GeekBrains

Функция. Предел функции. (часть 2)

Введение в математический анализ

План вебинара

1. Разбор ДЗ – ключевые моменты.
2. Вычисление пределов:

+ пределы, сводящиеся к 1-му замечательному пределу (часть 2).

+пределы, сводящиеся ко 2-му замечательному пределу.

3. Производные функции одной переменной.

+ определение производной;

+ вычисление производных.

Задача 1

Как относятся друг к другу множество и последовательность? (в ответе использовать слова типа: часть, целое, общее, частное, родитель, дочерний

Последовательность - отображение множества натуральных чисел: f: N □X

(Каждому натуральному числу соответствует элемент данного множества)

Задача 1

Последовательность – это набор элементов некоторого множества, для каждого натурального числа можно указать элемент данного множества.

(частный случай)

Если множество – это коробка с бусинами, то последовательность – нить бус.

Задание

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = 2^n - n$$

$$\{b_n\}_{n=2}^{\infty} = \frac{1}{1-n}$$

$$\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = -1^n + \sqrt{2n}$$

$$\{d_n\}_{n=1}^{\infty} = (-1)^{2n} + \frac{1}{n^2}$$

Даны 4 последовательности.

Необходимо:
1) исследовать их на монотонность;
2) исследовать на ограниченность;
3) найти пятый по счету член.

Задание

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = 2^n - n$$

$$\{b_n\}_{n=2}^{\infty} = \frac{1}{1-n}$$

$$\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = -1^n + \sqrt{2n}$$

$$\{d_n\}_{n=1}^{\infty} = (-1)^{2n} + \frac{1}{n^2}$$

Даны 4 последовательности.

Необходимо:
1) исследовать их на монотонность;
2) исследовать на ограниченность;
3) найти пятый по счету член.

a) [1;+□) b) [-1;0) c) [2^(1/2)-1;+□) d) (1;2]

a(n+1) – a(n) = 2^(n+1) - (n+1) – (2^n – n) = 2^(n+1) – n – 1 – 2^n + n = 2*2^n – 2^n – 1 = 2^n – 1 > 0 (для всех натуральных n)

Хорошая идея – построить график:
https://www.wolframalpha.com/input/?i=plot+%281%2F%281-x%29%29+

2. Найти 12-й член заданной неявно последовательности

$$a_1 = 128, a_{n+1} - a_n = 6$$

a12 = a1 + 11(a(n+1)-a(n)) = 128+11*6=194.

Задание 5

```
import math
def f(n)
    return n/math.factorial(n)**(1/n)      #подпредельное выражение
acc = 0.0000001                            #точность
i = 2
while f(i) - f(i-1) > acc:
    i = i + 1                              #тут можно прибавлять не по одному...
print(f(i))
```

Задание 5

5) *На языке Python предложить алгоритм вычисляющий численно предел lim n / n!^(1/n), n->oo с точностью 10**-7

In [13]:
```python
# Используем лемму Штольца и оцениваем последовательность 1 / [n!^(1/n) - (n-1)!^(1/(n-1))]
n = 1
s2 = 1
for i in range(10**7-1):
    s = s2
    n += 1
    s2 = n**(1/n) * s**((n-1)/n)
    if n%(5*10**5) == 0:
        print(1/(s2 - s))
print()
1/(s2 - s), n
```

```
2.7182791095042833
2.7182804705526538
2.718280921296734
2.7182811466688306
2.718281285160862
2.7182813823633527
2.7182814356956957
2.7182814941892355
2.7182815199952097
2.718281559564371
2.7182815870907446
2.718281609455924
2.7182816128967207
2.7182816438638926
2.7182816576270805
2.718281664508674
2.7182816851534564
2.718281671390268
2.718281671390268
2.718281667949471
```

Out[13]: (2.718281667949471, 10000000)

Теорема Штольца

Пусть a_n и b_n - две последовательности вещественных чисел, причём b_n положительна, не ограничена и строго возрастает (хотя бы начиная с некоторого члена). Тогда, если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}},$$

то существует и предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n},$$

причём эти пределы равны.

Формула Стирлинга

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1,$$

что эквивалентно

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Функция limit библиотеки sympy

```
%%time
from sympy import limit, oo

lim = limit(n/pow(factorial(n), 1/n), n, oo)
print(lim)
```

```
2.71698842372422
```

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(mx)}{\sin(nx)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Первый замечательный предел

$$\frac{\sin(mx)}{\sin(nx)} = \frac{m}{n}\frac{\frac{\sin(mx)}{mx}}{\frac{\sin(nx)}{nx}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(mx)}{\sin(nx)} =$$

$$= \frac{m}{n} \cdot \frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(mx)}{mx}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(nx)}{nx}}$$

$$= \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{1} = \frac{m}{n}$$

Таблица эквивалентностей

Пусть $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$. Тогда при $x \to x_0$

$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$	$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
$\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$	$\log_a(1+\alpha(x)) \sim \dfrac{\alpha(x)}{\ln a}$
$\mathrm{tg}\, \alpha(x) \sim \alpha(x)$	$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$
$\mathrm{arctg}\, \alpha(x) \sim \alpha(x)$	$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a$
$1 - \cos \alpha(x) \sim \dfrac{\alpha^2(x)}{2}$	$\sqrt[n]{1+\alpha(x)} - 1 \sim \dfrac{\alpha(x)}{n}$

Первый замечательный предел

$$21.\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin^2 3x}{4x\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{3}}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

Первый замечательный предел

$$21.\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin^2 3x}{4x\operatorname{tg}\frac{x}{3}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{1\cdot 3^2}{4\cdot\frac{1}{3}}=\frac{27}{4}$$

$$22.\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\frac{x}{3}}{6x\sin\frac{x}{2}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2}{6\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{54}$$

$$23.\ \lim_{x\to 0}\frac{3x\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\cos^2 6x\sin^2 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

Первый замечательный предел

$$21.\ \lim_{x\to0}\frac{\cos x\sin^2 3x}{4x\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{3}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{1\cdot3^2}{4\cdot\frac{1}{3}}=\frac{27}{4}$$

$$22.\ \lim_{x\to0}\frac{1-\cos\frac{x}{3}}{6x\sin\frac{x}{2}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2}{6\cdot\frac{1}{2}}=\frac{2}{27}$$

$$23.\ \lim_{x\to0}\frac{3x\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{\cos^2 6x\sin^2 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{3\cdot\frac{1}{2}}{1\cdot2^2}=\frac{3}{8}$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = (1^{\infty}) = e$$

$$\lim_{x\to\infty} U(x)^{V(x)}$$

$$\lim_{x\to\infty} U(x) = 1 \qquad \lim_{x\to\infty} V(x) = \infty$$

Второй замечательный предел

$$24.\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)} =$$

Второй замечательный предел

$$24.\ \lim_{x \to 0} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)} = \left(\frac{1}{2} \right)^{1} = \frac{1}{2}$$

$$25.\ \lim_{x \to 1} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)} =$$

Второй замечательный предел

$$24.\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$$

$$25.\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{1/(1+\sqrt{x})} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$26.\ \lim_{x\to \infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)} =$$

Второй замечательный предел

$$24.\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$$

$$25.\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{1/(1+\sqrt{x})} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$26.\ \lim_{x\to \infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)} = (1)^{0} = 1$$

Второй замечательный предел

$$27.\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5}{3x-2}\right)^{\frac{6x^2-13}{3x}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{3x-2}\right)^{\frac{6x^2-13}{3x}} =$$

Второй замечательный предел

$$27.\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5}{3x-2}\right)^{\frac{6x^2-13}{3x}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{3x-2}\right)^{\frac{6x^2-13}{3x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{3x-2}\right)^{\frac{3x-2}{7}\cdot\frac{7}{3x-2}\cdot\frac{6x^2-13}{3x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7}{3x-2}\cdot\frac{6x^2-13}{3x}} =$$

Второй замечательный предел

$$27.\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5}{3x-2}\right)^{\frac{6x^2-13}{3x}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{3x-2}\right)^{\frac{6x^2-13}{3x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{3x-2}\right)^{\frac{3x-2}{7}\cdot\frac{7}{3x-2}\cdot\frac{6x^2-13}{3x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7}{3x-2}\cdot\frac{6x^2-13}{3x}} =$$

$$= e^{\frac{7\cdot 6}{3\cdot 3}} = e^{\frac{14}{3}}$$

$$\lim_{x\to\infty} U(x)^{V(x)} = (1^{\infty}) = e^{\lim\limits_{x\to\infty}(U(x)-1)\cdot V(x)}$$

Следствия второго замечательного предела

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = (1^{\infty}) = e$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1^{\infty}) = e$$

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = (\infty\cdot 0) = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1$$

Следствия второго замечательного предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1 \qquad y=x-2$$

$$28.\ \lim_{x\to 2}\frac{\ln x-\ln 2}{x-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(y+2)-\ln 2}{y}=$$

Следствия второго замечательного предела

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1 \qquad y = x - 2$$

$$28.\ \lim_{x \to 2} \frac{\ln x - \ln 2}{x - 2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{y \to 0} \frac{\ln(y+2) - \ln 2}{y} =$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{y}{2}\right)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{y}{2}\right)}{2 \cdot \frac{y}{2}} = \frac{1}{2}$$

Пределы функции. Разбор ДЗ

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x^2+\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln x^{10}+\ln\left(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln|x|}{10\ln|x|}=\frac{1}{5}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{5^x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(5^x-1)'}{x'}=\lim_{x\to0}\frac{5^x\ln 5}{1}=\ln 5$$

Выводы по пределам функций

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \sim (\infty - \infty)$$

$$(1^{\infty})$$

$$\left(\frac{0}{0}\right) \sim (\infty \cdot 0)$$

Блиц (пределы)

- $$\lim_{x\to 8} x^2 =$$
  $$\lim_{x\to\infty} x^2 =$$

Блиц

- $$\lim_{x\to 1}\frac{sinx}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} =$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{sinx}{x} =$$

Блиц

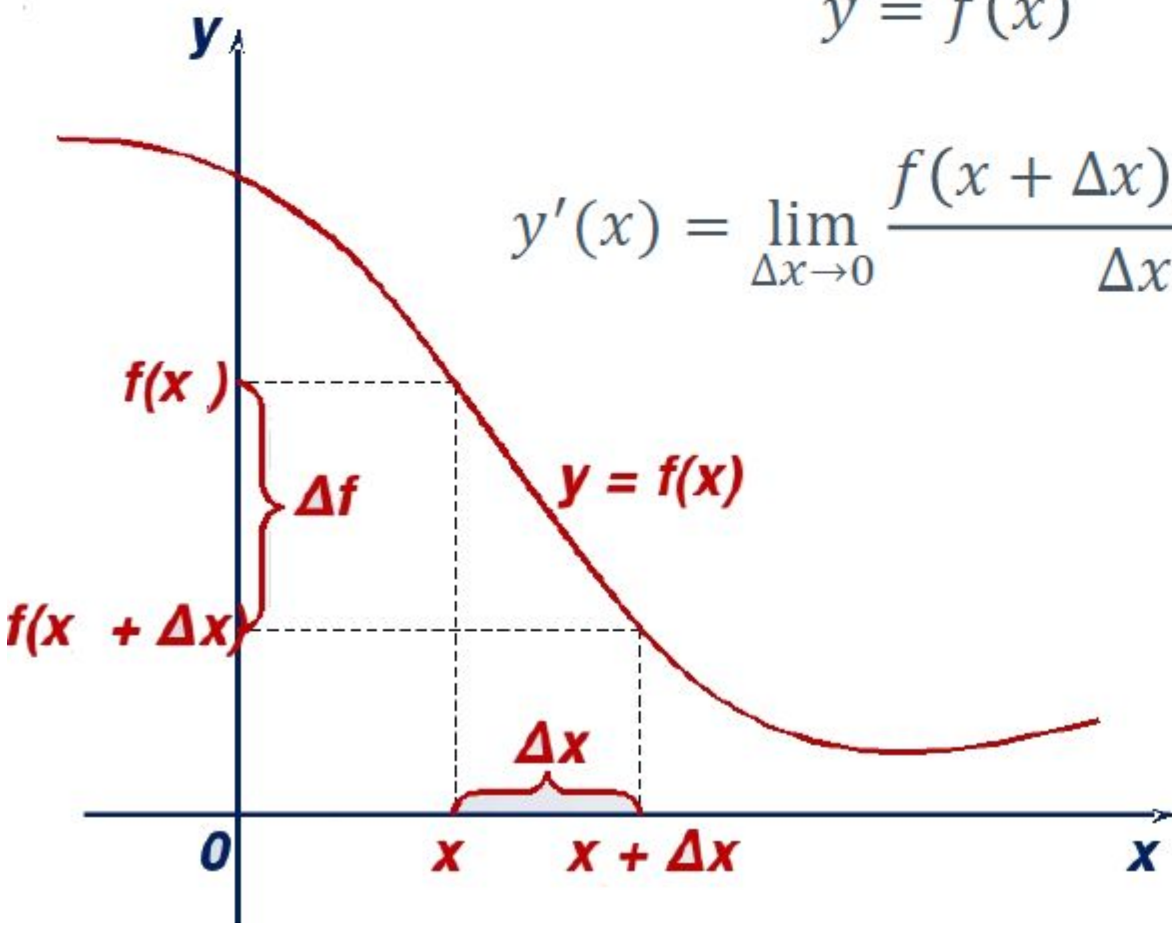
- $$\lim_{x\to 0} \frac{x}{lnx}$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x}{lnx}$$

Определение производной функции

$$y = f(x)$$

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Производная степенной функции y=x^2 (по определению)

$$(x^2)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Источник: «Матан. Краткий курс в комиксах»
Ларри Гоник, с. 46

Доказать:

Производная синуса

$$\frac{d}{d\theta}\sin\theta = \cos\theta$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.
По определению производной, производная синуса равна

$$(1)\qquad \lim_{h\to 0}\frac{\sin(\theta+h)-\sin\theta}{h},$$

если такой предел существует.

Разложим $\sin(\theta+h)$ с помощью тригонометрических тождеств. Числитель превращается в

$$(\sin\theta\cos h + \sin h\cos\theta) - \sin\theta$$

Тогда выражение (1) превратится в

$$(2)\qquad \cos\theta\,\frac{\sin h}{h} + \sin\theta\,\frac{\cos h - 1}{h}$$

В предыдущей главе мы показали, что

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1,$$

поэтому при $h\to 0$ (2) превращается в

$$(3)\qquad \cos\theta + (\sin\theta)\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h}$$

Теперь покажем, что последний множитель равен нулю.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

Поскольку

$$\frac{\cos h - 1}{h} = \left(\frac{\cos h - 1}{h}\right)\left(\frac{\cos h + 1}{\cos h + 1}\right) =$$

$$= \frac{\cos^2 h - 1}{h((\cos h) + 1)} = \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} =$$

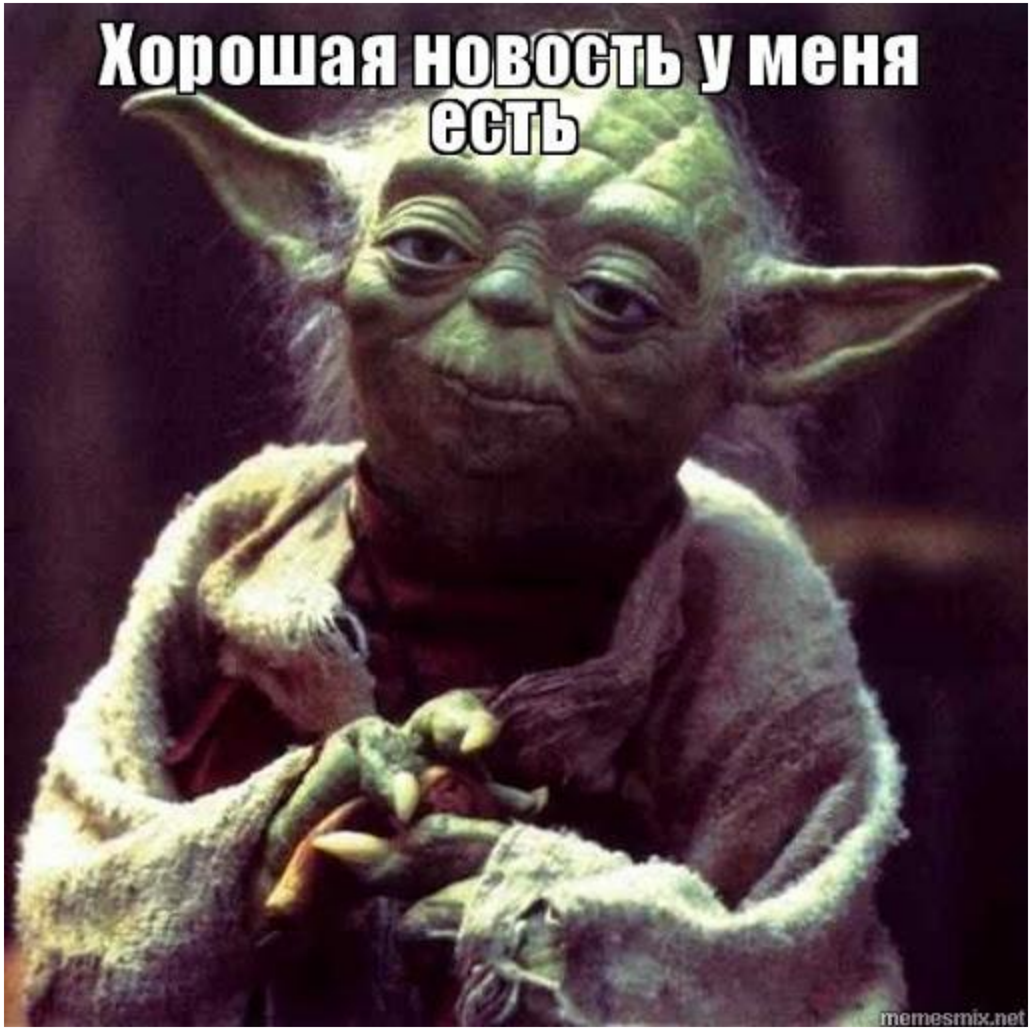
$$= \left(\frac{-\sin h}{h}\right)\left(\frac{\sin h}{\cos h + 1}\right)$$

при $h\to 0$ $\cos h$ стремится к 1, следовательно, предел произведения будет равен

$$(-1)\left(\frac{0}{2}\right) = 0 \text{ при при } h\to 0$$

Подставив это в (3), получаем результат:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(\theta+h)-\sin\theta}{h} = \cos\theta$$



К счастью для нас существует связь между типом функции и ее производной. Поэтому поиск производных не сводится к рутинному поиску предела.

Для поиска производных явных функций достаточно знать таблицу производных. А так же три дополнительных правила, которые обсудим чуть позже.

Смысл производной

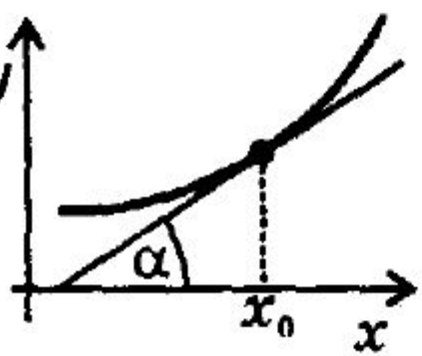
Физический

Мгновенная скорость изменения функции в момент времени x.

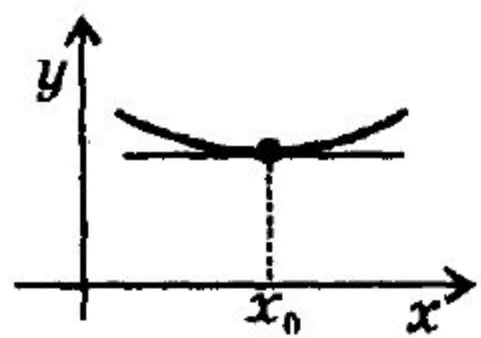
Геометрический

Тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.

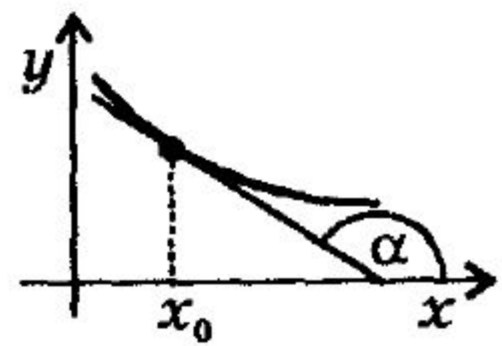
Геометрический смысл



$$f'(x_0) = \mathrm{tg}\,\alpha > 0$$



$$f'(x_0) = \mathrm{tg}\,\alpha = 0$$



$$f'(x_0) = \mathrm{tg}\,\alpha < 0$$

Таблица производных

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$

2. $(\sin x)' = \cos x$

3. $(\cos x)' = -\sin x$

4. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos x^2}$

5. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin x^2}$

6. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

7. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

8. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$

9. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

10. $(a^x)' = a^x \ln a$

11. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ $\quad (a > 0, a \neq 1)$

$a' = 0$, где a — константа

Производная произведения функций

$$(u(x)\cdot v(x))' = u(x)' \cdot v(x) + v(x)' \cdot u(x)$$

$$(lnx \cdot e^{x})' =$$

$$(x \cdot \sin x)' =$$

Производная произведения функций

$$(u(x) \cdot v(x))' = u(x)' \cdot v(x) + v(x)' \cdot u(x)$$

$$(lnx \cdot e^{x})'$$

$$(x \cdot \sin x)' = \sin x + x \cdot \cos x$$

Производная частного функций

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u(x)' \cdot v(x) - v(x)' \cdot u(x)}{v^2(x)}$$

$$(tgx)' =$$

$$\left(\frac{x}{\sin x}\right)' =$$

Производная частного функций

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u(x)' \cdot v(x) - v(x)' \cdot u(x)}{v^2(x)}$$

$$(tgx)' =$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u(x)' \cdot v(x) - v(x)' \cdot u(x)}{v^2(x)}$$

$$\left(\frac{x}{\sin x}\right)' = \frac{\sin x - x \cdot \cos x}{\sin^2 x}$$

Производные сложных функций

$$y = f\big(g(x)\big)$$
$$y' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

$$y = f\Big(g\big(h(x)\big)\Big)$$
$$y' = f'\Big(g\big(h(x)\big)\Big) \cdot g'\big(h(x)\big) \cdot h'(x)$$

$$y = f\Big(g\big(h(x)\big) + p(x)\Big)$$
$$y' = f'\Big(g\big(h(x)\big)\Big) \cdot \Big(g'\big(h(x)\big) \cdot h'(x) + p'(x)\Big)$$

Производная функции

1. $(\sin(2x+1))' = \cos(2x+1)\cdot 2$

2. $(\sin(x^2+2x+1))' = \cos(x^2+2x+1)\cdot(2x+2)$

3. $(\sin^3(x^2+2x+1))' =$

$$= 3\sin^2(x^2+2x+1)\cdot\cos(x^2+2x+1)\cdot(2x+2)$$

Производная функции

4. $(\ln(\sin^3(x^2 + 2x + 1) + 1))' =$

$$= \frac{1}{\sin^3(x^2 + 2x + 1) + 1} \cdot 3\sin^2(x^2 + 2x + 1) \cdot$$

$$\cdot \cos(x^2 + 2x + 1) \cdot (2x + 2)$$

Производная функции

5. $$\left(\left(\left((x^2+1)^2+1\right)^2+1\right)^2\right)' =$$

$$= 2\left(\left((x^2+1)^2+1\right)^2+1\right) \cdot 2\left((x^2+1)^2+1\right) \cdot$$
$$\cdot\, 2(x^2+1) \cdot 2x$$

6. $$\left(e^{e^x} + x^{e^e} + e^{x^e}\right)' = e^{e^x} \cdot e^x + e^e x^{e^e-1} + e^{x^e} \cdot e x^{e-1}$$

7. $$(x^x)' = \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x\ln x} \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1)$$

Замечания

$$(x^2)' = 2x$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)' = \left((x+1)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{(x+1)^3}}$$

Замечания

$$\sqrt{(-3)^2} = 3$$

$$\sqrt{3^2} = 3$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$\sqrt{x^4} = x^2$$

$$\sqrt{x^6} = |x^3|$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\ln 3x)' = (\ln 3 + \ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\ln x^3)' = (3 \ln x)' = \frac{3}{x}$$

$$\left(\ln \frac{\sin x \cdot (x+1)^3}{(x-4)^5}\right)' = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{3}{x+1} - \frac{5}{x-4}$$

$$\log_b a^n = n \log_b a \qquad \log_{b^k} a = \frac{1}{k} \log_b a$$

$$\log_b a + \log_b c = \log_b (a \cdot c) \qquad \log_b a - \log_b c = \log_b \frac{a}{c}$$

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b} \qquad \frac{\log_c a}{\log_c b} = \log_b a$$

Ваши вопросы:

Спасибо!