GeekBrains

Производная функции одной переменной (часть 2)

Введение в математический анализ

План вебинара

1. Разбор ДЗ – ключевые моменты.
2. Поиск экстремумов.
3. Интерполяция

По следам проверки ДЗ

Посмотрите ещё раз на эти задания: в них –
а) больше «степеней свободы»; б) нет ничего сложного; в) они полезны!

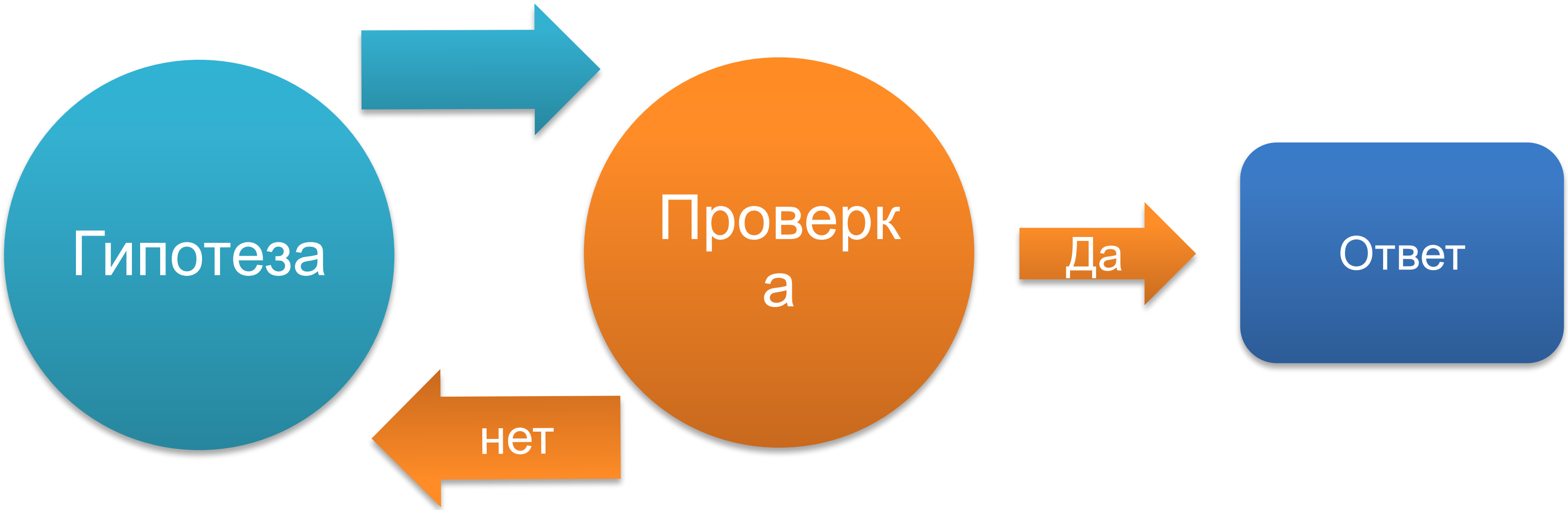
1) Предложить пример функции, не имеющей предела в нуле и в бесконечностях.
2) Привести пример функции, не имеющей предела в точке, но определенной в ней.

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$sgn(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \sin(x + \tfrac{1}{x})$$

Схема решения подобных задач

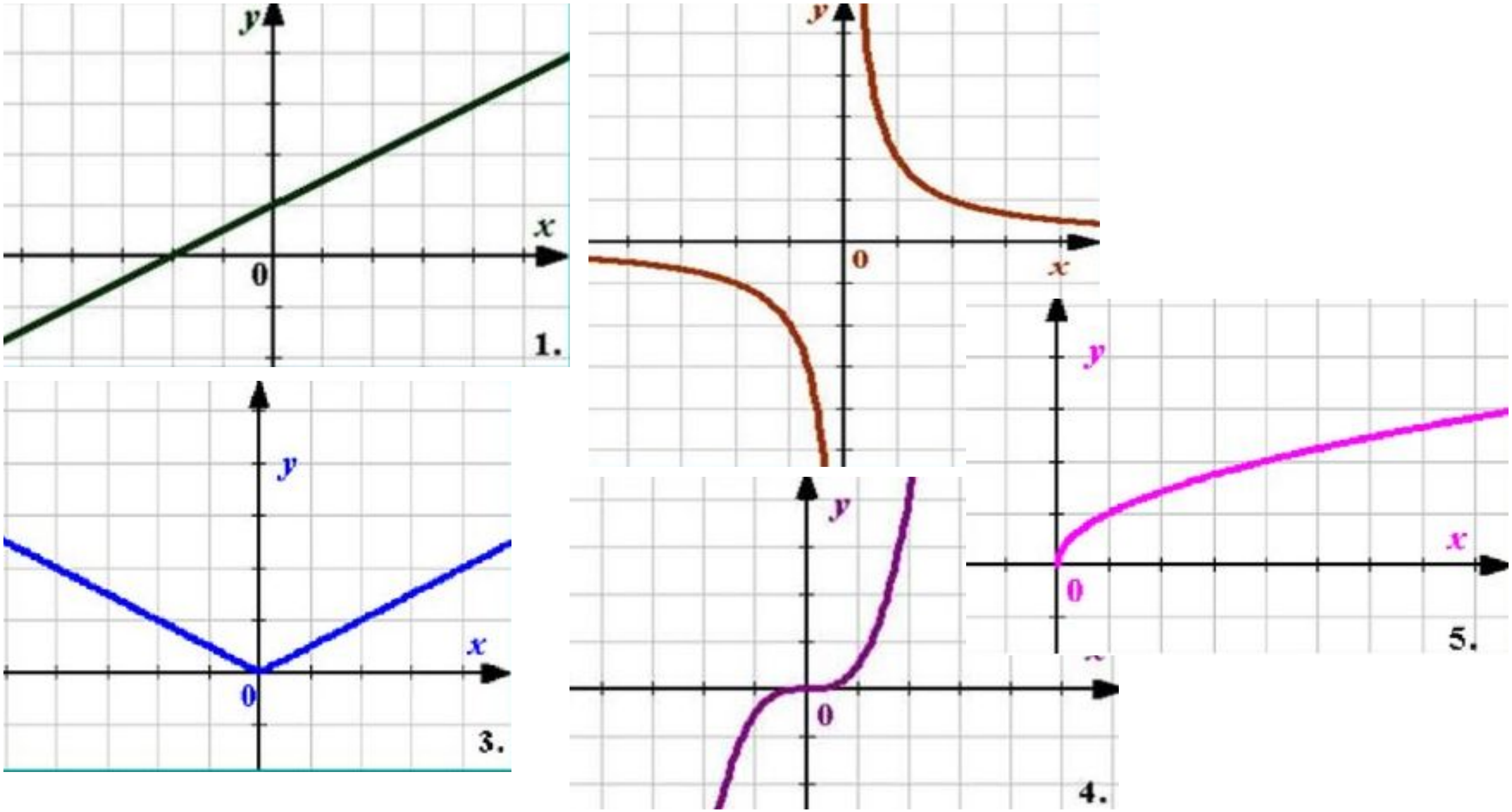


y = sin(1/x)

y=cos(x)

y=(x^2)/x

Чётные и нечётные функции



Чётные функции: *f(-x) = f(x)*
Нечётные функции: *f(-x) = - f(x)*
Все остальные: *функции общего вида*

Разбор ДЗ

$$6.\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{4x+1} = (1)^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{4x+1} =$$

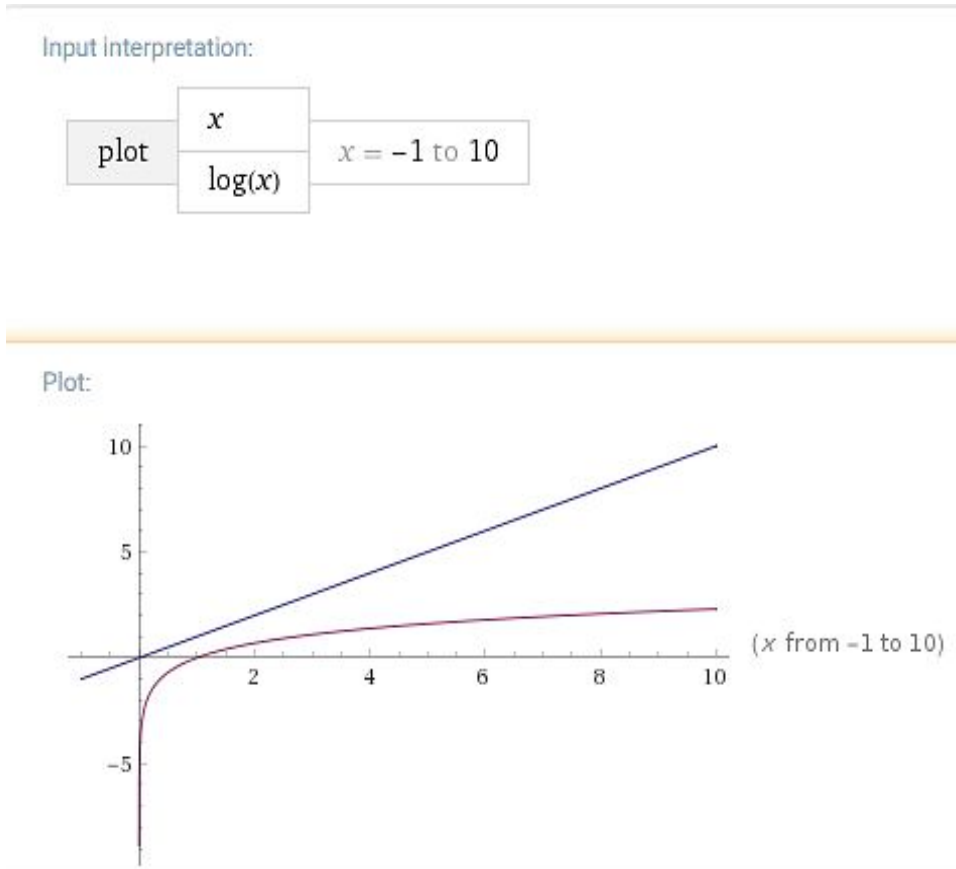
$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\cdot\frac{3}{x}\cdot(4x+1)} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{3(4x+1)}{x}} = e^{12}$$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+3}{4x-3}\right)^{6x} = (1)^{\infty} = \lim\limits_{x\to\infty} U^{V} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}(U-1)\cdot V} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+3}{4x-3}-1\right)\cdot 6x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{36x}{4x-3}} = e^{9}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x + \ln x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} + \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = 0 + 0 = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{sinx + lnx}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} + \lim_{x \to 0} \frac{lnx}{x} = -\infty$$



-

1. область определения функции;
2. вывод о характере предела: лево- или правосторонний.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{sinx + lnx}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$$ НЕ 1-Й ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ

Смысл производной

Физический

Мгновенная скорость изменения функции в момент времени x.

Геометрический

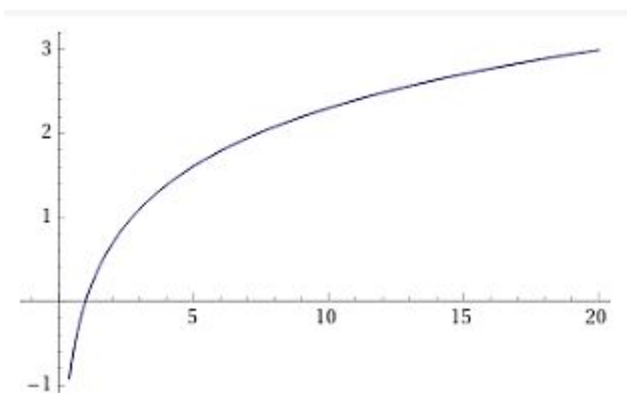
Тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.

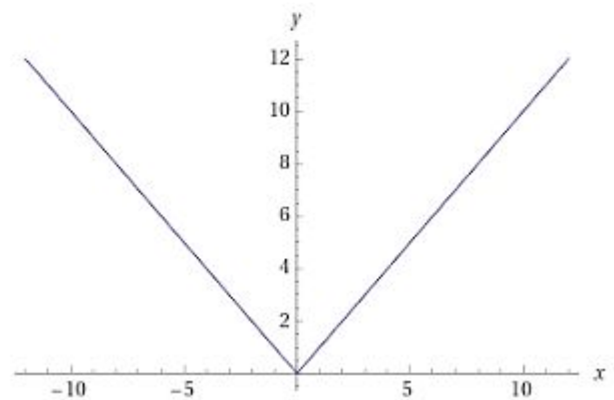
Термины

Критическая точка -- это точка, в которой производная функции обращается в 0 или не существует.

Важно: у критической точки должна быть окрестность (т. е. функция должна быть определена в её окрестности).

Примеры: *y = ln(x); y = abs(x).*





Термины

Экстремум - это обобщенное понятие локального минимума и максимума функции (*т. е. один словом определяются оба эти противоположных понятия*).

По определению **экстремум -- это критическая точка, проходя через которую производная меняет свой знак.**

Применение производной для исследования функции на монотонность и экстремумы

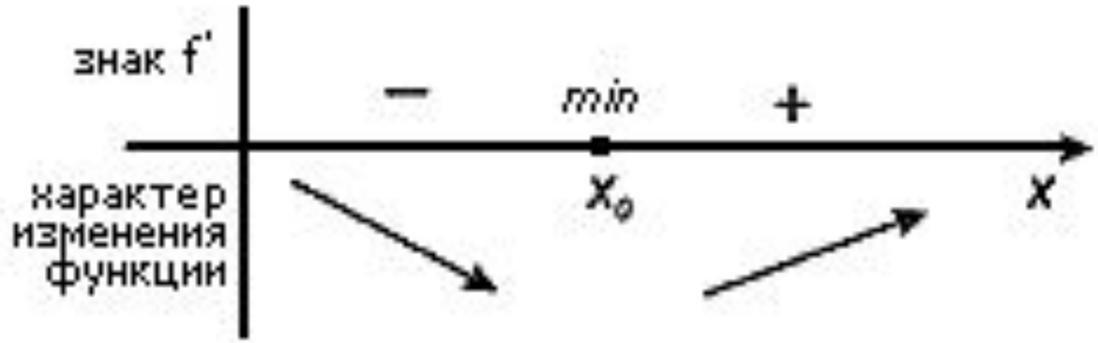
Теорема (необходимое условие экстремума)

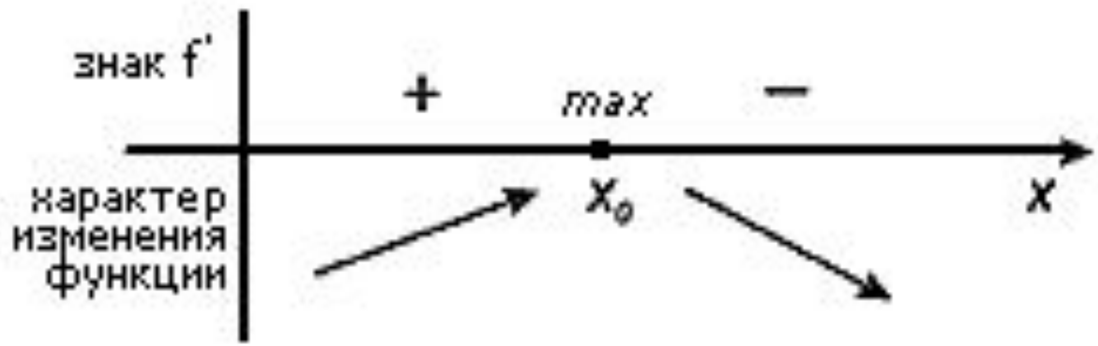
Если точка c является точкой экстремума функции $f(x)$, то в этой точке $f'(c)$ равен нулю или не существует.

*Теорема (достаточное условие экстремума по первой производной)**

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки c, кроме, быть может, самой точки c, в которой она является непрерывной. Тогда если $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку c, то точка c является точкой экстремума.

Применение производной для исследования функции на монотонность и экстремумы

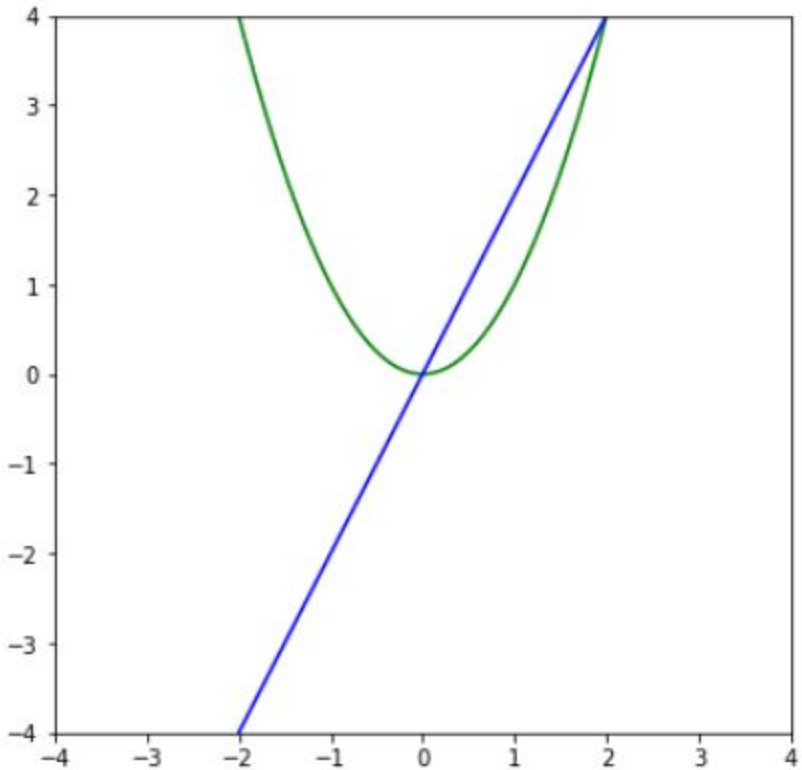




Пример 1

$$y = x^2$$

$$y' = 2x$$

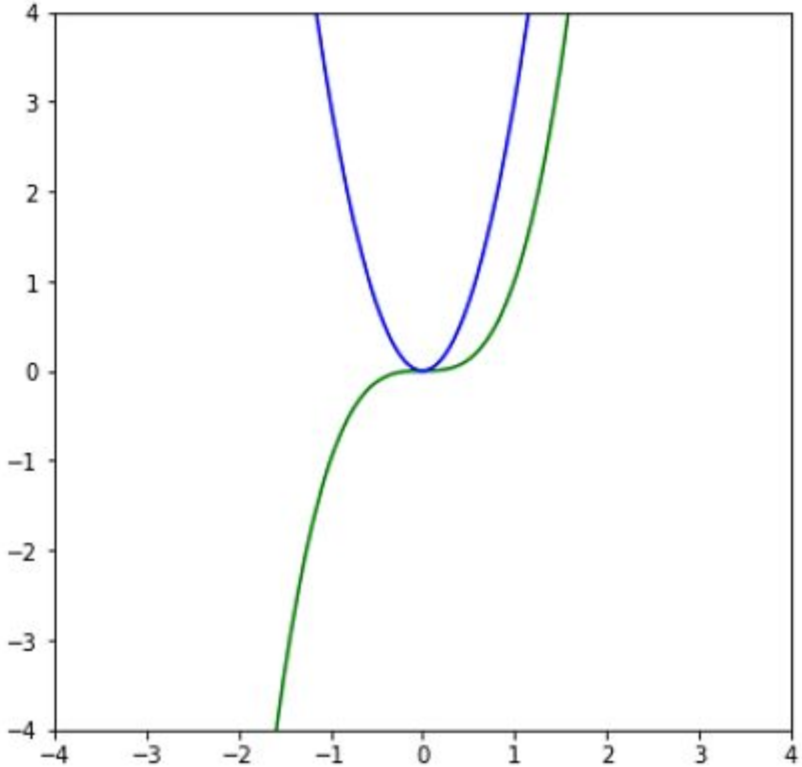


$$f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2 < 0$$
$$f'(1) = 2 \cdot 1 = 2 > 0$$

Пример 2

$$y = x^3$$

$$y' = 3x^2$$



$$f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 = 3 > 0$$
$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3 > 0$$

Пример 3

$$y = x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + 1$$

$$y' = 4x^3 + 3x^2 - 4x - 3$$

$$4x^3 + 3x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$x^2(4x+3) - (4x+3) = 0$$

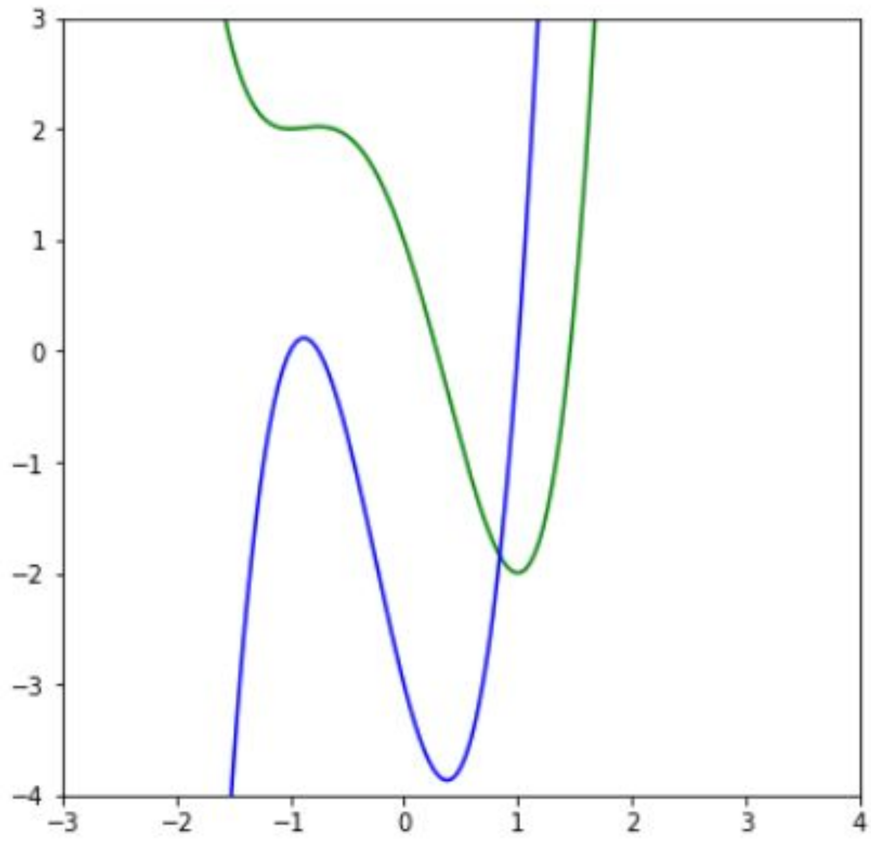
$$(4x+3)(x^2-1) = 0$$

$$(4x+3)(x-1)(x+1) = 0$$

$$x = -1, x = -\frac{3}{4}, x = 1.$$

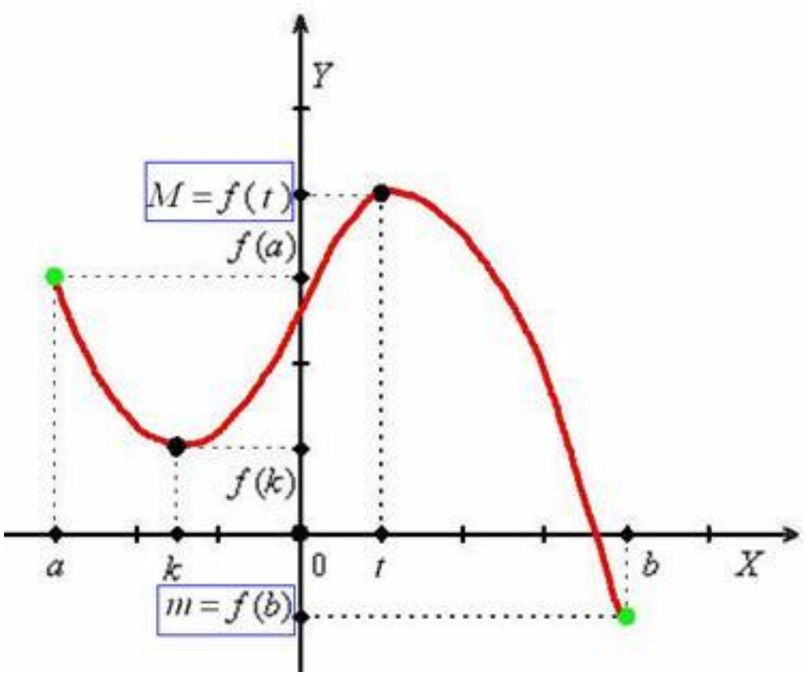
Знак будет меняться только в то
м случае, если критическая точка
входит в производную в нечетно
й степени.

Зелёная линия – функция; синяя – производная.



Чем отличаются локальный и глобальный экстремумы.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке



Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке не обязательно совпадают с экстремумами.

http://mathprofi.ru/naibolshee_i_naimenshee_znacheniya_funkcii_na_otrezke.html (пример 3)

Производные различных порядков

- y’ (1-я производная) – для анализа монотонности функции; нахождения экстремумов.
- y’’(2-я производная) – для анализа выпуклости функции.
- …
- y^n (n-я производная)

Задача оптимизации

Найти оптимальные параметры цилиндрической банки для оливок, которые минимизируют количество затрачиваемой жести (материал банки).

h - высота банки, R - радиус основания и крышки банки.

Функция площади полной поверхности цилиндра (боковая поверхность + основания)

$$S = 2\pi R \cdot h + \pi R^2 + \pi R^2 =$$
$$= 2\pi R \cdot h + 2\pi R^2$$

Проблема: в функции 2 переменных (*h;R*).

Предположим, известен объём банок (несколько вариантов): 200 мл, 500 мл, 1 л. Значит, можно выразить *h* через *V* и *R*.

$$h = \frac{V}{\pi R^2}$$

$$S = 2\pi R \cdot \frac{V}{\pi R^2} + 2\pi R^2 =$$
$$= \frac{2V}{R} + 2\pi R^2$$

Чтобы найти оптимальный радиус банки, вычислим производную:

$$S' = -\frac{2V}{R^2} + 4\pi R = \frac{4\pi R^3 - 2V}{R^2}$$

Где существует производная?

$$\frac{4\pi R^3 - 2V}{R^2} = 0$$

$$4\pi R^3 - 2V = 0$$

$$R^3 = \frac{2V}{4\pi}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

$$S' = -\frac{2V}{R^2} + 4\pi R = \frac{4\pi R^3 - 2V}{R^2}$$

В производной коэффициент при старшей степени R положителен =>
=> справа от точки экстремума «+».
R возводится в 3-ю степень => при переходе через критическую точку знак меняется на противоположный.

Проверка знака справа с помощью подстановки:

$$S'\left(2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) = \frac{4\pi\left(2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^3 - 2V}{\left(2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2} =$$

$$= \frac{16V - 2V}{\left(2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2} > 0$$

Найдём *h* (оптимальное значение h)*

$$h = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{V}{\pi(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}})^2} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{V^3 \cdot (2\pi)^2}{\pi^3 \cdot V^2}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} =$$

$$= 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2R$$

Содержательный вывод

Оказывается, оптимальные размеры тары не зависят от объема. Чтобы материала на производство уходило как можно меньше, достаточно чтобы $h=2R$.

В магазине такие тары найти не сложно. Как правило это банки кукурузы, горошка или сгущёнки.

Почему же всё не делают в одинаковых банках? В одних случаях «виновато» содержимое, которое нельзя хранить в высоких тарах (например, рыба).

В других случаях, дело в маркетинге. Люди привыкли к оливкам в вытянутых банках, поэтому они лучше продаются.

В остальных случаях проблема в незнании мат. части.

Интерполяция

Определение:

Метод нахождения промежуточных значений функции по имеющемуся дискретному набору известных значений.

Требования:

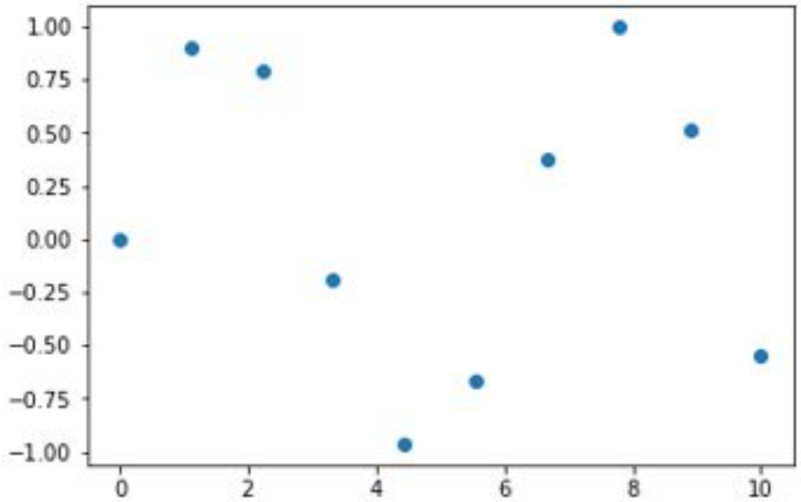
- Прохождение функции через данные точки.
- Монотонность функции в данных точках.

Функции для сплайнов (Python)

- spl = **splrep(x, y)** {получить коэффициенты кубического сплайна}
- y2 = **splev(x2, spl)** {восстановить по ним функцию}

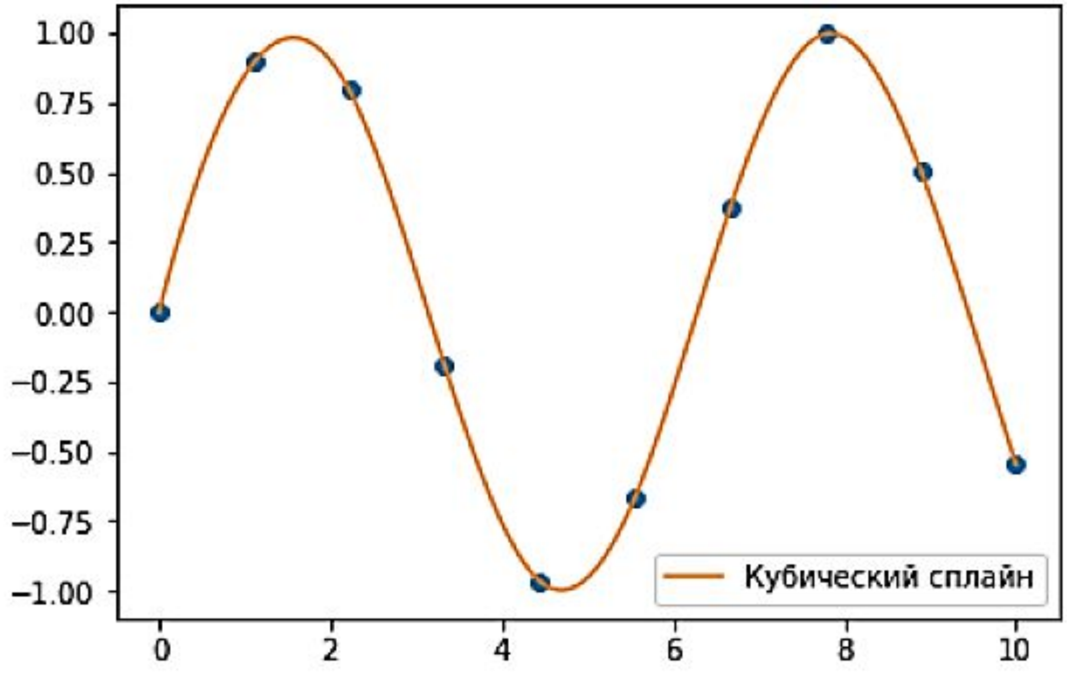
- f2 = **Akima1DInterpolator(sx, y)** {Сплайн Акима}

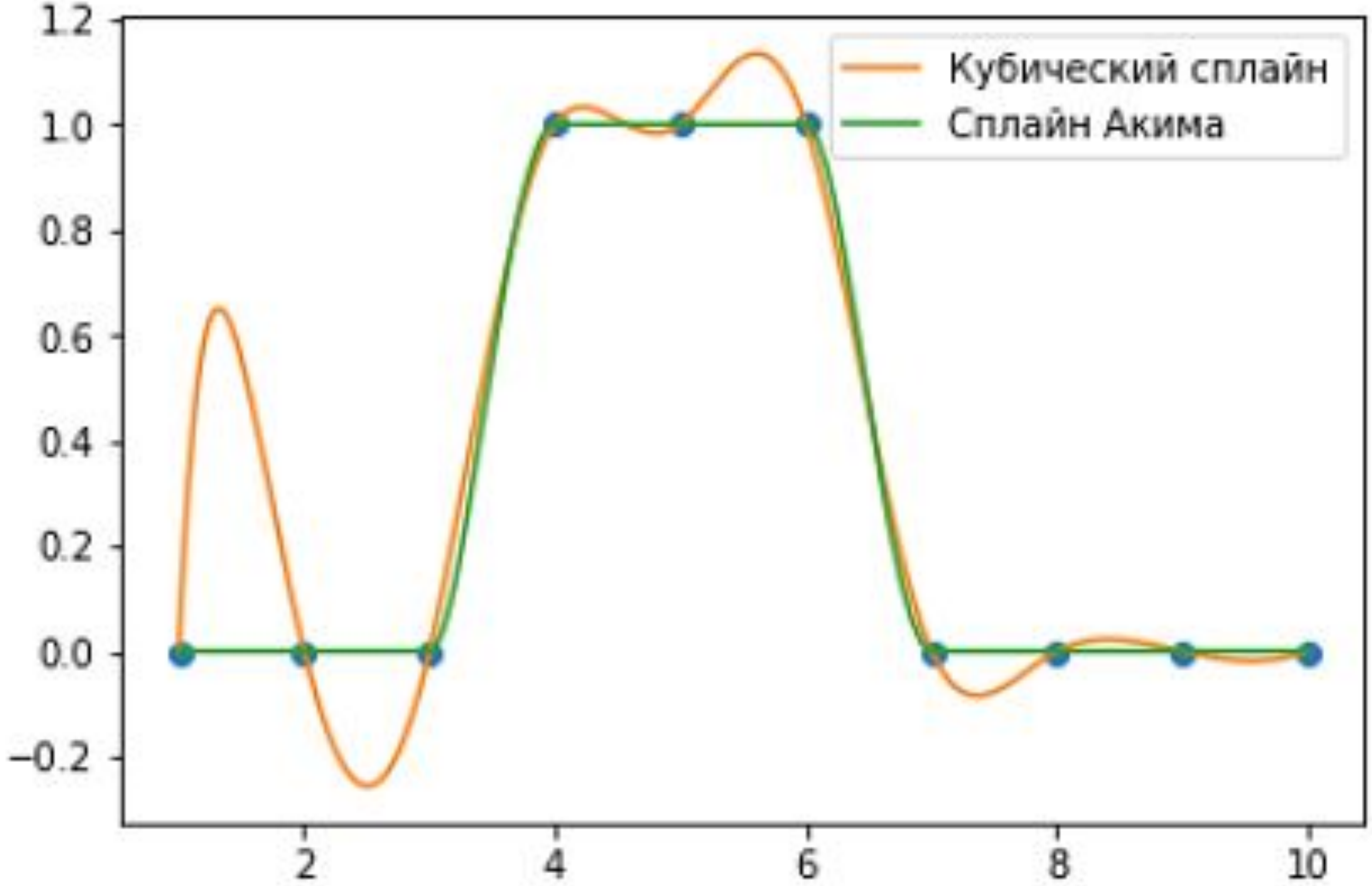
In [22]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(0, 10, 10)
y = np.sin(x)
plt.plot(x,y, marker="o", ls="")

plt.show()
```

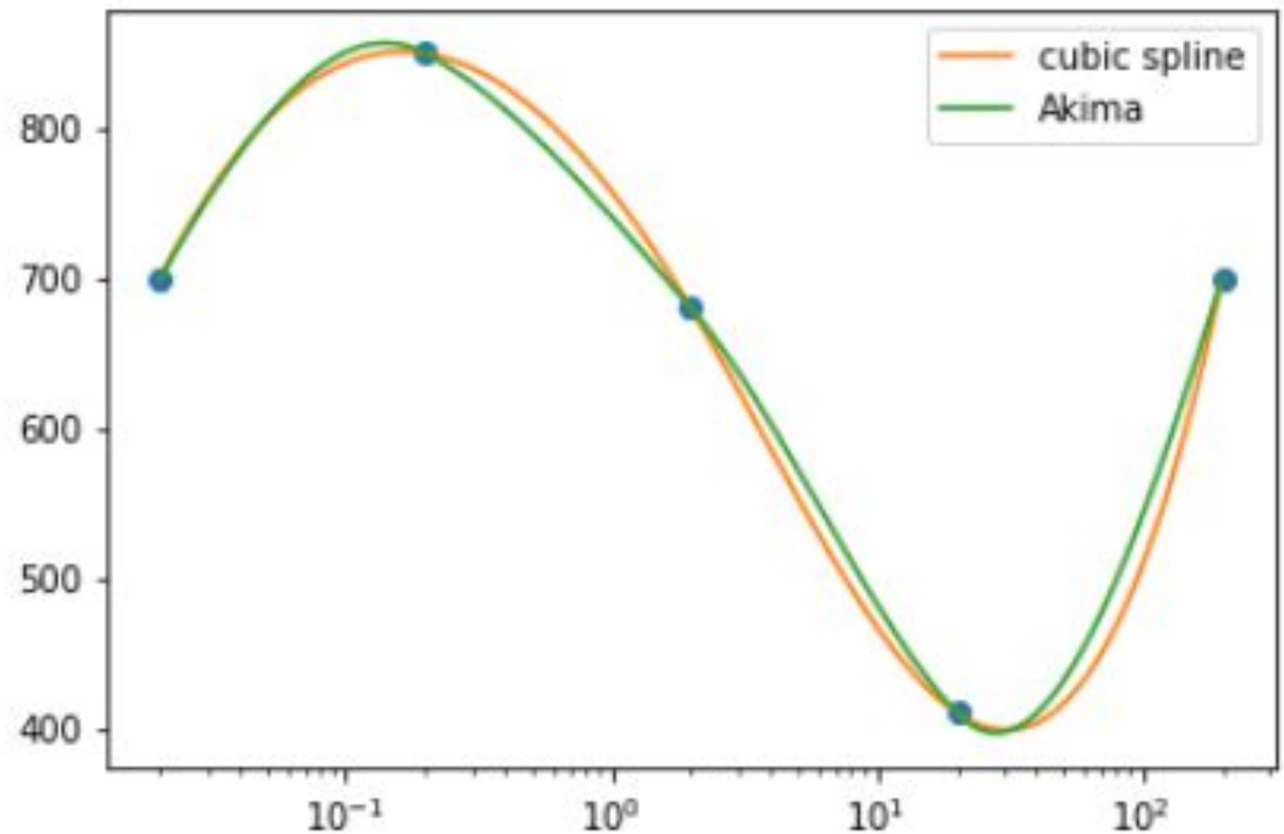


Интерполяция. Сплайны

$$y_i = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$$




1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
2
4
6
8
10
Кубический сплайн
Сплайн Акима


cubic spline
Akima
800
700
600
500
400
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}

Статья по Акима-сплайнам:
http://www.leg.ufpr.br/lib/exe/fetch.php/wiki:internas:biblioteca:akima.pdf

Изученные темы:

- Производная: практика.
- Исследование функций.
- Интерполяция. Сплайны.

Ваши вопросы

Домашнее задание

№1. Найти длину x и ширину y прямоугольника при заданном периметре P=144 см, при которых данный прямоугольник имеет наибольшую площадь S.

№2. найти экстремумы функций (если они есть)

$$y = |2x|$$

$$y = x^3$$

$$y = e^{3x}$$

$$y = x^3 - 5x$$

Спасибо за внимание!