = -\frac{3 \ln x}{y \cdot \ln^2 y} \cdot \left(1 + \frac{\ln x}{\ln y}\right)^2$$

3. Найти полный дифференциал функции в точке (1;1).

$$z = \sqrt{2xy + \cos\frac{x}{y}}$$

$$dz = z'_x \cdot dx + z'_y \cdot dy$$

$$z = \sqrt{2xy + \cos\frac{x}{y}} = \left(2xy + \cos\frac{x}{y}\right)^{1/2}$$

$$z'_x = \frac{1}{2\sqrt{2xy + \cos\frac{x}{y}}} \cdot \left(2xy + \cos\frac{x}{y}\right)'_x =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2xy + \cos\frac{x}{y}}} \cdot \left(2y - \left(\sin\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{1}{y}\right)$$

$$z'_y = \frac{1}{2\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}}\left(2xy+\cos\frac{x}{y}\right)'_y =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}}\cdot\left(2x-\left(\sin\frac{x}{y}\right)\cdot x\left(-\frac{1}{y^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{x\cdot\left(2+\frac{\sin\frac{x}{y}}{y^2}\right)}{2\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}}$$

$$z'_x(1;1)=\frac{1}{2\sqrt{2+\cos 1}}(2-\sin 1)$$

$$z'_y(1;1)=\frac{2+\sin 1}{2\sqrt{2+\cos 1}}$$

$$dz=\frac{2-\sin 1}{2\sqrt{2+\cos 1}}dx+\frac{2+\sin 1}{2\sqrt{2+\cos 1}}\cdot dy$$

$\sin 1 \approx 0{,}841$
$\cos 1 \approx 0{,}540$

$$\frac{1{,}159}{3{,}187}dx+\frac{2{,}841}{3{,}187}dy=$$

$$dz(1;1)=0{,}364dx+0{,}891dy$$

4. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$

Решение:
https://www.wolframalpha.com/input/?i=extrema+calculator&assumption=%7B%22F%22%2C+%22GlobalExtremaCalculator%22%2C+%22curvefunction%22%7D+-%3E%22x%5E2%2Bxy%2By%5E2-6x-9y%22

$$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y \longrightarrow extr$$

Н.У.:

$$\begin{cases} z'_x = 2x + y - 6 = 0 \\ z'_y = x + 2y - 9 = 0 \;\big|\cdot(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 1 \end{cases} \quad (1;4)$$

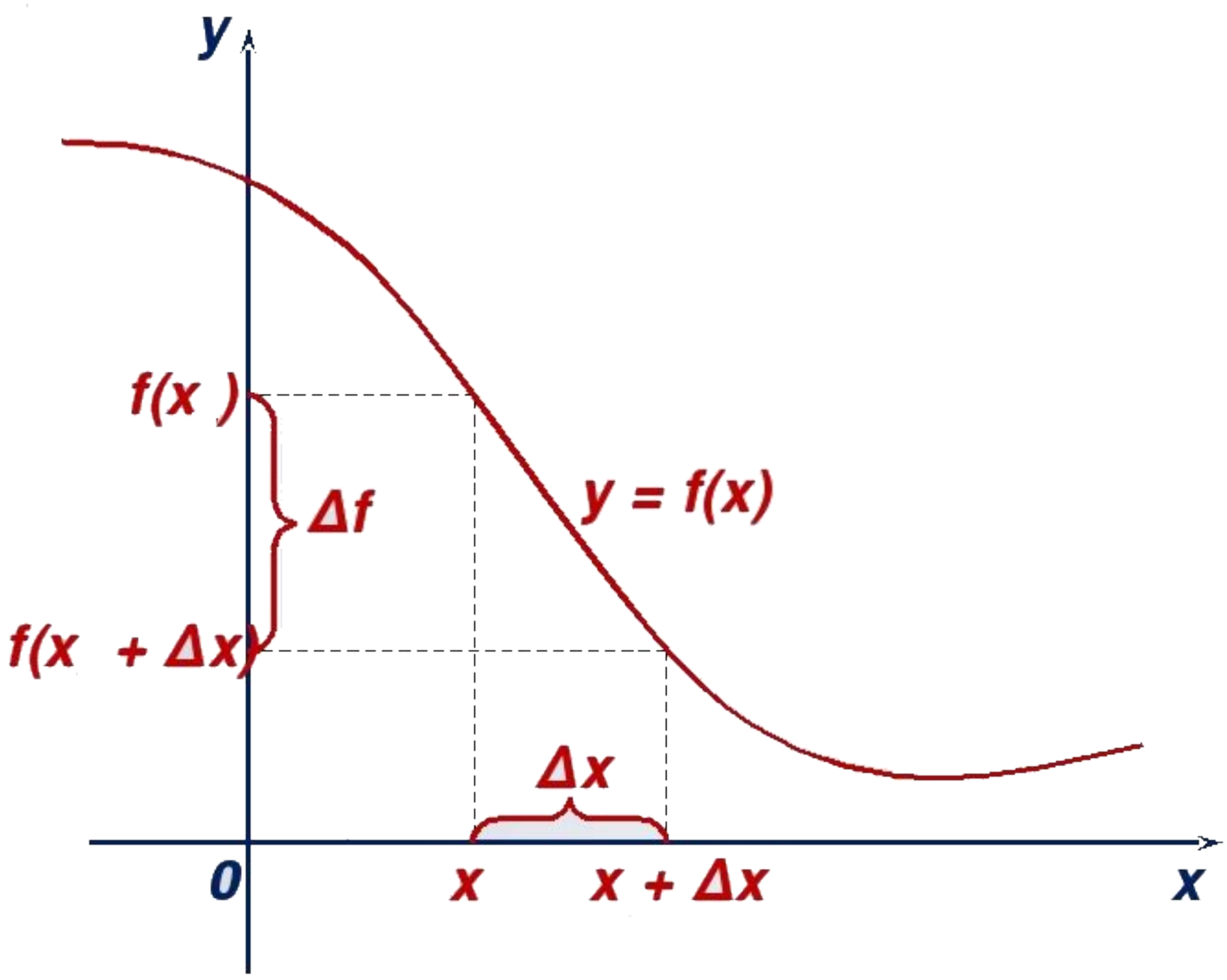
Д.У.

$$\begin{cases} z''_{xx} = 2 \\ z''_{xy} = z''_{yx} = 1 \\ z''_{yy} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 > 0 \Rightarrow \min \text{ в т. } (1;4)$$

$$z(1;4) = 1^2 + 1\cdot 4 + 4^2 - 6\cdot 1 - 9\cdot 4 = -21$$

Приращение функции и приращение аргумента



Дифференциал

$$y = f(x)$$

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} \qquad => \; dy = y'dx$$

$$df(x) = f'(x) \cdot dx$$

$$y = x^2 \quad \Rightarrow \quad dy = 2x \cdot dx$$

$$y = 3x^2 - 4x + 10 \quad \Rightarrow \quad dy = (6x - 4) \cdot dx$$

$$y = \sin x \quad \Rightarrow \quad dy = \cos x \cdot dx$$

$$y = \sin(x^2) \quad \Rightarrow \quad dy = \cos(x^2) \cdot d(x^2) = \cos(x^2) \cdot 2x \cdot dx$$

$$y = \arcsin x \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Интегрирование

по сути, это противодействие дифференцированию.

Знак интегрирования: $\int$

Интегрирование

$$\int dx = x + C$$

$$\int x dx = \int d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int \sin x \, dx = \int d(-\cos x) = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \int d(\sin x) = \sin x + C$$

При интегрировании проверить себя довольно просто: достаточно взять производную от ответа - должна получится функция под интегралом.

$$\int dx = x + C$$

$$\int x\,dx = \int d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int \sin x\,dx = \int d(-\cos x) = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \int d(\sin x) = \sin x + C$$

$$(x + C)' = 1$$

$$\left(\frac{x^2}{2} + C\right)' = x$$

$$(-\cos x + C)' = \sin x$$

$$(\sin x + C)' = \cos x$$

Основные правила интегрирования

$$\int (u \pm v \pm w) dx = \int u\,dx \pm \int v\,dx \pm \int w\,dx$$

$$\int cu\,dx = c\int u\,dx$$

Таблица интегралов

$$1.\ \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad 2.\ \int \frac{dx}{x} = \ln x + C \quad (x \neq 0)$$

$$3.\ \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases} \qquad 4.\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$$

$$5.\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C \qquad 6.\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C$$

Таблица интегралов

$$7.\ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, \qquad a \neq 1)$$

$$8.\ \int \sin x\, dx = -\cos x + C \qquad 9.\ \int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$10.\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \qquad 11.\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

Весь процесс интегрирования сводится к тому, что необходимо привести подынтегральную функцию к табличному виду.

Неопределенные интегралы. Метод внесения под дифференциал

$$\int \sin(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x)\,d(2x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C$$

$$\int x(x^2+1)^{50}dx = \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{50}d(x^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{50}d(x^2+1) = \frac{(x^2+1)^{51}}{2\cdot 51} + C$$

Метод замены переменной (по сути, он идентичен внесению под знак дифференциала)

$$\int \frac{1}{2x-5}\,dx$$

$$2x-5=t \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{2}t+\frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad dx=\frac{1}{2}dt$$

$$\int \frac{1}{2x-5}\,dx=\int \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\ln|t|+C$$

$$\int \frac{1}{2x-5}\,dx$$

$$2x-5=t \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{2}t+\frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad dx=\frac{1}{2}dt$$

$$\int \frac{1}{2x-5}\,dx=\int \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\ln|t|+C$$

В этом методе важно вернуться к исходной переменной:

$$\int \frac{1}{2x-5}\,dx=\frac{1}{2}\ln|2x-5|+C$$

$$\int \frac{x^2}{x^3+1}\,dx$$

$$x^3+1=t \quad \Rightarrow \quad x=(t-1)^{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad dx=\frac{1}{3}(t-1)^{-\frac{2}{3}}\,dt$$

$$\int \frac{x^2}{x^3+1}\,dx=\int \frac{(t-1)^{\frac{2}{3}}}{t}\cdot\frac{1}{3}(t-1)^{-\frac{2}{3}}\,dt=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}=$$
$$=\frac{1}{3}\ln|t|+C=\frac{1}{3}\ln|x^3+1|+C$$

Неопределенные интегралы. Интегрирование по частям

$$U \cdot V = \int U dV + \int V dU$$

$$\int U dV = U \cdot V - \int V dU$$

Источник:

$$(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'$$

$$d(U \cdot V) = U dV + V dU$$

$$(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'$$

$$d(U \cdot V) = UdV + VdU$$

Интегрируем правую и левую части

$$\int d(U \cdot V) = \int V \cdot dU + \int U \cdot dV$$

$$U \cdot V = \int V \cdot dU + \int U \cdot dV$$

$$\int U \cdot dV = U \cdot V - \int V \cdot dU$$

Неопределенные интегралы. Интегрирование по частям

$$\int \operatorname{arctg} x\, dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{x^2+1} dx =$$

$$U = \operatorname{arctg} x \qquad => \qquad dU = \frac{dx}{x^2+1}$$

$$dV = dx \qquad => \qquad V = x$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$$

$$\int x \sin x \, dx$$

$$U = x \quad \Rightarrow \quad dU = dx$$

$$dV = \sin x dx \quad \Rightarrow \quad V = -\cos x$$

$$\int x \sin x \, dx = x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx$$

$$= -x \cos x + \sin x + C$$

Неопределенные интегралы. Интегрирование по частям

$$\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx =$$

$$U = e^x \quad => \quad dU = e^x dx$$
$$dV = \sin x\, dx \quad => \quad V = -\cos x$$

$$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$$

$$U = e^x \quad => \quad dU = e^x dx$$
$$dV = \cos x\, dx \quad => \quad V = \sin x$$

$$\int e^x \sin x\, dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}$$

Какие интегралы берутся по частям

1) $\int \ln x dx$, $\int (x^2+3)\ln x dx$, $\int x\ln^2 x dx$

2) $\int xe^x dx$, $\int (x^2-2x+5)e^{-2x} dx$

3) $\int x\cos 6x dx$, $\int (x^2+3x)\sin 2x dx$, $\int x tg^2 x dx$

4) $\int \arcsin x dx$, $\int x^2 arctg x dx$

$$\int U dV = U \cdot V - \int V dU$$

Дробь правильная
(старшая степень выражения в знаменателе выше степени выражения в числителе)

Неопределенные интегралы. Метод неопределенных коэффициентов

$$\int \frac{4x^2+8}{x^4-1}dx = \int \frac{4x^2+8}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}dx =$$

$$= \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \int \frac{x^3(A+B+C) + x^2(A-B+D) + x(A+B-C) + (A-B-D)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}dx$$

Неопределенные интегралы. Метод неопределенных коэффициентов

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ A - B + D = 4 \\ A + B - C = 0 \\ A - B - D = 8 \end{cases} \quad => \begin{cases} A = 3 \\ B = -3 \\ C = 0 \\ D = -2 \end{cases}$$

$$= \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx + D}{x^2+1} \right) dx = \int \left(\frac{3}{x-1} - \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= 3 \ln|x-1| - 3 \ln|x+1| - 2 \operatorname{arctg} x + C$$

Неопределенные интегралы. Универсальная тригонометрическая подстановка

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \quad => \quad x = \operatorname{arctg} 2t \quad => \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \qquad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$$

Неопределенные интегралы. Универсальная тригонометрическая подстановка

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \quad => \quad x = \operatorname{arctg} 2t \quad => \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2} \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{1-t^2}{2t}$$

Неопределенные интегралы. Универсальная тригонометрическая подстановка

$$\int \frac{dx}{4\sin x - 3\cos x - 5} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\frac{2t}{1+t^2} - 3\frac{1-t^2}{1+t^2} - 5} =$$

$$= \int \frac{2dt}{8t - 3(1-t^2) - 5(1+t^2)} = -\int \frac{dt}{t^2 - 4t + 4} =$$

$$= -\int \frac{dt}{(t-2)^2} = \frac{1}{t-2} + C = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 2} + C$$

На python интегралы так же можно находить аналитически с помощью библиотеки **sympy**.

```
[ ]  from sympy import *
     init_printing()
```

```
[ ]  x=Symbol('x')
     f=1/x
     f
```

$$\frac{1}{x}$$

```
[ ]  integrate(f,x)## в данном случае имеется в виду натуральных логарифм. Так же не учитывается константа.
```

$$\log{\left(x \right)}$$

Найдем интеграл от рациональной дроби

```
[ ]  x=Symbol('x')
     f=(4*x**2+8)/(x**4-1)
     f
```

$$\frac{4x^2+8}{x^4-1}$$

```
[ ]  integrate(f,x)
```

$$3\log(x-1)-3\log(x+1)-2\operatorname{atan}(x)$$

Определенные интегралы.

- Интеграл Римана.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- Интеграл Лебега

$$\int_X f(x)\mu(dx) = \int_X f(x)d\mu = \mu(\mathrm{A})$$

Для интеграла Римана функция должна быть непрерывна и дифференцируема во всех точках заданного отрезка [a,b] . Для интеграла Лебега таких ограничений нет.

Т.е. интеграл Лебега совпадает с интегралом Римана там, где интеграл Римана существует. При этом интеграл Лебега можно брать и от не дифференцируемых в точке функций. Например, от функции Дирихле.

- Интеграл Римана.

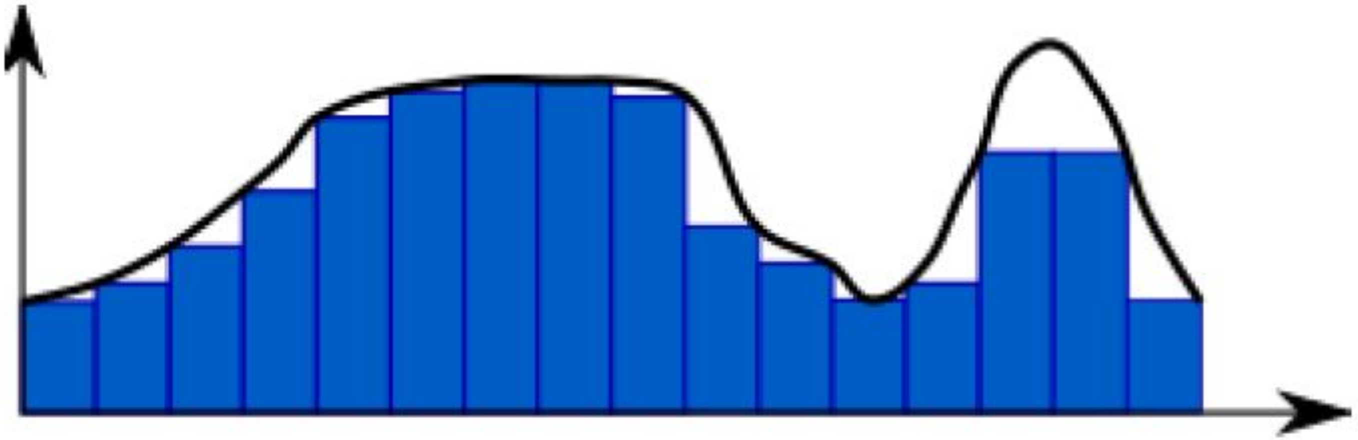
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- Интеграл Лебега

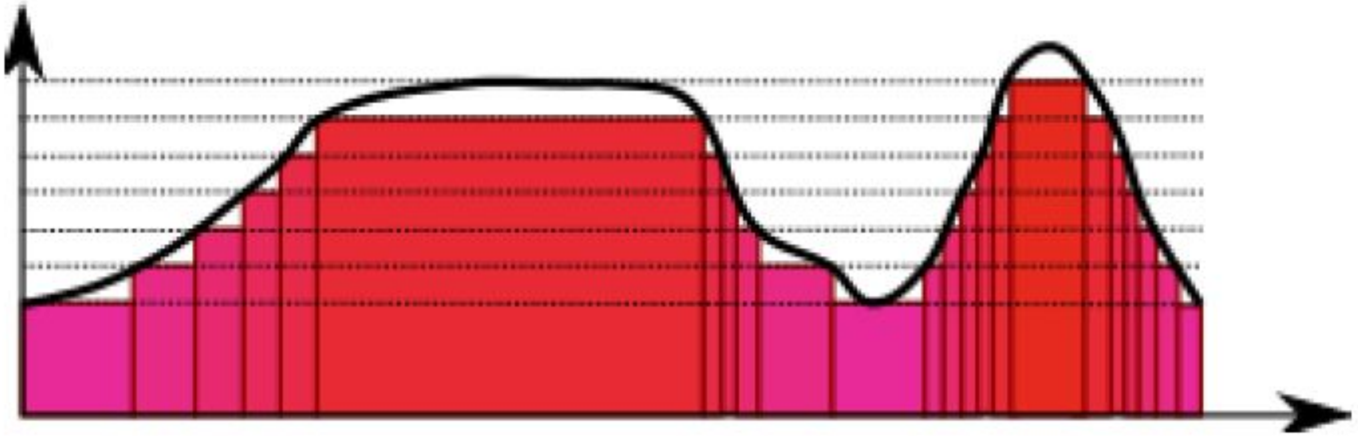
$$\int_X f(x)\mu(dx) = \int_X f(x)d\mu = \mu(\mathrm{A})$$

Определенные интегралы.

Интегрировани
е
по Риману



Интегрировани
е
по Лебегу



Статьи по интегралам Лебега

- **Интеграл Лебега:** https://mathworld.wolfram.com/LebesgueIntegral.html
- **Мера Лебега:**

https://mathworld.wolfram.com/Measure.html

- **Пример вычисления интеграла Лебега:**

https://demonstrations.wolfram.com/LebesgueIntegration/

Определенные интегралы.

$$y = x$$

$$\int_{0}^{1} x dx = \int_{0}^{1} d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{1} = \frac{1}{2}$$

$$\int_{-1}^{1} x dx = \int_{-1}^{1} d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = 0$$

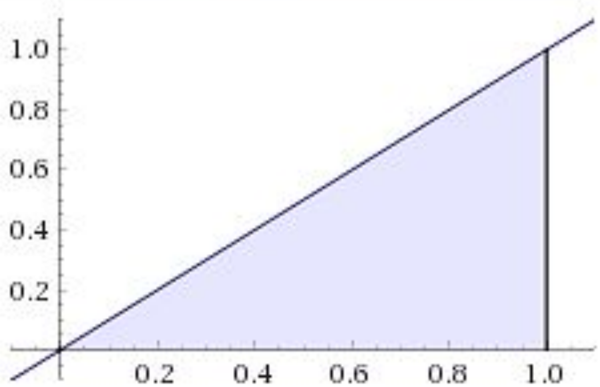
integrate xdx from x=0 to 1

Extended Keyboard   Upload

Definite integral:

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} = 0.5$$

Visual representation of the integral:



$$\int_0^{ln2} xe^{-x}dx$$

$$\int_0^{ln2} xe^{-x}dx$$

$$u = x$$
$$du = dx$$
$$dv = e^{-x}dx$$
$$v = -e^{-x}$$

$$\int_0^{ln2} xe^{-x}dx$$

$$u = x$$
$$du = dx$$
$$dv = e^{-x}dx$$
$$v = -e^{-x}$$

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - \int x\left(-e^{-x}\right)dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx =$$

$$= -xe^{-x} - \int e^{-x}d(-x) = -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_0^{ln2} xe^{-x}dx = F(ln2) - F(0) = -(ln2)e^{-ln2} - e^{-ln2} - \left(-0e^{-0} - e^0\right) = -\frac{1}{2}ln2 - \frac{1}{2} + 1 =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}ln2$$

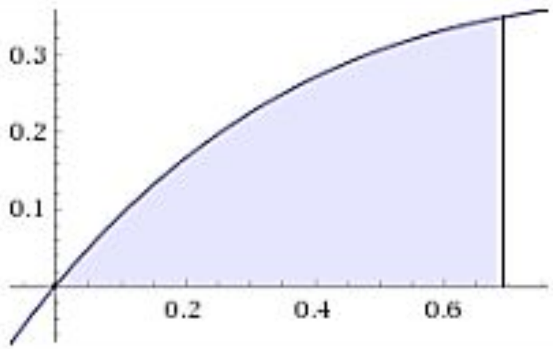
integrate xe^(-x) dx from x=0 to ln2

Extended Keyboard   Upload

Definite integral:

$$\int_0^{\log(2)} x\, e^{-x}\, dx = \frac{1}{2}(1 - \log(2)) \approx 0.15343$$

Visual representation of the integral:



Indefinite integral:

$$\int x\, e^{-x}\, dx = e^{-x}(-x - 1) + \text{constant}$$

Несобственные интегралы

определённые интегралы с особенностями на границах.

Одна из границ -- бесконечность

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a)$$

Особенность на одной из границ интегрирования

$$\int\limits_a^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} F(b-\varepsilon) - F(a)$$

$$\int\limits_a^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx = F(b) - \lim_{\varepsilon\to 0} F(a+\varepsilon)$$

Примеры вычисления несобственных интегралов

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} (-\frac{1}{b}) - (-\frac{1}{1}) = 0 + 1 = 1$$

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \Big(\arcsin(1 - \varepsilon) \Big) - \lim_{\varepsilon \to 0} \Big(\arcsin(-1 + \varepsilon) \Big) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$$

Дифференциальные уравнения: где применяются.

DSP (Цифровая обработка сигналов)

Computer vision

«Анализ любых экспериментальных данных (зависимости величин) - только диффуры! А это - весь мир». (c, @xmoonlight, https://qna.habr.com/q/149841)

Решение дифференциальных уравнений

- ДУ с разделяющимися переменными;
- однородные ДУ;
- линейные ДУ первого порядка (Бернулли, Риккати);
- уравнение в полных дифференциалах;
- линейные ДУ с постоянными коэффициентами;
- линейные системы ДУ с постоянными коэффициентами;
- устойчивость.

А.Ф. Филиппов. «Сборник задач по ДУ»

ДУ с разделяющимися переменными

$$N(x)dx + M(y)dy = 0$$

$$xydx + (x+1)dy = 0$$

$$\frac{xdx}{x+1} + \frac{dy}{y} = 0$$

$$\int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx + \int \frac{dy}{y} = 0$$

$$x - \ln|x+1| + \ln|y| = C$$

Задача Коши

$$(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0, \qquad y(0) = 1$$

$$(x^2-1)\frac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0$$

$$\int \frac{dy}{y^2} + \int \frac{2xdx}{x^2-1} = 0$$

$$-\frac{1}{y} + \ln|x^2-1| = C \ \ => \ \ C = -1$$

$$\frac{1}{y} = \ln|x^2-1| + 1$$

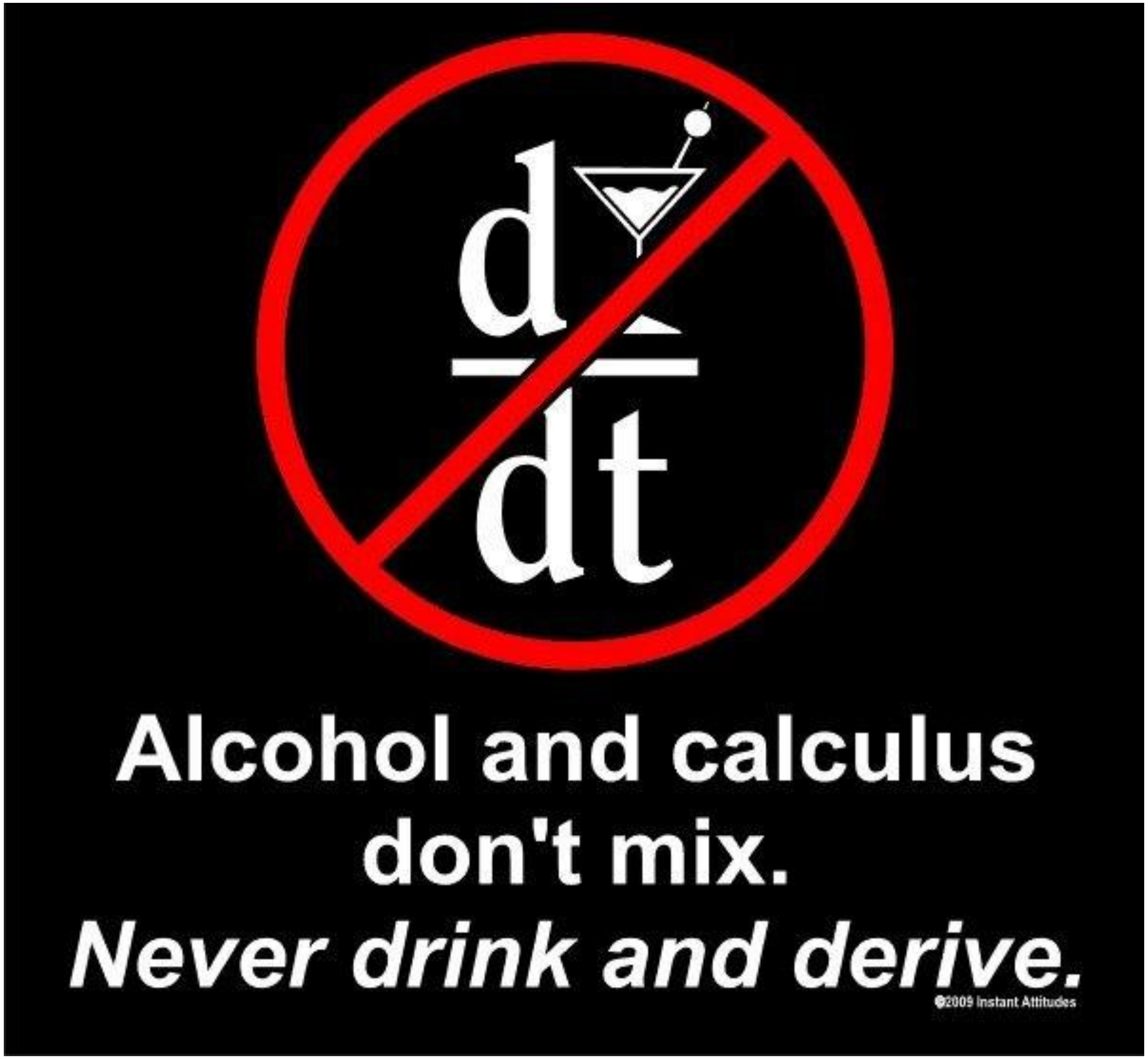
$$y' = 1 + \frac{2y}{x}$$

Однородные ДУ

$$(x + 2y)dx - xdy = 0$$

$$(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$$

$$y(x) = x \cdot t(x) \quad => \quad dy = xdt + tdx$$


Alcohol and calculus
don't mix.
Never drink and derive.
©2009 Instant Attitudes

Спасибо!