

# Производные функции нескольких переменных (часть 1)

Введение в математический анализ

# План

0.1) Разберём ДЗ.

-

1. Несколько слов о математическом моделировании.
2. Функции 2-х переменных; функции многих переменных.
3. Частные производные, дифференциалы функций.
4. Экстремум функции 2-х переменных.

-

6. Аппроксимация. МНК.

# Разбор ДЗ по теме «Производные одной переменной»

## Задание 1

$$\begin{aligned} (\sin x \cdot \cos x)' &= \sin x' \cos(x) + \cos x' \sin x = \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x \end{aligned}$$

## Задание 2

$$\left( \ln(2x + 1)^3 \right)' = (2x + 1)^{-3} \cdot 3 \cdot (2x + 1)^2 \cdot 2 = \frac{6}{2x+1}$$

$$\left( \ln(2x + 1)^3 \right)' = 3 \left( \ln(2x + 1) \right)' = \frac{6}{2x+1}$$

## Задание 4

$$\left( \frac{x^4}{\ln(x)} \right)' = \frac{4x^3 \ln(x) - x^3}{\ln^2(x)}$$

# Функции многих переменных. Где применяется математическое моделирование?

модели потребительского выбора, фирмы  
(производственные функции);  
экономического роста; равновесия на  
товарных, факторных и финансовых  
рынках и т. д.

# Математическое моделирование – зачем?

- Упрощённо описать реальность.
  - Учесть ключевые факторы.
  - Принять решение.
- 
- Математическая модель – основа для принятия решения.

# Задачи математического программирования

Решают: проблему выбора, оптимизации.

У истоков: Канторович, Кун, Таккер.

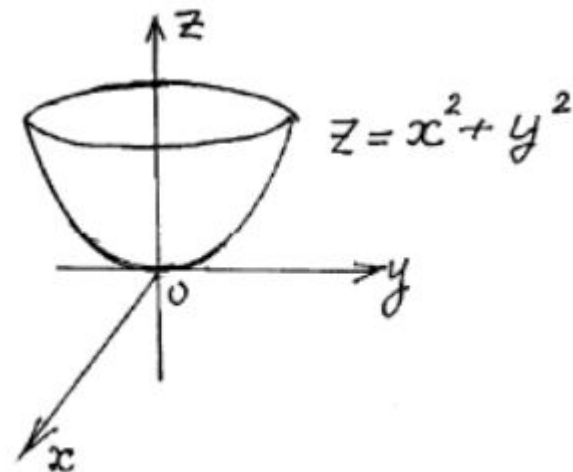
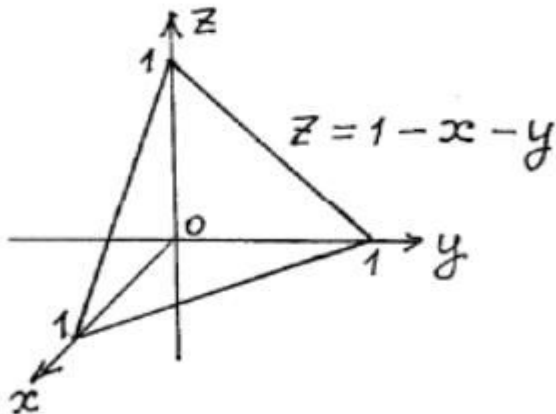


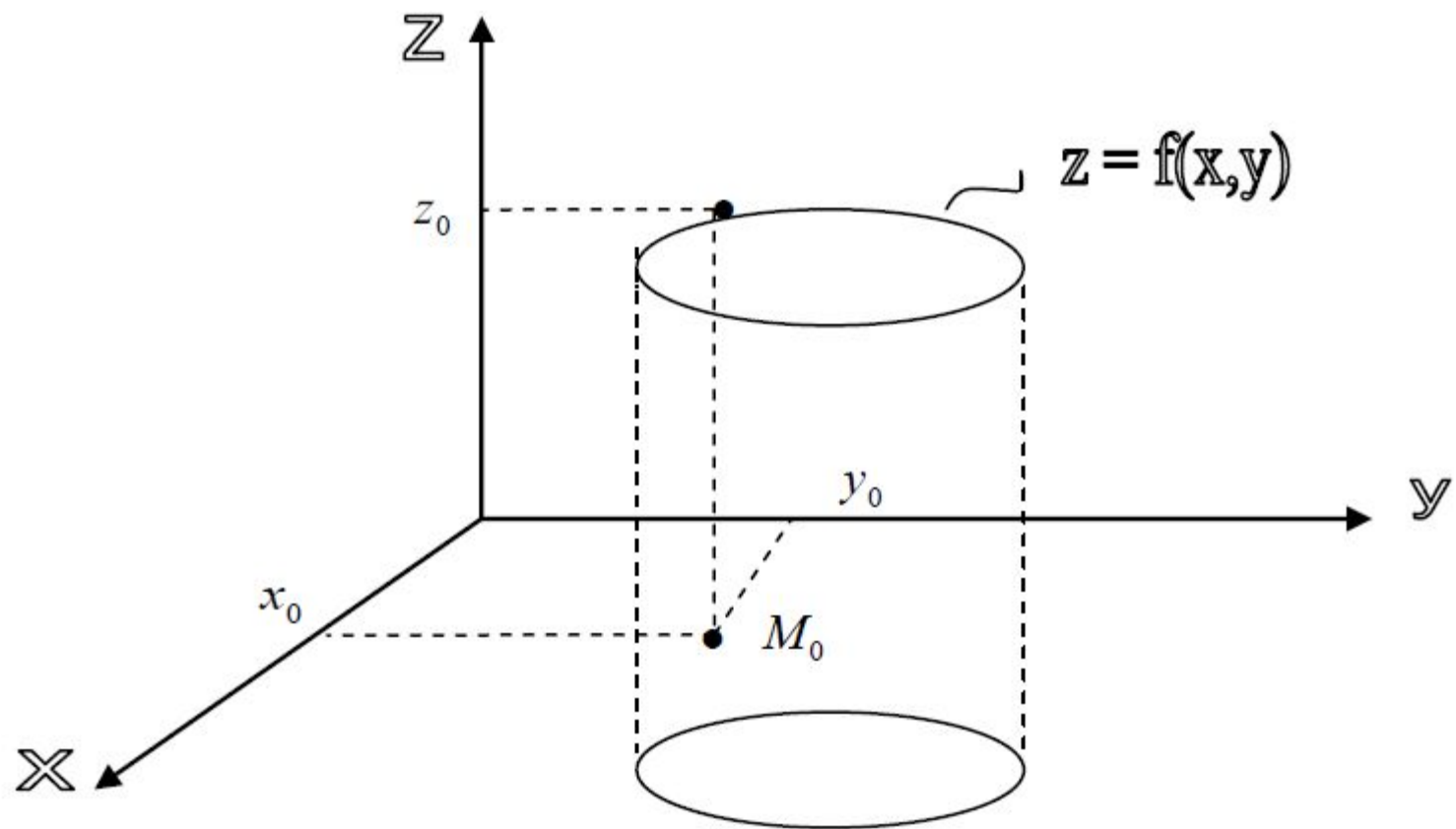
# Функция 2-х переменных: определение.

Если каждой паре независимых друг от друга переменных  $X, Y$  из некоторого множества  $D$  ставится в соответствие переменная величина  $Z$ , то  $Z$  называется **функцией двух переменных**.

$$Z = f(x, y) \text{ или } Z = z(x, y)$$

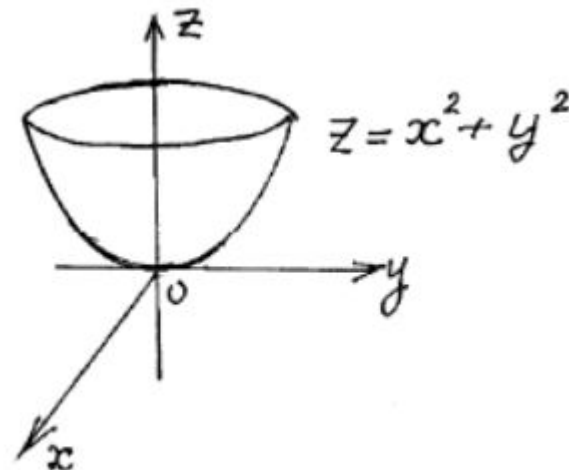
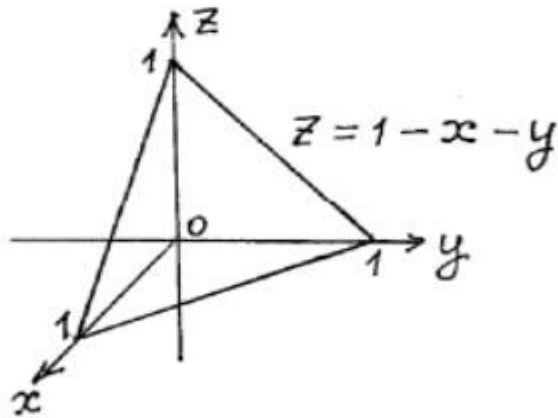
График функции - поверхность



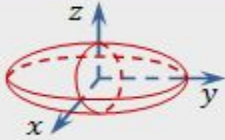
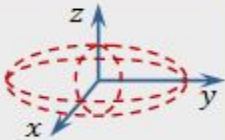
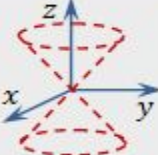
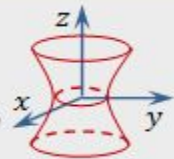
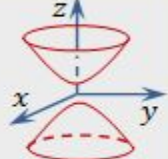
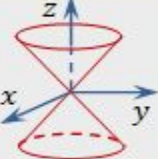
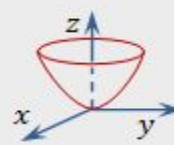
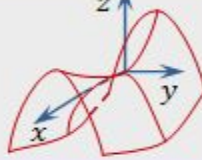
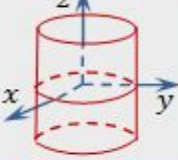
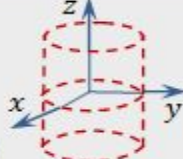
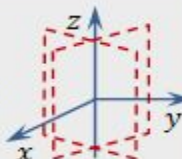
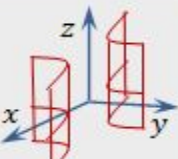
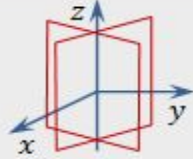
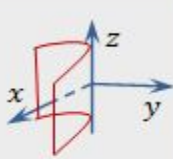
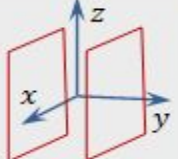
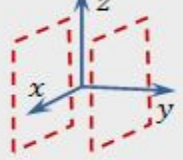
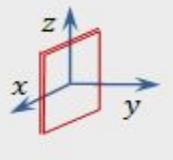


# Область определения функции 2-х переменных $D(x; y)$

Для функции двух переменных множество  $D$  представляет собой множество точек координатной плоскости  $xOy$ . В частном случае, это будет часть плоскости  $xOy$ .



# Примеры поверхностей 2-го порядка

1.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Уравнение эллипсоида	
2.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ Уравнение мнимого эллипсоида	
3.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ Уравнение мнимого конуса	
4.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ Уравнение однополостного гиперболоида	
5.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ Уравнение двуполостного гиперболоида	
6.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ Уравнение конуса	
7.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ Уравнение эллиптического параболоида	
8.	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ Уравнение гиперболического параболоида	
9.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Уравнение эллиптического цилиндра	
10.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ Уравнение мнимого эллиптического цилиндра	
11.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ Уравнение пары мнимых пересекающихся плоскостей	
12.	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Уравнение гиперболического цилиндра	
13.	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ Уравнение пары пересекающихся плоскостей	
14.	$y^2 = 2px$ Уравнение параболического цилиндра	
15.	$y^2 - b^2 = 0$ Уравнение пары параллельных плоскостей	
16.	$y^2 + b^2 = 0$ Уравнение пары мнимых параллельных плоскостей	
17.	$y^2 = 0$ Уравнение пары совпадающих плоскостей	
<p>Для всех уравнений <math>a &gt; 0, b &gt; 0, c &gt; 0, p &gt; 0</math>            Для уравнений 1 и 2 <math>a \geq b \geq c</math>            Для уравнений 3,4,5,6,7,9,10 <math>a \geq b</math></p>		

# Пример

Найти область определения функции

$$z = \arccos(x^2 + y^2).$$

# Пример

Найти область определения функции

$$z = \arccos(x^2 + y^2).$$

**Арккосинус** ( $y = \arccos x$ ) – это функция, обратная к косинусу ( $x = \cos y$ ). Он имеет область определения  $-1 \leq x \leq 1$  и множество значений  $0 \leq y \leq \pi$ .

$$\cos(\arccos x) = x \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$\arccos(\cos x) = x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$



# Пример

Найти область определения функции

$$z = \arccos(x^2 + y^2).$$

**Арккосинус** ( $y = \arccos x$ ) – это функция, обратная к косинусу ( $x = \cos y$ ). Он имеет область определения  $-1 \leq x \leq 1$  и множество значений  $0 \leq y \leq \pi$ .

$$\cos(\arccos x) = x \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$\arccos(\cos x) = x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

$D(x; y)$

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

Круг радиуса 1 в центре с началом координат

# Функция многих переменных: определение.

Если каждой совокупности независимых друг от друга переменных  $x, y, z, \dots, t$  из некоторого множества  $D$  ставится в соответствие определенное значение переменной величины  $W$ , то  $W$  называется функцией  $n$  переменных.

$$W = W(x, y, z, \dots t)$$



# Частные производные 1-го порядка

$$z = f(x, y)$$

$\Delta x$  - «дельта икс», приращение переменной  $x$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Этот предел называется *частной производной* (первого порядка) данной функции по переменной  $x$  в точке  $(x, y)$  и обозначается

$\frac{\partial z}{\partial x}$  или  $f'_x(x, y)$ . Точно так же определяется частная производная

этой функции по переменной  $y$  и обозначается  $\frac{\partial z}{\partial y}$  или  $f'_y(x, y)$ .

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Определение  
производной функции  
одной переменной  
(для сравнения)

# Вычисление частных производных

Частные производные вычисляются по обычным правилам и формулам дифференцирования, при этом все переменные, кроме одной, рассматриваются как постоянные («замораживаются»).

## Физический смысл

Частные производные показывают скорость изменения функции по направлению роста оси.  $U'_x$  - по оси  $X$ ,  $U'_y$  - по оси  $Y$  и т.д..

# Сравнение с неявными функциями

$$F(x, y(x)) = 0$$

$$x^3 + y^3 + \cos y \cdot \sin^4 x = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' - \sin y \cdot y' \cdot \sin^4 x + \cos y \cdot 4\sin^3 x \cdot \cos x = 0$$

$$(3y^2 - \sin y \cdot \sin^4 x) \cdot y' = -\cos y \cdot 4\sin^3 x \cdot \cos x - 3x^2$$

$$y' = -\frac{\cos y \cdot 4\sin^3 x \cdot \cos x + 3x^2}{3y^2 - \sin y \cdot \sin^4 x}$$

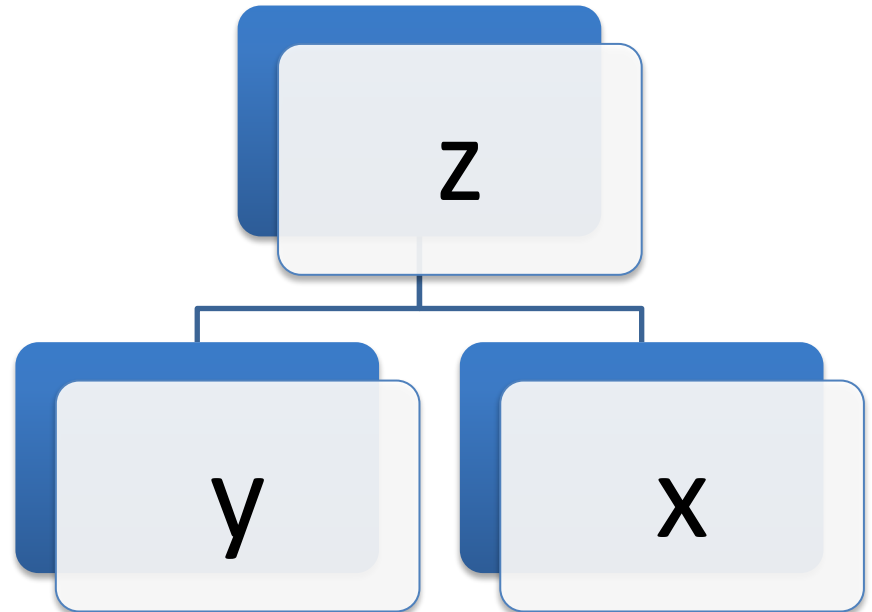
В случае неявной функции  $y$  зависит от  $x$ :  $y(x)$   
В случае функции нескольких переменных – нет:  $z(x, y)$

# Разница между неявными функциями и функциями нескольких переменных

Неявная функция



Функция двух переменных



**Вычислить:**

$$z = x^2y^3 + 4x^3y^2 + 5x - 4y + 1.$$

# Вычисление частных

производных

$$z = x^2 y^3 + 4x^3 y^2 + 5x - 4y + 1.$$

$$z = x^2 y^3 + 4x^3 y^2 + 5x - 4y + 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^3 \cdot 2x + 4y^2 \cdot 3x^2 + 5$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = 2xy^3 + 12x^2y^2 + 5$$

$$z = x^2y^3 + 4x^3y^2 + 5x - 4y + 1.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} =$$

$$z'_y = 3x^2y^2 + 8x^3y - 4$$



# Частный дифференциал функции многих переменных $W(x,y,z)$

Частным дифференциалом функции многих переменных называется величина, обозначаемая  $d_x W$  и равная произведению соответствующей частной производной на приращение соответствующей независимой переменной, то есть

$$\begin{aligned}d_x W &= W'_x \Delta x \\d_y W &= W'_y \Delta y \\d_z W &= W'_z \Delta z\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}d_x W &= W'_x dx \\d_y W &= W'_y dy \\d_z W &= W'_z dz\end{aligned}$$

$dx$  – «дифференциал икс» - произвольное бесконечно малое приращение переменной величины

# Полный дифференциал функции многих переменных $W(x,y,z)$

Полным дифференциалом функции многих переменных называется величина, равная сумме всех ее частных дифференциалов, то есть

$$dW = d_x W + d_y W + d_z W$$

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz$$

# Полный дифференциал функции многих переменных $W(x,y,z)$

Полным дифференциалом функции многих переменных называется величина, равная сумме всех ее частных дифференциалов, то есть

$$dW = d_x W + d_y W + d_z W$$

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz$$

$$W = \sin(2x) + x \cdot \cos(5y) - tg(7z)$$

$$dW =$$

$$dW(0;0;0) =$$

$$W = \sin(2x) + x \cdot \cos(5y) - \operatorname{tg}(7z)$$

$$dW =$$

$$dW(0;0;0) =$$

$$W = \sin(2x) + x \cdot \cos(5y) - \operatorname{tg}(7z)$$

$$dW =$$

$$dW(0;0;0) =$$

$$dW = W'(x)dx + W'(y)dy + W'(z)dz$$

$$dW = (2\cos(2x) + \cos(5y))dx - 5x\sin(5y)dy - (7/(\cos(7z))^2)dz$$

$$dW(0;0;0) = 3dx - 7dz$$

$$dW (0;0;0) = 3dx-7dz$$

## Интерпретация

В точке (0;0;0) при бесконечно малых приращениях  $x$ ,  $y$  и  $z$  главную часть приращения функции  $W$  можно вычислить по формуле.

# Частные производные 2-го

порядка

$$z = \ln(xy) + xy^2$$

1-е производные:  $z'_x = \frac{1}{xy} \cdot y + y^2 = \frac{1}{x} + y^2$

$$z'_y = \frac{1}{xy} \cdot x + 2xy = \frac{1}{y} + 2xy$$

# Частные производные 2-го

порядка

$$z = \ln(xy) + xy^2$$

1-е производные:  $z'_x = \frac{1}{xy} \cdot y + y^2 = \frac{1}{x} + y^2$

$$z'_y = \frac{1}{xy} \cdot x + 2xy = \frac{1}{y} + 2xy$$

2-е производные:  $z''_{xx} = -\frac{1}{x^2}$

$$z''_{yy} = -\frac{1}{y^2} + 2x$$

Смешанные производные:  $z''_{xy} = z''_{yx} = 2y$



$$U(x, y) = 5x^2 + 7y^3 \sin x - \ln x \cdot \operatorname{tg} y + 10y - 13$$

$$U(x, y) = 5x^2 + 7y^3 \sin x - \ln x \cdot \operatorname{tg} y + 10y - 13$$

$$U'_x = 10x + 7y^3 \cos x - \frac{\operatorname{tg} y}{x}$$

$$U'_y = 21y^2 \sin x - \frac{\ln x}{\cos^2 y} + 10$$

$$U''_{xx} = 10 - 7y^3 \sin x + \frac{\operatorname{tg} y}{x^2}$$

$$U''_{yy} = 42y \sin x - \frac{2 \ln x \cdot \sin y}{\cos^3 y}$$

$$U(x, y) = 5x^2 + 7y^3 \sin x - \ln x \cdot \operatorname{tg} y + 10y - 13$$

$$U'_x = 10x + 7y^3 \cos x - \frac{\operatorname{tg} y}{x}$$

$$U'_y = 21y^2 \sin x - \frac{\ln x}{\cos^2 y} + 10$$

$$U''_{xy} = 21y^2 \cos x - \frac{1}{x \cos^2 y}$$

$$U''_{yx} = 21y^2 \cos x - \frac{1}{x \cos^2 y}$$

$$U(x, y, z) = 3y^3z^2 + 5x^5 \ln z - \sin x \cdot \cos y + 11y - 9x + 3z - 20$$

$$U'_x = 25x^4 \ln z - \cos x \cdot \cos y - 9$$

$$U'_y = 9y^2z^2 + \sin x \cdot \sin y + 11$$

$$U'_z = 6y^3z + \frac{5x^5}{z} + 3$$

$$U(x, y, z) = 3y^3z^2 + 5x^5 \ln z - \sin x \cdot \cos y + 11y - 9x + 3z - 20$$

$$U'_x = 25x^4 \ln z - \cos x \cdot \cos y - 9$$

$$U''_{xx} = 100x^3 \ln z + \sin x \cdot \cos y$$

$$U''_{xy} = \cos x \cdot \sin y$$

$$U''_{xz} = \frac{25x^4}{z}$$

$$U(x, y, z) = 3y^3z^2 + 5x^5 \ln z - \sin x \cdot \cos y + 11y - 9x + 3z - 20$$

$$U'_y = 9y^2z^2 + \sin x \cdot \sin y + 11$$

$$U''_{yx} = \cos x \cdot \sin y$$

$$U''_{yy} = 18yz^2 + \sin x \cdot \cos y$$

$$U''_{yz} = 18y^2z$$

$$U(x, y, z) = 3y^3z^2 + 5x^5 \ln z - \sin x \cdot \cos y + 11y - 9x + 3z - 20$$

$$U'_z = 6y^3z + \frac{5x^5}{z} + 3$$

$$U''_{zx} = \frac{25x^4}{z}$$

$$U''_{zy} = 18y^2z$$

$$U''_{zz} = 6y^3 - \frac{5x^5}{z^2}$$

# Экстремум функции 2-х переменных

Точка  $M_0(x_0, y_0)$  называется **точкой максимума** для функции  $z = f(x, y)$ , если для всех точек  $M(x, y)$  из некоторой окрестности этой точки, достаточно близких к  $M_0(x_0, y_0)$ , но отличных от нее, выполняется условие:

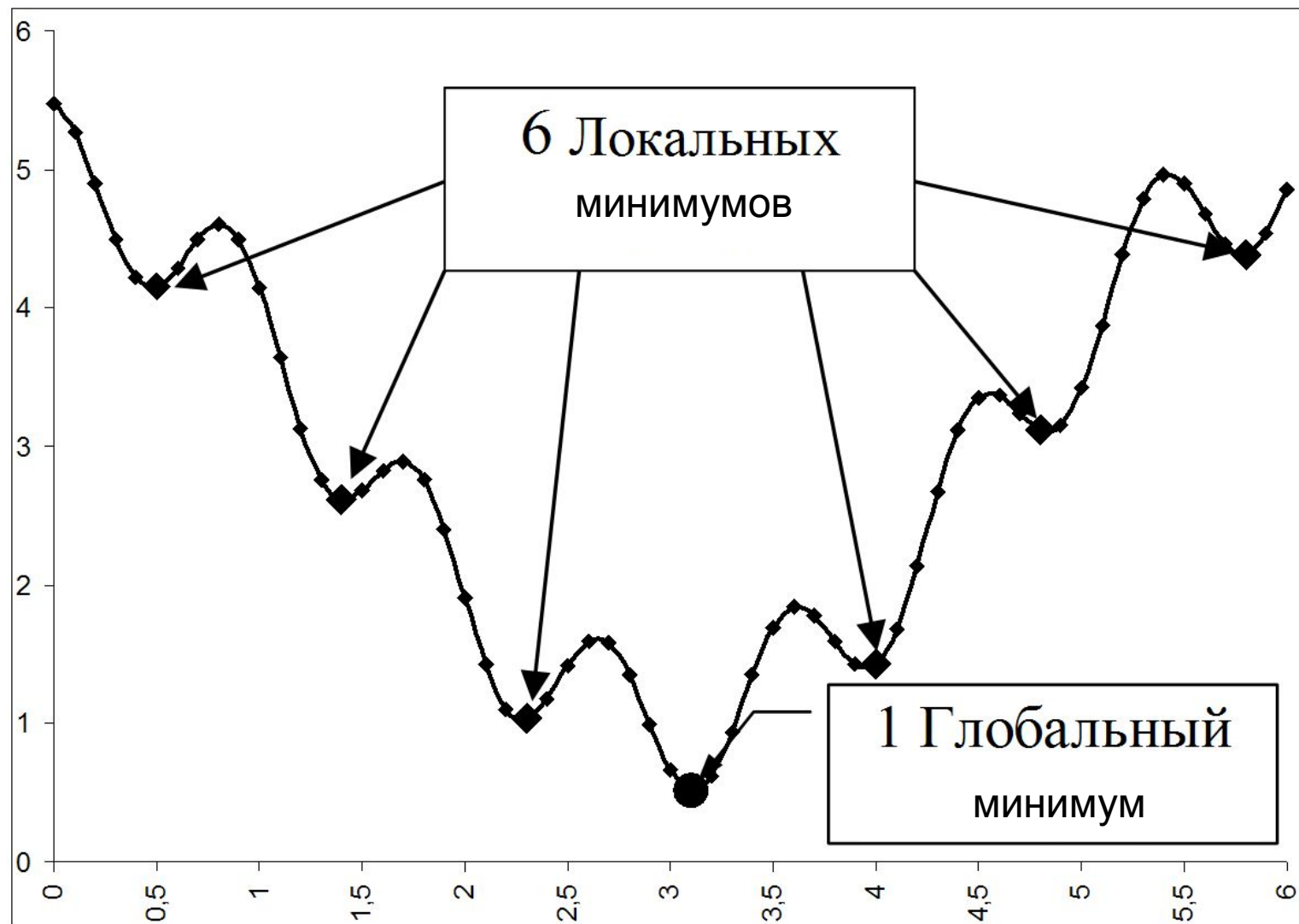
$$f(x_0, y_0) > f(x, y).$$

Точка  $M_0(x_0, y_0)$  называется **точкой минимума** для функции  $z = f(x, y)$ , если для всех точек  $M(x, y)$  из некоторой окрестности этой точки, достаточно близких к  $M_0(x_0, y_0)$ , но отличных от нее, выполняется условие:

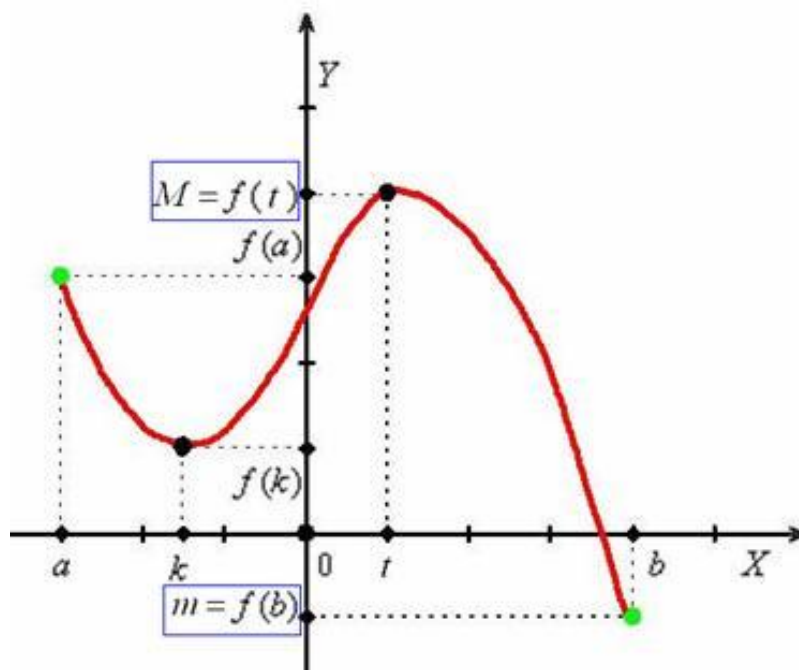
$$f(x_0, y_0) < f(x, y).$$



# Локальный и глобальный экстремумы: разница



Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке



[http://mathprofi.ru/naibolshee\\_i\\_naimenshee\\_znacheniya\\_funkcii\\_na\\_otrezke.html](http://mathprofi.ru/naibolshee_i_naimenshee_znacheniya_funkcii_na_otrezke.html)  
(пример 3)

# Экстремум функции 2-х переменных

## Необходимые условия экстремума.

Частные производные равны нулю или не существуют.

Точки, для которых это выполняется, называются **критическими**.

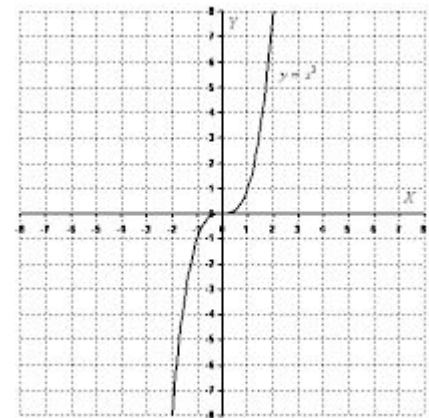
Точки, в которых производная равна 0, называются **стационарными**.

Технически – решаем систему уравнений

## Важно!

Не каждая критическая точка является точкой экстремума.

Аналог для функций одной переменной: точки перегиба ( $y = x^3$ )



# Необходимые условия экстремума функции нескольких переменных

$$z'_x = 0$$

$$z'_y = 0$$

(для стационарных точек)

# Достаточное условие экстремума (для стационарных точек)

1

Функция  $z = f(x, y)$  имеет в стационарной точке  $M_0(x_0, y_0)$  экстремум, если в этой точке выполняется условие:

$$\Delta = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{vmatrix} > 0$$

2

$$z''_{xx} > 0$$

Минимум

$$z''_{xx} < 0$$

Максимум

Если  $\Delta < 0$  - экстремума нет

Если  $\Delta = 0$  - ? нужны дальнейшие исследования

# **К достаточному условию есть несколько подходов**

## **Два математических:**

- через полный дифференциал второго порядка (требуется большого навыка работы с числами);
- через уравнения касательной плоскости (является самым сложным способом, но при этом самым надежным).

## **Два алгебраических:**

- через критерий Сильвестра (с помощью матрицы Гёссе. Является самым простым способом, но требует начального уровня знания в линейной алгебре);
- через собственные значения матрицы Гёссе (является самым быстрым, но требует более глубокого уровня знания в линейной алгебре).

Пример: исследовать на  
экстремум функцию

$$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$$

# Необходимые условия

$$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6y = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 24y^2 - 6x = 0 \end{cases}$$

$$\text{из (2): } x = 4y^2$$

$$(1): x^2 - 2y = 0$$

$$\text{в (1): } (4y^2)^2 - 2y = 0$$

$$16y^4 - 2y = 0$$

$$2y(8y^3 - 1) = 0$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Найдём  $x = 4y^2$ :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$



# Достаточные условия (частный случай критерия Сильвестра)

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6y : \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 24y^2 - 6x \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 48y.$$

$$\begin{vmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 48y \end{vmatrix}$$

M1 (0;0)

$$\begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - 36 = -36 < 0 \Rightarrow \text{нет экстремума}$$

M2 (1;0.5)

$$\begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 24 \end{vmatrix} = 6 \cdot 24 - 36 = 144 - 36 = 108 > 0$$

$6 > 0 \Rightarrow M2 (1;0.5) - \text{точка минимума.}$

# Экстремум функции двух переменных

**Пример.**  $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1.$

Проведем исследование на экстремум данную функцию. Прежде всего найдем критические точки. То есть приравняем нулю первые производные.

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6y = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 24y^2 - 6x = 0 \end{cases}$$



$$M_1(0, 0)$$

$$M_2(1, \frac{1}{2})$$

Теперь определим максимум или минимум функции в найденных точках. Для этого найдем частные вторые производные и посчитаем детерминант.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 48y.$$

Детерминант в точке  $M_1$   $\Delta(M_1) = A \cdot C - B^2 = 0 \cdot 0 - (-6)^2 = -36 < 0.$

Детерминант в точке  $M_2$

$$\Delta(M_2) = 108 > 0, \quad A > 0, \text{ значит, в точке } M_2 \text{ — минимум.}$$

# Комментарий к записи

$$U = U(x, y) \quad \Rightarrow \quad dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = U_x' dx + U_y' dy$$

# Аппроксимация

Определение:

Метод состоящий в замене одних объектов другими, в каком-то смысле близкими к исходным, но более простыми.

Например: нелинейные функции линейными, дискретные данные функциями.

Требования:

- › Конкретных вид функции.
- › Минимальное отклонение от заданной функции.

- **Интерполяция** — способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений.
- **Экстраполяция** — способ построения функции вне интервала известных значений.

# Интерполяция

Определение:

Метод нахождения промежуточных значений функции по имеющемуся дискретному набору известных значений.

Требования:

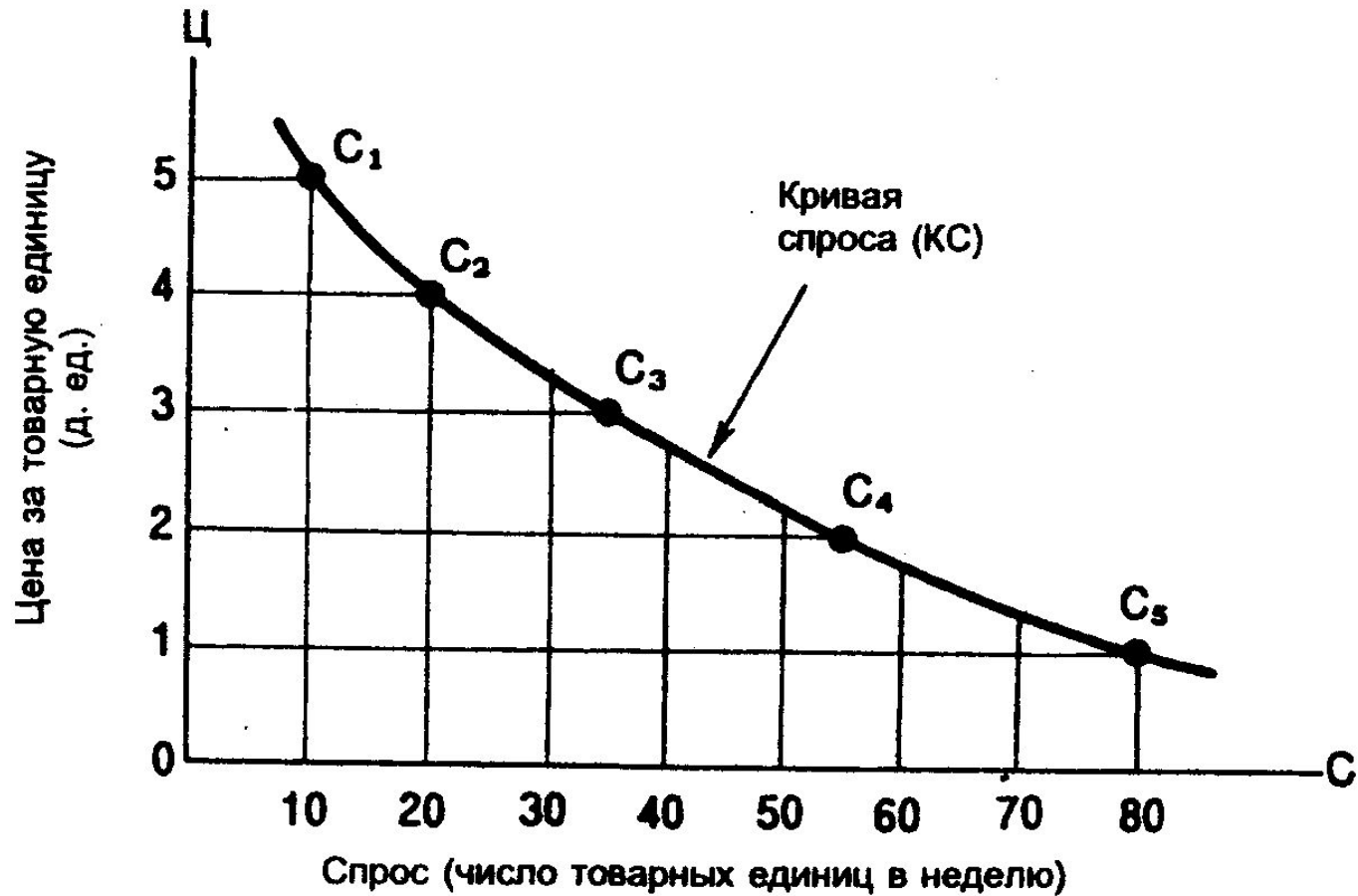
- › Прохождение функции через данные точки.
- › Монотонность функции в данных точках.

# Функция одной переменной: практический пример интерполяции

## Шкала спроса на условный товар

Цена за товарную единицу (д. ед.)	Величина спроса в неделю (т. е.)	Точка на графике
5	10	$C_1$
4	20	$C_2$
3	35	$C_3$
2	55	$C_4$
1	80	$C_5$

# Функция одной переменной: практический пример интерполяции





## Аппроксимация. Метод наименьших квадратов

$X:$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\dots$	$x_n$
$Y:$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$\dots$	$y_n$

# Аппроксимация. Метод наименьших квадратов

$X:$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\dots$	$x_n$
$Y:$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$\dots$	$y_n$

$$y = ax + b$$

$$y - ax - b = 0$$

$$y_i - ax_i - b = \varepsilon_i$$

$$U(a, b) = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_i^2 + \dots + \varepsilon_n^2$$

$$\begin{cases} U_a' = 0 \\ U_b' = 0 \end{cases}$$

# Аппроксимация. Метод наименьших квадратов

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (-2x_i \cdot (y_i - ax_i - b)) = 0 \\ \sum_{i=1}^n (-2 \cdot (y_i - ax_i - b)) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \\ b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \end{cases}$$

# Оценка качества модели: коэффициент детерминации

Коэффициент детерминации  $R^2$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{RSS}{TSS} = \frac{ESS}{TSS}$$

$$RSS + ESS = TSS$$

Находится в диапазоне от 0 до 1;  
Чем ближе к 1, тем лучше модель.

$$RSS = \sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2$$

residual sum of squares (сумма квадратов отклонений)

$$TSS = \sum_i (y_i - \bar{y})^2$$

total sum of squares (общая сумма квадратов)

$$ESS = \sum_i (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

explained sum of squares  
(объяснённая сумма квадратов)

# МНК для нелинейных функций

- $y = e^{ax+b}$

Взвешенный МНК  
Обобщённый МНК  
И т. д.

Спасибо!