МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

ІНСТИТУТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Кафедра інформаційних систем і мереж

В мене адоб ПРО)0

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ

Методи розв'язування лінійних алгебраїчних рівнянь

методичні вказівки до лабораторної роботи № 3

для студентів напряму 6.050101 „Комп'ютерні науки"

Затверджено на засіданні

кафедри ІСМ

Протокол № ____ від __________ 2017 р.

Львів-2017

Методичні вказівки обговорені та схвалені на засіданні Науково-методичної ради інституту комп'ютерних наук та інформаційних технологій Національного університету «Львівська політехніка». Протокол № ____ від _______________2017

Укладачі: Висоцька В.А., к.т.н., доцент кафедри ІСМ

Методичні вказівки до лабораторних робіт з дисципліни «Чисельні методи» для студентів напряму 6.050101 „Комп'ютерні науки" /Укл.: В.А.Висоцька.

Лабораторна робота № 3
на тему " Методи розв'язування лінійних алгебраїчних рівнянь "

Мета роботи: вивчити основні поняття методів розв'язування лінійних алгебраїчних рівнянь

Короткі теоретичні відомості

Інженеру часто доводиться розв'язувати алгебраїчні та трансцендентні рівняння і системи рівнянь, що можуть являти собою самостійну задачу (наприклад, аналіз рівноваги сил в жорсткій системі балок або дослідження умов та параметрів рівноваги хімічної реакції, тощо), або частину більш складних задач. В обох випадках практична цінність чисельного методу в значній мірі визначається швидкістю та ефективністю отримання розв'язку. Розглянемо найбільш відомі чисельні методи та ефективні алгоритми розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

3.1. Чисельне розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Нехай дано систему *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими. Системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) називають систему вигляду:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1; \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + \ldots + a_{nn}\cdot x_n = b_n. \end{cases} \tag{3.1}$$

де x_i, ($i=\overline{1,n}$) – невідомі; b_i, ($i=\overline{1,n}$) – вільні члени системи; a_{ij}, ($i,j=\overline{1,n}$) – коефіцієнти системи. Необхідно знайти *розв'язок* системи, тобто таку сукупність значень невідомих x_1, x_2, …, x_n, яка при підстановці в цю систему перетворює всі рівняння у тотожності. Запишемо систему (3.1) у матричній формі

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{B}, \tag{3.2}$$

де $A=\{a_{11},a_{21},...,a_{nn}\}$ – матриця коефіцієнтів СЛАР при невідомих; $B=\{b_1,b_2,...,b_n\}$ – вектор-стовпець вільних членів; $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ – вектор-стовпець невідомих. Вони мають вигляд:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}; X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь (3.1) називають вектор *X*, координати якого $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ при підстановці у систему, яку розв'язують, перетворюють кожне рівняння системи в тотожність. Якщо детермінант матриці ***A*** відрізняється від нуля, тобто $\det\mathbf{A}\neq 0$, то матриця ***A*** є неособливою і система лінійних рівнянь (3.1) або (3.2) має єдиний розв'язок.

3.2. Основні поняття та класифікація систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Для розв'язування СЛАР на комп'ютері традиційно використовують дві групи чисельних методів, що представлені на рисунку 3.1.

Методи чисельного розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь поділяються на дві групи:

1. **Точні** (прямі) методи, які дозволяють одержати розв'язок, якщо він існує, як скінченну кількість математичних операцій (наприклад: метод Гауса, метод Гауса з вибором головного елементу, метод Гауса з одиничною матрицею, метод Гауса з перетвореною матрицею, метод Гауса-

Халецького, метод Гауса-Жордана, метод Крамера тощо). До точних методів відносять методи, які дозволяють отримати точний розв'язок системи (3.1) через відповідну кількість операцій перетворення без урахування похибок заокруглення.

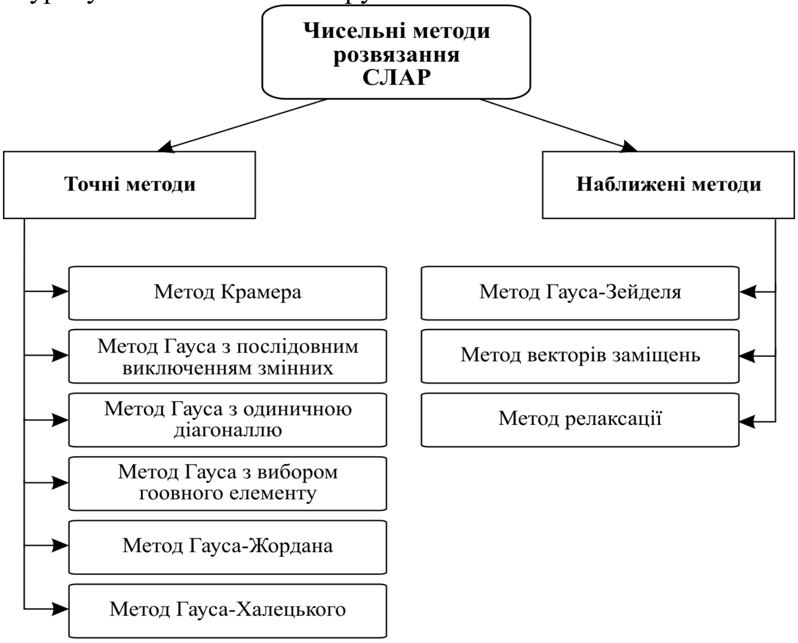


Рис. 3.1. Класифікація чисельних методів

2. **Наближені** (ітераційні) методи, які дозволяють одержати лише наближені до коренів значення із певною похибкою (наприклад, метод послідовних ітерацій, метод Гауса-Зейделя, метод векторів зміщень). Точний розв'язок можна отримати як результат нескінченно збіжного процесу дослідження або експерименту. До таких методів відносять метод простої ітерації, метод Зейделя та ін. "Точні" методи використовують при розв'язку на ПК систем невисокого порядку (n<10^3 , де n – число лінійних алгебраїчних рівнянь системи). Наближені методи використовують для систем високого порядку n=10^3…10^6. Переваги наближеного методу (простих ітерацій) над точним методом (Гауса) наступні:
    - Час обчислень пропорційний n^2 на ітерацію, тоді як для методу Гауса – n^3. Якщо для розв'язку потрібно менше ніж n ітерацій, то втрати машинного часу будуть менші.
    - Як правило похибки округлення при ітераційному методі впливають на остаточні результати значно менше, ніж при методі Гауса, оскільки при його використанні похибки не нагромаджуються.
    - Ітераційний метод стає особливо зручним при розв'язуванні систем, переважна кількість коефіцієнтів яких дорівнює 0. Рівняння, які отримують, наприклад, при розв'язуванні крайових задач, відносяться саме до цього класу.

Недоліком ітераційного методу є те, що він не завжди збігається. Ітераційні методи дозволяють одержати приблизний розв'язок системи за скінченне число наближень (ітерацій) із заданою похибкою результату. До наближених методів відносять методи, які дозволяють отримати розв'язок системи (рис. 3.1) у вигляді границі послідовності векторів $\lim\limits_{k\to\infty}\{X^0, X^1, X^2, ..., X^n\}$, яка збігається до точного розв'язку системи, де:

$$X^0 = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \dots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix};\ X^1 = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \dots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix};\ \dots;\ X^n = \begin{bmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ \dots \\ x_n^{(n)} \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

Кількість невідомих m в системі називають *порядком* СЛАР. Систему лінійних алгебраїчних рівнянь називають *сумісною*, якщо вона має хоча б один ненульовий розв'язок. В протилежному випадку СЛАР називають *несумісною*. СЛАР називається *визначеною,* якщо вона має тільки один розв'язок (випадок, коли m=n). Систему називають *невизначеною,* якщо вона має безліч розв'язків (m≠n). Система називається *виродженою,* якщо головний визначник системи дорівнює нулю. Система називається *невиродженою*, якщо головний визначник системи не дорівнює нулю. Дві системи називаються *еквівалентними,* якщо ці системи сумісні, визначені і мають однаковий розв'язок. СЛАР можна розв'язати на комп'ютері чисельними методами, якщо вона сумісна, визначена, невироджена.

3.3. Основні поняття та особливості матриць

Матриця – математичний об'єкт, що записується у вигляді прямокутної таблиці чисел (або елементів кільця), і допускає алгебраїчні операції (додавання, віднімання, множення тощо) між ним та іншими подібними об'єктами. Правила виконання операцій над матрицями визначені для зручності запису системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Звичайно матрицю позначають великою буквою латинського алфавіту й виділяють круглими дужками (…) (зустрічається також виділення квадратними дужками – […], подвійними прямими лініями – ‖…‖). А числа (елементи матриці), позначають тією же буквою, що й саму матрицю, але маленькою. У кожного елемента матриці є 2 нижніх індекси (a_{ij}) – перший «*i*» позначає номер рядка, у якому перебуває елемент, а другий «*j*» – номер стовпця.

3.3.1. Операції над матрицями

Нехай a_{ij} – елементи матриці *A*, а b_{ij} – елементи матриці *B*.

1. Множення матриці *A* на число λ (позначення: λA) полягає в побудові матриці *B*, елементи якої отримані шляхом множення кожного елемента матриці *A* на це число, тобто кожен елемент матриці *B* дорівнює:

$$b_{ij} = \lambda a_{ij} . \tag{3.5}$$

2. Додавання матриць *A*+*B* – операція знаходження матриці *C*, всі елементи якої дорівнюють попарній сумі всіх відповідних елементів матриць *A* і *B*, тобто кожен елемент матриці *C* дорівнює:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} . \tag{3.6}$$

Наприклад:

$$A+B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 10 \\ 8 & 2 & 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & 0+1 & -1+0 & 4+10 \\ 1+8 & 3+2 & 0+3 & 5+(-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 & 14 \\ 9 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Різниця матриць *A*–*B* визначається аналогічно додаванню, це операція знаходження матриці *C*, елементи якої визначаються як:

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} . \tag{3.7}$$

Додавання й віднімання допускається тільки для матриць однакового розміру.

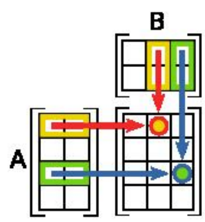
4. Існує нульова матриця Θ така, що її додавання до іншої матриці *A* не змінює *A*, тобто

$$A + \Theta = A . \tag{3.8}$$

Всі елементи нульової матриці рівні нулю.

5. Добуток матриць (позначення: *AB*, рідше зі знаком множення $A \times B$) – операція обчислення матриці *C*, елементи якої дорівнюють сумі добутків елементів у відповідному рядку першого множника й стовпці другого.

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj} . \tag{3.9}$$



У першому множнику повинно бути стільки ж стовпців, скільки рядків у другому. Якщо матриця *A* має розмірність $m \times n$, *B* – $n \times k$, то розмірність їх добутку *AB* = *C* є $m \times k$. Множення матриць не є комутативною операцією. Це видно хоча б з того, що якщо матриці не квадратні, то можна множити тільки одну на іншу, але не навпаки. Для квадратних матриць результат множення залежить від порядку співмножників. Наприклад:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 3 + 0\cdot 8 & 2\cdot 1 + 0\cdot 2 \\ 1\cdot 3 + 3\cdot 8 & 1\cdot 1 + 3\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 27 & 7 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 2 + 1\cdot 1 & 3\cdot 0 + 1\cdot 3 \\ 8\cdot 2 + 2\cdot 1 & 8\cdot 0 + 2\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 18 & 6 \end{bmatrix}$$

Підносити до степеня можна тільки квадратні матриці.

6. Транспонування матриці (позначення: A^T) — операція, при якій матриця відображається відносно головної діагоналі, тобто

$$a_{ij}^T = a_{ji}\,. \qquad (3.10)$$

Якщо A – матриця розміру $m \times n$, то A^T – матриця розміру $n \times m$.

3.3.2. Квадратна матриця й суміжні визначення

Якщо кількість рядків матриці дорівнює кількості стовпців, то така матриця називається *квадратною*. Для квадратних матриць існує одинична матриця E така, що множення будь-якої матриці на неї не впливає на результат, а саме:

$$EA = AE = A\,. \qquad (3.11)$$

В одиничній матриці одиниці розташовані тільки по діагоналі, інші елементи дорівнюють нулю

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \qquad (3.12)$$

Для деяких квадратних матриць можна знайти так звану обернену матрицю. *Обернена матриця* A^{-1} є такою, що якщо помножити матрицю на неї, то отримаємо одиничну матрицю

$$AA^{-1} = E\,. \qquad (3.13)$$

Обернена матриця існує не завжди. Матриці, для яких обернена існує, називаються *невиродженими*, а для яких не існує – *виродженими*. Матриця невироджена, якщо всі її рядки (стовпці) лінійно незалежні як вектори. Максимальне число лінійно незалежних рядків (стовпців) називається *рангом матриці*. *Визначником* (детермінантом) *матриці* називається нормований кососиметричний лінійний функціонал на рядках матриці. Квадратна матриця над числовим полем вироджена тоді й тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю.

3.3.3. Властивості матриць

Розглянемо основні властивості матриць в (3.14)-(3.21).

$$A + (B + C) = (A + B) + C\,, \qquad (3.14)$$

$$A(BC) = (AB)C\,, \qquad (3.15)$$

$$A(B + C) = AB + AC\,, \qquad (3.16)$$

$$(B + C)A = BA + CA\,, \qquad (3.17)$$

$$A \cdot 0 = 0\,, \qquad (3.18)$$

$$1 \cdot A = A\,, \qquad (3.19)$$

$$A_{k\times l} \cdot B_{l\times n} = C \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj}\,, \qquad (3.20)$$

$$\left(A^T\right)^T = A. \tag{3.21}$$

Квадратна матриця має обернену тоді й тільки тоді, коли вона невироджена, тобто її визначник не дорівнює нулю. Для неквадратних матриць і сингулярних матриць обернених матриць не існує.

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}, \tag{3.22}$$

$$\left(AB\right)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}. \tag{3.23}$$

Якщо необхідно розв'язати систему лінійних рівнянь $Ax = b$, де x – шуканий вектор, і якщо A^{-1} існує, то $x = A^{-1}b$. В протилежному випадку розмірність простору розв'язків більше нуля.

3.3.4. Обчислення оберненої матриці

Нехай задано матрицю

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{3.24}$$

Матриця A^{-1} називається оберненою до заданої матриці A, якщо її множення як зліва, так і справа на задану матрицю дає одиничну матрицю, тобто

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E. \tag{3.25}$$

Одинична матриця має вигляд

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.26}$$

Необхідною і достатньою умовою існування оберненої матриці є неособливість вихідної матриці. Матриця називається *неособливою*, якщо детермінант матриці відрізняється від нуля, тобто $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Обернена матриця A^{-1} обчислюється так:

1. Знаходиться визначник (детермінант) заданої матриці A

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{3.27}$$

2. Обчислюються алгебраїчні доповнення до елементів a_{ij} матриці (3.24) за формулою

$$A_{ij} = \left(-1\right)^{i+j} \cdot M_{ij}, \tag{3.28}$$

де M_{ij} – мінор елемента a_{ij}, тобто визначник матриці, що залишилася після викреслювання з даної матриці A i-го рядка та j-го стовпця.

3. Складається матриця $\widetilde{\mathbf{A}}$, елементами якої є алгебраїчні доповнення

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}. \tag{3.29}$$

4. Транспонується матриця $\widetilde{\mathbf{A}}$ (матриця, у якої рядки поміняні місцями зі стовпцями, називається *транспонованою*)

$$C=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}. \tag{3.30}$$

5. Обчислюються елементи оберненої матриці A^{-1} діленням елементів матриці C на детермінант початкової матриці

$$A^{-1}=\frac{C}{\det A}=\begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \frac{A_{21}}{\det A} & \frac{A_{n1}}{\det A} \\ \frac{A_{12}}{\det A} & \frac{A_{22}}{\det A} & \frac{A_{n2}}{\det A} \\ \\ \frac{A_{1n}}{\det A} & \frac{A_{2n}}{\det A} & \frac{A_{nn}}{\det A} \end{bmatrix}. \tag{3.31}$$

У правильності обчислення оберненої матриці переконуються, виконуючи перевірку за формулою (3.25).

Приклад 3.1. Знайти матрицю A^{-1}, обернену до заданої

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок.

1. Обчислимо визначник матриці A

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot 2\cdot 2+3\cdot 1\cdot 3+2\cdot 1\cdot 1-3\cdot 2\cdot 1-3\cdot 2\cdot 2-1\cdot 1\cdot 1=-4.$$

2. Знайдемо алгебраїчні доповнення A_{ij}.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3 \quad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-5 \quad A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-1 \quad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-1 \quad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-4 \quad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=8 \quad A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-4.$$

3. Складемо матрицю з алгебраїчних доповнень $\widetilde{\mathbf{A}}$

$$\widetilde{A}=\begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -4 & 8 & -4 \end{bmatrix}.$$

4. Транспонуємо матрицю $\widetilde{\mathbf{A}}$

$$C=\begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -5 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

5. Запишемо обернену матрицю

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0.75 & 0.25 & 1 \\ 1.25 & 0.25 & -2 \\ -0.25 & -0.25 & 1 \end{bmatrix}.$$

Виконаємо перевірку обчислень

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.75 & 0.25 & 1 \\ 1.25 & 0.25 & -2 \\ -0.25 & 0.25 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.4. Метод Крамера

3.4.1. Аналіз постановки задачі

Відомий з курсу математики метод Крамера є одним з найпростіших в теоретичному плані, проте одним з найбільш об'ємних при практичній реалізації, тобто вимагає здійснення дуже великої кількості арифметичних операцій, хоча по запису та операціях дуже простий. Метод використовується для визначення сумісності чи несумісності алгебраїчних рівнянь. Нехай задана система лінійних рівнянь:

$$A\bar{x} = \bar{b}\,, \tag{3.32}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \text{-------} \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ .x_n \end{pmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \mathrm{b_n} \end{pmatrix}. \tag{3.33}$$

Система (3.32) може бути записана в розгорнутому вигляді наступним чином:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \text{-----------------} \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{3.34}$$

Існування та єдиність розв'язку, відсутність розв'язку або ж наявність нескінченої кількості розв'язків можна з'ясувати за допомогою методу Крамера.

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \tag{3.35}$$

де $i = \overline{1,n}$ $\Delta = \det A$, $\Delta_{\mathrm{i}} = \det A_i$. Величина $\det A_i$ утворена з матриці A шляхом заміни i-го стовпчика стовпчиком вільних членів.

1) Якщо $\Delta \neq 0$, $\Delta_i \neq 0$, то існує єдиний розв'язок; система (3.32) сумісна;
   Якщо $\Delta \neq 0$, $\Delta_i = 0$, то розв'язок нульовий;
2) Якщо $\Delta = 0$, $\Delta_i \neq 0$, то розв'язків немає; система (3.32) несумісна;
3) Якщо $\Delta = 0$, $\Delta_i = 0$, то існує безліч розв'язків; система (3.32) невизначена.

Значення невідомих x_i (i=1, 2, ..., n) одержують за формулами Крамера:

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}}, \tag{3.36}$$

де $\det \mathbf{A}$ – детермінант матриці A; $\det \mathbf{A}_i$ – детермінант матриці A_i, яку одержано з матриці A шляхом заміни i-го стовпця на стовпець вільних членів.

3.4.2. Приклади розв'язку системи за формулами Крамера

Приклад 3.2. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера

$$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 18x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}.$$

Розв'язок. Знайдемо det A

$$\det A = \begin{vmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 18 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 9\cdot 2\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 18 + 4\cdot 6\cdot 1 - 18\cdot 2\cdot 1 - 4\cdot 3\cdot 2 - 9\cdot 6\cdot 1 = 0.$$

Визначник завжди буде рівний 0, якщо присутні однакові або кратні рядки чи стовпчики. В прикладі 3.2 перший рядок кратний третьому. Навіть при транспонуванні матриці або переставлянні рядків місцями визначник буде рівний 0. Кратні рядки або стовпчики можна вилучати з матриці. Система лінійних рівнянь розв'язків немає та є несумісною.

$$\det B = \begin{vmatrix} 9 & 4 & 18 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 9\cdot 2\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 18 + 4\cdot 6\cdot 1 - 18\cdot 2\cdot 1 - 4\cdot 3\cdot 2 - 9\cdot 6\cdot 1 = 0.$$

$$\det C = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 18 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot 3\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 18 + 9\cdot 6\cdot 1 - 18\cdot 3\cdot 1 - 6\cdot 1\cdot 4 - 9\cdot 2\cdot 2 = 0.$$

Наприклад, для

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 9x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + 12x_3 = 1 \\ 5x_1 + x_2 + 15x_3 = 3 \end{cases}.$$

також визначник буде рівний 0:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 4 & 1 & 12 \\ 5 & 1 & 15 \end{vmatrix} = 3\cdot 1\cdot 15 + 4\cdot 1\cdot 9 + 12\cdot 5\cdot 1 - 5\cdot 1\cdot 9 - 12\cdot 1\cdot 3 - 4\cdot 15\cdot 1 = 0.$$

Приклад 3.3. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}.$$

Розв'язок. Знайдемо det A, det A_1, det A_2, det A_3:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -23; \qquad \det A_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -14;$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -22; \qquad \det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3.$$

Тоді

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-14}{-23} = 0{,}6087; \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-22}{-23} == 0{,}9565;$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{-3}{-23} = 0{,}1304.$$

Приклад 3.4. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 11 \\ 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 21 \end{cases}.$$

Розв'язок. Знайдемо det A, det A_1, det A_2, det A_3:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 7 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 20 + 14 + 6 - 28 - 30 - 2 = 40 - 60 = -20 \neq 0 .$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{1}{20}\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 11 & 4 & 1 \\ 21 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -\frac{1}{20}(100 + 22 + 42 - 84 - 110 - 10) = -\frac{1}{20}(-40) = 2 .$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{1}{20}\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 11 & 1 \\ 7 & 21 & 5 \end{vmatrix} = -\frac{1}{20}(55 + 35 + 63 - 77 - 75 - 21) = -\frac{1}{20}(-20) = 1 .$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{1}{20}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 11 \\ 7 & 2 & 21 \end{vmatrix} = -\frac{1}{20}(84 + 154 + 30 - 140 - 126 - 22) = -\frac{1}{20}(-20) = 1 .$$

Для того, щоб засвоїти цю частину необхідно вміти розкривати визначники «два на два» і «три на три». Спочатку докладно розглянемо правило Крамера для системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими.

Нехай іноді, але зустрічається завдання – розв'язати систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими за формулами Крамера. Крім того, простий приклад допоможе зрозуміти, як використовувати правило Крамера для більш складного випадку – системи трьох рівнянь з трьома невідомими. Крім того, існують системи лінійних рівнянь з двома змінними, які доцільно вирішувати саме за правилом Крамера!

Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = s_1, \\ a_2 x + b_2 y = s_2. \end{cases} \tag{3.37}$$

Алгоритм Крамера.

Крок 1. Обчислити *головний визначник системи* визначник $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

Крок 2. Якщо $\Delta = 0$, то система має нескінченно багато розв'язків або несумісна (не має розв'язків). У цьому випадку правило Крамера не допоможе, потрібно використовувати метод Гауса. Якщо $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок, і для знаходження коренів необхідно обчислити ще два визначника: $\Delta_x = \begin{vmatrix} s_1 & b_1 \\ s_2 & b_2 \end{vmatrix}$ та $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & s_1 \\ a_2 & s_2 \end{vmatrix}$. На практиці вищевказані визначники також можуть позначатися латинською літерою D.

Крок 3. Корені рівняння знаходимо за формулами: $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$ та $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$.

Приклад 3.5. Розв'язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} 506a + 66b = 2315{,}1; \\ 66x + 11y = 392{,}3. \end{cases}$

Розв'язок. Коефіцієнти рівняння досить великі, в правій частині присутні десяткові дроби з комою, яка рідко зустрічається у практичних завданнях з математики. Щоб розв'язати таку систему, можна спробувати виразити одну змінну через іншу, але в цьому випадку вийдуть дроби, з якими вкрай незручно працювати. Можна помножити друге рівняння на 6 і провести по елементне віднімання, але й тут виникнуть ті ж дроби.

У подібних випадках і приходять на допомогу формули Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 506 & 66 \\ 66 & 11 \end{vmatrix} = 506 \cdot 11 - 66 \cdot 66 = 5566 - 4356 = 1210 \neq 0,$$

отже, система має єдиний розв'язок.

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} s_1 & b_1 \\ s_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2315{,}1 & 66 \\ 392{,}3 & 11 \end{vmatrix} = 2315{,}1 \cdot 11 - 392{,}3 \cdot 66 = 25466{,}1 - 25891{,}8 = -425{,}7 ;$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} a_1 & s_1 \\ a_2 & s_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 506 & 2315{,}1 \\ 66 & 392{,}3 \end{vmatrix} = 66 \cdot 392{,}3 - 66 \cdot 2315{,}1 = 198503{,}8 - 152796{,}6 = 45707{,}2 \ ;$$

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \frac{-425{,}7}{1210} \approx -0{,}35 \ ; \ b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{45707{,}2}{1210} \approx 37{,}77 \ .$$

Тоді $a \approx -0{,}35$ та $b \approx 37{,}77$. Обидва корені знайдені наближено, що цілком прийнятно для завдань економетрики. Коментарі тут не потрібні, оскільки завдання розв'язується за відомими формулами, однак, є один нюанс. Коли використовуєте даний метод, обов'язковим фрагментом оформлення завдання є наступне: "$\neq 0$, значить, система має єдиний розв'язок ". Зовсім не зайвою буде перевірка, яку зручно провести на калькуляторі: підставляємо наближені значення $a \approx -0{,}35$ та $b \approx 37{,}77$ в ліву частину кожного з рівнянь системи. В результаті з невеликою похибкою повинні вийти числа, які знаходяться в правих частинах.

Переходимо до розгляду правила Крамера для системи трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = s_1, \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = s_2, \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = s_3. \end{cases} \tag{3.38}$$

Знаходимо головний визначник системи: $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$. Якщо $\Delta = 0$, то система має нескінченно багато розв'язків або несумісна (не має розв'язків). У цьому випадку правило Крамера не допоможе, потрібно використовувати метод Гауса. Якщо $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок і для знаходження коренів ми повинні обчислити ще три визначника:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} s_1 & b_1 & c_1 \\ s_2 & b_2 & c_2 \\ s_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & s_1 & c_1 \\ a_2 & s_2 & c_2 \\ a_3 & s_3 & c_3 \end{vmatrix}, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & s_1 \\ a_2 & b_2 & s_2 \\ a_3 & b_3 & s_3 \end{vmatrix}.$$

І, нарешті, відповідь обчислюється за формулами: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$ та $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$.

Як видно, випадок «три на три» принципово нічим не відрізняється від випадку «два на два», стовпець вільних членів s_1, s_2, s_3 послідовно зчитується зліва направо по стовпчиках головного визначника.

Приклад 3.6. Розв'язати систему за формулами Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

Розв'язок. Розв'яжемо систему за формулами Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-4 - 2) + 2 \cdot (-3 + 4) + 4 \cdot (-3 - 8) = -18 + 2 - 44 = -60 \neq 0,$$

отже, система має єдиний розв'язок.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 21 & -2 & 4 \\ 9 & 4 & -2 \\ 10 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 21 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 21 \cdot (-4 - 2) + 2 \cdot (-9 + 20) + 4 \cdot (-9 - 40) = -126 + 22 - 196 = -300,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}3&21&4\\3&9&-2\\2&10&-1\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}9&-2\\10&-1\end{vmatrix}+21\cdot\begin{vmatrix}3&-2\\2&-1\end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix}3&9\\2&10\end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot(-9+20)-21\cdot(-3+4)+4\cdot(30-18)=-33-21+48=60,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}3&-2&21\\3&4&9\\2&-1&10\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}4&9\\-1&10\end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix}-2&21\\-1&10\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}-2&21\\4&9\end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot(40+9)-3\cdot(-20+21)+2\cdot(-18-88)=147-3-284=-60,$$

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-300}{-60}=5;\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{60}{-60}=-1;\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-60}{-60}=1;$$

Тоді $x_1=5;\ x_2=-1;\ x_3=1.$

Розв'язок знаходиться за готовими формулами. Але є декілька зауважень.

Зауваження 3.1. Буває так, що в результаті обчислень виходять «погані» дроби, які не скорочуються, наприклад: $x_1=\frac{53}{17}$. Рекомендують застосувати наступний алгоритм. Якщо під рукою немає комп'ютера, чинимо так:

1) Можливо, допущена помилка в обчисленнях. Як тільки зіткнулися з «поганим» дробом, відразу необхідно перевірити, чи правильно переписано умова. Якщо умова переписана без помилок, то потрібно перерахувати визначники, використовуючи розклад по іншому рядку (стовпцю).

2) Якщо в результаті перевірки помилок не виявлено, то найімовірніше, допущена помилка в умові завдання. В цьому випадку розв'язуємо завдання до кінця.

Приклад 3.7. Розв'язати систему за формулами Крамера.

$$\begin{cases}7x+y=23,\\-5x+3y=1.\end{cases}$$

Розв'язок. Розв'яжемо систему за формулами Крамера.

$$\Delta=\begin{vmatrix}7&1\\-5&3\end{vmatrix}=21+5=26\neq0,\ \text{отже, система має єдиний розв'язок.}$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}23&1\\1&3\end{vmatrix}=69-1=68,\ x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{68}{26}=\frac{34}{13};$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}7&23\\-5&1\end{vmatrix}=7+115=122,\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{122}{26}=\frac{61}{13};$$

Тоді $x=\frac{34}{13};\ y=\frac{61}{13}$.

Перевірка. Підставимо знайдений розв'язок в ліву частину кожного рівняння системи.

1) $7\cdot\frac{34}{13}+\frac{61}{13}=\frac{238}{13}+\frac{61}{13}=\frac{299}{13}=23.$

2) $-5\cdot\frac{34}{13}+3\cdot\frac{61}{13}=-\frac{170}{13}+\frac{183}{13}=\frac{13}{13}=1.$

Отримано відповідні праві частини, таким чином розв'язок знайдено правильно.

Зауваження 3.2. Деколи зустрічаються системи, в рівняннях яких відсутні деякі змінні, наприклад:

$$\begin{cases}3x_2+4x_3=21,\\3x_1+4x_2=9,\\2x_1-x_2-x_3=10.\end{cases}$$

Тут в першому рівнянні відсутня змінна x_1, у другому – змінна x_3. В таких випадках дуже важливо правильно і уважно записати головний визначник (на місці відсутніх змінних ставляться нулі):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Визначники з нулями раціонально розкривати по тому рядку (стовпцю), в якому є нуль, так як обчислень виходить значно менше.

Приклад 3.8. Розв’язати систему за формулами Крамера.

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2, \\ 2x + y - 4z = 9, \\ 6x - 5y + 2z = 17. \end{cases}$$

Розв’язок. Розв’яжемо систему за формулами Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 6 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (2 - 20) + 3 \cdot (4 + 24) + 1 \cdot (-10 - 6) = -36 + 84 - 16 = 32 \neq 0,$$

отже, система має єдиний розв’язок.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 9 & 1 & -4 \\ 17 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -4 \\ 17 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 17 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (2 - 20) + 3 \cdot (18 + 68) + 1 \cdot (-45 - 17) = -36 + 258 - 62 = 160,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & -4 \\ 6 & 17 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -4 \\ 17 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 6 & 17 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (18 + 68) - 2 \cdot (4 + 24) + 1 \cdot (34 - 54) = 172 - 56 - 20 = 96,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 9 \\ 6 & -5 & 17 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ -5 & 17 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 6 & 17 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (17 + 45) + 3 \cdot (34 - 54) + 2 \cdot (-10 - 6) = 124 - 60 - 32 = 32,$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{160}{32} = 5; \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{96}{32} = 3; \; z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{32}{32} = 1;$$

Тоді $x = 5$; $y = 3$; $z = 1$.

Для випадку системи 4-х рівнянь з 4-ма невідомими формули Крамера записуються за аналогічним принципом. Зниження порядку визначника – п’ять визначників 4-го порядку цілком придатні для розв’язування.

3.5. Метод оберненої матриці

Метод оберненої матриці - це, по суті, окремий випадок матричного рівняння. Для вивчення цього параграфа необхідно вміти розкривати визначники, знаходити обернену матрицю та виконувати матричне множення. Відповідні посилання будуть надані в процесі пояснень. Система лінійних рівнянь записана у матричному вигляді в (3.2). Розв’язування матричного рівняння зводиться до знаходження оберненої матриці $\mathbf{A}^{-1}$ і наступного множення її на матрицю вільних членів $\boldsymbol{B}$, тобто

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}. \tag{3.39}$$

Приклад 3.9. Розв’язати систему матричним методом

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

Розв'язок. Запишемо систему в матричної формі: $AX = B$**,** де

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Якби в рівняннях були відсутні деякі змінні, то на відповідних місцях в матриці потрібно було поставити нулі. Розв'язок системи знайдемо за формулою $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$. Відповідно до формули потрібно знайти зворотну матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ і виконати матричне множення $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$. Обернену матрицю знайдемо за формулою: $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\widetilde{A}^T$, де $\widetilde{A}^T$ - транспонована матриця алгебраїчних доповнень відповідних елементів матриці. Спочатку розглянемо визначник:

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-4 - 2) + 2 \cdot (-3 + 4) + 4 \cdot (-3 - 8) = -18 + 2 - 44 = -60 \neq 0.$$

Тут визначник розкритий по першому рядку. Якщо $|A| = 0$, то обернена матриця не існує, і розв'язати систему матричним методом неможливо. В цьому випадку система розв'язується методом виключення невідомих (методом Гауса). Тепер потрібно обчислити 9 мінорів і записати їх в матрицю мінорів

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}.$$

В процесі розв'язку мінори краще розписати докладно, хоча, при певному досвіді їх можна пристосуватися рахувати усно.

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 2 = -6;\ M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1;\ M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11;$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6;\ M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11;\ M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1;$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 16 = -12;\ M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 12 = -18;\ M_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 6 = 18$$

Порядок розрахунку мінорів абсолютно не важливий, тут обчислено зліва направо по рядках. Можна розрахувати мінори по стовпчиках (це навіть зручніше). Таким чином:

$$M = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -11 \\ 6 & -11 & 1 \\ -12 & -18 & 18 \end{pmatrix}$$ – матриця мінорів відповідних елементів матриці A.

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -6 & -1 & -11 \\ -6 & -11 & -1 \\ -12 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$ – матриця алгебраїчних доповнень.

$$\widetilde{A}^T = \begin{pmatrix} -6 & -6 & -12 \\ -1 & -11 & 18 \\ -11 & -1 & 18 \end{pmatrix}$$ – транспонована матриця алгебраїчних доповнень.

Тепер записуємо обернену матрицю:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\widetilde{A}^T=\frac{1}{-60}\begin{pmatrix}-6 & -6 & -12\\ -1 & -11 & 18\\ -11 & -1 & 18\end{pmatrix}=\frac{1}{60}\begin{pmatrix}6 & 6 & 12\\ 1 & 11 & -18\\ 11 & 1 & -18\end{pmatrix}.$$

Не вносимо $\frac{1}{60}$ в матрицю, це серйозно ускладнить подальші обчислення. Ділення потрібно було б виконати, якби всі числа матриці ділилися на 60 без залишку. А внести мінус в матрицю в даному випадку дуже потрібно, це, навпаки – спростить подальші обчислення. Залишилося провести матричне множення.

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=A^{-1}B=\frac{1}{60}\begin{pmatrix}6 & 6 & 12\\ 1 & 11 & -18\\ 11 & 1 & -18\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}21\\ 9\\ 10\end{pmatrix}=\frac{1}{60}\begin{pmatrix}6\cdot 21+6\cdot 9+12\cdot 10\\ 1\cdot 21+11\cdot 9-18\cdot 10\\ 11\cdot 21+1\cdot 9-18\cdot 10\end{pmatrix}=\frac{1}{60}\begin{pmatrix}300\\ -60\\ 60\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ -1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Зверніть увагу, що ділення на 60 виконується в останню чергу. Іноді може і не розділитися без залишку, тобто можуть вийти «погані» дроби. Що в таких випадках робити подано в розділі про правило Крамера. Отримали $x_1=5;\ x_2=-1;\ x_3=1$.

Приклад 3.10. Розв'язати систему лінійних рівнянь матричним методом.

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1\\ 2x_1-x_2+2x_3=-4\\ 4x_1+x_2+4x_3=-2\end{cases}.$$

Розв'язок. Початкова матриця коефіцієнтів при невідомих має вигляд:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 4 & 1 & 4\end{bmatrix}.$$

Знайдемо обернену матрицю A^{-1}.

$$\mathrm{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & -0{,}3333 & 0{,}6667\\ 0 & -0{,}6667 & 0{,}3333\\ 1 & 0{,}5 & -0{,}5\end{bmatrix}.$$

Тоді при розв'язуванні системи одержимо:

$$X=\begin{bmatrix}-1 & -0{,}3333 & 0{,}6667\\ 0 & -0{,}6667 & 0{,}3333\\ 1 & 0{,}5 & -0{,}5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1\\ -4\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -2\end{bmatrix}.$$

Таким чином, $x_1=1;\quad x_2=2;\quad x_3=-2.$

Приклад 3.11. Розв'язати систему за допомогою оберненої матриці.

$$\begin{cases}2x-3y+z=2,\\ 2x+y-4z=9,\\ 6x-5y+2z=17.\end{cases}$$

Розв'язок. Запишемо систему в матричні формі:

$$AX=B\text{, де } A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 2 & 1 & -4\\ 6 & -5 & 2\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2\\ 9\\ 17\end{pmatrix}.$$

Розв'язок рівняння шукаємо у вигляді $X=A^{-1}B$. Обернену матрицю знайдемо за формулою $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\widetilde{A}^T$, де $\widetilde{A}^T$ – транспонована матриця алгебраїчних доповнень відповідних елементів матриці A.

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 6 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (2-20) + 3 \cdot (4+24) + 1 \cdot (-10-6) = -36 + 84 - 16 = 32.$$

$M = \begin{pmatrix} -18 & 28 & -16 \\ -1 & -2 & 8 \\ 11 & -10 & 8 \end{pmatrix}$ – матриця мінорів відповідних елементів матриці A.

$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -18 & -28 & -16 \\ 1 & -2 & -8 \\ 11 & 10 & 8 \end{pmatrix}$ – матриця алгебраїчних доповнень.

$\widetilde{A}^T = \begin{pmatrix} -18 & 1 & 11 \\ -28 & -2 & 10 \\ -16 & -8 & 8 \end{pmatrix}$ – транспонована матриця алгебраїчних доповнень.

Тепер записуємо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \widetilde{A}^T = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} -18 & 1 & 11 \\ -28 & -2 & 10 \\ -16 & -8 & 8 \end{pmatrix}.$$

Таким чином:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} -18 & 1 & 11 \\ -28 & -2 & 10 \\ -16 & -8 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 17 \end{pmatrix} = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} -18 \cdot 2 + 1 \cdot 9 + 11 \cdot 17 \\ -28 \cdot 2 - 2 \cdot 9 + 10 \cdot 17 \\ -16 \cdot 2 - 8 \cdot 9 + 8 \cdot 17 \end{pmatrix} = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} 160 \\ 96 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Звідси, $x = 5; y = 3; z = 1$.

Приклад 3.12. Розв'язати систему за допомогою оберненої матриці.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 5, \\ 3x + 4y + z = 11, \\ 7x + 2y + 5z = 21. \end{cases}$$

Розв'язок. Запишемо систему в матричні формі:

$$AX = B, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок рівняння шукаємо у вигляді $X = A^{-1}B$. Обернену матрицю знайдемо за формулою $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}^T$, де $\widetilde{A}^T$ – транспонована матриця алгебраїчних доповнень відповідних елементів матриці A.

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 7 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (20-2) - 2 \cdot (15-7) + 1 \cdot (6-28) = 18 - 16 - 22 = -20.$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 18;\ M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 8;\ M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -22;$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 8;\ M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -2;\ M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -12;$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2;\ M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2;\ M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

$M = \begin{pmatrix} 18 & 8 & -22 \\ 8 & -2 & -12 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ – матриця мінорів відповідних елементів матриці A.

$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 18 & -8 & -22 \\ -8 & -2 & 12 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ – матриця алгебраїчних доповнень.

$\widetilde{A}^T = \begin{pmatrix} -18 & -8 & -2 \\ -8 & -2 & 2 \\ -22 & 12 & -2 \end{pmatrix}$ – транспонована матриця алгебраїчних доповнень.

Тепер записуємо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}^T = -\frac{1}{20}\begin{pmatrix} -18 & -8 & -2 \\ -8 & -2 & 2 \\ -22 & 12 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{20}\begin{pmatrix} -18 & -8 & -2 \\ -8 & -2 & 2 \\ -22 & 12 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9/10 & 2/5 & 1/10 \\ 2/5 & 1/10 & -1/10 \\ 11/10 & -3/5 & 1/10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 21 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -9/10 \cdot 5 + 4/10 \cdot 11 + 1/10 \cdot 21 \\ -9/10 \cdot 5 + 4/10 \cdot 11 + 1/10 \cdot 21 \\ -9/10 \cdot 5 + 4/10 \cdot 11 + 1/10 \cdot 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-45+44+21)/10 \\ (20+11-21)/10` \\ (55-66+21)/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20/10 \\ 10/10` \\ 10/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1` \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Звідси, $x = 2; y = 1; z = 1.$

Найбільш універсальним способом розв’язування системи є метод виключення невідомих (метод Гауса).

3.6. Особливості методу Гауса

Найбільш відомим з точних методів розв’язання СЛАР (3.1) є метод Гауса, суть якого полягає в тому, що система рівнянь, яка розв’язується, зводиться до еквівалентної системи з верхньою трикутною матрицею. Невідомі знаходяться послідовними підстановками, починаючи з останнього рівняння перетвореної системи. Алгоритми Гауса складаються із виконання однотипних операцій, які легко формалізуються. Однак, точність результату й витрачений час у більшості випадків залежить від алгоритму формування трикутної матриці системи.

У загальному випадку алгоритми Гауса складаються з двох етапів:

1. **Прямий хід**, в результаті якого СЛАР (3.1), що розв’язується, перетворюється в еквівалентну систему з верхньою трикутною матрицею коефіцієнтів виду:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1; \\ 0 \cdot x_1 \quad + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \cdot x_1 \quad + 0 \cdot x_2 \quad + \ldots + a_{nn} \cdot x_n = b_n. \end{cases} \tag{3.40}$$

2. **Зворотній хід** дозволяє визначити вектор розв’язку починаючи з останнього рівняння системи (3.1) шляхом підстановки координат вектора невідомих, отриманих на попередньому кроці.

Метод Гауса - це просто. Відомий німецький математик Йоганн Карл Фрідріх Гаус ще за життя отримав визнання видатного математика всіх часів, генія і навіть прізвисько «короля математики». Метод Гауса простий тим, що для його освоєння достатньо вміти додавати і множити. Не випадково метод послідовного виключення невідомих викладачі часто розглядають. Але у студентів метод

Гауса викликає найбільші труднощі. Вся справа в методиці і в доступній формі розповімо про алгоритм методу.

Спочатку систематизуємо знання про системи лінійних рівнянь. Система лінійних рівнянь може:

1) мати єдиний розв'язок;

2) мати нескінченно багато розв'язків;

3) не мати розв'язків (бути несумісною).

Метод Гауса - найбільш потужний і універсальний інструмент для знаходження розв'язку будь-якої системи лінійних рівнянь. Правило Крамера та матричний метод непридатні в тих випадках, коли система має нескінченно багато розв'язків або несумісна. А метод послідовного виключення невідомих в будь-якому випадку приведе до відповіді. В цьому розділі розглянемо метод Гауса для випадку 1 (єдиний розв'язок системи), для випадкам 2, 3 присвячений наступний розділ: несумісні системи і системи із загальним розв'язком. Зауважимо, що сам алгоритм методу у всіх трьох випадках працює однаково.

Відомо декілька різних алгоритмів отримання еквівалентної системи з верхньою трикутною матрицею. Розглянемо найбільш відомі з них.

3.6.1. Аналіз постановки задачі для методу Гауса

Метод Гауса застосовується для розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь (3.1). У матричній формі ця система має вигляд (3.2)-(3.3). Використаємо той факт, що розв'язок системи не змінюється при виконанні кожної з наступних операцій:

а) перестановка двох рівнянь місцями;

б) множення одного з рівнянь на число, яке не дорівнює нулю;

в) віднімання одного рівняння, помноженого на деяке число, від іншого.

Якщо a_{11}=0, поміняємо місцями перше рівняння з *j*-м рівнянням, таким, що $a_{j1} \neq 0$. Тепер коефіцієнт у першому рівнянні при першому невідомому, відмінний від нуля. Позначимо його через a'_{11} і будемо називати *ведучим елементом* першого кроку. Поділимо перше рівняння на ведучий елемент. Потім віднімемо його від *k-го* рівняння (*k*=2, 3, ..., *n*) отриманої системи, попередньо помноживши на a'_{k1}. Після таких перетворень перший стовпчик коефіцієнтів рівнянь буде складатися з одиниці на першому місці і нулів на інших місцях.

Розглянемо отримані рівняння з номерами 2, ..., *n*. Вони утворюють систему з (*n*-1) рівняннями з (*n*-1) невідомими. Виконаємо з цією системою ті ж операції, що і з попередньою (другий крок методу Гауса).

Наступний крок виконуємо для останніх (*n*-2) рівнянь і так далі.

Якщо на кожному кроці вдається вибрати ведучий елемент, то після ряду перетворень система рівнянь набуває трикутного вигляду:

$$
\begin{aligned}
x_1 + a''_{12}x_2 + a''_{13}x_3 + \ldots + a''_{1n}x_n &= b''_1; \\
x_2 + a''_{23}x_3 + \ldots + a''_{2n}x_n &= b''_2; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
x_n &= b''_n.
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

З останнього рівняння можна отримати значення невідомого x_n. Інші можна знайти, послідовно підставляючи значення x_n у рівняння $n-1$, потім значення x_n і x_{n-1} у рівняння з номером $n-2$ та ін. Але краще продовжити обчислення за наступною схемою (*зворотний хід методу Гауса*). Віднімемо останнє рівняння системи (3.41), помножене на a''_{kn}, від *k*-го рівняння ($k=\overline{1,n-1}$). Потім аналогічно виключимо невідоме x_{n-1} з перших ($n-2$) рівнянь. Після ряду перетворень система (3.41) буде зведена до вигляду $x_k = b''_k = \overline{1,n}$.

Розглянемо випадок, коли на черговому кроці не вдається вибрати ведучий елемент. Це відбудеться в тому випадку, коли на черговому *r*-му кроці всі коефіцієнти при невідомому x_r у рівняннях *r*, *r*+1, ..., *n* виявляться рівними нулю, що є наслідком лінійної залежності рядків вихідної матриці *A*. У цьому випадку можна умовно вважати ведучий елемент $a_{kk}^{(k)}$ нульовим і продовжити зведення рівнянь до трикутного вигляду. Отримані рівняння будуть відрізнятися від рівнянь (3.41) тим, що в деяких місцях на діагоналі будуть стояти коефіцієнти, які дорівнюють нулю, а не одиниці.

Відзначимо, що в цьому випадку рівняння (3.1) або не мають розв'язків, або мають нескінченну множину розв'язків.

Метод Гауса відносять до класу точних (прямих) методів, але не завжди цей метод дозволяє отримати точний розв'язок. На практиці коефіцієнти при невідомих можуть бути результатом експерименту, тому бути наближеними числами. Дії над наближеними числами виконуються з округленням. В результаті розв'язок системи буде також наближеним.

3.6.2. Метод Гауса (метод заміни змінних)

Цей метод полягає у послідовному виключенні змінних з кожних наступних рівнянь і приведенні заданої системи до так званого "трикутного вигляду".

Якщо задана система $A\overline{x} = \overline{b}$ (3.32), то внаслідок того, що над вектором вільних членів здійснюються такі ж алгоритмічні перетворення, як і над коефіцієнтами матриці A, її зводять до допоміжної матриці:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ ----------------- \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{3. 42}$$

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} b_1 \\ \cdots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} b_n \end{pmatrix} \tag{3.43}$$

Метод Гауса поділяється на два етапи – *прямий хід і зворотний хід*. В результаті *прямого ходу* система (3.32) зводиться до наступної системи $\widehat{A}\overline{x} = \widehat{\overline{b}}$. Прямий хід складається з n кроків. На першому кроці, припускаючи $a_{11}^{(0)} \neq 0$, перше рівняння системи (3.32) ділять на елемент a_{11}. В результаті отримаємо зведене рівняння:

$$x_1 + a_{12}^{(1)} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)} \cdot x_n = a_{1,n+1}^{(1)} \tag{3.44}$$

Зауважимо, що верхній індекс визначатиме номер кроку. Стовпчик вільних членів позначається як a_{n+1} стовпчик. Якщо через $A^{(0)} = \widetilde{A}$, то коефіцієнт a_{1j} на першому кроці:

$$a_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \qquad \mathrm{j} = \overline{2, n+1} \tag{3.45}$$

Для вилучення змінної x_1 у всіх інших рівняннях, зведене рівняння (3.44) множать на коефіцієнт a_{i1}, після чого його віднімають від i–го рівняння. В результаті отримаємо матрицю:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1\, a_{12}^{(3)} \ldots a_{1,n+1} \\ 0\, a_{22}^{(1)} \ldots a_{2,n+1}^{(2)} \\ \cdots \\ 0\, a_{n2}^{(2)} \ldots a_{n,n+1} \end{pmatrix} \tag{3.46}$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - a_{i1}^{(0)} \cdot \frac{a_{1j}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = a_{ij}^{(0)} - a_{i1}^{(0)} \cdot a_{1j}^{(1)}, \quad \begin{matrix} i = \overline{2, n} \\ j = \overline{2, n+1} \end{matrix} \tag{3.47}$$

На другому кроці залишають незмінними перший стовпчик і першу стрічку $A^{(1)}$. Аналогічні перетворення проводять зі стрічками починаючи з 2-ї і закінчуючи n-ю при умові, що $a_{22} \neq 0$. На k-ому кроці розрахункові формули (3.45) і (3.47) будуть мати вигляд:

$$a_{kk}^{(k-1)} \neq 0, \quad a_{kj}^{(k)} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad \begin{matrix} j = \overline{k+1, n+1} \\ k = \overline{1, n} \end{matrix} \tag{3.48}$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} \cdot a_{kj}^{(k)}, \quad \begin{matrix} i = \overline{k+1,n} \\ j = \overline{k+1,n+1} \\ k = \overline{1,n-1} \end{matrix} \tag{3.49}$$

Зауважимо, що формули (3.48) і (3.49) є загальними для будь-якого кроку. Проте, якщо формула (3.48) працює для всіх кроків, то формула (3.49) працює лише для випадків $k = \overline{1,n-1}$.

В результаті *прямого ходу методу Гауса* отримали систему лінійних рівнянь верхньої трикутної форми, в якій елементи головної діагоналі рівні одиниці, а піддіагональні елементи – нулі.

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ 0 & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n,n+1} \end{pmatrix}. \tag{3.50}$$

Зворотний хід методу Гауса полягає в тому, що $x_n = a_{n,n+1}^{(n)}$ одразу ж прирівнюється останній координаті вільних членів. Це означає, що на останньому кроці *прямого ходу* методу Гауса нами була отримана остання координата вектора невідомих. Останній крок прямого ходу методу Гауса є першим кроком зворотного ходу цього методу.

$$x_n = a_{n,n+1}^{(n)} \tag{3.51}$$

$$x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-1)} \cdot x_n = a_{n-1,n+1}^{(n-1)} \tag{3.52}$$

$$x_{n-1} = a_{n-1,n+1}^{(n-1)} - a_{n-1,n}^{(n-1)} \cdot x_n \tag{3. 53}$$

$$x_k = a_{k,n+1}^{(k)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k)} \cdot x_j, \quad k = \overline{n,1} \tag{3.54}$$

Формула (3.54) є загальним виглядом формул (3.51)-(3.53). Цю формулу у програмуванні можна приймати як загально прийняту умову: якщо нижній індекс суми перевищує верхній, то значення суми вважається рівним нулю. Для реалізації методу Гауса розрахунковими є формули (3.48), (3.49) і (3.54). При реалізації прямого ходу зроблено припущення, що діагональний елемент a_{kk} був відмінний від нуля. Якщо ж цей елемент дорівнює 0, то в цьому ж k-му стовпчику, починаючи з k+1-го елемента, шукається відмінний від нуля елемент. Якщо такий елемент є і має номер l ($a_{lk} \neq 0$), то здійснюється перестановка коефіцієнтів k-ї і l-ї стрічки. Як відомо, перестановка рівнянь системи місцями розв'язку не змінює.

Якщо ж всі елементи k-го стовпчика вийдуть рівними 0, то це свідчить про несумісність системи. В цьому випадку процес зупиняють і генерують відповідне повідомлення. Досліджено, що для реалізації методу Гауса потрібно виконати приблизно $\frac{2}{3}n^3$ арифметичних операцій (Програма А.1).

Висновок: для систем розмірності більше 1000 метод Гауса застосовувати не слід, тому що похибка заокруглень (у випадку її невдалого накопичення) може бути занадто великою.

3.6.3. Частковий випадок застосування методу Гауса з послідовним виключенням невідомих

Метод Гауса з послідовним виключенням невідомих (базовий метод) засновано на алгоритмі, в основі якого лежить послідовне виключення невідомих вектора $\bar{x}$ з усіх рівнянь, починаючи з (i+1)-го, шляхом елементарних перетворень: множення обох частин рівняння на будь-яке число, крім нуля; додавання (віднімання) до обох частин одного рівняння відповідних частин другого рівняння, помножених на будь-яке число, крім нуля. Суть алгоритму розглянемо на прикладі системи, яка складається з трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (3.55)$$

1) Перевіримо, щоб принаймні один із коефіцієнтів a_{11}, a_{21}, a_{31} не дорівнював нулю. Якщо, наприклад, $a_{11} = 0$, тоді необхідно переставити рівняння так, щоб коефіцієнт при x_1 у першому рівнянні не дорівнював нулю.

2) Обчислюється множник:

$$M_2 = \frac{a_{21}}{a_{11}}. \qquad (3.56)$$

3) Перше рівняння системи (3.55) множиться на M_2 і віднімається від другого рівняння системи, яка отримана після перестановки рівнянь (якщо перестановка була необхідна). Результат обчислення має вигляд:

$$(a_{21} - M_2 a_{11})x_1 + (a_{22} - M_2 a_{12})x_2 + (a_{23} - M_2 a_{13})x_3 = b_2 - M_2 b_1, \qquad (3.57)$$

$$a_{21} - M_2 a_{11} = a_{21} - \left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right) a_{11} = 0. \qquad (3.58)$$

Тоді x_1 виключається із другого рівняння. Позначимо нові коефіцієнти:

$$a'_{22} = a_{22} - M_2 a_{12};\ a'_{23} = a_{23} - M_2 a_{13};\ b'_2 = b_2 - M_2 b_1. \qquad (3.59)$$

Тоді друге рівняння системи (3.55) набуває вигляду:

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2. \qquad (3.60)$$

Далі необхідно звільнитися від коефіцієнта a_{31} при x_1 в третьому рівнянні системи (3.55) за аналогічним алгоритмом.

4) Обчислюється множник для третього рівняння:

$$M_3 = \frac{a_{31}}{a_{11}}. \qquad (3.61)$$

5) Перше рівняння системи (3.55) множиться на M_3 і віднімається від третього рівняння. Коефіцієнт при x_1 стає нулем, і третє рівняння набуває вигляду:

$$a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3, \qquad (3.62)$$

$$a'_{32} = a_{32} - M_3 a_{12}, \qquad (3.63)$$

$$a'_{33} = a_{33} - M_3 a_{13}, \qquad (3.64)$$

$$b'_3 = b_3 - M_3 b_1. \qquad (3.65)$$

Перетворена таким чином система рівнянь (3.55) набуває вигляду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ 0 \cdot x_1 + a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ 0 \cdot x_1 + a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3 \end{cases} \qquad (3.66)$$

Ця система рівнянь еквівалентна початковій і має певні переваги, оскільки x_1 входить тільки до першого рівняння. Спробуємо тепер виключити x_2 з останнього рівняння. Якщо $a_{22} = 0$, а $a_{32} \neq 0$, тоді переставимо друге й третє рівняння так, щоб $a_{22} \neq 0$. Інакше система вироджена і має безліч розв’язків.

7) Обчислюємо множник

$$M'_3 = \frac{a_{32}}{a_{22}}. \tag{3.67}$$

8) Друге рівняння системи (3.63) множиться на M'_3 і віднімається від 3-го рівняння:

$$\left(a'_{32} - M'_{33}a'_{22}\right)x_2 + \left(a'_{33} - M'_3 a'_{23}\right)x_3 = b'_3 - M'_3 b'_2. \tag{3.68}$$

При цьому коефіцієнт біля x_2 дорівнює нулю:

$$a'_{32} - M'_{33}a'_{22} = 0, \tag{3.69}$$

$$a''_{33} = a'_{33} - M'_3 a'_{23}, \tag{3.70}$$

$$b''_3 = b'_3 - M'_{32}b'_2. \tag{3.71}$$

$$a''_{33}x_3 = b''_3. \tag{3.72}$$

Замінивши в системі (3.66) третє рівняння на (3.72), отримаємо систему рівнянь виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ 0 \cdot x_1 + a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + a''_{33}x_3 = b''_3 \end{cases} \tag{3.73}$$

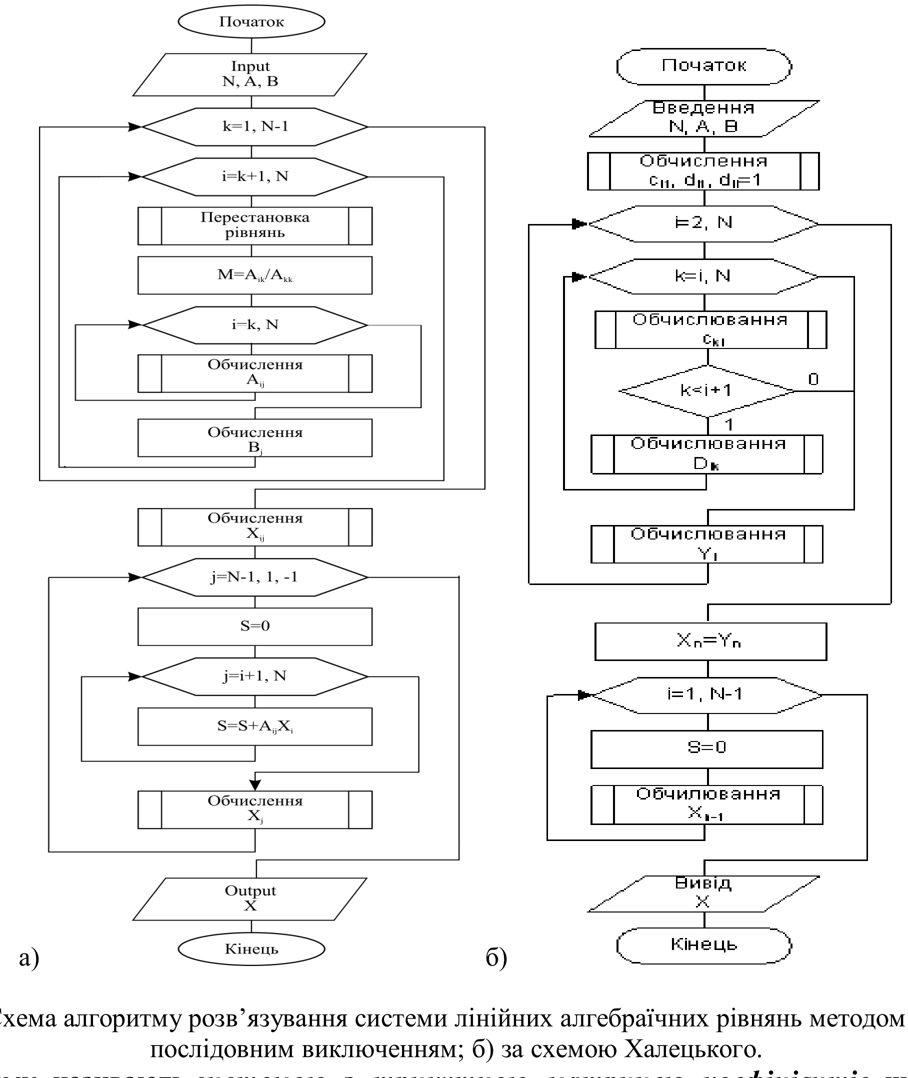


Рис. 3.2. Схема алгоритму розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса: а) з послідовним виключенням; б) за схемою Халецького.

Таку систему називають ***системою з трикутною матрицею коефіцієнтів,*** що еквівалентна СЛАР (3.55). Процес знаходження такої системи називається ***прямим ходом Гауса***. Знайти розв'язок такої системи просто: із 3-го рівняння знайти x_3, підставити результат у друге і знайти x_2, підставити x_2 і x_3 в 1-ше рівняння системи (3.73) і знайти x_1 за формулами:

$$x_3 = \frac{b_3''}{a_{33}''}, \tag{3.74}$$

$$x_2 = \frac{b_2' - a_{23}' x_3}{a_{22}'}, \tag{3.75}$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12} x_2 - a_{13} x_3}{a_{11}}. \tag{3.76}$$

Процес знаходження вектора розв'язку системи (3.55) називають ***зворотним ходом метода Гауса***. На рис. 3.2а показана схема алгоритму метода Гауса з послідовним виключенням для розв'язання системи із *N* рівнянь з *N* невідомими.

Ця схема відповідає розглянутому алгоритму і може бути використана при розробці програми. Блок "Перестановка рівнянь так, щоб $a_{nn} \neq 0$ " означає деякий алгоритм, який дає змогу не допустити помилки "ділення на 0". Якщо прямувати до можливого зменшення помилок округлення, то можна використати алгоритм з вибором головного елемента. Призначення індексів в схемі алгоритму (рис. 3.2а): *k* – номер рівняння, яке віднімається від інших, а також номер невідомого, яке виключається із *k* рівнянь, які залишились; *i* – номер рівняння, з якого в даний момент виключається невідоме; *j* – номер стовпця.

Приклад 3.13. Розв'язати систему за допомогою методу Гауса (приклад з підрозділу про метод Крамера).

$$\begin{cases} x + 2y + z = 5, \\ 3x + 4y + z = 11, \\ 7x + 2y + 5z = 21. \end{cases}$$

Розв'язок. Запишемо систему в матричні формі:

$$AX = B \text{, де } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 11 \\ 7 & 2 & 5 & 21 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & -12 & -2 & -14 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

(1) Перший рядок множимо на -3 та додаємо до другого рядка. Початковий перший рядок множимо на -7 та додаємо до третього рядка. Перший рядок переписуємо без змін, а наступні два рядка – зі змінами.

(2) Другий рядок множимо на -6 та додаємо до третього отриманий результат. Перший і другий рядки переписуємо без змін, а третій – зі змінами..

(3) Третій рядок ділимо на 10, другий рядок ділимо на -2, а перший переписуємо без змін. Тоді $z = 1$; $y + z = 2 \Rightarrow y = 1$; $x + 2y + z = 5 \Rightarrow x = 2$.

3.6.4. Метод Гауса за схемою Халецького (метод LU факторизації)

В літературі цей метод ще називається *схема Халецького* або *метод LU факторизації*. Алгоритм методу включає також прямий і зворотній хід. Кінцевою метою прямого ходу є отримання СЛАР, яка еквівалентна заданій, з верхньою трикутною матрицею коефіцієнтів. Суть цього методу ґрунтується на наступній теоремі алгебри. Для цього матрицю коефіцієнтів початкової системи рівнянь *A* або інакше довільну квадратну дійсну матрицю розбивають на дві трикутні:

$$A = L \cdot U, \tag{3.77}$$

де матриця L – нижня трикутна матриця; U – верхня трикутна матриця з одиничною головною діагоналлю при $l_{ij} = 0 \ (i < j)$, $u_{ij} = 0 \ (i > j)$ та $u_{ii} = 0$:

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & u_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \qquad (3.78)$$

Проте такий розклад передбачає безліч розв’язків. Тому, щоб виділити з цих розв’язків один, необхідно в одній із матриць L та U зафіксувати будь-яку стрічку, стовпчик чи діагональ. Таким чином, необхідно визначити ненульові елементи цих матриць. Для цього скористаємось правилом добутку двох матриць:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} u_{kj} \qquad i, j = \overline{1, n} \qquad (3.79)$$

при $l_{ij} = 0, \; \forall i < j; \;\; u_{ij} = 0, \; \forall i > j, \; u_{ii} = 1$.

Розпишемо суму у формулі (3.79) на три складові частини наступним чином:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} + l_{ij} u_{jj} + \sum_{k=j+1}^{n} l_{ik} u_{kj} \qquad (3.80)$$

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}, \; i \ge j \;, l_{i1} = a_{i1}, \;\; i = \overline{1, n} \qquad (3.81)$$

Запишемо формулу (3.79) в іншому вигляді:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} + l_{ii} u_{ij} + \sum_{k=i+1}^{n} l_{ik} u_{kj} \;, \quad \begin{matrix} i = \overline{2, n} \\ j = \overline{2, n+1} \end{matrix} \qquad (3.82)$$

$$u_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \right) / \, l_{ii}, \;\; u_{1j} = a_{1j} / a_{11}, \;\; j = \overline{2, n} \qquad (3.83)$$

Отже, за допомогою формул (3.81) і (3.83), в залежності від співвідношення між індексами *i* та *j*, можна почергово обчислювати елементи матриці *U* по стовпчиках.

Запишемо систему лінійних рівнянь (3.77) у вигляді

$$L \underbrace{U \overline{x}}_{\overline{y}} = \overline{b} \qquad (3.84)$$

Позначимо $U\overline{x} = \overline{y}$. Тоді, враховуючи, що матриця L – нижня трикутна,

$$L\overline{y} = \overline{b} \qquad (3.85)$$

$$y_i = (b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ij} y_k) / \, l_{ij} \quad i = \overline{1, n} \,. \qquad (3.86)$$

,

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}. \qquad (3.87)$$

Враховуючи введене позначення $U\overline{x} = \overline{y}$, і те, що матриця U є верхньою трикутною, то можна отримати координати шуканого вектор-розв’язку, скориставшись методом Гауса у зворотному порядку

$$\begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & u_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{3.88}$$

$$x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} x_k \tag{3.89}$$

при $x_n = y_n$ та $i = \overline{n-1,1}$

Існує певний зв'язок методу LU-факторизації з методом Гауса, так як в цьому методі прямий хід реалізується через обчислення значень $l_{ij}, u_{ij,}\ y_i$. При цьому слід зауважити, що y_i можна обчислювати одночасно з l_{ij} та u_{ij}.

Обчислення x_i представляє собою зворотній хід методу LU-факторизації.

Цей метод зручно використовувати для обчислення детермінант

$$\det A = \det LU = \det L \cdot \det U = \det L = \prod_{i=1}^{n} l_{ii} \tag{3.90}$$

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \forall i : l_{ii} \neq 0 \tag{3.91}$$

Якщо компоненти l_{ij} є відмінні від нуля, то можна зробити висновок про сумісність чи несумісність системи, що не вимагає доповнюючої перестановки стрічок.

Алгоритм визначення коефіцієнтів матриць L і U.

1) Обчислюється перший стовпець матриці L, перший рядок матриці U та y_1 за формулами:

$$l_{i1} = a_{i1}, \quad i = \overline{1,n};\ u_{11} = 1, \quad u_{1i} = \frac{a_{1i}}{a_{11}}, \quad i = \overline{2,n}. \tag{3.92}$$

$$y_1 = \frac{b_1}{a_{11}}. \tag{3.93}$$

2) Обчислюються елементи другого стовпця матриці L:

$$l_{i2} = a_{i2} - a_{i1} u_{12}, \quad i = \overline{2,n}, \tag{3.94}$$

елементи другого рядка матриці U та елемент y_2:

$$u_{21} = \frac{a_{2i} - l_{2i} u_{1i}}{a_{22}}, \tag{3.95}$$

$$y_2 = \frac{b_2 - l_{21} y_1}{a_{22}}. \tag{3.96}$$

3) Обчислюють елементи третього стовпця матриці L:

$$l_{i3} = a_{i3} - \left(l_{i1} u_{31} - l_{i2} u_{23}\right), \quad i = \overline{2,n}, \tag{3.97}$$

елементи третього рядка матриці D та елемент y_3:

$$u_{31} = \frac{a_{31} - \left(l_{31} u_{1i} + l_{32} u_{2i}\right)}{l_{33}}, \tag{3.98}$$

$$y_3 = \frac{b_3 - \left(l_{31} y_1 + l_{32} y_2\right)}{l_{33}} \tag{3.99}$$

і т.д.

Схема алгоритму метода Гауса за схемою Халецького показана на рисунку 3.2б. Загальний вигляд формул для обчислення l_{ki}, u_{ki}, y_i елементів матриць L, U і Y:

$$u_{ii} = 1\,;\; u_{1i} = \frac{a_{1i}}{a_{11}}\,;\; l_{i1} = a_{i1}\,;\; i = \overline{1,n}\,;\; y_1 = \frac{b_1}{a_{11}}\,. \tag{3.100}$$

$$l_{ki} = a_{ki} - \sum_{j=1}^{i} l_{kj} u_{ji}\,, \quad k = \overline{i,n}, \quad i = \overline{2,n}. \tag{3.101}$$

$$u_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{j=1}^{i} l_{ij} u_{jk}}{l_{ii}}, \quad k = \overline{i+1,n}. \tag{3.102}$$

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i} l_{ij} y_j}{l_{ii}}. \tag{3.103}$$

Метод LU-факторизації володіє кращою стійкістю порівняно з методом Гауса по відношенню до нагромадження похибок обчислень, а саме, виконує $n^3/3$ арифметичних операцій. Виходячи з цього, метод Гауса доцільно використовувати лише для систем розмірності не більше 100, так як в іншому випадку похибка заокруглення може бути непомірно великою, що взагалі призводить до неправильного результату.

3.6.5. Метод Гауса з вибором головного елемента

Ідея цього методу виникла у зв'язку з тим, що коефіцієнти СЛАР є параметрами реальних інженерних систем та в більшості є наближеними значеннями, тому що отримані в результаті вимірювання або як статистичні дані. Для таких систем рівнянь при обчисленні масштабного множника

$$M = \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \tag{3.104}$$

можлива ситуація при визначені a_{kk}, що ділення наближеного числа a_{ik} на достатньо мале число a_{kk} веде до різкого збільшення похибки методу. Тому для того, щоб не збільшувати похибку результату необхідно виконувати такі дії:

1) в системі (3.34) необхідно знайти в k-му стовпці найбільший за абсолютним значенням коефіцієнт a_{kj};

2) переставити k-те рівняння з рівнянням, у якому знаходиться цей максимальний коефіцієнт;

3) масштабний множник буде обчислюватись за формулою (3.104), де a_{kk} – максимальний коефіцієнт, а тому похибка розв'язування СЛАР у результаті арифметичних операцій не збільшується.

Схема алгоритму метода Гауса з вибором головного елемента (прямий та обернений хід) показана на рис. 3.3а.

3.6.6. Метод Гауса з одиничними коефіцієнтами

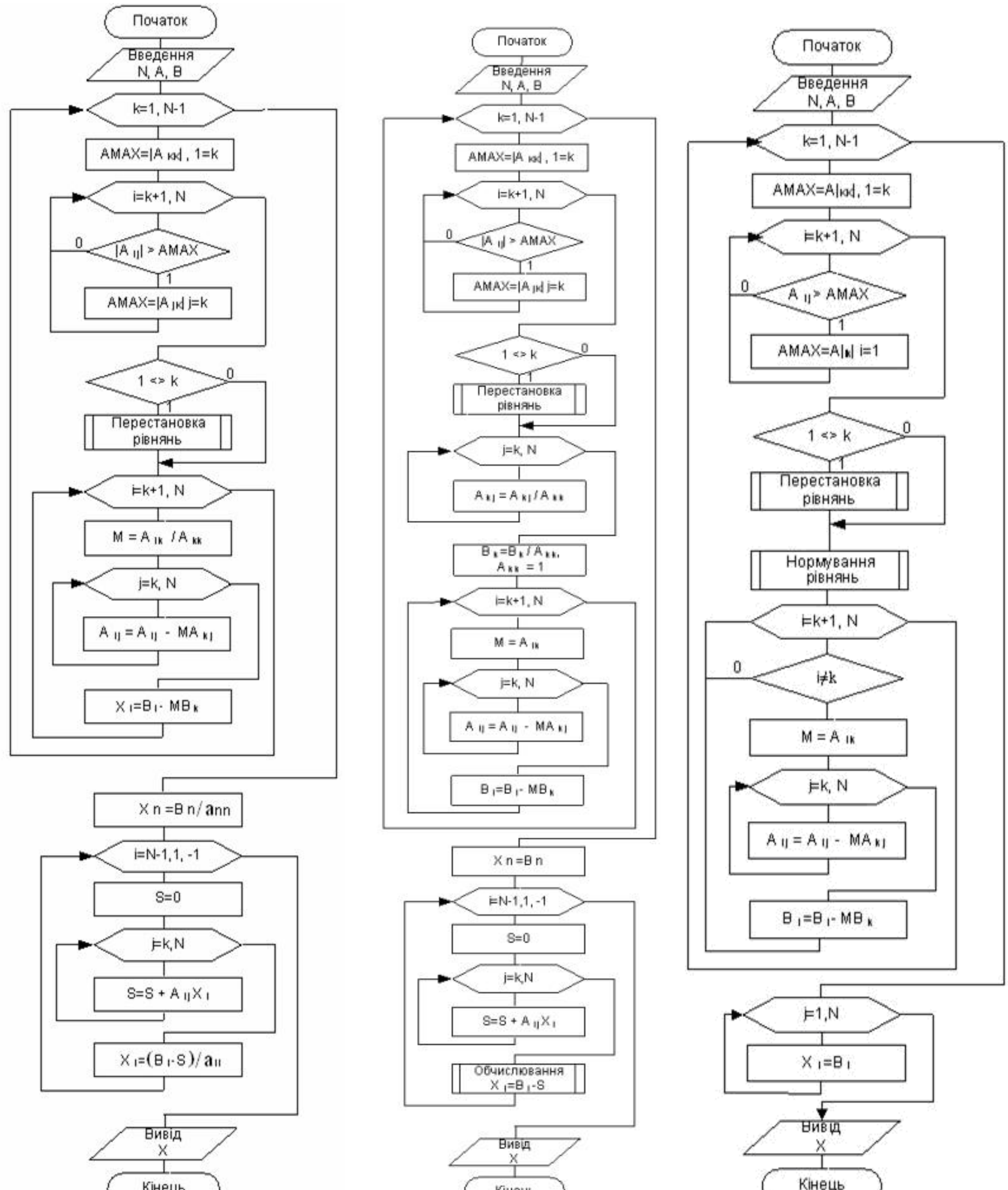
В цьому методі зроблена спроба зменшити недоліки перших двох методів, які пов'язані з багаторазовим діленням одного наближеного числа на інше. Для цього перед введенням масштабного множника k-те рівняння системи ділиться один раз на діагональний елемент a_{kk} так, щоб коефіцієнт при $x_k = 1$, а масштабний множник M_i буде дорівнювати a_{kj}. Результатом прямого ходу є система, яка еквівалентна СЛАР (3.34) з одиничними коефіцієнтами на головній діагоналі виду:

$$\begin{cases} 1\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1; \\ 0\cdot x_1 \quad + 1\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\cdot x_1 \quad + 0\cdot x_2 + \ldots + 1\cdot x_n = b_n. \end{cases} \tag{3.105}$$

Ця система схожа на систему (3.40), яка отримується в результаті прямого ходу базового методу Гауса з послідовним вилученням невідомих і відрізняється від неї тільки діагональними коефіцієнтами. Для отримання такої системи необхідно використовувати алгоритм, який включає в себе наступні етапи:

1. Організація циклу по всіх рівняннях від 1 до N-1 (k = 1, 2, …, N-1).

2. В кожному k-му стовпці визначається номер l-го рівняння з головним елементом (тобто номер l-го рівняння, в якому знаходиться коефіцієнт при x_n зі всіх рівнянь, починаючи з k-го до N-го).



а) б) в)

Рис. 3.3. Схема алгоритму метода Гауса: а)з вибором головного елемента, б) з одиничними коефіцієнтами; в) Гауса-Жордана.

3. Якщо номер цього рівняння l не дорівнює k (l<>k), тоді необхідно переставити місцями l-е рівняння з k-м.

4. Нормування k-го рівняння, тобто ділення всіх коефіцієнтів k-го рівняння на a_{kk} (головний елемент при x_n), включаючи b_n.

5. Перетворення всіх i-х рівнянь, починаючи з (k+1) до N, у відповідності з базовим алгоритмом Гауса з метою отримання еквівалентної системи з верхньою трикутною матрицею коефіцієнтів.

6. Кінець циклу по k.

Формула зворотного ходу для систем виду (3.105) спрощується і має вигляд:

$$\begin{aligned} &x_n = b_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_2 = b_2 - a_{2n}x_n, \\ &x_1 = b_1 - a_{1n}x_n - a_{12}x_2. \end{aligned} \tag{3.106}$$

Схема алгоритму методу Гауса з одиничними діагональними коефіцієнтами наведена на рисунку 3.3б.

Приклад 3.14. Розв’язати систему за допомогою методу Гауса з одиничними коефіцієнтами.

$$\begin{cases} 9x + 3y + z = 13, \\ 4x + 2y + z = 7, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$$

Розв’язок. Запишемо систему в матричні формі:

$$AX = B \text{, де } A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 1 & 13 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -36 & -12 & -4 & -52 \\ 36 & 18 & 9 & 63 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} -36 & -12 & -4 & -52 \\ 0 & 6 & 5 & 11 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)}$$

$$\xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} -36 & -12 & -4 & -52 \\ 0 & 6 & 5 & 11 \\ 0 & 24 & 32 & 56 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)} \left(\begin{array}{ccc|c} -36 & -12 & -4 & -52 \\ 0 & -24 & -20 & -44 \\ 0 & 0 & 12 & 12 \end{array}\right).$$

(1) Перший рядок множимо на -4, а другий на 9.

(2) До другого рядка додаємо перший рядок.

(3) Перший рядок множимо на 1, а третій на 36. До третього рядка додаємо перший рядок.

(4) Другий рядок множимо на -4, а третій на 1. До третього рядка додаємо другий рядок.

Тоді $12z = 12 \Rightarrow z = 1$;

$-24y + 20z = -44 \Rightarrow -24y + 20 = -44 \Rightarrow -24y = -24 \Rightarrow y = 1$;

$-36x - 12y - 4z = -52 \Rightarrow -36x - 12 - 4 = -52 \Rightarrow -36x = -36 \Rightarrow x = 1$.

3.6.7. Метод Гауса-Жордана

Припустимо, що дано систему з трьома рівняннями, трьома невідомими і записана її розширена матриця

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right).$$

У найбільш поширеному випадку виходять стандартні ступені вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right) \text{ або } \left(\begin{array}{ccc|c} * & 0 & 0 & * \\ * & * & 0 & * \\ * & * & * & * \end{array}\right),$$

причому останній абсолютно рівноцінний і може бути незручним тільки через суб'єктивне сприйняття. Жордан запропонував розв’язувати задачу такого типу без зі зворотного ходу гаусівського алгоритму:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right).$$

Метод Гауса-Жордана є модифікацією методу Гауса.

Особливістю метода Гауса-Жордана є перетворення системи (3.34) (прямий хід) до еквівалентної з одиничною матрицею коефіцієнтів виду:

$$\begin{cases} 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \ldots + 0\cdot x_n = b_1; \\ 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + \ldots + 0\cdot x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \ldots + 1\cdot x_n = b_n. \end{cases} \tag{3.107}$$

тобто системи, яка містить тільки одиничну діагональ.

Для отримання такої системи до прямого ходу алгоритму базового методу Гауса (з послідовним виключенням невідомих) додатково вводяться наступні дії:

1. Організація циклу по k по всіх рівняннях від 1 до N-1 (k = 1, 2, …, N-1).

2. Процедура вибору головного елементу в кожному k-му стовпці при x_k.

3. Процедура нормування k-го рівняння системи, тобто в k-му рівнянні кожен коефіцієнт a_{kj} розділити на a_{kk}, включаючи b_k, так, щоб коефіцієнт a_{kk}=1.

4. Перетворення всіх рівнянь системи, починаючи з 1-го до N у відповідності з базовим алгоритмом Гауса з метою отримати еквівалентну систему з одиничною діагоналлю. В цьому випадку для розрахунку коефіцієнтів a_{ij} використовуються ті самі формули, що і в базовому алгоритмі Гауса:

$$M = a_{ik}; \quad a_{ij} = a_{ij} - M\cdot a_{kj}; \quad b_i = b_i - M\cdot b_k, \tag{3.108}$$

але використовуються вони для всіх рівнянь з 1-го до N крім k-го, в якому залишається коефіцієнт a_{kk} рівний одиниці.

5. Кінець циклу по k.

Зворотний хід методу Гауса-Жордана дуже простий і використовує наступні формули: $x_k = b_k$, при $k = \overline{1,n}$. Схема алгоритму подана на рисунку 3.3в.

Приклад 3.15. Розв’язати систему за допомогою методу Гауса-Жордана.

$$\begin{cases} 9x + 3y + z = 13, \\ 4x + 2y + z = 7, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$$

Розв’язок. Запишемо систему в матричні формі:

$$AX = B, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 1 & 13 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -36 & -12 & -4 & -52 \\ 36 & 18 & 9 & 63 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} -36 & -12 & -4 & -52 \\ 0 & 6 & 5 & 11 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)}$$

$$\xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} -36 & -12 & -4 & -52 \\ 0 & 6 & 5 & 11 \\ 0 & 24 & 32 & 56 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)} \left(\begin{array}{ccc|c} -36 & -12 & -4 & -52 \\ 0 & -24 & -20 & -44 \\ 0 & 0 & 12 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{(5)}$$

$$\xrightarrow{(5)} \left(\begin{array}{ccc|c} -36 & -12 & -4 & -52 \\ 0 & -24 & -20 & -44 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(6)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 12/36 & 4/36 & 52/36 \\ 0 & 1 & 20/24 & 44/24 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(7)}$$

$$\xrightarrow{(7)}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 12/36 & 4/36 & 52/36 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{(8)}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4/36 & 40/36 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{(9)}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

(1) Перший рядок множимо на -4, а другий – на 9.
(2) До другого рядка додаємо перший рядок.
(3) Перший рядок множимо на 1, а третій на 36. До третього рядка додаємо перший рядок.
(4) Другий рядок множимо на -4, а третій – на 1. До третього рядка додаємо другий рядок.
(5) Третій рядок ділимо на 12.
(6)Перший рядок ділимо на 36, а другий – на 24 (залишаємо дробами)
(7) Згідно формули (3.95) $M = a_{23} = 20/24$; $a_{2j} = a_{2j} - M \cdot a_{3j}$; $b_2 = b_2 - M \cdot b_3$.
(8) Згідно формули (3.95) $M = a_{12} = 12/36$; $a_{1j} = a_{1j} - M \cdot a_{2j}$; $b_1 = b_1 - M \cdot b_2$.
(9) Згідно формули (3.95) $M = a_{13} = 4/36$; $a_{1j} = a_{1j} - M \cdot a_{3j}$; $b_1 = b_1 - M \cdot b_3$.
Тоді $z = 1$; $y = 1$; $x = 1$.

3.6.8. Приклади розв'язування системи методом Гауса

Матриця системи – це матриця, яка складається тільки з коефіцієнтів при невідомих, в даному прикладі СЛАР:

$$\begin{cases} x - y = -5, \\ 2x + y = -7, \end{cases}$$

матриця системи – це

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розширена матриця системи – це та ж матриця системи та стовпець вільних членів, в даному випадку:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right).$$

Будь-яку з матриць для стислості називають просто матрицею. Після запису розширеної матриці системи необхідно виконати деякі дії, які називають елементарними перетвореннями. Існують наступні елементарні перетворення:

1) Рядки матриці можна переставляти місцями. Наприклад, в цій матриці можна переставити перший і другий рядки:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & -5 \end{array}\right).$$

2) Якщо в матриці є (або з'явилися) пропорційні (як окремий випадок – однакові) рядки, то слід видалити з матриці всі ці рядки крім одного. Розглянемо, наприклад матрицю

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 6 \end{array}\right).$$

У цій матриці останні три рядки пропорційні, тому досить залишити тільки один із них:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

3) Якщо в матриці в ході перетворень з'явився нульова рядок, то його також необхідно знищити. Нульовий рядок – це рядок, в якому тільки нулі.

4) Рядок матриці можна помножити (поділити) на будь-яке число, відмінне від нуля. Розглянемо, наприклад, матрицю

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 9 & 15 \\ 0{,}5 & 0 & 2{,}5 \end{array}\right).$$

Тут доцільно перший рядок розділити на -3, а другий рядок помножити на 2:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 9 & 15 \\ 0{,}5 & 0 & 2{,}5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -5 \\ 1 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

Ця дія дуже корисна, оскільки спрощує наступні перетворення матриці.

5) Це перетворення викликає найбільші труднощі, але насправді – нічого складного немає. До рядка матриці можна додати інший рядок, помножений на число, відмінне від нуля. Розглянемо матрицю з практичного прикладу:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right).$$

Спочатку розпишемо перетворення докладно. Множимо перший рядок на –2:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right),$$

і до другого рядка додаємо перший рядок помножений на –2:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right).$$

Тепер перший рядок можна розділити «знову» на –2:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right).$$

Як бачите, рядок, який додавали – не змінився. Завжди змінюється рядок, до якого додають. На практиці так докладно, звичайно, не розписують, а пишуть коротше:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right).$$

Ще раз: до другого рядка додали перший рядок, помножений на -2. Множать рядок зазвичай усно або на чернетці, при цьому уявний хід розрахунків приблизно такий:

1. Переписують матрицю і переписують перший рядок:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ * & * & * \end{array}\right).$$

2. Спочатку перший стовпець. Знизу потрібно отримати нуль. Тому одиницю вгорі множать на -2: $1 \cdot (-2) = -2$, до другого рядка додають першу: 2 + (-2) = 0. Записують результат у другому рядку:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & * & * \end{array}\right).$$

3. Тепер другий стовпець. Зверху -1 помножити на -2: $-1 \cdot (-2) = 2$. До другої рядку додаю першу: 1 + 2 = 3. Записую результат у другому рядку:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & * \end{array}\right).$$

4. І третій стовпець. Зверху -5 множать на –2: $-5 \cdot (-2) = 10$. До другого рядка додають перший: -7 + 10 = 3. Записують результат у другому рядку:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right).$$

Необхідно ретельно осмислити цей приклад і розібратись в послідовному алгоритмі обчислень. Якщо це зрозуміло, то метод Гауса практично «в кишені». Але, над цим перетворенням потрібно попрацювати.

Елементарні перетворення не змінюють розв’язку системи рівнянь.

Розглянуті дії не можна використовувати, якщо Вам запропоновано завдання, де матриці дано «самі по собі». Наприклад, при «класичних» діях з матрицями щось переставляти всередині матриць ні в якому разі не можна.

Приклад 3.16. Розв'язати систему за допомогою метода Гауса (заміни змінних).

$$\begin{cases} x-y=-5, \\ 2x+y=-7. \end{cases}$$

Розв'язок. На першому етапі (прямий хід методу Гауса) потрібно записати розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right).$$

Запишемо розширену матрицю системи і за допомогою елементарних перетворень приведемо її до східчастого вигляду:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

(1) До другого рядка додали перший рядок, помножений на -2. І знову: чому перший рядок множимо саме на -2? Для того щоб внизу отримати нуль, а значить, позбутися однієї змінної у другому рядку.

(2) Ділимо другий рядок на 3. Мета елементарних перетворень – привести матрицю до ступінчастого вигляду (під головною діагоналлю всі 0, а діагональ складена з 1):

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

В результаті елементарних перетворень отримана система рівнянь, яка еквівалентна до вихідної (початок зворотного ходу):

$$\begin{cases} x-y=-5, \\ y=1. \end{cases}$$

Тепер систему потрібно «розкрутити» у зворотному напрямку – знизу до верху, цей процес називається зворотним ходом методу Гауса. У нижньому рівнянні у нас вже готовий результат: $y=1$. Розглянемо перше рівняння системи $x-y=-5$ і підставимо в нього вже відоме значення $y=1$: $x-1=-5$ та $x=-4$.

Тоді розв'язок СЛАР $x=-4$ та $y=1$.

Розглянемо найбільш поширену ситуацію, коли методом Гауса потрібно розв'язати систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими.

Приклад 3.17. Розв'язати систему за допомогою метода Гауса (заміни змінних).

$$\begin{cases} 3x+2y-5z=-1, \\ 2x-y+3z=13, \\ x+2y-z=9. \end{cases}$$

Розв'язок. Запишемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right).$$

Мета – за допомогою елементарних перетворень привести матрицю до ступінчастого вигляду. Спочатку дивимося на ліве верхнє $a_{11}=3$. У більшості випадків тут повинна знаходитися одиниця. Взагалі кажучи, влаштує і -1 (а іноді і інші числа), але якось так традиційно склалося, що туди зазвичай поміщають одиницю. Як організувати одиницю? Дивимося на перший стовпець – готова одиниця у нас є! Перетворення перше: міняємо місцями перший і третій рядки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right).$$

Тепер перший рядок у нас залишиться незмінним до кінця розв'язування. Одиниця в лівому верхньому кутку отримана. Тепер потрібно отримати нулі на a_{21} та a_{31} (тобто в першому стовпці під головною діагоналлю). Нулі отримуємо саме за допомогою «важкого» перетворення. Спочатку розбираємося з другим рядком (2, -1, 3, 13). Що потрібно зробити, щоб на першій позиції отримати нуль? Потрібно до другого рядка додати перший рядок, помножений на -2. Подумки або на чернетці множимо перший рядок на -2: (-2, -4, 2, -18). І послідовно проводимо (знову ж подумки або на чернетці) додавання: до другого рядка додаємо перший рядок, вже помножений на -2:

$$\begin{array}{cccc} 0 & -5 & 5 & -5 \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ -2 & -4 & 2 & -18 \\ + & + & + & + \\ 2 & -1 & 3 & 13 \end{array}$$

Результат записуємо у другому рядку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right).$$

Аналогічно розбираємося з третім рядком (3, 2, -5, -1). Щоб отримати на першій позиції нуль, потрібно до третього рядка додати перший рядок, помножений на -3. Подумки або на чернетці множимо перший рядок на -3: (-3, -6, 3, -27). І до третього рядка додаємо перший рядок, помножений на -3:

$$\begin{array}{cccc} 0 & -4 & -2 & -28 \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ -3 & -6 & 3 & -27 \\ + & + & + & + \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}$$

Результат потрібно записати в третій рядок:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right).$$

На практиці ці дії зазвичай виконуються усно і записуються в один крок:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right).$$

Не потрібно рахувати все відразу й одночасно. Порядок обчислень і «вписування» результатів послідовний і зазвичай такий: спочатку переписуємо перший рядок і рухаємось ПОСЛІДОВНО та УВАЖНО:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ * & * & * & * \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & * & * & * \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & * & * \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & * \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right).$$

Уявний хід розрахунків вже розглянуто вище. Далі потрібно отримати одиницю наступної «сходинки» a_{22} (одиниці на головній діагоналі). В цьому прикладі це зробити легко, другий рядок ділимо на -5 (оскільки там всі числа діляться на 5 без залишку). Ділимо третій рядок на -2, адже чим менше числа, тим простіший розв'язок:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right).$$

На заключному етапі елементарних перетворень потрібно отримати ще один нуль на a_{32}. Для цього до третього рядка додаємо другий рядок, помножений на -2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Спробуйте розібрати цю дію самостійно – подумки помножте другий рядок на -2 і проведіть додавання. Остання виконана дія – приведення результату: ділимо третій рядок на 3. В результаті елементарних перетворень отримана еквівалентна до вихідної система лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 9, \\ y - z = 1, \\ z = 4. \end{cases}$$

Застосовуємо зворотний хід методу Гауса. Рівняння «розкручуються» знизу до верху. У третьому рівнянні у нас вже готовий результат: $z = 4$. Дивимося на друге рівняння: $y - z = 1$. Значення z вже відомо, таким чином: $y - 4 = 1$ та $y = 5$. І, нарешті, перше рівняння: $x + 2y - z = 9$. Дві змінні відомі, далі: $x + 2 \cdot 5 - 4 = 9$; $x + 6 = 9$ та $x = 3$. Тоді: $x = 3$, $y = 5$, $z = 4$.

Як вже зазначалося, для будь-якої системи рівнянь можна і потрібно зробити перевірку знайденого розв'язку (це нескладно і швидко).

Приклад 3.18. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1, \\ 2x - y + 2z = 6, \\ x + y + 5z = -1. \end{cases}$$

Розв'язок. Запишемо розширену матрицю системи і за допомогою елементарних перетворень зведемо її до східчастого вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 4 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)}$$

$$\xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 14 & -14 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Виконано елементарні перетворення:

(1) до другого рядка додали перший рядок, помножений на -2. До третього рядка додали перший рядок, помножений на -1. Може виникнути бажання від третього рядка відняти перший, але це не рекомендовано – сильно підвищується ризик помилки.

(2) У другому рядку змінили знак (помножили на -1). Другий і третій рядки поміняли місцями. Зверніть увагу, що на «сходинках» нас влаштовує не тільки одиниця, але ще й -1, що навіть зручніше.

(3) До третього рядка додали другий рядок, помножений на 5.

(4) У другому рядку змінили знак (помножили на -1). Третій рядок розділили на 14.

$z = -1$, та $y - 2z = 2 \Rightarrow y + 2 = 2 \Rightarrow y = 0$, і $x + 2y + 3z = 1 \Rightarrow x + 0 - 3 = 1 \Rightarrow x = 4$.

Тоді $x=4$, $y=0$, $z=-1$.

Слід зазначити, що один хід розв'язування може не збігтися з іншим ходом розв'язування, і це – особливість методу Гауса. Але відповіді обов'язково повинні вийти однаковими.

Приклад 3.19. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 4x+2y-z=1, \\ 5x+3y-2z=2, \\ 3x+2y-3z=0. \end{cases}$$

Розв'язок. Запишемо розширену матрицю системи і за допомогою елементарних перетворень зведемо її до східчастого вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right).$$

Дивимося на ліву верхню «сходинку». Там у нас повинна бути одиниця. Проблема полягає в тому, що в першому стовпці одиниць немає взагалі, тому перестановкою рядків нічого не вирішити. У таких випадках одиницю потрібно організувати за допомогою елементарного перетворення. Зазвичай це можна зробити декількома способами.

(1) Наприклад, до першої рядка додаємо другий рядок, помножений на -1. Тобто, подумки помножили другий рядок на -1 і виконали додавання першого та другого рядка, при цьому другий рядок у нас не змінився.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right).$$

Тепер зліва вгорі «мінус один», що нас цілком влаштує. Щоб отримати +1, можна виконати додатково: помножити перший рядок на -1 (змінити знак). Далі алгоритм працює вже як раніше:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)}$$

$$\xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

(2) До другого рядка додали перший рядок, помножений на 5. До третього рядка додали перший рядок, помножений на 3.

(3) Перший рядок помножили на -1. У третього рядка також змінили знак і переставили його на друге місце. Таким чином, на другій «сходинці» у нас з'явилася потрібна одиниця.

(4) До третього рядка додали другий рядок, помножений на 2.

(5) Третій рядок розділили на 3.

Поганою ознакою, що свідчить про помилку в обчисленнях (рідко про друкарську помилку), є «поганий» нижній рядок. Тобто, якщо у нас внизу вийшло щось на кшталт $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 11 & 23 \end{array}\right)$, і відповідно, $11z=23 \Rightarrow z=\dfrac{23}{11}$, то з великою ймовірністю можна стверджувати, що допущена помилка в ході елементарних перетворень. Проводимо зворотний хід, в оформленні прикладів часто вже не переписують саму систему, а рівняння «беруть прямо з наведеної матриці» (зворотний хід працює знизу до верху). Отримуємо:

$$z=1;\ y=3 \text{ та } x+y-z=1 \Rightarrow x+3-1=1 \Rightarrow x=-1.$$

Тоді: $x=-1$; $y=3$; $z=1$.

Приклад 3.20. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 8x+7y+3z=18, \\ -7x-4y-4z=-11, \\ -6x+5y-4z=-15. \end{cases}$$

Розв'язок. Цей приклад для самостійного розв'язування, він трохи складніший. Запишемо розширену матрицю системи і за допомогою елементарних перетворень зведемо її до східчастого вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 7 & 3 & 18 \\ -7 & -4 & -4 & -11 \\ -6 & 5 & -4 & -15 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ -7 & -4 & -4 & -11 \\ -6 & 5 & -4 & -15 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 17 & -11 & 38 \\ 0 & 23 & -10 & 27 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)}$$

$$\xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 17 & -11 & 38 \\ 0 & 6 & 1 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & -14 & 71 \\ 0 & 6 & 1 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow{(5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & -14 & 71 \\ 0 & 0 & -83 & 415 \end{array}\right) \xrightarrow{(6)}$$

$$\xrightarrow{(6)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 14 & -71 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right).$$

Виконані перетворення:

(1) До першого рядка додали другий. Таким чином, організована потрібна одиниця на лівій верхній «сходинці».

(2) До другого рядка додали перший рядок, помножений на 7. До третього рядка додали перший рядок, помножений на 6. З другої «сходинкою» все гірше, «кандидати» на неї – числа 17 і 23, а нам потрібна або +1, або -1. Перетворення (3) і (4) будуть спрямовані на отримання потрібної одиниці.

(3) До третього рядка додали другий, помножений на -1.

(4) До другого рядка додали третій, помножений на -3. Потрібне на другій сходинці отримано.

(5) До третього рядка додали другий, помножений на 6.

(6) Другий рядок помножили на -1, третій рядок розділили на -83.

Зворотній хід: $z = -5$;

$y + 14z = -71 \Rightarrow y - 70 = -71 \Rightarrow y = 1$;

$x + 3y - z = 7 \Rightarrow x - 3 + 5 = 7 \Rightarrow x = 5$.

Тоді: $x = 5$, $y = 1$, $z = -5$.

Розглянемо деякі *особливості алгоритму Гауса*. Перша особливість полягає в тому, що іноді в рівняннях системи відсутні деякі змінні, наприклад:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ 3y + 4z + 6 = 0 \\ x + z = 1. \end{cases}$$

У розширеній матриці системи на місці відсутніх змінних ставимо нулі:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -6 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

До речі, це досить легкий приклад, оскільки в першому стовпці вже є один нуль, і необхідно виконати менше елементарних перетворень. Друга особливість полягає ось у чому. У всіх розглянутих прикладах на «сходинки» ми розміщали або -1, або +1. Чи можуть там бути інші числа? У деяких випадках можуть. Розглянемо систему:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2, \\ 2x + y - 4z = 9, \\ 6x - 5y + 2z = 17. \end{cases}$$

Тут на лівій верхній «сходинці» у нас двійка. Але візначимо, що всі числа в першому стовпці діляться на 2 без залишку: і інша 2, і 6. І двійка зліва вгорі нас влаштує. На першому етапі необхідно виконати наступні перетворення: до другого рядка додати перший рядок, помножений на -1; до третього рядка додати перший рядок, помножений на -3. Таким чином, ми отримаємо потрібні нулі в першому стовпчику. Або ще такий умовний приклад:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 & | & 4 \\ 0 & 3 & -1 & | & 17 \\ 0 & 12 & 2 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

Тут трійка на другий «сходинці» теж нас влаштовує, оскільки 12 (місце, де нам потрібно отримати нуль) ділиться на 3 без залишку. Необхідно провести наступне перетворення: до третього рядка додати другий рядок, помножений на -4, в результаті чого і буде отримано потрібний нам нуль.

Метод Гауса універсальний, але є одне особливість. Впевнено навчитися розв'язувати системи іншими методами (методом Крамера, матричним методом) можна з першого разу – там дуже жорсткий алгоритм. Але от щоб впевнено себе почувати в методі Гауса, слід розв'язати хоча б 5-10 систем. Тому спочатку можливі помилки в обчисленнях, і в цьому немає нічого незвичайного.

Приклад 3.21. Розв'язати методом Гауса систему лінійних рівнянь з чотирма невідомими:

$$\begin{cases} 2x+5y+4z+t=20, \\ x+3y+2z+t=11, \\ 2x+10y+9z+7t=40, \\ 3x+8y+9z+2t=37. \end{cases}$$

Розв'язок. Таке завдання на практиці зустрічається не так вже й рідко. Алгоритм розв'язування такої системи інтуїтивно зрозумілий. Принципово все таке ж, просто дій більше. Випадки, коли система не має розв'язків (несумісна) або має нескінченно багато розв'язків, розглянуті в пункті про несумісні системи і системи з частковим розв'язком.

Запишемо матрицю системи і за допомогою елементарних перетворень зведемо її до східчастого вигляду:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 & | & 20 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & | & 11 \\ 2 & 10 & 9 & 7 & | & 40 \\ 3 & 8 & 9 & 2 & | & 37 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & | & 11 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & | & 20 \\ 2 & 10 & 9 & 7 & | & 40 \\ 3 & 8 & 9 & 2 & | & 37 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & | & 11 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & | & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 5 & | & 18 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & | & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)}$$

$$\xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & | & 11 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & | & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & | & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & | & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & | & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{(5)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & | & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Виконані перетворення:

(1) Перший і другий рядки поміняли місцями.

(2) До другого рядка додали перший рядок, помножений на -2. До третього рядка додали перший рядок, помножений на -2. До четвертого рядка додали перший рядок, помножений на -3.

(3) До третього рядка додали другий, помножений на 4. До четвертого рядка додали другий, помножений на -1.

(4) У другого рядка змінили знак. Четвертий рядок розділили на 3 та помістили замість третього рядка.

(5) До четвертого рядка додали третій рядок, помножений на -5.

Зворотній хід: $t=0$; $z=2$; $y+t=2 \Rightarrow y=2$;

$x+3y+2z+t=11 \Rightarrow x+6+4+0=11 \Rightarrow x=1$.

Тоді: $x=1$; $y=2$; $z=2$ та $t=0$.

Приклад 3.22. Розв'язати систему за допомогою методу Гауса-Жордана.

$$\begin{cases} 3x+2y-5z=-1, \\ 2x-y+3z=13, \\ x+2y-z=9. \end{cases}$$

Розв'язок. Запишемо систему в матричні формі та зведемо до східчастого вигляду:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & | & -1 \\ 2 & -1 & 3 & | & 13 \\ 1 & 2 & -1 & | & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 9 \\ 2 & -1 & 3 & | & 13 \\ 3 & 2 & -5 & | & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 9 \\ 0 & -5 & 5 & | & -5 \\ 0 & -4 & -2 & | & -28 \end{pmatrix} \to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 9\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 14\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 9\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 12\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 9\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 4\end{array}\right).$$

Тепер замість зворотного ходу використовуємо додаткові елементарні перетворення. Спочатку необхідно отримати нулі на місцях, a_{13} та a_{23}, а потім ще один нуль на a_{12}. Ідеальний з точки зору простоти випадок:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 9\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 4\end{array}\right)\xrightarrow{(1)}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & 13\\ 0 & 1 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 4\end{array}\right)\xrightarrow{(2)}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 4\end{array}\right).$$

(6) До другого рядка додали третій рядок. До першого рядка додали третій рядок.

(7) До першого рядка додали другий рядок, помножений на -2.

Підсумкова система:

$$\begin{cases} x = 3,\\ y = 5,\\ z = 4.\end{cases}$$

3.6.9. Несумісні системи. Системи із загальним розв'язком. Часткові розв'язки

Продовжуємо розглядати системами лінійних рівнянь. До цих пір це були системи, які сумісні і мають єдиний розв'язок. Такі системи можна розв'язати будь-яким способом: методом підстановки, за формулами Крамера, матричним методом, методом Гауса. Однак на практиці широко поширені ще два випадки:

- Система *несумісна* (не має розв'язків);
- Система *сумісна* і має нескінченно багато розв'язків.

Зауваження. Термін «сумісність» означає, що у системи існує хоч один розв'язок. У ряді завдань потрібно попередньо дослідити систему на сумісність. Для цих систем застосовують найбільш універсальний з усіх способів розв'язування – метод Гауса. У вищій математиці прийнято використовувати гаусівський метод послідовного виключення невідомих. Спочатку розглянемо пару прикладів, коли система не має розв'язків (несумісна).

Приклад 3.23. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8,\\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7,\\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 1.\end{cases}$$

Розв'язок. В цій системі кількість рівнянь менша, ніж кількість змінних. Якщо кількість рівнянь менша, ніж кількість змінних, то відразу можна сказати, що система або несумісна, або має нескінченно багато розв'язків. І це залишилося тільки з'ясувати. Початок розв'язування абсолютно звичайний: запишемо розширену матрицю системи і за допомогою елементарних перетворень зведемо її до східчастого вигляду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}4 & -3 & 2 & -1 & 8\\ 3 & -2 & 1 & -3 & 7\\ 5 & -3 & 1 & -8 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{(1)}\left(\begin{array}{cccc|c}-1 & 0 & 1 & 7 & 7\\ 3 & -2 & 1 & -3 & 7\\ 5 & -3 & 1 & -8 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{(2)}\left(\begin{array}{cccc|c}-1 & 0 & 1 & 7 & 7\\ 0 & -2 & 4 & 18 & 28\\ 0 & -3 & 6 & 27 & 36\end{array}\right)\xrightarrow{(3)}$$

$$\xrightarrow{(3)}\left(\begin{array}{cccc|c}-1 & 0 & 1 & 7 & 7\\ 0 & -1 & 2 & 9 & 14\\ 0 & 1 & -2 & -9 & 12\end{array}\right)\xrightarrow{(4)}\left(\begin{array}{cccc|c}-1 & 0 & 1 & 7 & 7\\ 0 & -1 & 2 & 9 & 14\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{array}\right).$$

(1) На лівій верхній сходинці нам потрібно отримати +1 або -1. Таких чисел в першому стовпці немає, тому перестановка рядків нічого не дасть. Одиницю доведеться організувати самостійно, і зробити це можна кількома способами. Робимо так: До першого рядка додаємо третій рядок, помножений на -1.

(2) Тепер отримуємо два нулі в першому стовпці. До другого рядка додаємо перший рядок, помножений на 3. До третього рядка додаємо перший рядок, помножений на 5.

(3) Після виконаного перетворення завжди доцільно подивитися, чи не можна спростити отримані рядки. Можна, можливо. Другий рядок ділимо на 2, заодно отримуючи потрібну -1 на другій сходинці. Третій рядок ділимо на -3.

(4) До третього рядка додаємо другий рядок.

Напевно, звернули увагу на рядок, який вийшов в результаті елементарних перетворень: $\left(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 | 2\right)$. Зрозуміло, що так бути не може. Дійсно, перепишемо отриману матрицю назад в систему лінійних рівнянь:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 7 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 9 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Якщо в результаті елементарних перетворень отримано рядок виду $\left(0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 | \lambda\right)$*, де* λ *- число, відмінне від нуля, то система несумісна (не має розв'язків).*

Як записати кінець завдання? В результаті елементарних перетворень отримано рядок виду $\left(0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 | \lambda\right)$, де $\lambda \neq 0$ і відповідь: система не має розв'язків (несумісна). Якщо ж за умовою потрібно досліджувати систему на сумісність, тоді необхідно оформити розв'язок в іншому стилі із залученням поняття рангу матриці і теореми Кронекера-Капеллі. Зверніть увагу, що тут немає ніякого зворотного ходу алгоритму Гауса – розв'язків немає і знаходити просто нічого.

Приклад 3.24. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 7x - 2y - z = 2, \\ 6x - 4y - 5z = 3, \\ x + 2y + 4z = 5. \end{cases}$$

Розв'язок. Запишемо розширену матрицю системи і за допомогою елементарних перетворень зведемо її до східчастого вигляду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -2 & -1 & 2 \\ 6 & -4 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & -4 & -5 & 3 \\ 7 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -16 & -29 & -27 \\ 0 & -16 & -29 & -33 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -16 & -29 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right).$$

Виконано елементарні перетворення:

(1) Перший і третій рядок поміняли місцями.

(2) До другого рядка додали перший рядок, помножений на -6. До третього рядка додали перший рядок, помножений на -7.

(3) До третього рядка додали другий рядок, помножений на -1. В результаті елементарних перетворень отримано рядок виду $\left(0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 | \lambda\right)$, де $\lambda \neq 0$, значить, система несумісна.

Відповідь: розв'язків немає.

Знову нагадуємо, що ваш хід розв'язування може відрізнятися від цього ходу розв'язування: у алгоритму Гауса немає сильної «жорсткості». Ще одна технічна особливість: елементарні перетворення можна припиняти відразу ж, як тільки з'явився рядок виду $\left(0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 | \lambda\right)$, де $\lambda \neq 0$.

Розглянемо умовний приклад: припустимо, що після першого ж перетворення вийшла матриця

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 12 & -9 & 8 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right).$$

Матриця ще не приведена до ступінчастого вигляду, але в подальших елементарних перетвореннях немає ніякої необхідності, тому що з'явився рядок виду $\left(0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 | \lambda\right)$, де $\lambda \neq 0$. Слід відразу дати відповідь, що система несумісна. Коли система лінійних рівнянь не має розв'язків - це майже подарунок, з огляду на те, що виходить короткий розв'язок, іноді буквально в 2-3 дії. Завдання, в якому система має нескінченно багато розв'язків – довше.

Приклад 3.25. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x+3y-z+t=1, \\ 8x+12y-9z+8t=3, \\ 4x+4y+4z-2t=3, \\ 2x+3y+9z-7t=3. \end{cases}$$

Розв'язок. Тут 4 рівняння і 4 невідомі. Таким чином, система може мати або єдиний розв'язок, або не мати розв'язків, або мати нескінченно багато розв'язків. Метод Гауса в будь-якому випадку приведе до відповіді. У цьому його і універсальність. Початок знову стандартний. Запишемо розширену матрицю системи і за допомогою елементарних перетворень зведемо її до східчастого вигляду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 8 & 12 & -9 & 8 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 9 & -7 & 3 \end{array}\right) \overset{(1)}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -8 & 2 \end{array}\right) \overset{(2)}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 \end{array}\right).$$

(1) Всі числа в першому стовпці діляться на 2, тому на лівій верхній сходинці нас влаштовує і двійка. До другого рядка додаємо перший рядок, помножений на -4. До третього рядка додаємо перший рядок, помножений на -2. До четвертого рядка додаємо перший рядок, помножений на -1.

Може виникнути спокуса з четвертого рядка відняти перший рядок. Так робити можна, але не потрібно, досвід показує, що ймовірність помилки в обчисленнях збільшується в декілька разів. Тільки додаємо: до четвертого рядка додаємо перший рядок, помножений на -1 .

(2) Останні три рядки пропорційні, два з них можна видалити. Потрібно з'ясувати, чи дійсно рядки пропорційні? Для перевірки не зайвим буде другий рядок помножити на -1, а четвертий рядок розділити на 2, отримавши в результаті три однакові рядки. І тільки після цього видалити два з них. В результаті елементарних перетворень розширена матриця системи приведена до ступінчастого вигляду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 \end{array}\right).$$

Перепишемо відповідну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x+3y-z+t=1, \\ 5z-4t=1. \end{cases}$$

«Звичайного» єдиного розв'язку системи тут не видно. «Поганого» рядка $\left(0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \middle| \lambda\right)$ теж немає. Значить, це залишився третій випадок – система має нескінченно багато розв'язків. Іноді за умовою потрібно досліджувати сумісність системи (тобто довести, що розв'язок взагалі існує). Але поки розглянемо таке:

Нескінченну множину розв'язків системи коротко записують у вигляді так званого загального розв'язку системи.

Загальний розв'язок системи знайдемо за допомогою зворотного ходу методу Гауса. Спочатку потрібно визначити, які змінні у нас є *базисними*, а які змінні *вільними*. Існують так звані *базисні змінні і вільні змінні*.

Базисні змінні завжди розміщені строго на сходинках матриці.

В даному прикладі базисними змінними є x і z .

Вільні змінні – це всі інші змінні, для яких не знайшлося сходинки. У нашому випадку їх дві: y, t – вільні змінні. Тепер потрібно всі *базисні змінні* виразити тільки через *вільні змінні*.

Зворотний хід алгоритму Гауса традиційно працює знизу до верху. З другого рівняння системи записуємо базисну змінну z :

$$5z-4t=1 \Rightarrow 5z=4t+1 \Rightarrow z=\frac{4}{5}t+\frac{1}{5}.$$

Тепер дивимося на перше рівняння: $2x+3y-z+t=1$. Спочатку в нього підставляємо знайдений вираз: $z=\frac{4}{5}t+\frac{1}{5}$:

$$2x+3y-(\frac{4}{5}t+\frac{1}{5})+t=1.$$

Залишилося записати базисну змінну x через вільні змінні y,t:

$2x+3y-\frac{4}{5}t-\frac{1}{5}+t=1$; $\quad$ $2x=1-3y+\frac{4}{5}t+\frac{1}{5}-t$;

$2x=-3y-\frac{1}{5}t+\frac{6}{5}$; $\quad$ $x=-\frac{3}{2}y-\frac{1}{10}t+\frac{3}{5}$.

У результаті вийшло те, що потрібно – всі базисні змінні (x і z) виражені лише через вільні змінні y,t: $x=-\frac{3}{2}y-\frac{1}{10}t+\frac{3}{5}$ та $z=\frac{4}{5}t+\frac{1}{5}$. Загальний розв’язок готовий:

$$\left(-\frac{3}{2}y-\frac{1}{10}t+\frac{3}{5};y;\frac{4}{5}t+\frac{1}{5};t\right).$$

Як правильно записати загальний розв’язок? Вільні змінні записуються в загальний розв’язок строго на своїх місцях. В даному випадку вільні змінні y,t слід записати на другій і четвертій позиції. Отримані ж вирази для базисних змінних (x і z), очевидно, потрібно записати на першій і третій позиції. Надаючи вільним змінним y,t довільні значення, можна знайти нескінченно багато часткових розв’язків. Найпопулярнішими значеннями є нулі, оскільки часткові розв’язки виходять найпростіше. Підставимо $y=0,t=0$ в загальний розв’язок:

$$\left(-0-0+\frac{3}{5};0;0+\frac{1}{5};0\right).$$

$\left(\frac{3}{5};0;\frac{1}{5};0\right)$ – частковий розв’язок.

Іншими популярними значеннями є одиниці, підставимо $y=1,t=1$ в загальний розв’язок:

$$\left(-\frac{3}{2}-\frac{1}{10}+\frac{3}{5};1;\frac{4}{5}+\frac{1}{5};1\right).$$

$(-1;1;1;1)$ – ще один частковий розв’язок.

Легко помітити, що система рівнянь має *нескінченно багато розв’язків* (так як вільним змінним ми можемо надати будь-які значення).

Кожен частковий розв’язок має задовольняти *кожне* рівняння системи. На цьому заснована «швидка» перевірка правильності розв’язку. Візьміть, наприклад, частковий розв’язок $(-1;1;1;1)$ і підставте його в ліву частину кожного рівняння вихідної системи:

$$\begin{cases}2x+3y-z+t=1,\\ 8x+12y-9z+8t=3,\\ 4x+4y+4z-2t=3,\\ 2x+3y+9z-7t=3.\end{cases}$$

Все повинно зійтися. І з будь-яким отриманим вами частковими розв’язками теж все має зійтися. Але, строго кажучи, перевірка часткового розв’язку є оманливою, тобто якийсь частковий розв’язок може задовольняти кожне рівняння системи, а загальний розв’язок насправді знайдений невірно. Тому більш ґрунтовна і надійна перевірка загального розв’язку. Як перевірити отримане загальний розв’язок:

$$\left(-\frac{3}{2}y-\frac{1}{10}t+\frac{3}{5};y;\frac{4}{5}t+\frac{1}{5};t\right)?$$

Це нескладно, але досить марудно. Потрібно взяти вирази *базисних* змінних, в даному випадку $x=-\frac{3}{2}y-\frac{1}{10}t+\frac{3}{5}$ і $z=\frac{4}{5}t+\frac{1}{5}$, і підставити їх в ліву частину кожного рівняння системи. У ліву частину першого рівняння системи:

$$2x+3y-z+t=2\left(-\frac{3}{2}y-\frac{1}{10}t+\frac{3}{5}\right)+3y-\left(\frac{4}{5}t+\frac{1}{5}\right)+t=$$

$$=-3y-\frac{1}{5}t+\frac{6}{5}+3y-\frac{4}{5}t-\frac{1}{5}+t=\frac{6}{5}-\frac{1}{5}=1.$$

Отримано права частина вихідного рівняння. У ліву частину рівняння 2 системи:

$$8x+12y-9z+8t=8\left(-\frac{3}{2}y-\frac{1}{10}t+\frac{3}{5}\right)+12y-9\left(\frac{4}{5}t+\frac{1}{5}\right)+8t=$$
$$=-12y-\frac{4}{5}t+\frac{24}{5}+12y-\frac{36}{5}t-\frac{9}{5}+8t=\frac{24}{5}-\frac{9}{5}=3.$$

Отримано права частина вихідного рівняння. І далі – в ліві частини третього і четвертого рівняння системи. Це довше, але зате гарантує стовідсоткову правильність загального розв'язку. Крім того, в деяких завданнях вимагають перевірку загального розв'язку.

Приклад 3.26. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гауса. Знайти загальний розв'язок і два часткових. Зробити перевірку загального розв'язку. Тут знову кількість рівнянь менша, ніж кількість невідомих, а значить, відразу зрозуміло, що система буде або несумісною, або з нескінченною множиною розв'язків.

$$\begin{cases} -x_1+2x_2+x_3-4x_4+3x_5=1, \\ 2x_1-x_2-3x_3+x_4-x_5=-4, \\ 3x_1+2x_2-x_3-2x_4-5x_5=1. \end{cases}$$

Розв'язок. Запишемо розширену матрицю системи і за допомогою елементарних перетворень зведемо її до східчастого вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 2 & 1 & -4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & -1 & -2 & -5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 2 & 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -7 & 5 & -2 \\ 0 & 8 & 2 & -14 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)}$$

$$\xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 2 & 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -7 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & 5 & 7 & -11 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 2 & 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 7 & -11 & 10 \\ 0 & 3 & -1 & -7 & 5 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)}$$

$$\xrightarrow{(4)} \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 2 & 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 7 & -11 & 10 \\ 0 & 0 & 14 & 14 & -28 & 28 \end{array}\right) \xrightarrow{(5)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -1 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & 11 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right).$$

Виконані перетворення:

(1) До другого рядка додали перший рядок, помножений на 2. До третього рядка додали перший рядок, помножений на 3. На другій сходинці немає одиниці, і перетворення (2) скероване на її отримання.

(2) До третього рядка додали другий рядок, помножений на -3.

(3) Другий рядок з третім поміняли місцями (переставили отриману -1 на другу сходинку).

(4) До третього рядка додали другий рядок, помножений на 3.

(5) У перших двох рядках змінили знак (помножили на -1), третій рядок розділили на 14.

Зворотній хід. x_1, x_2, x_3 – базисні змінні (ті, які на сходинках), x_4, x_5 – вільні змінні (ті, яким не дісталися сходинки). Запишемо базисні змінні через вільні змінні. З третього рівняння: $x_3+x_4-2x_5=2 \Rightarrow x_3=-x_4+2x_5+2$. Розглянемо друге рівняння: $x_2-5x_3-7x_4+11x_5=-10$. Підставимо в нього знайдений вираз $x_3=-x_4+2x_5+2$:

$$x_2-5(-x_4+2x_5+2)-7x_4+11x_5=-10$$
$$x_2+5x_4-10x_5-10-7x_4+11x_5=-10$$
$$x_2-2x_4-10+x_5=-10$$
$$x_2=2x_4-x_5$$

Розглянемо перше рівняння: $x_1-2x_2-x_3+4x_4-3x_5=-1$. Підставимо в нього знайдені вирази: $x_2=2x_4-x_5$ та $x_3=-x_4+2x_5+2$:

$$x_1-2(2x_4-x_5)-(-x_4+2x_5+2)+4x_4-3x_5=-1$$
$$x_1-4x_4+2x_5+x_4-2x_5-2+4x_4-3x_5=-1$$
$$x_1+x_4-3x_5-2=-1$$
$$x_1=-x_4+3x_5+1$$

Загальний розв'язок: $\left(-x_4+3x_5+1; 2x_4-x_5; -x_4+2x_5+2; x_4; x_5\right)$.

Знайдемо два часткових розв'язки. Якщо $x_4 = x_5 = 0$ то $(1;0;2;0;0)$. Якщо $x_4 = x_5 = 1$ то $(3;1;3;1;1)$. Тоді відповідь: часткові розв'язки: $(1;0;2;0;0)$, $(3;1;3;1;1)$, а загальний розв'язок: $(-x_4 + 3x_5 + 1; 2x_4 - x_5; -x_4 + 2x_5 + 2; x_4; x_5)$. Перевірка: підставимо знайдений розв'язок (базисні змінні: $x_1 = -x_4 + 3x_5 + 1$, $x_2 = 2x_4 - x_5$ і $x_3 = -x_4 + 2x_5 + 2$) в ліву частину кожного рівняння системи:

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 + 3x_5 = -(-x_4 + 3x_5 + 1) + 2(2x_4 - x_5) + (-x_4 + 2x_5 + 2) - 4x_4 + 3x_5 =$$
$$= x_4 - 3x_5 - 1 + 4x_4 - 2x_5 - x_4 + 2x_5 + 2 - 4x_4 + 3x_5 = -1 + 2 = 1,$$
$$2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 2(-x_4 + 3x_5 + 1) - (2x_4 - x_5) - 3(-x_4 + 2x_5 + 2) + x_4 - x_5 =$$
$$= -2x_4 + 6x_5 + 2 - 2x_4 + x_5 + 3x_4 - 6x_5 - 6 + x_4 - x_5 = 2 - 6 = -4,$$
$$3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 - 5x_5 = 3(-x_4 + 3x_5 + 1) + 2(2x_4 - x_5) - (-x_4 + 2x_5 + 2) - 2x_4 - 5x_5 =$$
$$= -3x_4 + 9x_5 + 3 + 4x_4 - 2x_5 + x_4 - 2x_5 - 2 - 2x_4 - 5x_5 = 3 - 2 = 1.$$

Отримано відповідні праві частини, тому загальний розв'язок знайдено вірно.

Розглянемо приклади для закріплення матеріалу.

Приклад 3.27. Розв'язати систему лінійних рівнянь. Якщо система має нескінченно багато розв'язків, знайти два часткових розв'язки і зробити перевірку загального розв'язку.

$$\begin{cases} x + 3y - 2z - 2t = -3, \\ -x - 2y + z + 2t = 2, \\ -2x - y + 3z + t = -2, \\ -3x - 2y + 3z + 3t = -1. \end{cases}$$

Розв'язок. Запишемо розширену матрицю системи і за допомогою елементарних перетворень зведемо її до східчастого вигляду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & -3 & -8 \\ 0 & 7 & -3 & -3 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)}$$

$$\xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & -3 \end{array}\right).$$

(1) До рядка 2 додаємо рядок 1. До третього рядка додаємо перший рядок, помножений на 2. До четвертого рядка додаємо перший рядок, помножений на 3.

(2) До третього рядка додаємо другий рядок, помножений на -5. До четвертого рядка додаємо другий рядок, помножений на -7.

(3) Третій і четвертий рядки однакові, один з них видаляємо.

Базисні змінні знаходяться на сходинках, тому $x, y, z -$ базисні змінні. Вільна змінна тут всього одна: t.

Зворотній хід. Запишемо базисні змінні через вільну змінну. З третього рівняння: $4z - 3t = -3 \Rightarrow z = \frac{3}{4}t - \frac{3}{4}$. Розглянемо друге рівняння $y - z = -1$ і підставимо в нього знайдений вираз $z = \frac{3}{4}t - \frac{3}{4}$:

$$y - \left(\frac{3}{4}t - \frac{3}{4}\right) = -1; \qquad y - \frac{3}{4}t + \frac{3}{4} = -1; \qquad y = \frac{3}{4}t - \frac{7}{4}.$$

Розглянемо перше рівняння $x + 3y - 2z - 2t = -3$ і підставимо в нього знайдені вирази $y = \frac{3}{4}t - \frac{7}{4}$ і $z = \frac{3}{4}t - \frac{3}{4}$:

$x+3\left(\frac{3}{4}t-\frac{7}{4}\right)-2\left(\frac{3}{4}t-\frac{3}{4}\right)-2t=-3$; $\quad x+\frac{9}{4}t-\frac{21}{4}-\frac{3}{2}t+\frac{3}{2}-2t=-3$;

$x-\frac{5}{4}t-\frac{21}{4}+\frac{3}{2}=-3$; $\quad x=\frac{5}{4}t+\frac{3}{4}$.

Таким чином, загальний розв'язок: $\left(\frac{5}{4}t+\frac{3}{4};\frac{3}{4}t-\frac{7}{4};\frac{3}{4}t-\frac{3}{4};t\right)$.

Вільна змінна t знаходиться на своєму законному четвертому місці. Отримані вирази для базисних змінних $\frac{5}{4}t+\frac{3}{4};\frac{3}{4}t-\frac{7}{4};\frac{3}{4}t-\frac{3}{4}$, теж зайняли свої порядкові місця. Відразу виконаємо перевірку загального розв'язку. Підставляємо $\frac{5}{4}t+\frac{3}{4};\frac{3}{4}t-\frac{7}{4};\frac{3}{4}t-\frac{3}{4}$ в ліву частину кожного рівняння системи:

$$x+3y-2z-2t=\frac{5}{4}t+\frac{3}{4}+3\left(\frac{3}{4}t-\frac{7}{4}\right)-2\left(\frac{3}{4}t-\frac{3}{4}\right)-2t=$$

$$=\frac{5}{4}t+\frac{3}{4}+\frac{9}{4}t-\frac{21}{4}-\frac{6}{4}t+\frac{6}{4}-2t=-3,$$

$$-x-2y+z+2t=-\left(\frac{5}{4}t+\frac{3}{4}\right)-2\left(\frac{3}{4}t-\frac{7}{4}\right)+\frac{3}{4}t-\frac{3}{4}+2t=$$

$$=-\frac{5}{4}t-\frac{3}{4}-\frac{6}{4}t+\frac{14}{4}+\frac{3}{4}t-\frac{3}{4}+2t=2,$$

$$-2x-y+3z+t=-2\left(\frac{5}{4}t+\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{3}{4}t-\frac{7}{4}\right)+3\left(\frac{3}{4}t-\frac{3}{4}\right)+t=$$

$$=-\frac{10}{4}t-\frac{6}{4}-\frac{3}{4}t+\frac{7}{4}+\frac{9}{4}t-\frac{9}{4}+t=-2,$$

$$-3x-2y+3z+3t=-3\left(\frac{5}{4}t+\frac{3}{4}\right)-2\left(\frac{3}{4}t-\frac{7}{4}\right)+3\left(\frac{3}{4}t-\frac{3}{4}\right)+3t=$$

$$=-\frac{15}{4}t-\frac{9}{4}-\frac{6}{4}t+\frac{14}{4}+\frac{9}{4}t-\frac{9}{4}+3t=-1.$$

Отримано відповідні праві частини рівнянь, таким чином, загальний розв'язок знайдено вірно. Тепер із знайденого загального розв'язку $\left(\frac{5}{4}t+\frac{3}{4};\frac{3}{4}t-\frac{7}{4};\frac{3}{4}t-\frac{3}{4};t\right)$ отримаємо два часткових через єдину вільну змінну t.

Нехай $t=0$, тоді $\left(\frac{3}{4};-\frac{7}{4};-\frac{3}{4};0\right)$ – частковий розв'язок. Нехай $t=1$, тоді $\left(\frac{5}{4}+\frac{3}{4};\frac{3}{4}-\frac{7}{4};\frac{3}{4}-\frac{3}{4};1\right)=(2;-1;0;1)$ – ще один частковий розв'язок.

Відповідь: Загальний розв'язок: $\left(\frac{5}{4}t+\frac{3}{4};\frac{3}{4}t-\frac{7}{4};\frac{3}{4}t-\frac{3}{4};t\right)$, часткові розв'язки: $\left(\frac{3}{4};-\frac{7}{4};-\frac{3}{4};0\right)$, $(2;-1;0;1)$.

Приклад 3.28. Знайти загальний розв'язок системи лінійних рівнянь.

$$\begin{cases} x-2y-z+3t=2, \\ -2x+y+3z-2t=-3, \\ 2x-y-2z+t=2, \\ 3x-3y-2z+3t=3. \end{cases}$$

Розв'язок. Запишемо розширену матрицю системи і за допомогою елементарних перетворень зведемо її до східчастого вигляду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & -2 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -6 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)}$$

$$\xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

(1) До другого рядка додаємо перший рядок, помножений на 2. До третього рядка додаємо перший рядок, помножений на -2. До четвертого рядка додаємо перший рядок, помножений на -3.

(2) До третього рядка додаємо другий рядок. До четвертого рядка додаємо другий рядок.

(3) Третій і четвертий рядки пропорційні, один із них видаляємо. $x, y, z-$ базисні змінні, t – вільна змінна. Запишемо базисні змінні через вільну змінну:

$z - t = -1 \Rightarrow z = t - 1$;

$-3y + z + 4t = 1 \Rightarrow -3y + t - 1 + 4t = 1 \Rightarrow y = \dfrac{5}{3}t - \dfrac{2}{3}$;

$x - 2y - z + 3t = 2 \Rightarrow x - 2\left(\dfrac{5}{3}t - \dfrac{2}{3}\right) - (t-1) + 3t = 2 \Rightarrow x = \dfrac{4}{3}t - \dfrac{1}{3}$.

Загальний розв'язок: $\left(\dfrac{4}{3}t - \dfrac{1}{3}; \dfrac{5}{3}t - \dfrac{2}{3}; t-1; t\right)$.

Перевірка загального розв'язку вже зроблена, відповіді можна довіряти. Напевно, можна помітити неприємний момент в розв'язуванні: дуже часто при зворотному ході методу Гауса довелося мати справу зі звичайними дробами. На практиці це дійсно так, випадки, коли дробів немає – зустрічаються значно рідше. Зупинимося на деяких особливостях розв'язування, які не зустрілися в прикладах, що розв'язувались. У загальний розв'яз системи іноді може входити константа (або константи), наприклад: $(5; t-2; 7t+3; t)$. Тут одна з базисних змінних дорівнює постійному числу: $x = 5$. Очевидно, що в даному випадку будь-який частковий розв'язок буде містити п'ятірку на першій позиції. Рідко, але зустрічаються системи, в яких *кількість рівнянь більша кількості змінних*. Метод Гауса працює в різних умовах, слід привести розширену матрицю системи до східчастого вигляду за стандартним алгоритмом. Така система може бути несумісною, може мати нескінченно багато розв'язків, і може мати єдиний розв'язок.

Для методу Гауса-Жордана є характерними специфічні прийоми та незручні обчислення.

Приклад 3.29. Розв'язати систему за допомогою методу Гауса-Жордана.

$$\begin{cases} x - 8y + z - 9t = 6, \\ x - 4y - z - 5t = 2, \\ -3x + 2y + 8z + 5t = 4, \\ 5x + 2y + 2z + 3t = 12. \end{cases}$$

Розв'язок. Запишемо систему в матричній формі та зведемо до східчастого вигляду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & 1 & -9 & 6 \\ 1 & -4 & -1 & -5 & 2 \\ -3 & 2 & 8 & 5 & 4 \\ 5 & 2 & 2 & 3 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & 1 & -9 & 6 \\ 0 & 4 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & -22 & 11 & -22 & 22 \\ 0 & 42 & -3 & 48 & -18 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & 1 & -9 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 14 & -1 & 16 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)}$$

$$\xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & 1 & -9 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & 1 & -9 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

(1) До другого рядка додали перший рядок, помножений на -1. До третього рядка додали перший рядок, помножений на 3. До четвертого рядка додали перший рядок, помножений на -5.

(2) Другий рядок розділили на 2, третій рядок розділили на 11, четвертий рядок розділили на 3.

(3) Другий і третій рядки пропорційні, 3-й рядок видалили. До четвертого рядка додали другий рядок, помножений на -7

(4) Третій рядок розділили на 2.

Очевидно, що система має нескінченно багато розв'язків, і завдання – привести її розширену матрицю до вигляду

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right).$$

Знаходимо найменше спільне кратне чисел третього стовпчика (1, -1 і 3), тобто - найменше число, яке б ділилося без залишку і на 1, і на -1 і на 3. В даному випадку, це, звичайно ж, «трійка». Тепер в третьому стовпці нам потрібно отримати однакові по модулю числа, і саме такі міркування обумовили 5-е перетворення матриці:

(5) Перший рядок множимо на -3, другий рядок множимо на 3. Перший рядок можна було помножити теж на 3, але це було б менш зручно для наступної дії:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & 1 & -9 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{(5)} \left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 24 & -3 & 27 & -18 \\ 0 & 6 & -3 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{(6)} \left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 24 & 0 & 28 & -14 \\ 0 & 6 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{(7)}$$

$$\xrightarrow{(7)} \left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 24 & 0 & 28 & -14 \\ 0 & -24 & 0 & -28 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{(8)} \left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & -24 & 0 & -28 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{(9)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 7/6 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 4/3 \end{array}\right)$$

(6) До другого рядка додали третій рядок. До першого рядка додали третій рядок.

(7) У другому стовпці два ненульових значення (24 і 6) і знову потрібно отримати однакові по модулю числа. В даному випадку все склалося досить вдало: найменше кратне 24, і найефективніше помножити другий рядок на -4.

(8) До першого рядка додали другий.

(9) Заключний штрих: перший рядок розділили на -3, другий рядок розділили на -24 і третій рядок розділили на 3. Ця дія виконується В ОСТАННЮ ЧЕРГУ. Ніяких дробів дочасно!

В результаті елементарних перетворень отримана еквівалентна до вихідної система:

$$\begin{cases} x = 2, \\ y + \dfrac{7}{6}t = -\dfrac{1}{3}, \\ z + \dfrac{1}{3}t = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Елементарно записуємо базисні змінні через вільну:

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = -\dfrac{7}{6}t - \dfrac{1}{3}, \\ z = -\dfrac{1}{3}t + \dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

і записуємо **загальний розв'язок:** $\left(2; -\dfrac{7}{6}t - \dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{3}t + \dfrac{4}{3}; t\right)$.

У подібних прикладах застосування розглянутого алгоритму найчастіше виправдано, оскільки зворотний хід методу Гауса зазвичай вимагає трудомістких і неприємних обчислень з дробами. І, зрозуміло, необхідна перевірка, яка виконується за звичайною схемою, яка розглядалась попередньо. Так, для знаходження базисного розв'язку за допомогою елементарних перетворень

$$\begin{cases} 2x-3y-z-7t+5v=4, \\ x-2y-3z+t-4v=-5, \\ -5x+4y+6z+6t+5v=4. \end{cases}$$

таке формулювання завдання передбачає використання методу Гауса-Жордана, і матриця приводиться до стандартного вигляду з базисними змінними:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * \end{array}\right).$$

Однак, завжди тримайте на увазі, що в якості базисних можна вибрати й інші змінні. Так, наприклад, якщо в першому стовпці громіздкі числа, то цілком допустимо привести матрицю до вигляду

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} * & 1 & 0 & 0 & * & * \\ * & 0 & 1 & 0 & * & * \\ * & 0 & 0 & 1 & * & * \end{array}\right).$$

(базисні змінні y, z, t), або до виду

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} * & * & 1 & 0 & 0 & * \\ * & * & 0 & 1 & 0 & * \\ * & * & 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right).$$

(базисні змінні z, t, v), або навіть до виду

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} * & 1 & * & 0 & 0 & * \\ * & 0 & * & 1 & 0 & * \\ * & 0 & * & 0 & 1 & * \end{array}\right).$$

з базисними змінними y, t, v.

Існують й інші варіанти, наприклад,

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & * & 1 & * & 0 & * \\ 0 & * & 0 & * & 1 & * \\ 1 & * & 0 & * & 0 & * \end{array}\right).$$

Втім, буває важко втриматися від нетипового базису, коли у вихідній матриці, скажімо, в 4-м стовпці є два готових нуля. Якщо в розширеній матриці даних розмірів раптом виявляється пара лінійно залежних рядків, то її слід спробувати привести до звичного вигляду з базисними змінними x, y

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * & * \end{array}\right).$$

3.6.10. Способи знаходження оберненої матриці

Квадратна матриця має обернену тоді й тільки тоді, коли вона *невироджена*, тобто її визначник не дорівнює нулю. Для неквадратних матриць і сингулярних матриць обернених матриць не існує.

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{ та } (AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

Якщо необхідно розв’язати систему лінійних рівнянь $Ax = b$, де x — шуканий вектор, і якщо A^{-1} існує, то $x = A^{-1}b$. В протилежному випадку розмірність простору розв’язків більше нуля.

Якщо матриця така, що можливо знайти обернену, то для знаходження оберненої матриці можна скористатися одним із наступних способів:

1. Метод Гауса

I. Допишемо до матриці A одиничну матрицю E такого ж розміру що й A. Одержимо блокову матрицю $(A|E)$. Приведемо блок A до одиничної матриці методом Гауса, але використовуючи тільки операції над рядками. Після зведення блоку A до E, E зведеться до оберненої до A. Ми одержимо $(A|E) \Rightarrow (E|A^{-1})$.

II. Візьмемо дві матриці: саму A і одиничну E. Зведемо матрицю A до одиничної матриці методом Гауса. Після застосування кожної операції до першої матриці застосуємо ту ж операцію до другої. Коли зведення першої матриці до одиничного вигляду буде завершено, друга матриця виявиться зведена до вигляду A^{-1}.

При використанні методу Гауса перша матриця буде множитися ліворуч на одну з елементарних матриць Λ_i (трансвекцію або діагональну матрицю з одиницями на головній діагоналі, крім однієї позиції): $\Lambda_1 \cdot ... \cdot \Lambda_n \cdot A = \Lambda A = E \Rightarrow \Lambda = A^{-1}$.Друга матриця після застосування всіх операцій стане рівною Λ, тобто буде шуканою.

Алгоритм

1. Вибирається перший стовпчик ліворуч, у якому є хоч одне відмінне від нуля значення.
2. Якщо саме верхнє число в цьому стовпчику є нуль, то міняється весь перший рядок матриці на інший рядок матриці, де в цьому стовпчику немає нуля.
3. Всі елементи першого рядка діляться на верхній елемент обраного стовпчика.
4. З рядків, що залишилися, віднімається перший рядок, помножений на перший елемент відповідного рядка, щоб одержати першим елементом кожного рядка (крім першого) нуля.
5. Далі проводимо таку ж процедуру з матрицею, що отримуємо із вихідної матриці після викреслювання першого рядка й першого стовпця.
6. Після повторення цієї процедури n-1 раз одержуємо верхню трикутну матрицю.
7. Віднімаємо з передостаннього рядка останній рядок, помножений на відповідний коефіцієнт, для того, щоб у передостанньому рядку залишилася тільки 1 на головній діагоналі.
8. Повторюємо попередній крок для наступних рядків. В результаті одержуємо одиничну матрицю і розв'язок на місці вільного вектора (з ним необхідно проводити всі ті ж перетворення).

Приклад 3.30. Розв'язати наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} a+b+c=0, \\ 4a+2b+c=1, \\ 9a+3b+c=3. \end{cases}$$

Розв'язок. Запишемо її у вигляді матриці 3×4, де останній стовпець є вільним членом:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)}$$

$$\xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Проведемо наступні дії:
(1) до Рядка_2 додамо: -4*Рядок_1; до Рядка_3 додамо: -9*Рядок_1;
(2) до Рядка_3 додамо: -3*Рядок_2; Рядок_2 ділимо на -2;
(3) до Рядка_1 додамо: -1*Рядок_3; до Рядка_2 додамо: -3/2*Рядок_ 3;
(4) до Рядка_1 додамо: -1*Рядок_2. У правому стовпці одержуємо розв'язок:

$$a = \frac{1}{2}; b = -\frac{1}{2}; c = 0.$$

2. За допомогою союзної матриці

Формула для знаходження оберненої матриці:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \left(C^*\right)^T, \tag{3.110}$$

де C^* – союзна матриця; $\left(C^*\right)^T$ – матриця, отримана в результаті транспонування союзної матриці; отримана матриця A^{-1} і буде оберненою.

Союзна матриця – матриця, складена з алгебраїчних доповнень до елементів вихідної матриці.

$$C^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1j} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{ij} \end{pmatrix}, \qquad (3.111)$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення.

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} матриці A називається число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}, \qquad (3.112)$$

де M_{ij} – мінор, визначник матриці, що отримується із A викреслюванням i-го рядка і j-го стовпця.

Властивості методу знаходження оберненої матриці через союзну.

1. Назва «алгебраїчне доповнення» пов'язана з формулами розкладу визначника матриці по рядку (по стовпцю):

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}\ . \qquad (3.113)$$

2. Лема про фальшивий розклад визначника стверджує, що

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_1 j} A_{i_2 j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij_1} A_{ij_2} = 0\ . \qquad (3.114)$$

3. З цих тверджень випливає правильність алгоритму знаходження оберненої матриці:

1) замінити кожний елемент на його алгебраїчне доповнення (у результаті буде отримано союзну матрицю);
2) транспонувати матрицю;
3) розділити кожний елемент на визначник вихідної матриці.

Визначник або **детермінант** – одна з найважливіших характеристик квадратних матриць. Визначник матриці розмірності $n \times n$ дорівнює орієнтованому n-мірному об'єму паралелепіпеда, який натягнуто на її вектори рядків (або стовпців). Для матриці $n \times n$ визначник виражається у вигляді багаточлена ступеня n від елементів матриці, що являє собою суму добутків елементів матриці з різними комбінаціями номерів, що відрізняються, рядків і стовпців, причому в кожному з добутків елемент із будь-якого рядка й будь-якого стовпця рівно один. Кожному добутку приписується знак плюс або мінус залежно від парності перестановки номерів. Якщо елементами матриці є числа, то визначник – це теж число. У загальному випадку визначник може бути функціональним, векторним тощо, тобто поданим іншими виразами, що складені з елементів. Визначник матриці $n \times n$ задається формулою:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n!} (-1)^{p(i)} \cdot a_{1k_{i1}} \cdot a_{1k_{i2}} \dots \cdot a_{1k_{in}}\ , \qquad (3.115)$$

де $\det(A)$ і $|A|$ – позначення визначника; k_{ij} – i-та перестановка послідовності $k_1 = 1,\dots,n$, тобто, $k_{1j} = j$; $p(i)$ – кількість перестановок пар номерів у послідовності до k_{1j}, яка необхідна для того, щоб вона перетворилася в послідовність k_{ij},

або формула для обчислення визначника по заданому рядку матриці:

$$\det(A) = |A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+i} \cdot a_{1k} \cdot M_{ik}\ , \qquad (3.116)$$

де i – номер рядка матриці; M_{ik} – додатковий мінор; k – номер стовпця матриці.

Зауваження. Можна виділити наступні особливості побудови виразів для визначника матриці $n \times n$:

- вираз є сума членів, кожний з яких складається з n співмножників;
- кількість доданків у сумі дорівнює кількості перестановок n номерів, тобто, $n!$;
- номери рядків і стовпців елементів, що входять в один доданок, не повторюються;
- доданки входять у суму або із плюсом, або з мінусом, залежно від парності перестановки;
- доданок з елементів головної діагоналі матриці, тобто, $a_{11}a_{22}...a_{nn}$ є із плюсом.

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \qquad (3.117)$$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}. \qquad (3.118)$$

3.6.11. Застосування методу Гауса до обчислення визначника матриці

Для обчислення визначників матриць застосовують два підходи:

- рекурсивний розрахунок за допомогою розкладення по рядку чи стовпцю;
- обчислення на основі прямого ходу метода Гауса.

Перший спосіб ґрунтується на використанні тієї властивості визначників, що визначник матриці дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка чи стовпця на їх алгебраїчне доповнення, тобто:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}, \ \forall i = \overline{1,n}. \qquad (3.119)$$

Обчислення одного визначника n-го порядку зводиться до розрахунку n визначників порядку n-1. Реалізується даний спосіб за допомогою рекурсії. Рекурсивний спосіб зручно застосовувати по відношенню до рядків чи стовпців, що мають велику кількість нульових елементів. Якщо ж нульових елементів у матриці немає або дуже мало, то застосування цього способу є вкрай неефективним. Для визначника n порядку доведеться розрахувати $n!/2$ визначників другого порядку.

Другий спосіб ґрунтується на методі, що базується на алгоритмі прямого ходу метода Гауса, використовує властивість визначника трикутної матриці. Для такої матриці визначник дорівнює добутку елементів головної діагоналі.

Для обчислення визначника використовується алгоритм побудови послідовності матриць $A^{(0)}, A^{(1)}, A^{(2)},...A^{(n)}$ прямого ходу метода Гауса з тією відмінністю, що при перестановці рядків чи стовпців знак визначника змінюється на протилежний. Значення визначника розраховується за формулою:

$$\det(A) = (-1)^m \cdot a_{22}^{(0)} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot ... \cdot a_{nn}^{(n-1)}, \qquad (3.120)$$

де m – кількість перестановок.

Цей метод дозволяє обчислювати визначники матриць великих порядків.

Для обчислення визначника методом Гауса використовують формули:

$$\begin{aligned} & A^{(0)} = a_{11}^{(0)} \cdot A^{(1)} \\ & A^{(1)} = a_{22}^{(1)} A^{(2)} = a_{22}^{(1)} a_{11}^{(0)} A^{(1)} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & A = a_{nn}^{(n-1)} \cdot \ldots \cdot a_{22}^{(1)} \cdot a_{11}^{(0)} A^{(n)} \\ & \det A = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}^{(i-1)} \end{aligned} \qquad (3.121)$$

Принцип вибору головного (ведучого) елемента. Часто буває, що на деякому k-ому кроці методу Гауса елемент $a_{kk}^{(k-1)}$ дорівнює або наближено дорівнює нулю. В такому випадку доцільно в цьому стовпчику знайти найбільший по модулю елемент, який, наприклад, буде знаходитись в *p*-ій стрічці, де *p*>*k*, і замінити елементи *k*-ої стрічки елементами *p*-ої. Це приводить до того, що:

1) уникаємо загрози ділення на нуль;
2) похибка в результаті ділення стає мінімально можливою.

Зауваження: взагалі таку процедуру (знаходження найбільшого по модулю елемента) варто було б проводити не лише в *k*-ому стовпчику, а серед всіх елементів матриці

Приклад 3.31. Обчислити визначник для матриці

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. Запишемо розв'язок через алгебраїчне доповнення

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 9 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 9 \cdot A_{11} + 3 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13} + 1 \cdot A_{14}, \text{ де } A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

$$\det(A) = 9 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 9 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 2) -$$
$$- 3 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 1 - 4 \cdot 3 \cdot 2) +$$
$$+ 1 \cdot (4 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \cdot -2 \cdot 4 \cdot 1 - 4 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 4) -$$
$$- 1 \cdot (4 \cdot 4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 2 - 2 \cdot 4 \cdot 1 - 4 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 4) =$$
$$= 9 \cdot 0 - 3 \cdot 2 + 8 - 8 = 6.$$

3.6.12. Застосування методу Гауса до інверсії матриці

Позначимо обернену матрицю через $X = A^{-1}$ причому $|A| \neq 0$. Нагадаємо форму оберненої матриці $AX = E$. Візьмемо з E лише перший стовпчик і запишемо першу підсистему:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + \ldots + a_{1n}x_{n1} = 1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_{11} + a_{n2}x_{21} + \ldots + a_{nn}x_{n1} = 0 \end{cases} \tag{3.122}$$

другу підсистему

$$\begin{cases} a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} + \ldots + a_{1n}x_{n2} = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_{12} + a_{n2}x_{22} + \ldots + a_{nn}x_{n2} = 0 \end{cases} \tag{3.123}$$

Як видно, застосовуючи цей підхід *n* разів, можна за один прямий прохід методу Гауса обчислити розв'язки всіх *n* підсистем по *n* рівнянь, які мають однакову ліву частину і відрізняються лише правою.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_{kj} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} \qquad i, j = \overline{1,n} \tag{3.124}$$

Записуємо розрахункові формули, приведені до однієї системи з *n* рівнянь, для випадку системи (3.69), і враховуємо, що для розширеної матриці буде матриця розмірності 2*n*, де права половина - одинична матриця:

$$\hat{A} = \left(\underbrace{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}}_{2n} \right). \tag{3.125}$$

$$a_{kj}^{(k)} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad \begin{array}{l} j = \overline{k+1, 2n} \\ k = \overline{1, n} \end{array} \tag{3.126}$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad \begin{array}{l} j = \overline{k+1, 2n} \\ i = \overline{k+1, n} \\ k = \overline{1, n-1} \end{array} \tag{3.127}$$

$$x_{nj} = \frac{a_{n,n+j}^{(n-1)}}{a_{n,n}^{(n-1)}}, \qquad j = \overline{1, n} \tag{3.128}$$

$$x_i = a_{i,n+1}^{(i)} - \sum_{k=i+1}^{n} a_{i,k}^{(i)} x_k, \quad \begin{array}{l} j = \overline{1, n} \\ i = \overline{n-1, 1} \end{array} \tag{3.129}$$

$$x_{ij} = a_{i,n+j}^{(i)} - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}^{(i)} x_{kj}, \quad \begin{array}{l} j = \overline{1, n} \\ i = \overline{n-1, 1} \end{array} \tag{3.130}$$

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \forall i : \ell_{ii} \neq 0. \tag{3.131}$$

Тому, перевіряючи ℓ_{11} на рівність нулю при умові, що $\ell_{11} \neq 0$, на початку можна відразу зробити висновок про сумісність чи несумісність системи (що не вимагає доповнюючої перестановки стрічок). Відповідні теореми доводять кращу стійкість методу LU-факторизації (який детально описаний далі в цьому розділі) порівняно з методом Гауса по відношенню до нагромадження похибки обчислень. Інші прямі методи розв’язування систем лінійних рівнянь розраховані на їх спеціальний вигляд, а саме: метод квадратного кореня для так званих розріджених матриць.

Приклад 3.32. Знайти обернену матрицю методом Гауса

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв’язок. Запишемо її у вигляді матриці 3×4, де останній стовпець є вільним членом:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -8 & -9 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)}$$

$$\xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 5 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 5 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(5)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0{,}5 & -1 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 2{,}5 & 4 & -1{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right).$$

(1) Перший рядок множимо на -4 і додаємо результат до другого рядка. Початкові значення першого рядка множимо на -3 і додаємо результат до третього рядка. Перший рядок переписуємо без змін, а наступні два зі змінами.

(2) Другий рядок множимо на -3 та додаємо результат до третього рядка. Перший та другий рядки переписуємо без змін, а третій зі змінами. Отримали нулі під головною діагоналлю. Тепер маємо рухатися зворотно таким же чином.

(3) Третій рядок множимо на 3 та результат додаємо до другого. Третій рядок (початкові результати, отримані перед кроком 3) множимо на -1 та додаємо до першого рядка. Третій рядок переписуємо без змін, а інші два – із отриманими результатами.

(4) Перший рядок множимо на 2 та додаємо до результату другий рядок. Третій та другий рядки переписуємо без змін, а перший – із змінами.

(5) Перший рядок ділимо на 2, а другий рядок ділимо на -2. Отримаємо зліва одиничну матрицю, а справа – обернену матрицю до початкових даних. Перевірка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}5 & -1 & 0{,}5 \\ 2{,}5 & 4 & -1{,}5 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для знаходження оберненої матриці методом Гауса використовують, по суті, метод Гауса-Жордана. Короткий зміст майбутніх дій: спочатку слід записати квадратну матрицю A в тандемі з одиничною матрицею: $(A \mid E)$. Потім за допомогою елементарних перетворень необхідно отримати одиничну матрицю зліва, при цьому (не вдаючись у теоретичні подробиці) праворуч вийде обернена матриця. Схематично рішення виглядає наступним чином:

$$(A \mid E) \to \ldots \to (E \mid A^{-1}).$$

(Зрозуміло, що зворотна матриця повинна існувати)

Приклад 3.33. Знайти обернену матрицю методом Гауса за допомогою елементарних перетворень для матриці.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. Для цього запишемо її з одиничною матрицею:

$$(A \mid E) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)}$$

$$\xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right) = (E \mid A^{-1}).$$

(1) До другого рядка додали перший рядок, помножений на -3.

(2) До першого рядка додали другий рядок.

(3) Другий рядок розділили на -2.

Відповідь: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$

Приклад 3.34. Знайти обернену матрицю за допомогою елементарних перетворень

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. Приєднали одиничну матрицю і починаємо виконувати перетворення, дотримуючись алгоритму «звичайного» методу Гауса:

$$(A \mid E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)}$$

$$\xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -11 & -5 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -11 & -1 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -11 & -5 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

(1) Перший і третій рядки поміняли місцями. На перший погляд, перестановка рядків здається нелегальною, але насправді переставляти їх можна, адже в результаті $(E \mid A^{-1})$ зліва нам потрібно отримати одиничну матрицю, а праворуч «примусово» вийде саме матриця A^{-1} (незалежно від того чи будемо переставляти рядки в ході розв'язування чи ні). Зверніть увагу, що тут замість перестановки можна організувати «шістки» в 1-му стовпці (найменше спільне кратне (НСК) чисел 3, 2 і 1). Розв'язувати через НСК особливо зручно, коли в першому стовпці відсутні «одиниці».

(2) До 2-го і 3-го рядків додали 1-й рядок, помножений на -2 і -3 відповідно.

(3) До 3-го рядка додали 2-й рядок, помножений на -1.

Друга частина розв'язування проводиться за вже відомою з попереднього параграфа схемою: перестановки рядків стають безглуздими, і ми знаходимо найменше спільне кратне чисел третього стовпчика (1, -5, 4): 20. Існує строгий алгоритм знаходження НСК, але тут зазвичай вистачає підбору. Нічого страшного, якщо взяти більше число, яке ділиться і на 1, і на -5, і на 4, наприклад, число 40. Відмінність буде в більш громіздких обчисленнях. Отже:

(4) Третій рядок множимо на 5, другий рядок на 4, перший рядок на «мінус двадцять»:

$$\xrightarrow{(3)}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -11 & -5 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)\xrightarrow{(4)}\left(\begin{array}{ccc|ccc} -20 & -100 & -20 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & -44 & -20 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 20 & 5 & -5 & -5 \end{array}\right)\xrightarrow{(5)}\left(\begin{array}{ccc|ccc} -20 & -100 & 0 & 5 & -5 & -25 \\ 0 & -44 & 0 & 5 & -1 & -13 \\ 0 & 0 & 20 & 5 & -5 & -5 \end{array}\right)\xrightarrow{(6)}$$

$$\xrightarrow{(6)}\left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & -20 & 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 44 & 0 & -5 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)\xrightarrow{(7)}\left(\begin{array}{ccc|ccc} -44 & -220 & 0 & 11 & -11 & -55 \\ 0 & 220 & 0 & -25 & 5 & 65 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)\xrightarrow{(8)}\left(\begin{array}{ccc|ccc} -44 & 0 & 0 & -14 & -6 & 10 \\ 0 & 220 & 0 & -25 & 5 & 65 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)\xrightarrow{(9)}$$

$$\xrightarrow{(9)}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 44 & 0 & 0 & 14 & 6 & -10 \\ 0 & 44 & 0 & -5 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)\xrightarrow{(10)}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 44 & 0 & 0 & 14 & 6 & -10 \\ 0 & 44 & 0 & -5 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 44 & 11 & -11 & -11 \end{array}\right)\xrightarrow{(11)}$$

$$\xrightarrow{(11)}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 14/44 & 6/44 & -10/44 \\ 0 & 1 & 0 & -5/44 & 1/44 & 13/44 \\ 0 & 0 & 1 & 11/44 & -11/44 & -11/44 \end{array}\right)=(E\,|\,A^{-1}).$$

(5) До 1-го та 2-го рядків додали третій рядок.

(6) Перший і третій рядки розділили на 5, другий рядок помножили на -1.

(7) Найменше спільне кратне ненульових чисел другого стовпчика (-20 і 44) одне – це 220. Перший рядок множимо на 11, другий рядок на 5.

(8) До першого рядка додали другий рядок.

(9) Перший рядок помножили на -1, другий рядок розділили «назад» на 5.

(10) Тепер на головній діагоналі лівої матриці доцільно отримати найменше спільне кратне чисел діагоналі (44, 44 і 4). Цілком зрозуміло, що це число 44. Третій рядок множимо на 11.

(11) Кожен рядок ділимо на 44. Ця дія виконується в останню чергу.

Таким чином, обернена матриця:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 14/44 & 6/44 & -10/44 \\ -5/44 & 1/44 & 13/44 \\ 11/44 & -11/44 & -11/44 \end{pmatrix}=\frac{1}{44}\begin{pmatrix} 14 & 6 & -10 \\ -5 & 1 & 13 \\ 11 & -11 & -11 \end{pmatrix}.$$

Внесення і винесення $1/44$, в принципі, зайві дії, але того вимагає протокол оформлення завдання.

Приклад 3.35. Знайти обернену матрицю методом Гауса-Жордана.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. Обернену матрицю знайдемо за допомогою елементарних перетворень:

$$(A\,|\,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{(1)}\left(\begin{array}{ccc|ccc} -15 & -30 & -60 & -15 & 0 & 0 \\ 15 & 3 & 6 & 0 & 3 & 0 \\ 15 & -5 & 5 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)\xrightarrow{(2)}$$

$$\xrightarrow{(2)}\left(\begin{array}{ccc|ccc} -15 & -30 & -60 & -15 & 0 & 0 \\ 0 & -27 & -54 & -15 & 3 & 0 \\ 0 & -35 & -55 & -15 & 0 & 5 \end{array}\right)\xrightarrow{(3)}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 18 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 11 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right)\xrightarrow{(4)}$$

$$\xrightarrow{(4)}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 63 & 126 & 35 & -7 & 0 \\ 0 & -63 & -99 & -27 & 0 & 9 \end{array}\right)\xrightarrow{(5)}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 63 & 126 & 35 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 27 & 8 & -7 & 9 \end{array}\right)\xrightarrow{(6)}\ldots$$

(1) Перший рядок помножили на -15, другий рядок помножили на 3, третій рядок помножили на 5.

(2) До 2-го і 3-го рядків додали перший рядок.

(3) Перший рядок розділили на -15, другий рядок розділили на -3, третій рядок розділили на -5.

(4) Другий рядок помножили на 7, третій рядок помножили на -9.

(5) До третього рядка додали другий рядок.

$$\ldots\xrightarrow{(6)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&4&1&0&0\\0&9&18&5&-1&0\\0&0&27&8&-7&9\end{array}\right)\xrightarrow{(7)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}27&54&108&27&0&0\\0&54&108&30&-6&0\\0&0&-108&-32&28&-36\end{array}\right)\xrightarrow{(8)}$$

$$\xrightarrow{(8)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}27&54&0&-5&28&-36\\0&54&0&-2&22&-36\\0&0&-108&-32&28&-36\end{array}\right)\xrightarrow{(9)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}27&0&0&-3&6&0\\0&54&0&-2&22&-36\\0&0&27&8&-7&9\end{array}\right)\xrightarrow{(10)}$$

$$\xrightarrow{(10)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}27&0&0&-3&6&0\\0&27&0&-1&11&-18\\0&0&27&8&-7&9\end{array}\right)\xrightarrow{(11)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-3/27&6/27&0\\0&1&0&-1/27&11/27&-18/27\\0&0&1&8/27&-7/27&9/27\end{array}\right)=(E\,|\,A^{-1}).$$

(6) Другий рядок розділили на 7.

(7) Перший рядок помножили на 27, другий рядок помножили на 6, третій рядок помножили на -4.

(8) До першого і другого рядків додали третій рядок.

(9) Третій рядок розділили на -4. До першого рядка додали другий рядок, помножений на -1.

(10) Другий рядок розділили на 2.

(11) Кожен рядок розділили на 27. В результаті отримали:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-3/27&6/27&0\\-1/27&11/27&-18/27\\8/27&-7/27&9/27\end{pmatrix}=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}-3&6&0\\-1&11&-18\\8&-7&9\end{pmatrix}.$$

Ця схема, якщо і не сама, то одна з найнадійніших. Іноді буває зручно використовувати коротший «модерністський» розв'язок, який полягає в наступному: на першому кроці все як завжди

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}*&*&*&*&*&*\\0&*&*&*&*&*\\0&*&*&*&*&*\end{array}\right).$$

На другому кроці відомим прийомом (через НСК чисел 2-го стовпця) організовуються відразу два нулі в другому стовпці:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}*&0&*&*&*&*\\0&*&*&*&*&*\\0&0&*&*&*&*\end{array}\right).$$

І, нарешті, на третьому етапі точно так отримуємо потрібні нулі в третьому стовпці:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}*&0&0&*&*&*\\0&*&0&*&*&*\\0&0&*&*&*&*\end{array}\right).$$

Приклад 3.36. Знайти загальний розв'язок за допомогою елементарних перетворень

$$\begin{cases}2x-3y-z-7t+5v=4,\\x-2y-3z+t-4v=-5,\\-5x+4y+6z+6t+5v=4.\end{cases}$$

Розв'язок. Запишемо розширену матрицю системи і за допомогою елементарних перетворень отримаємо загальний розв'язок:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}2&-3&-1&-7&5&4\\1&-2&-3&1&-4&-5\\-5&4&6&7&5&4\end{array}\right)\xrightarrow{(1)}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&-2&-3&1&-4&-5\\2&-3&-1&-7&5&4\\-5&4&6&7&5&4\end{array}\right)\xrightarrow{(2)}$$

$$\xrightarrow{(2)}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 5 & -9 & 13 & 14 \\ 0 & -6 & -9 & -2 & -15 & -21 \end{array}\right)\xrightarrow{(3)}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 5 & -9 & 13 & 14 \\ 0 & -2 & -3 & 4 & -5 & -7 \end{array}\right)\xrightarrow{(4)}$$

$$\xrightarrow{(4)}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 5 & -9 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & 7 & -14 & 21 & 21 \end{array}\right)\xrightarrow{(5)}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 5 & -9 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 3 \end{array}\right)\xrightarrow{(6)}$$

$$\xrightarrow{(6)}\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & -10 & -15 & 5 & -20 & -25 \\ 0 & -3 & -15 & 27 & -39 & -42 \\ 0 & 0 & 15 & -30 & 45 & 45 \end{array}\right)\xrightarrow{(7)}\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & -10 & 0 & -25 & 25 & 20 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 15 & -30 & 45 & 45 \end{array}\right)\xrightarrow{(8)}$$

$$\xrightarrow{(8)}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & -5 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 3 \end{array}\right)\xrightarrow{(9)}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & -5 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 3 \end{array}\right)\xrightarrow{(10)}$$

$$\xrightarrow{(10)}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 3 \end{array}\right)\xrightarrow{(11)}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 3 \end{array}\right).$$

(1) Перший і другий рядки поміняли місцями.

(2) До другого рядка додали перший рядок, помножений на -2. До третього рядка додали перший рядок, помножений на 5.

(3) Третій рядок розділили на 3.

(4) До третього рядка додали другий рядок, помножений на 2.

(5) Третій рядок розділили на 7.

(6) Найменша кратне чисел 3-го стовпця (-3, 5, 1) дорівнює 15. Перший рядок помножили на 5, другий рядок помножили на -3, третій рядок помножили на 15.

(7) До першого рядка додали 3-ій рядок. До другого рядка додали 3-ій рядок.

(8) Перший рядок розділили на 5, другий рядок розділили на -3, третій рядок розділили на 15.

(9) Найменша кратне ненульових чисел 2-го стовпця (-2 і 1) одне: 2. Другий рядок помножили на 2.

(10) До першого рядка додали другий рядок.

(11) Другий рядок розділили на 2.

Запишемо базисні змінні x, y, z через вільні змінні t, v:

$$\begin{cases} x - 3t + v = 2 \\ y + t - 2v = -1 \\ z - 2t + 3v = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3t - v + 2 \\ y = -t + 2v - 1 \\ z = 2t - 3v + 3 \end{cases}$$

Відповідь: загальний розв'язок $(3t - v + 2; -t + 2v - 1; 2t - 3v + 3; t; v)$.

Приклад 3.37. Знайти обернену матрицю за допомогою елементарних перетворень

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. Знайдемо обернену матрицю методом Гауса-Жордана:

(1) До 1-го та 4-го рядків додали 3-ій рядок.

(2) Перший і четвертий рядки поміняли місцями.

(3) До 2-го рядка додали 1-й рядок. До 3-го рядка додали 1-й рядок, помножений на 2.

(4) До 3-го рядка додали 2-й рядок, помножений на -2. До 4-го рядка додали 2-й рядок.

(5) До 1-го і 3-го рядка додали 4-й рядок, помножений на -1.

(6) Другий рядок помножили на -1, третій рядок розділили на -2.

$$(A\,|\,E)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}2&3&2&2&1&0&0&0\\-1&-1&0&-1&0&1&0&0\\-2&-2&-2&-1&0&0&1&0\\3&2&2&2&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{(1)}\left(\begin{array}{cccc|cccc}0&1&0&1&1&0&1&0\\-1&-1&0&-1&0&1&0&0\\-2&-2&-2&-1&0&0&1&0\\1&0&0&1&0&0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{(2)}$$

$$\xrightarrow{(2)}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&1&0&0&1&1\\-1&-1&0&-1&0&1&0&0\\-2&-2&-2&-1&0&0&1&0\\0&1&0&1&1&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{(3)}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&1&0&0&1&1\\0&-1&0&0&0&1&1&1\\0&-2&-2&1&0&0&3&2\\0&1&0&1&1&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{(4)}$$

$$\xrightarrow{(4)}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&1&0&0&1&1\\0&-1&0&0&0&1&1&1\\0&0&-2&1&0&-2&1&0\\0&0&0&1&1&1&2&1\end{array}\right)\xrightarrow{(5)}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&-1&-1&-1&0\\0&-1&0&0&0&1&1&1\\0&0&-2&1&-1&-3&-1&-1\\0&0&0&1&1&1&2&1\end{array}\right)^{\xrightarrow{(6)}}-1$$

$$\xrightarrow{(5)}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&-1&-1&-1&0\\0&1&0&0&0&-1&-1&-1\\0&0&1&1&1/2&3/2&1/2&1/2\\0&0&0&1&1&1&2&1\end{array}\right)=(E\,|\,A)$$

3.7. Метод простої ітерації

3.7.1. Аналіз постановки задачі

Для обчислення розв’язку системи лінійних рівнянь великої розмірності прямі методи використовувати недоцільно. Тому застосовуємо наближені методи, які в разі їх збіжності при нескінченній кількості операцій (кроків) дають точний результат. Розглянемо систему

$$A\bar{x}=\bar{b}. \tag{3.132}$$

Метод простої ітерації застосовується для систем типу

$$\bar{x}=\bar{\beta}+\alpha\bar{x}.\ \bar{x}=\bar{\beta}+\alpha\bar{x}\,, \tag{3.133}$$

де $\bar{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$, $\bar{\beta}=\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}$, $\alpha=\begin{pmatrix}\alpha_{11}\ldots\alpha_{1n}\\\alpha_{21}\ldots\alpha_{2n}\\\ldots\\\alpha_{n1}\ldots\alpha_{nn}\end{pmatrix}$.

Система (3.132) зводиться до (3.133) так:

1-й спосіб передбачає в кожному *i*-му рівнянні залишити *i*-ий елемент в лівій частині та перенесення в праву частину всіх невідомих разом з їх перетвореними коефіцієнтами. Таким чином, співвідношення між коефіцієнтами системи виражаються через такі відношення:

$$\beta_i=\frac{b_i}{a_{ii}},\ a_{ii}\neq 0,\ \alpha_{ij}=-\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \tag{3.134}$$

2-й спосіб передбачає розбиття a_{ii} на дві частини $a_{ii}=a_{ii}^{(1)}+a_{ii}^{(2)}$, в якому одну з частин доцільно вибирати у вигляді цілого числа $a_{ii}^{(1)}\in \mathrm{Z}$. Тоді поділивши *i*-те рівняння на a_{ii}, потрібно перенести в праву частину всі невідомі включаючи x_i разом з перетвореними коефіцієнтами $a_{ii}^{(2)}$.

$$\beta_i=\frac{b_i}{a_{ii}^{(1)}},\quad \alpha_{ii}=-\frac{a_{ii}^{(2)}}{a_{ii}^{(1)}},\quad \alpha_{ij}=-\frac{a_{ij}}{a_{ii}^{(1)}} \tag{3.135}$$

Другий спосіб значно ефективніший, так як уникає ділення на нуль і дає змогу зменшити похибку заокруглень при діленні у зв'язку з вибором знаменника у вигляді цілого числа. Беремо $\overline{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$ – початкове наближення. Тоді будуємо наступні наближення у такому вигляді:

$$\begin{cases} \overline{x}^{(1)} = \beta + \alpha\overline{x}^{(0)} \\ \overline{x}^{(2)} = \beta + \alpha\overline{x}^{(1)} \\ \qquad \ldots \\ \overline{x}^{(k+1)} = \beta + \alpha\overline{x}^{(k)} \end{cases}. \tag{3.136}$$

Легко довести, що в разі збіжності це приводить до точного розв'язку $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \overline{x}^{(k)} = \overline{x}*$. Переходячи до граничного випадку будемо мати:

$$\lim_{k\to\infty} \overline{x}^{(k+1)} = \lim_{k\to\infty}\left(\beta + \alpha\overline{x}^{(k)}\right) = \beta + \alpha \lim_{k\to\infty} \overline{x}^{(k)}, \quad \overline{x}* \equiv \beta + \alpha\overline{x}* \tag{3.137}$$

Запишемо формулу (3.122) у розгорнутій формі:

$$x_i^{(k+1)} = \beta + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)} \tag{3.138}$$

Візьмемо $x_j^{(k)}$ рівне відповідному стовпчику вільних членів. Умовою зупинки при виконанні (3.138) можна використати $\forall\, i : \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| < E$. Щоб вивести достатні умови збіжності методу простої ітерації, введемо певні позначення, що стосуються евклідових норм.

$$\|\alpha\|_m = \max_i \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|; \quad \|\alpha\|_l = \max_l \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}|; \quad \|\alpha\|_k = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^2}. \tag{3.139}$$

Теорема. Якщо одна з евклідових норм матриць $\|\alpha\| \le q < 1$ і довільно вибрати початковий вектор $\overline{x}^{(0)}$, то метод простої ітерації є збіжним $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{x}^{(n)} = \overline{x}*$, причому $\overline{x}* \equiv \beta + \alpha\overline{x}*$ і цей розв'язок єдиний.

$\overline{x}^{(k+1)} = \overline{\beta} + \alpha\overline{x}^{(k)}$, $\overline{x}^{(1)} = \overline{\beta} + \alpha\overline{x}^{(0)}$,

$\overline{x}^{(2)} = \overline{\beta} + \alpha\overline{x}^{(1)} = \overline{\beta} + \alpha\left(\overline{\beta} + \alpha\overline{x}^{(0)}\right) = \left(\overline{E} + \overline{\alpha}\right)\overline{\beta} + \alpha^2\overline{x}^{(0)}$, …

$$\overline{x}^{(k+1)} = (\overline{E} + \overline{\alpha} + \overline{a}^2 + \ldots + \overline{a}^{(k)})\overline{\beta} + \alpha^{(k+1)}\overline{x}^{(0)} \tag{3.140}$$

Відомо, що якщо $\|\alpha\| < 1$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha^k = 0$. При прямуванні $k \to \infty$ вираз в круглих дужках формули (3.140) являє собою аналог нескінченно спадної геометричної прогресії, яка, як відомо, збігається, так як її знаменник. Тобто $\|\alpha\| < 1$. Тоді

$$E + \alpha + \alpha^2 + \ldots = \frac{E}{E - \alpha} = (E - \alpha)^{-1} \tag{3.141}$$

Перше твердження є справедливим, тому що границя нескінченно спадної геометричної прогресії існує. Друге твердження про єдність та існування розв'язку випливає при прямуванні відношення (3.141) до нескінченності.

$$\lim_{k\to\infty} \overline{x}^{(k+1)} = (E - \alpha)^{-1}\overline{\beta} + 0 \quad \Rightarrow \overline{x}* = (E - \alpha)^{-1}\overline{\beta} \quad \Big| \cdot E^{-\alpha}\ \textit{зліва}, \tag{3.142}$$

$$\left(E-\alpha\right)\overline{x}^{*}=\overline{\beta}\,,\ \overline{x}^{*}-\alpha\overline{x}^{*}=\overline{\beta}\,,\ \overline{x}^{*}=\overline{\beta}+\alpha\overline{x}^{*}.$$

Виходячи з того, що умови теоретично є достатніми, говорити, яким буде метод $\|\alpha\|<1$ розбіжним чи збіжним є безпідставним. Тому на практиці, крім загальноприйнятої зупинки $\left\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right\|<E$, треба використовувати ще додаткову умову $k>k_{\max}$.

3.7.2. Приклади розв’язку системи методом простої ітерації

Систему лінійних рівнянь, що записана у формі (3.2), необхідно привести до вигляду

$$\mathbf{X}=\mathbf{C}\cdot\mathbf{X}+\mathbf{F}. \tag{3.143}$$

так, щоб виконувались умови збіжності ітераційного процесу

$$\max_{i}\sum_{j=1}^{n}\left|C_{ij}\right|<1;\quad i=1,2,\ldots,n \tag{3.144}$$

$$\max_{j}\sum_{i=1}^{n}\left|C_{ij}\right|<1;\quad j=1,2,\ldots,n. \tag{3.145}$$

Умови закінчення ітераційного процесу

$$\max\left|x_i^{(k+1)}-x_i^{(k)}\right|\le\varepsilon, \tag{3.146}$$

де ε - задана точність наближення до кореня.

Приклад 3.37. Розв’язати систему лінійних рівнянь методом простої ітерації, прийнявши ε =0,005.

$$\begin{cases}3x_1+x_2-5x_3=10\\4x_1+x_2-2x_3=8\\x_1-5x_2+x_3=-10\end{cases}$$

Розв’язок. Легко помітити, якщо з першого рівняння системи виділити невідоме x_3, з другого – x_1, а з третього – x_2, то умови збіжності (3.135) будуть виконуватись. Спочатку перше рівняння поділимо на 5, друге на 4, а третє на 5.Дійсно,

$$\begin{cases}x_3=0{,}6x_1+0{,}2x_2\qquad\qquad -2\\x_1=\qquad -0{,}25x_2+0{,}5x_3+2\\x_2=0{,}2x_1\qquad\qquad +0{,}2x_3+2\end{cases},\ \text{при}\ F=\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}.$$

Матриця C системи (3.143) та умови збіжності мають вигляд:

$$C=\begin{bmatrix}0{,}6&0{,}2&0\\0&-0{,}25&0{,}5\\0{,}2&0&0{,}2\end{bmatrix};\qquad \max_{i}\sum_{j=1}^{n}\left|C_{ij}\right|=0{,}8<1.$$

За нульове наближення коренів системи приймаємо вектор $\overline{F}$ (табл. 3.1 при K=0), тобто $x_1^{(0)}=2;\,x_2^{(0)}=2;\,x_3^{(0)}=-2$. Підставляємо отримані значення $\overline{F}$ у систему рівнянь та отримаємо нові значення $x_1^{(1)}=0{,}5;\,x_2^{(2)}=2;\,x_3^{(3)}=-0{,}4$:

$$\begin{cases}x_1^{(1)}=-0{,}25\cdot2+0{,}5\cdot(-2)+2=0{,}5\\x_2^{(1)}=0{,}2\cdot2+0{,}2\cdot(-2)+2=2\\x_3^{(1)}=0{,}6\cdot2+0{,}2\cdot2-2=-0{,}4.\end{cases}$$

Підставляючи отримані дані в початкову умову (систему рівнянь) знаходять друге наближення коренів і так далі (табл. 3.1), доки не буде досягнуто задану точність наближення до кореня ε. Результати розв’язування наведено у табл. 3.1.

Таблиця 3.1

K	x1	x2	x3	$\varepsilon = \max\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right|$	
0	2	2	-2		
1	0,5	2	-0,4	1,6	$> \varepsilon$
2	1,3	2,02	-1,3	0,9	$> \varepsilon$
3	0,845	2	-0,816	0,484	$> \varepsilon$
4	1,092	2,0058	-1,093	0,277	$> \varepsilon$
5	0,9521	1,9998	-0,9436	0,1494	$> \varepsilon$
6	1,0282	2,0017	-1,0288	0,0852	$> \varepsilon$
7	0,9852	1,9999	-0,9827	0,0461	$> \varepsilon$
8	1,0087	2,0005	-1,0089	0,0262	$> \varepsilon$
9	0,9954	1,9999	-0,9947	0,0142	$> \varepsilon$
10	1,0027	2,0001	-1,0028	0,0081	$> \varepsilon$
11	0,9986	2,0000	-0,9984	0,0044	$< \varepsilon$

Відповідь: $x_1^{(11)} = 0{,}9986 \quad x_2^{(11)} = 2{,}0000 \quad x_3^{(11)} = -0{,}9984$.

3.8. Метод Гауса-Зейделя (метод поліпшеної ітерації)

3.8.1. Аналіз постановки задачі

Метод Зейделя є удосконаленим методом простої ітерації, який полягає в знаходженні розв'язків системи рівнянь та застосовується для систем типу

$$\bar{x} = \bar{\beta} + \alpha\bar{x},$$

$$x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \alpha_{11}x_1^{(k)} + \ldots + \alpha_{1n}x_n^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \alpha_{21}x_1^{(k+1)} + \alpha_{22}x_2^{(k)} + \ldots + \alpha_{2n}x_n^{(k)}$$

$$\ldots$$

$$x_n^{(k+1)} = \beta_n + \alpha_{n1}x_1^{(k+1)} + \alpha_{n2}x_2^{(k)} + \ldots + \alpha_{nn}x_n^{(k+1)}$$

Звідси

$$x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1}\alpha_{ij}x_j^{(k+1)} \tag{3.147}$$

Незважаючи на більш громіздкий запис формули (3.147) у порівнянні з методом простої ітерації, програмна реалізація цієї формули є більш простою. Так як для методу простої ітерації в ПК потрібно формувати два вектори (масиви), які відповідатимуть попередньому і наступному наближенню, а в методі Зейделя достатньо використовувати лише один вектор (матрицю) для наступного наближення. Проте доповнюючи $x_j^{(k+1)}$-тими змінними та аналізуючи перевірки, які пов'язані з умовою закінчення розрахунку методу, вимагатиметься введення нових змінних, які будуть служити як ознака умов закінчення алгоритму. Самі умови зупинки аналогічні до тих, що є в методі простої ітерації. Аналогічне твердження має місце при формулюванні достатніх умов збіжності методу Зейделя.

Виходячи з того, що умови достатні, можливі такі випадки: метод простої ітерації збігається, а метод Зейделя не збігається і навпаки, тобто

$$\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| < E \quad \Leftrightarrow \quad \forall i : \left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| < E_i \tag{3.148}$$

а) $E_i = E_j$

б) $E_i \neq E_j$

Для методу Зейделя умова збіжності може і не виконуватись, якщо матриця α має так звану нормальну форму. То, яка б не була норма, метод Зейделя буде збігатись. Це стверджує одна з теорем алгебри. Матриця A має нормальну форму якщо:

1) вона є симетричною $A = A^T \quad \left(a_{ij} = a_{ji}\right)$;
2) її квадратична форма є достатньо визначеною

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = a_{11}x_1^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots > 0\,. \qquad (3.149)$$

Твердження. Якщо система $\widetilde{A}\overline{x} = \widetilde{\overline{b}}$ має матрицю $\widetilde{A}$ нормальної форми, то після зведення її до вигляду $\overline{x} = \overline{\beta} + \alpha\overline{x}$ одним з вищеописаних способів, метод Зейделя буде збігатись при довільному виборі початкового наближення.

Залишається показати спосіб, як систему $\widetilde{A}\overline{x} = \widetilde{\overline{b}}$ привести до такого вигляду, щоб $\widetilde{A}$ мала нормальну форму при $\det A \neq 0$, $A^T A\overline{x} = A^T\overline{b}$, $\widetilde{A} = A^T A$, $\widetilde{\overline{b}} = A^T\overline{b}$:

$$\widetilde{a}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^T a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}\ , \qquad (3.150)$$

$$\widetilde{b}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_k\ . \qquad (3.151)$$

Доведемо, що матриця *A*, яка обчислена за формулою (3.150), має нормальну форму.

1) $\widetilde{A} = \widetilde{A}^T$ при

$$\widetilde{A}^T = (A^T A) = A^T (A^T)^T = A^T A = \widetilde{A}\,, \qquad (3.152)$$

2) $\sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{n} \widetilde{a}_{ij} x_i x_j > 0$.

3.8.2. Приклади розв'язування системи методом Зейделя

Цей метод є модифікацією методу простої ітерації. Іноді він має більшу швидкість збіжності результатів у порівнянні з методом простої ітерації. Суть його полягає в тому, що для розрахунку (K+1)-го наближення кореня x_{i+1} одразу використовуються щойно знайдені (K+1) наближення попередніх коренів x_i. Умови збіжності ті ж самі, що і в методі простої ітерації.

Приклад 3.38. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Зейделя, прийнявши ε =0,005.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 10 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 8 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = -10 \end{cases}$$

Розв'язок. Перетворимо систему до вигляду (3.143). Перевіримо умови збіжності (3.144). За нульове наближення приймемо вектор $\overline{F}$. Тоді отримуємо перші наближення коренів:

$$x_1^{(1)} = -0{,}25 \cdot 2 + 0{,}5 \cdot (-2) + 2 = 0{,}5;$$

$$x_2^{(1)} = 0{,}2 \cdot 0{,}5 + 0{,}2 \cdot (-2) + 2 = 1{,}7;$$

$$x_3^{(1)} = 0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}2 \cdot 1{,}7 - 2 = -1{,}36.$$

Таблиця 3.2

K	x1	x2	x3	$\varepsilon = \max\left\|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right\|$	
0	2	2	-2		
1	0,5	1,7	-1,36	1,5	> ε
2	0,895	1,907	-1,0816	0,395	> ε
3	0,9825	1,9802	-1,0145	0,0875	> ε
4	0,9977	1,9966	-1,0020	0,0165	> ε
5	0,9998	1,9996	-1,0002	0,0029	< ε

Відповідь: $x_1^{(5)} = 0{,}9998;\quad x_2^{(5)} = 1{,}9996;\quad x_3^{(5)} = -1{,}0002.$

Отримане значення $x_1^{(1)}$ з першого рівняння підставляємо в друге рівняння та отримаємо значення $x_2^{(1)}$. Так само отримане значення $x_2^{(1)}$ з першого рівняння підставляємо в друге рівняння та отримаємо значення $x_3^{(1)}$. Далі виконаємо друге наближення, третє та ін. Результати розв'язування занесемо у табл. 3.2.

3.9. Особливості трьохдіагональної матриці

3.9.1. Обчислення детермінанту трьохдіагональної матриці

Трьохдіагональною матрицею або матрицею Якобі є матриця такого вигляду:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3.153}$$

де у всіх місцях, окрім головної діагоналі та двох сусідніх з нею, стоять нулі. Трьохдіагональні матриці розглядаються принаймні для $n \geq 3$.

Для обчислення детермінанта матриці A використовується формула:

$$\Delta_k = a_{kk}\Delta_{k-1} - a_{k,k-1}a_{k-1,k}\Delta_{k-2}\,, k = \overline{2,n}\,, \tag{3.154}$$

$$\Delta_1 = a_{11}\,,\ \ \Delta_0 = 1\,, \tag{3.155}$$

$$\det A = \Delta_n\,. \tag{3.156}$$

Виведення цієї формули здійснюється поетапно з розкладом детермінанта матриці A по останній стрічці чи останньому розкладу. Формули вимагають введення певних позначень через $\Delta_{k-1}, \Delta_{k-2}$.

Доведення здійснюється методом математичної індукції:

1) припустимо справедливість формули (3.156) при $n = 2$:

$$\Delta_2 = a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}\cdot 1 = \det A_{2\times 2}\,,$$

2) припустимо справедливість формули (3.156) для $n = m$;
3) доведемо справедливість формули (3.156) для $n = m + 1$.

Доведення формули (3.156) для n=m+1 здійснюється за розкладом першої стрічки або першого стовпчика. Вважаємо, що Δ_m, Δ_{m-1} вже обчислені.

Як видно, рекурентна формула (3.154) дає значний ефект при певній кількості затрачених операцій типу множення, віднімання (приблизно $4n$ операцій $<< \frac{2}{3}n^3$). Проте резервувати оперативну пам'ять для матриці (3.154) в традиційних системах програмування все одно необхідно. Покажемо, як змінити формулу (3.154), щоб в оперативній пам'яті резервувати не n^2 елементів, а $3n$ елементів: $3n \approx n + (n-1) + (n-1)$. Для цього матрицю A подамо у вигляді (3.157):

$$A = \begin{pmatrix} s_1 & u_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ l_2 & s_2 & u_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_3 & s_3 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & s_{n-2} & u_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & l_{n-1} & s_{n-1} & u_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & l_n & s_n \end{pmatrix}. \tag{3.157}$$

Як бачимо в (3.157) ми використали $3n$-вимірні простори $\bar{l}, \bar{s}, \bar{u}$. Залишається встановити відповідність між $a[i, j]$ і цими векторами.

$s_i = a_{ii}$, $i = \overline{1,n}$, $l_k = a_{k,k-1}$, $k = \overline{2,n}$, $u_j = a_{j,j+1}$, $j = \overline{1,n-1}$ тобто

$$\left.\begin{aligned} l_2 &= a_{21} \\ l_3 &= a_{31} \\ &\dots \\ l_n &= a_{n,n-1} \end{aligned}\right\} \text{ та } \left.\begin{aligned} u_1 &= a_{12} \\ u_2 &= a_{23} \\ &\dots \\ u_{n-1} &= a_{n-1,n} \end{aligned}\right\}$$

$$\Delta_k = s_k \Delta_{k-1} - u_{k-1} l_k \Delta_{k-2} \text{ та } \Delta_1 = s_1,\ \Delta_0 = 1,\ k = \overline{2,n}.$$

3.9.2. Метод прогонки для розв’язування трьохдіагональних систем лінійних рівнянь

Якщо матриця системи є розрідженою, тобто містить велику кількість нульових елементів, то в такому випадку застосовують ще одну модифікацію методу Гауса – **метод прогонки**. Розглянемо систему рівнянь такого вигляду

$$A\,\bar{x} = \bar{b}, \tag{3.158}$$

$$A = \begin{pmatrix} s_0 & u_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ l_1 & s_1 & u_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & s_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_{n-2} & u_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & l_{n-1} & s_{n-1} & u_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & l_n & s_n \end{pmatrix}. \tag{3.159}$$

Запишемо i-те рівняння системи (3.158) враховуючи подання (3.159)

$$l_i x_{i-1} + s_i x_i + u_i x_{i+1} = b_i,\ i = \overline{0,n},\ l_0 = u_n = 0. \tag{3.160}$$

Ідея методу прогонки базується на тому, що в результаті прямого ходу методу Гауса від системи виду (3.158) переходимо до системи, де матриця A буде мати вигляд верхньої трикутної матриці з одиничною діагоналлю. Це означає, що в i-му рівнянні отримана система буде містити невідомі $x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$. Очевидно, що шляхом лінійних комбінацій ці рівняння можна перетворити так, щоб в кожному i-му з них залишились x_i та x_{i+1} невідомі. Якщо при x_i невідомому стоїть коефіцієнт 1, то при x_{i+1} невідомому стоїть невизначений коефіцієнт.

Припустимо, що обчислення i-ої координати шуканого розв’язку здійснюється через $i+1$ координату за допомогою спеціально введеної формули:

$$x_i = \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1},\ i = \overline{0,n-1}. \tag{3.161}$$

У формулі (3.161) α_i і β_i є невизначеними коефіцієнтами, які потрібно знайти.

Перепишемо (3.161) замінюючи i на i-1:

$$x_{i-1} = \alpha_i x_i + \beta_i \tag{3.162}$$

та підставимо (3.162) в (3.160) при цьому об’єднаємо коефіцієнти при x з однаковими індексами

$$l_i(\alpha_i x_i + \beta_i) + s_i x_i + u_i x_{i+1} = b_i, \tag{3.163}$$

$$(l_i \alpha_i + s_i) x_i + u_i x_{i+1} = b_i - l_i \beta_i. \tag{3.164}$$

Зводимо останнє співвідношення до вигляду (3.161), в результаті отримаємо:

$$x_i = -\frac{u_i}{l_i \alpha_i + s_i} x_{i+1} + \frac{b_i - l_i \beta_i}{l_i \alpha_i + s_i}. \tag{3.164}$$

Порівнюючи коефіцієнти в останній нерівності з α_i і β_i

$$\alpha_{i+1} = -\frac{u_i}{l_i\alpha_i + s_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{b_i - l_i\beta_i}{l_i\alpha_i + s_i}, \quad i = \overline{0, n-1}. \tag{3.165}$$

Для організації виведення формули (3.165) необхідні значення α_0 і β_0, які можуть бути знайдені виходячи з запису першого рівняння

$$l_0 x_0 + u_0 x_1 = b_0, \tag{3.166}$$

$$x_0 = -\frac{u_0}{l_0}x_1 + \frac{b_0}{l_0} \Rightarrow \alpha_0 = -\frac{u_0}{l_0}, \beta_0 = \frac{b_0}{l_0}. \tag{3.167}$$

Таким чином здійснили процес аналогічний прямому ходу методу Гауса. Для реалізації зворотної прогонки використовується формула (3.161), для якої треба знайти останній елемент x_n. Для цього записуємо останнє рівняння системи

$$l_n x_{n-1} + u_n x_n = b_n, \tag{3.168}$$

$$x_{n-1} = \alpha_n x_n + \beta_n. \tag{3.169}$$

Підставляємо останнє співвідношення (3.169) в (3.168) та отримаємо

$$x_n = \frac{b_n - l_n\beta_n}{l_n\alpha_n + u_n}. \tag{3.170}$$

Не будемо проводити окремо аналіз можливості виникнення ділення на нуль, проте перевірку такої ситуації в програмі доцільно проводити.

3.10. Аналіз числових методів розв’язання СЛАР

3.10.1. Загальна характеристика методів розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Нехай задана система лінійних алгебраїчних рівнянь(СЛАР)

$$Ax = b, \tag{3.171}$$

де $x \in R^n$; $A \equiv \{a_{ij}\}$; $i, j = \overline{1, n}$; $a_{ij} \in R^1$; $b \equiv (b_1, b_2, ..., b_n)^T \in R^n$.

Якщо $\Delta \equiv \det A$, тоді

$$x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta}. \tag{3.172}$$

Однак, при великих *n* формули (3.172) практично не використовуються. Труднощі:

1) Відомо що

$$\Delta \equiv \sum (-1)^{I(a_1, a_2, ..., a_n)} a_{1a_1}, a_{2a_2}, ..., a_{na_n}, \tag{3.173}$$

де $I(a_1, a_2, ..., a_n)$ – кількість інверсій множини $(1,2,...,n)$, $(a_1, a_2, ..., a_n)$ – перестановки. Тоді при *n*=30 кількість операцій на комп’ютері для обчислення одного визначника Δ дорівнює N=30!, а для обчислення 31 визначника на комп’ютері з 1 млрд.опер/сек необхідно $\approx 10^{16}$ років (час існування всієї Галактики).

2) Дуже впливає обчислювальна похибка при заокругленні на кінцевий результат. Так, для n=30 у 32 бітовому поданні числа при обчисленні одного доданку у (3.173) можуть бути аварійні зупинки ($|a_{ia_i}| > 1$).

В залежності від порядку системи (3.171) методи розв’язування поділяються на:

1) Точні ($n \le 10^4$) : метод Гауса, метод квадратного кореня, метод ортогоналізації тощо;

2) Ітераційні $(n \le 10^7)$: метод простої ітерації (МПІ), метод Зейделя (МЗ), метод градієнтного спуску тощо;
3) Ймовірнісні методи $(n > 10^7)$.

Точні методи розв'язання СЛАР розглядалися в курсі вищої алгебри.

3.10.2. Збіжність метричної геометричної прогресії

Нехай задано матричний ряд

$$E + A + A^2 + \ldots + A^n + \ldots, \tag{3.174}$$

де $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A \equiv \{a_{ij}\}$; $i, j = \overline{1, n}$; $a_{ij} \in R$.

Працюємо у лінійному нормованому просторі векторів $x \in R^n$ з нормою

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p}, 1 \le p \le \infty. \tag{3.175}$$

При різних $p \ge 1$ в силу скінченності простору всі ці норми еквівалентні.

Розглянемо 3 норми:

1) Чебишовська для $p = \infty$

$$\|x_\infty\| = \max_{1 \le j \le n} |x_j|; \tag{3.176}$$

2) Сферична для $p = 2$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{(x, x)}; \tag{3.177}$$

3) Октаедрична для $p = 1$

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|. \tag{3.178}$$

Визначимо норму матриці A, як норму лінійного оператора:

$$\|A\|_p = \sup_{\|x\|=1} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}. \tag{3.179}$$

Якщо А – симетрична, тоді $\|A\|_2 = \max\limits_{1 \le i \le n} |\lambda_i(A)|$.

Говорять, що норми $\|X\|$ та $\|A\|$ узгоджені, якщо $|\lambda| \le \|A\|$.

***Зауваження* 3.10.1.** Якщо $Ax = \lambda x$, то є узгодженість норм, бо $\|A\|\|X\| \ge \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, тобто $|\lambda| \le \|A\|$.

***Зауваження* 3.10.2.** Нижче всі твердження мають місце для всіх трьох норм. Будемо писати $\|\circ\|$, бо норми еквівалентні.

Говорять, що послідовність векторів $\{x^k \equiv (x_1^{\,k}, x_2^{\,k}, \ldots, x_n^{\,k})\}$ збігається до вектора $x^k \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ за нормою, якщо $\|x^k - x\| \to 0$ $(k \to \infty)$. Ця збіжність не залежить від розмірності простору (скінченного або зліченного). Але якщо простір R^n має розмірність *n*, то збіжність за нормою та збіжність покоординатна рівносильні $\left(\left[8\right], c.31\right)$.

Лема 3.10.1. $\lim\limits_{m\to\infty} A^m = 0$ тоді і тільки тоді, коли

$$\left|\lambda_i\left(A\right)\right| < 1, i = 1, 2, ..., n,. \tag{3.180}$$

Доведення. Відомо, що $\forall A$ з $a_{ij} \in R$ існує $C\left(\det C \neq 0\right)$ така, що вихідна матриця *A* має представлення [12]

$$A = CIC^{-1}. \tag{3.181}$$

$$I = \left[I_{t_1}^{\lambda_1}, I_{t_2}^{\lambda_2}, ..., I_{t_r}^{\lambda_r}\right]. \tag{3.182}$$

діагональна матриця з клітинами Жордана порядку $t = 1, 2, ..., r, a\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r -$ власні значення матриці *A*; *r* – кількість лінійно-незалежних власних векторів матриці *A*. Клітина Жордана має вигляд:

$$I_{t_i}\left(\lambda_i\right) \equiv \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_i & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}, i = \overline{1, r}. \tag{3.183}$$

Якщо $\dim A = n$, тоді $n = \sum\limits_{i=1}^{r} t_i\left(\lambda_i\right)$. Отримаємо A^m з (3.181):

$$A^m = CIC^{-1}CIC^{-1}...CIC^{-1} = CI^mC^{-1}. \tag{3.184}$$

Тоді зрозумілий ланцюжок еквівалентних тверджень

$$\left[\lim_{m\to\infty} A^m = 0\right] \Leftrightarrow \left[\lim_{m\to\infty} I^m = 0\right] \Leftrightarrow \left[\lim_{m\to\infty} I_{t_i}^m\left(\lambda_i\right) = 0, t = t_{1,...,t_2}\right]. \tag{3.185}$$

Обчислимо степінь клітини Жордана

$$I_{t_i}^m\left(\lambda_i\right) = \begin{pmatrix} \lambda^m & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ \frac{1}{1!}\left(\lambda_i^m\right)^{(1)} & \lambda_i^m & 0 & ... & 0 & 0 \\ \frac{1}{2!}\left(\lambda_i^m\right)^{(2)} & \frac{1}{1!}\left(\lambda_i^m\right)^{(1)} & \lambda_i^m & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \frac{1}{(t-1)!}\left(\lambda_i^m\right)^{(t-1)} & \frac{1}{(t-2)!}\left(\lambda_i^m\right)^{(t-2)} & \frac{1}{(t-3)!}\left(\lambda_i^m\right)^{(t-3)} & ... & \frac{1}{2!}\left(\lambda_i^m\right)^{(2)} & \frac{1}{1!}\left(\lambda_i^m\right)^{(1)} \end{pmatrix}. \tag{3.186}$$

А це подання разом з твердженням дають ланцюжок
$\left[A^m \to 0\right] \Leftrightarrow \left[\lim\limits_{m\to\infty} I_{t_1}^m\left(\lambda_i\right) = 0\right] \Leftrightarrow \left|\lambda_i\left(A\right)\right| < 1$, що і доводить лему 1.

Лема 3.10.2. Якщо $\left\|A\right\| < 1$, то

$$\lim_{m\to\infty} A^m = 0. \tag{3.187}$$

Доведення. Це випливає з очевидних рівностей $\left\|A^m - 0\right\| = \left\|A^m\right\| = \left\|A\right\|^m$.

Лема 3.10.3. Для будь-якої дійсної матриці *A* маємо співвідношення між власними значеннями і нормою:

$$\left|\lambda_i\left(A\right)\right| \le \left\|A\right\|, i=1,2,...,n. \tag{3.188}$$

Доведення. $\forall \varepsilon > 0$ побудуємо матрицю

$$B=\frac{A}{\left\|A\right\|+\varepsilon}. \tag{3.189}$$

Звідси обчислюємо будь-яку з трьох норм

$$\left\|B\right\| \equiv \frac{\left\|A\right\|}{\left\|A\right\|+\varepsilon}<1. \tag{3.190}$$

Власне значення $\lambda\left(A\right)$ визначається з характеристичного рівняння за означенням

$$\det\left(\lambda\cdot E-A\right)=0. \tag{3.191}$$

Доведемо, що

$$\lambda_i\left(B\right)=\frac{\lambda_i\left(A\right)}{\left\|A\right\|+\varepsilon}, i=1,2,...,n. \tag{3.192}$$

Дійсно, $\lambda\left(B\right)$ визначається за означенням (3.191) з характеристичного рівняння для матриці *B*: $\det\left(\frac{\lambda\left(A\right)}{\left\|A\right\|+\varepsilon}\cdot E-\frac{A}{\left\|A\right\|+\varepsilon}\right)=\left(\frac{1}{\left\|A\right\|+\varepsilon}\right)^n\det\left(E\lambda\left(A\right)-A\right)=0$. Тобто $\lambda\left(B\right)$, що обчислене за формулою (3.192), є за означенням (3.191) власним значенням матриці *B*. Тоді за лемою 3.10.2 з $\left\|B\right\|<1$ матимемо $\lim\limits_{m\to\infty}B^m=0$. Лема 3.10.1 дає можливість стверджувати, що $\left|\lambda_i\left(B\right)\right|<1$, а за означенням матриці *B* (3.189) це означає $\frac{\left|\lambda\left(A\right)\right|}{\left\|A\right\|+\varepsilon}<1$, тобто $\left|\lambda_i\left(A\right)\right|<\left\|A\right\|+\varepsilon$. Але з довільності вибору $\varepsilon>0$ матимемо $\left|\lambda_i\left(A\right)\right|\le\left\|A\right\|$.

<u>Теорема 3.10.1.</u> Для збіжності матричної геометричної прогресії (3.174) необхідно і досить, щоб

$$\left|\lambda_i\left(A\right)\right|<1,\ i=1,2,...,n, \tag{3.193}$$

причому $\exists!\left(E-A\right)^{-1}$ для $\left(E-A\right)$ та

$$\sum_{m=0}^{\infty}A^m=\left(E-A\right)^{-1}, \tag{3.194}$$

де $A^0=E$.

Доведення. Необхідність. Нехай матрична геометрична прогресія збігається, тобто загальний член $\lim\limits_{m\to\infty}A^m=0$. Тоді за лемою 1 маємо $\left|\lambda_i\left(A\right)\right|<1,\ i=1,2,...,n$.

<u>Достатність</u>. Нехай $\left|\lambda_i\left(A\right)\right|<1$. Доведемо (3.194). Спочатку покажемо, що $\exists(E-A)^{-1}$, і якщо $\det(E-A)\ne0$. Доведемо спочатку, що $\lambda\left(E-A\right)=1-\lambda\left(A\right)$. Нехай $\lambda\left(A\right)$ – власне значення *A*, тобто $\lambda\left(A\right)$ задовольняє $\det\left(E\cdot\lambda\left(A\right)-A\right)=0$.

Тоді $\det\left[\left(1-\lambda\left(A\right)\right)\cdot E-\left(E-A\right)\right]=\det\left(E-E\cdot\lambda\left(A\right)-E+A\right)=$ $=\det\left(A-E\cdot\lambda\left(A\right)\right)=\left(-1\right)^n\det\left(\lambda\left(A\right)E-A\right)=0$. Тобто $1-\lambda\left(A\right)$– власне значення для матриці

$E-A$. Але $\left|\lambda\left(A\right)\right|<1$, тоді $\left|\lambda\left(A\right)\right|\neq 1$, що визначає $\det\left(E\cdot 1-A\right)\neq 0$, так як тільки при $\left|\lambda\left(A\right)\right|<1$ маємо $\det\left[\lambda\left(A\right)\cdot E-A\right]=0$. Значить $\exists!(E-A)^{-1}$ за означенням.

Доведемо (3.194). Очевидна матрична рівність: $(E+A+A^2+...+A^m)(E-A)=E-A^{m+1}$. Помножимо справа цю рівність та $(E-A)^{-1}$. Тоді одержимо $E+A+...+A^m=(E-A^{m+1})(E-A)^{-1}=E(E-A)^{-1}-A^{m+1}(E-A)^{-1}$. За лемою 1 загальний член матричної геометричної прогресії $\lim\limits_{m\to\infty}A^m=0$, бо $\left|\lambda\left(A\right)\right|<1$ за припущенням достатності. Таким чином $\sum\limits_{m=0}^{\infty}A^m=\left(E-A\right)^{-1}$.

<u>Наслідок 3.10.1.</u> Нехай $\|A\|<1$, тоді очевидно, що $\left\|\left(E-A\right)^{-1}-\left(E+A+...+A^m\right)\right\|\leq\frac{\|A\|^{m+1}}{1-\|A\|}$.

Далі розглянемо ітераційний процес знаходження розв'язку СЛАР (3.171).

3.10.3. Збіжність методу простої ітерації

Нехай задана СЛАР

$$Ax=b, \tag{3.195}$$

де $x\in R$, $A\equiv\left\{a_{ij}\in R, i, j=\overline{1,n}\right\}$. Одержимо еквівалентну СЛАР

$$x=\alpha x+\beta. \tag{3.196}$$

Лема 3.10.4. Якщо $A=C+D$, $\det C\neq 0$, то (3.195) еквівалентна (3.196) з

$$\alpha=D^{-1}\left(D-A\right);\beta=D^{-1}\cdot b. \tag{3.197}$$

Доведення. Доведемо, що з (3.196) випливає (3.195). Дійсно, підставимо (3.197) у (3.196), причому врахуємо $D=A-C$ і $x=-C^{-1}Dx+C^{-1}b=-C^{-1}\left(A-C\right)x+C^{-1}b$. Звідки $x=-C^{-1}Ax+C^{-1}Cx+C^{-1}b,$ що еквівалентне $-C^{-1}\left(Ax-b\right)=0$, а значить еквівалентне (3.195).

Метод простої ітерації (МПІ) можна побудувати наступним чином

$$x^{(k+1)}=\alpha x^{(k)}+\beta;\ k=0,1,2,...;\ x^0=\beta. \tag{3.198}$$

Нехай x^* розв'язок СЛАР (3.195) (або(3.196)), тобто $Ax^*=b\ \left(x^*=\alpha x+\beta\right)$.

<u>Теорема 3.10.2.</u> Для збіжності МПІ (3.198) для довільної початкової ітерації $x^{(0)}\in R$:

$$\lim_{k\to\infty}x^{(k)}=x^*. \tag{3.199}$$

Необхідно і досить, щоб

$$\left|\lambda\left(\alpha\right)\right|<1. \tag{3.200}$$

Доведення. Необхідність з $\lim\limits_{k\to\infty}x^{(k)}=x^*$ треба довести (3.200). Очевидні рівності: $x^*-x^{(k)}=\left(\alpha x^*+\beta\right)-\left(\alpha x^{(k-1)}+\beta\right)=\alpha\left(x^*-x^{(k-1)}\right)=\quad=\alpha^2\left(x^*-x^{(k-2)}\right)=...=a^k\left(x^*-x^{(0)}\right)$, тобто $x^*-x^{(k)}=\alpha^k\left(x^*-x^{(0)}\right)$. Якщо перейти до границі зліва і справа при $k\to\infty$, то одержимо: $0=\lim\limits_{k\to\infty}\alpha^k\left(x^*-x^{(0)}\right)$. Але $x^*-x^{(0)}\neq 0$. Значить $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha^k=0$. Тоді за лемою 1 маємо $\left|\lambda\left(\alpha\right)\right|<1$.

<u>Достатність.</u> Нехай $\left|\lambda\left(\alpha\right)\right|<1$, доведемо (3.199). Одержимо k-ту ітерацію через $x^{(0)}$:

$$x^{(k)}=\alpha x^{(k-1)}+\beta=\alpha\left(\alpha x^{(k-2)}+\beta\right)+\beta=\alpha^2x^{(k-2)}+\alpha\beta+\beta=$$
$$=\alpha^2x^{(k-2)}+\left(E+\alpha\right)\beta=\alpha^2\left(\alpha x^{(k-3)}+\beta\right)+\left(E+\alpha\right)\beta=$$
$$=\alpha^3x^{(k-3)}+\left(E+\alpha+\alpha^2\right)\beta=...=\alpha^k x^{(0)}+\left(E+\alpha+\alpha^2+...+\alpha^{k-1}\right)\beta .$$

За лемою 1 з $\left|\lambda\left(\alpha\right)\right|<1$ випливає $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha^k=0$.

Тоді $\lim\limits_{k\to\infty}k^{(k)}=\lim\limits_{k\to\infty}\alpha^k x^{(0)}+\lim\limits_{k\to\infty}\left[E+\alpha+\alpha^2+...+\alpha^{k-1}\right]\beta=\left(E-\alpha\right)^{-1}\beta\equiv x^*$, для $\forall x^{(0)}\in R^n$.

Знайшли формулу для обчислення точного розв'язку $x^k=(E-\alpha)^{-1}\beta$.

Зауважимо, що проблема знаходження СЛАР звелася до проблеми знаходження оберненої матриці.

Теорема 3.10.3. Якщо $\left\|\alpha\right\|<1$, то $\lim\limits_{k\to\infty}x^{(k)}=x^*$.

Доведення. За лемою 3 маємо $\left|\lambda\left(\alpha\right)\right|\le\left\|\alpha\right\|<1$. Тоді теорема 2 стверджує, що $\lim\limits_{k\to\infty}k^{(k)}=x^*,\forall x^{(0)}\in R^n$.

Наслідок 3.10.2. Достатніми умовами збіжності МПІ є умови:

$$\sum_{j=1}^{n}\left|\alpha_{ij}\right|<1; i=\overline{1,n} \text{ або } \sum_{i=1}^{n}\left|\alpha_{ij}\right|<1; j=\overline{1,n}. \qquad (3.201)$$

Це випливає з означення норм матриць.

Наслідок 3.10.3. Якщо норма a узгоджена з нормою x, тобто $\left\|a\cdot x\right\|\le\left\|a\right\|\cdot\left\|x\right\|$ та $\left\|a\right\|\le1$, тоді МПІ для $\forall x^{(0)}\in R^n$ задається нерівністю $\left\|r^{(k)}\right\|\equiv\left\|x^{(k)}-x^*\right\|\le\left\|\alpha^k\right\|\cdot\left\|x^{(0)}\right\|+\dfrac{\left\|\alpha\right\|^k}{1-\left\|\alpha\right\|}$.

Доведення. Дійсно, маємо $x^*=\lim\limits_{k\to\infty}x^k=\left(E-\alpha\right)^{-1}\beta=\left(E+\alpha+...+\alpha^k+...\right)\beta$

та з достатньої умови теореми 2 k-та ітерація має вигляд: $x^{(k)}=\alpha^k x^{(0)}+(E+\alpha+...+\alpha^{k-1})\beta$. Тоді

$$\left\|x^*-x^{(k)}\right\|=\left\|\left(\alpha^k+\alpha^{k+1}+...\right)\beta-\alpha^k x^{(0)}\right\|\le$$
$$\le\left(\left\|\alpha\right\|^k+\left\|\alpha\right\|^{k+1}+...\right)\left\|\beta\right\|+\left\|\alpha\right\|^k\left\|x^{(0)}\right\|\le\left\|\alpha\right\|^k\left\|x^{(0)}\right\|++\left\|\beta\right\|\cdot\left\|\alpha\right\|^k\Big/\left(1-\left\|\alpha\right\|\right).$$

Наслідок 3.10.4. Якщо $x^{(0)}=\beta$, тоді $\left\|x^*-x^{(k)}\right\|\le\dfrac{\left\|\alpha\right\|^{k+1}\left\|\beta\right\|}{1-\left\|\alpha\right\|}$. Це випливає з доведення теореми 3.10.2.

Наслідок 3.10.5. Похибка іноді контролюється очевидною нерівністю $\left\|r^{(k)}\right\|\equiv\left\|x^*-x^{(k)}\right\|\le\left\|\alpha\right\|\cdot\left\|x^*-x^{(k-1)}\right\|$. МПІ можна модифікувати.

3.10.4. Збіжність методу Зейделя розв'язування СЛАР

Метод простої ітерації (3.198) запишемо покоординатно

$$x_i^{(k+1)}=\sum_{j=1}^{n}a_i x_j^{(k)}+\beta_i=\sum_{j=1}^{i-1}a_i x_j^{(k)}+\sum_{j=i}^{n}a_i x_j^{(k)}+\beta_i. \qquad (3.202)$$

Тоді методом Зейделя (МЗ) називається наступний ітераційний процес

$$x_i^{(k+1)}=\sum_{j=1}^{i-1}a_i x_j^{(k)}+\sum_{j=i}^{n}a_i x_j^{(k)}+\beta_i, i=\overline{1,n}. \qquad (3.203)$$

Методом Зайделя отримаємо наближення

$$(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, ..., x_i^{(k+1)}, x_{i+1}^{(k)}, ..., x_n^{(k)}), \tag{3.204}$$

якщо відомо

$$x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, ..., x_i^{(k+1)}, x_{i-1}^{(k+1)}, x_i^{(k)}, x_{i+1}^{(k)}, ..., x_n^{(k)}. \tag{3.205}$$

Лема 3.10.5. Метод Зейделя (3.202) еквівалентний МЛІ (3.203) з матрицею

$$a^* = [E-H]^{-1}F, \tag{3.206}$$

$$\begin{gathered} H \equiv \{\alpha_{ij} \mid h_{ij} = 0, i \le j \, для \; i, j = \overline{1,n}\}, \\ F \equiv \{\alpha_{ij} \mid h_{ij} = 0, i > j \, для \; i, j = \overline{1,n}\}. \end{gathered} \tag{3.207}$$

Доведення. Зрозуміло, що з врахуванням виразу H і F матриця α має представлення $\alpha = H + F$. Тоді МЗ (3.203) еквівалентний $x^{(k+1)} = Hx^{(k+1)} + Fx^{(k)} + \beta$, тобто $[E-H]x^{(k+1)} = Fx^{(k)} + \beta$. Але $\det[E-H] = 1 \ne 0$, значить існує $(E-H)^{-1}$. Тоді домножимо цю систему на $[E-H]^{-1}$, в результаті одержимо

$$[E-H]^{-1}[E-H]x^{(k+1)} = x^{(k+1)} = [E-H]^{-1}Fx^{(k)} + (E-H)^{-1}\beta, \tag{3.208}$$

що і доводить (3.206).

***Зауваження* 3.10.3.** *<u>Геометричний зміст МЗ</u>*. Метод простої ітерації покоординатно збігається $x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)} + \beta_i$.

Позначимо через $h = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)} - b_i = 0, \quad i = 1, 2, ..., n,$ – гіперплощину.

При отриманні наближення (3.204) з наближення (3.205) проходить переміщення наближення (3.205) паралельно до вісі Ox_i до перетину з площиною L_{i+1}. На рис. 3.4-3.6 проілюстровано випадки для n=2, коли МЗ збігається, розбігається, зациклюється. Порівняння рис.3.4 та рис.3.5 показує, що збіжність МЗ може змінюватися при перестановці рівнянь.

***<u>Теорема</u>* <u>3.10.4.</u>** Метод Зейделя збігається $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x^*$ тоді і тільки тоді, коли $|\tilde{\lambda}| < 1$, *де* $\tilde{\lambda}$ – характеристичні корені рівняння

$$\det[F + \lambda(H-E)] = 0. \tag{3.209}$$

Доведення. За теоремою 2 нерівність $|\lambda(\alpha)| < 1$ еквівалентна збіжності $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x^*$. Якщо застосувати теорему 2 до МЗ (3.203) з $a^* = (E-H)^{-1}F$, то власне значення $|\lambda((E-H)^{-1}F)| < 1$.

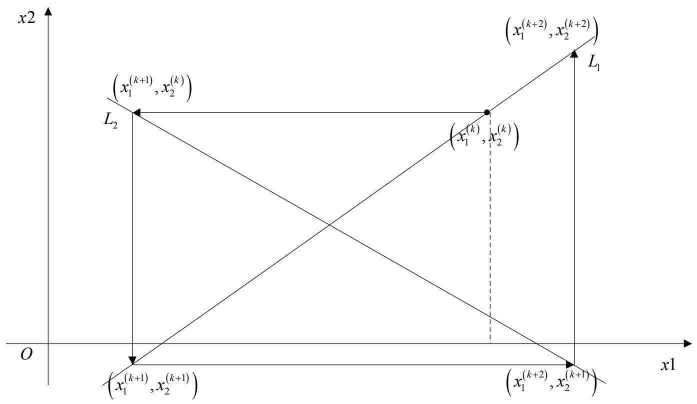


Рис. 3.4. Випадок, коли МЗ збігається

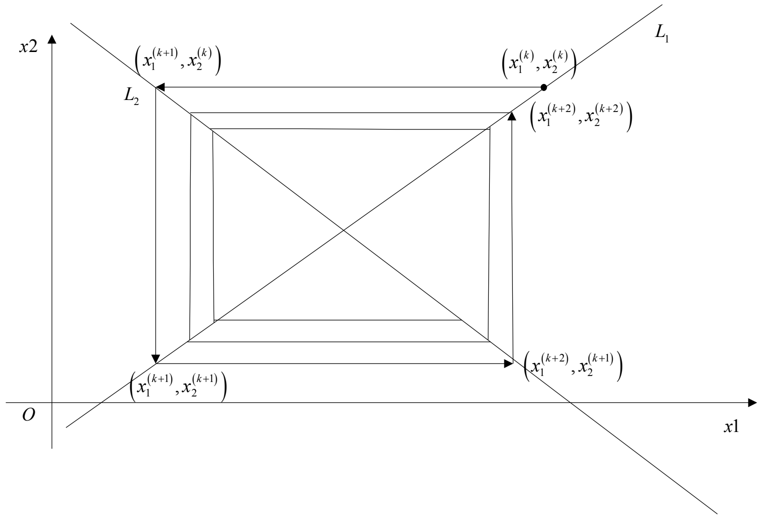


Рис. 3.5. Випадок, коли МЗ розбігається

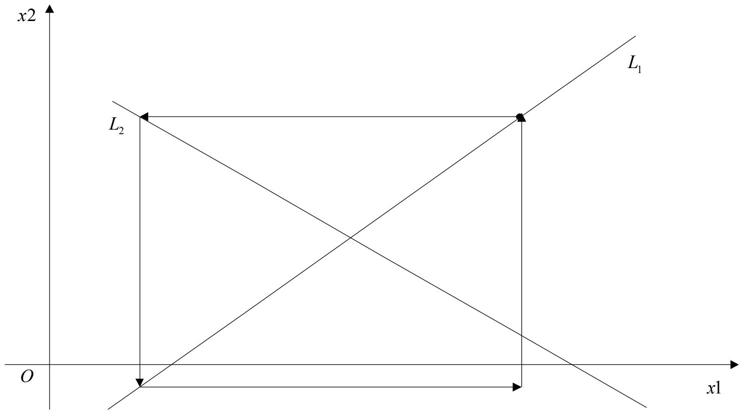


Рис. 3.6. Випадок, коли МЗ зациклюється

Власні значення матриці $(E-H)^{-1}F$ визначаються з характеристичного рівняння $\det[\lambda E-(E-H)^{-1}F]=0$, яке еквівалентне $(-1)^n\det((E-H)^{-1}F-\lambda E)=0$. Помножимо цю рівність на $\det(E-H)\neq 0$. За властивостями визначників маємо:

$$\det(E-h)\det((E-H)^{-1}F-\lambda E)=$$
$$=\det\left[(E-H)(E-H)^{-1}F-\lambda(E-H)E\right]=0,$$

що еквівалентне $\det(F+\lambda(H-E))=0.$

***<u>Зауваження</u>* 3.10.4.** МПІ не є еквівалентний МЗ.

Дійсно, з одного боку:

$$F+\lambda(H-E)=\begin{pmatrix}\alpha_{11}-\lambda & \lambda\alpha_{12} & \ldots & \lambda\alpha_{1,n-1} & \lambda\alpha_{1n}\\ \lambda\alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \ldots & \lambda\alpha_{2,n-1} & \lambda\alpha_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \lambda\alpha_{n1} & \lambda\alpha_{n2} & \ldots & \lambda\alpha_{n,n-1} & \alpha_{nn}-\lambda\end{pmatrix},$$

а з іншого боку

$$\alpha-\lambda E=\begin{pmatrix}\alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \ldots & \alpha_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn}-\lambda\end{pmatrix}.$$

Таким чином, $\det(\alpha-\lambda E)\neq\det(F+\lambda(H-E))$, а це і доводить твердження , бо корені характеристичних рівнянь не співпадають (характеристичні рівняння різні).

<u>Наслідок 3.10.6.</u> Якщо $\left\|(E-H)^{-1}F\right\|<1$, то МЗ збігається $\lim\limits_{k\to\infty}x^{(k+1)}=x^*$.

Доведення. За лемою 3 випливає: $\left|\lambda((E-H)^{-1}F\right| \le \left\|(E-H)^{-1}F\right\| < 1,$ тоді $\left|\lambda((E-H)^{-1}F)\right| < 1.$ Значить, за теоремою 3 матимемо збіжність $\lim_{k\to\infty} x^{(k+1)} = x^*$.

Але на практиці умови незручні, бо треба шукати $(E-H)^{-1}$.

3.10.5. Збіжність метода Зейделя за елементами матриці

Доведемо, що збіжність МЗ можна характеризувати елементами основної матриці СЛАР $Ax = B$, якщо матриця A є матрицею з домінуючими елементами.

Означення 3.1. *Діагональні елементи матриці* $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ *домінують за рядками (стовпчиками), якщо*

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} \left|a_{ij}\right| < \left|a_{ii}\right|, \quad i = 1, 2, ..., n; \tag{3.210}$$

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} \left|a_{ij}\right| < \left|a_{jj}\right|, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{3.211}$$

Лема 3.10.6. Якщо діагональні елементи $A = (a_{ij})$ домінують за рядками (стовпчиками), тоді $\det A \ne 0$.

Доведення еквівалентне твердженню про СЛАР Ax=0 і має тривіальний розв'язок $x \equiv (0, 0, ..., 0,)^T$.

<u>*Від супротивного:*</u> Нехай $\det A \ne 0$, але система (3.210)-(3.211) має нетривіальний розв'язок

$$y = (y_1, y_2, ..., y_n)^T \ne 0\,. \tag{3.212}$$

Серед координат $y_1, ..., y_n$ візьмемо максимальну за модулем:

$$\left|y_i\right| \ge \left|y_j\right|,\ j = 1, 2, ..., i-1, i+1, ..., n\,. \tag{3.213}$$

Підставимо (3.212) у систему (3.210)-(3.211) та запишемо i-те рівняння:

$$a_{i1}y_1 + ... + a_{ii}y_i + ... + a_{in}y_n = 0. \tag{3.214}$$

З іншого боку

$$\left|a_{i1}y_1 + ... + a_{ii}y_i + ... + a_{in}y_n\right| = \left|a_{ii}y_i - \left(-\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} a_{ij}y_j\right)\right| \ge \tag{3.215}$$

$$\ge \left|a_{ii}y_i\right| - \left|\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} a_{ij}y_j\right| \ge \left|a_{ii}y_i\right| - \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} \left|a_{ij}\right|\left|y_j\right| \ge \left|y_j\right|\left(\left|a_{ii}\right| - \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}\left|a_{ij}\right|\right) > 0\,.$$

що є протиріччям (3.214).

<u>**Теорема 3.10.5.**</u> *Для* збіжності МЗ (3.203) достатньо, щоб

$$\max_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\alpha_{ij}\right|\right) \equiv \left\|\alpha\right\| < 1, \tag{3.216}$$

$$\max_{1\le j\le n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\alpha_{ij}\right|\right) \equiv \left\|\alpha\right\| < 1. \tag{3.217}$$

Доведення. З (3.217) випливає нерівність

$$\sum_{j=1}^{n}\left|\alpha_{ij}\right|<1, \quad i=1,2,...,n.. \tag{3.218}$$

Доведемо, що $\tilde{\lambda}$, для якого $\left|\tilde{\lambda}\right|\geq 1$, не є коренем рівняння

$$\det(F+\lambda(H-E))=0. \tag{3.219}$$

Доведемо від супротивного. Нехай $\tilde{\lambda}$ таке, що $\left|\tilde{\lambda}\right|\geq 1$ є коренем рівняння (3.219): $\det(F+\tilde{\lambda}(H-E))=0$. Розглянемо суму елементів *i*-го рядка без *i*-го елемента :

$$\left|\alpha_{11}\tilde{\lambda}+\alpha_{12}\tilde{\lambda}+...+\alpha_{i,i-1}\tilde{\lambda}+\alpha_{i,i+1}+...+\alpha_{in}\right|\leq$$

$$\leq\left|\alpha_{11}\right|\left|\tilde{\lambda}\right|+\left|\alpha_{12}\right|\left|\tilde{\lambda}\right|+...+\left|\alpha_{i,i-1}\right|\left|\tilde{\lambda}\right|+\left|\alpha_{i,i+1}\right|+...+\left|\alpha_{in}\right|\leq\left|\tilde{\lambda}\right|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left|\alpha_{ij}\right|=$$

$$=\left|\tilde{\lambda}\right|\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left|\alpha_{ij}\right|-\left|\alpha_{ii}\right|\right)<\left|\tilde{\lambda}\right|\left(1-\left|\alpha_{ii}\right|\right)=\left|\tilde{\lambda}\right|-\left|\tilde{\lambda}\right|\left|\alpha_{ii}\right|\leq\left|\tilde{\lambda}\right|-\left|\alpha_{ii}\right|\leq$$

$$\leq\left|\tilde{\lambda}-\alpha_{ii}\right|=\left|\alpha_{ii}-\tilde{\lambda}\right|, \quad i=1,2,...,n.$$

Тоді елементи матриці $F+\lambda(E-H)$ мають домінуючі елементи за рядками. За лемою 5 $(F+\lambda(H-E))\neq 0$ при $\left|\tilde{\lambda}\right|<1$. А тоді за теоремою 5 МЗ збігається. Доведення для (3.217) аналогічне. Встановимо похибку МЗ.

<u>**Теорема 3.10.6.**</u> Якщо для вихідної матриці *A* СЛАР (3.203)

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left|a_{ij}\right|<\left|\alpha_{ii}\right|, \quad i=1,2,...,n, \tag{3.220}$$

то МЗ збігається швидше ніж МПІ.

Доведення. Розглядаємо СЛАР *Ax=b*, яка еквівалентна $x=\alpha x+\beta$, де $\alpha_{ij}=\dfrac{-a_{ij}}{a_{ii}}; \quad \dfrac{b_i}{a_{ii}}=\beta_i; \quad \alpha_{ii}=0, \quad i\neq j$. Значить, $\left\|\alpha\right\|<1$. Покоординатно розглянемо МЗ:

$$x_i^{(k)}=\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_{ij}x_j^{(k)}+\sum_{j=i}^{n}\alpha_{ij}x_j^{(k-1)}+\beta_i, \quad i=\overline{1,n}, \tag{3.221}$$

а точний розв'язок x^* задовольняє СЛАР, (3.171) покоординатно

$$x^*=\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_{ij}x_j^*+\beta_i. \tag{3.222}$$

Тоді очевидні покоординатні нерівності:

$$\left|x_i^*-x_i^{(k)}\right|\leq\sum_{j=1}^{i-1}\left|a_{ij}\right|\cdot\left|x_i^*-x_i^{(k)}\right|+\sum_{j=i-1}^{n}\left|a_{ij}\right|\cdot\left|x_i^*-x_i^{(k-1)}\right|, \tag{3.223}$$

що еквівалентне нерівності

$$\left\|x^*-x^{(k)}\right\|\leq\max_i\frac{\omega_i}{1-\gamma_i}\left\|x^*-x^{(k-1)}\right\|\leq...\leq(M^*)\left\|x^*-x^{(0)}\right\|, \tag{3.224}$$

де $M^*\equiv\max\limits_{1\leq i\leq n}\dfrac{\omega_i}{1-\gamma_i}; \quad \omega_i\equiv\sum\limits_{j=i}^{n}\left|\alpha_{ij}\right|; \quad \gamma_i\equiv\sum\limits_{j=1}^{i-1}\left|\alpha_{ij}\right|.$

Для МПІ легко одержати

$$\left\|x^* - x^{(k)}\right\| \le M \left\|x^* - x^{(k-1)}\right\|, \tag{3.225}$$

що дає $\left\|x^* - x^{(k)}\right\| \le M^k \left\|x^* - x^{(0)}\right\|$, $\forall x^{(0)} \in \mathbf{R}^n$, де $M \equiv \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=i}^{n} \left|\alpha_{ij}\right| < 1$. Зрозуміло, що $\sum\limits_{j=i}^{n} \left|\alpha_{ij}\right| = \gamma_i + \omega_i \le M < 1$. Знайдемо різницю $\gamma_i + \omega_i - \dfrac{\omega_i}{1-\gamma_i} = \dfrac{\gamma_i(1-\gamma_i-\omega_i)}{1-\gamma_i} > 0$. Значить $\max\limits_i \left(\gamma_i + \omega_i\right) > \max \dfrac{\omega_i}{1-\gamma_i}$, тобто, $M > M^*$. Це означає, що МЗ збігається швидше за МПІ у випадках домінування елементів матриці A.

Існують інші ітераційні методи розв’язання СЛАР [1]-[8].

3.11. Методи розв’язання повної проблеми власних значень і власних векторів

3.11.1. Наближене знаходження власних значень матриці

Сукупність власних значень дійсної квадратної матриці називають її *спектром*. Тому відповідна задача називається *спектральною задачею*.

$$A\overline{x} = \overline{b}\ , \tag{3.226}$$

$$A\overline{x} = 0\ . \tag{3.227}$$

Існування та єдиність розв’язку (3.226) еквівалентні існуванню та єдиності тривіального або нульового розв’язку (3.226). Проте відомо, що (3.227) може мати при $\det A = 0$ безліч ненульових розв’язків. Тому в алгебрі є актуальною задача знаходження власних значень матриці. Власним значенням є $\lambda \ne 0$, $\overline{x} \ne 0$ у

$$A\overline{x} = \lambda\overline{x}\ , \tag{3.228}$$

$$\left(A - \lambda E\right)\overline{x} = \overline{0}\ , \tag{3.229}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & \\ & \dots\dots\dots & & \\ a_{n1} & \dots\dots\dots & & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0\ . \tag{3.230}$$

Формула (3.229) зводиться до розв’язування (3.230), в якій ліва частина називається **характеристичним визначником**. З нього отримуємо рівняння, розв’язавши яке, маємо n власних значень. Для $n = 2$:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} = 0\ ,$$

$$\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) - a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22} = 0\ .$$

Позначимо $\sigma_1 = a_{11} + a_{22}$, $\sigma_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, $\sigma_3 = \det A$. Тоді характеристичне рівняння набуде вигляду $\lambda^2 - \lambda\sigma_1 + \sigma_2 = 0$. Проводячи аналогію для випадків $n = 3,\dots$ можна побачити, що розкриваючи характеристичний визначник, отримаємо поліном n-го степеня, в якому при λ^n буде стояти $(-1)^n$.

$$D(\lambda) \equiv (-1)^n \left[\lambda^n - \sigma_1\lambda^{n-1} + \sigma_2\lambda^{n-2} - \ldots + (-1)^n\sigma_n\right] = 0 \tag{3.231}$$

Досліджено, що σ_1 являє собою суму всіх діагональних елементів

$$\sigma_1 = \sum_{i}^{n} a_{ii} \ , \tag{3.232}$$

$$\sigma_2 = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}, \tag{3.233}$$

$$\sigma_3 = \sum_{i<j<k}^{n} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix}, \tag{3.234}$$

$$\sigma_n = \det A. \tag{3.235}$$

Можна підрахувати кількість всіх діагональних мінорів

$$M = C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots C_n^n = 2^n - 1, \tag{3.236}$$

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n . \tag{3.237}$$

При фіксованому n програмна реалізація формул (3.232)-(3.235) не є складною. Якщо ж n змінна величина, то в програмній реалізації стикаємося з організацією сум вигляду

$$\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\ldots\sum_{i_n=1}^{n} \ , \tag{3.238}$$

де кількість цих сум наперед невідома. Це означає, що не будемо знати скільки операторів циклу треба записати при довільному значенні n. Розглянутий метод називається **прямим методом розгортання характеристичного визначника** за допомогою діагональних мінорів. **Дві матриці називаються подібними**, якщо існує така матриця S, яка є не виродженою, тобто її $\det S \neq 0$, тоді $B = S^{-1}AS$. Відомо, що дві подібні матриці мають один і той же спектр, тобто однакові власні значення.

$$\det\left(B - \lambda E\right) = \det\left(S^{-1}AS - \lambda E\right), \tag{3.239}$$

$$\det B = \det\left(S^{-1}AS\right) = \det S^{-1} \cdot \det A \cdot \det S = \det A\,, \tag{3.240}$$

$$c = \det S \quad \Rightarrow \quad \det S^{-1} = \frac{1}{c} = \det A. \tag{3.241}$$

В деяких методах з використанням перетворення подібності матриці зводять до такого вигляду, що розкривати її характеристичний визначник не є складним. Інші ж методи тим же перетворенням подібності зводять до діагонального або трикутного вигляду, при цьому використавши відомий факт: спектром або власними значеннями матриці є самі діагональні елементи.

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} \ldots 0 \\ \ddots \\ 0 \ldots \quad d_{nn} \end{pmatrix}, \tag{3.242}$$

$$\det\left(D - \lambda E\right) = \left(d_{11} - \lambda\right)\left(d_{22} - \lambda\right)\ldots\left(d_{nn} - \lambda\right). \tag{3.243}$$

3.11.2. Ідея методу Данилевського

Ідея методу Данилевського передбачає зведення заданої матриці A до так званого нормального вигляду *Фробеніуса.* Деяка матриця P називається *матрицею Фробеніуса,* якщо вона має вигляд

$$P=\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.244}$$

Перетворення подібності використовується тому, що подібні матриці мають однакові спектри, а зведення до нормального вигляду проводять, бо характерний многочлен легко розкривається.

$$\det(P-\lambda E)=\begin{vmatrix} p_1-\lambda & p_2 & p_3 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & -\lambda & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & -\lambda \end{vmatrix}. \tag{3.245}$$

Розгортаючи визначник по першій стрічці, отримаємо

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (p_1-\lambda)(-1)^{n-1}(-\lambda)^{n-1} - p_2(-1)^{n-2}(-\lambda)^{n-2} + \\ &+ p_3(-1)^{n-3}(-\lambda)^{n-3} + ... + p_n = (-1)^n\left[\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - ... - p_n\right] = 0. \end{aligned} \tag{3.246}$$

Коефіцієнтами характеристичного визначника для *матриці Фробеніуса* є самі коефіцієнти її ж першої стрічки зі знаками плюс чи мінус, в залежності від їх парного чи непарного індексу. Розв'яжемо рівняння

$$D(\lambda)=0. \tag{3.247}$$

Матрицю A потрібно (n-1) перетвореннями подібності звести до вигляду *матриці Фробеніуса*. Для цього на першому кроці лінійними перетвореннями приходять до такої матриці C, в якої остання стрічка має такий же вигляд як і в матриці P. Це означає, що нам потрібно підібрати деяку матрицю M_{n-1}, таку що $\det M_{n-1} \neq 0$. Тоді буде мати місце формула

$$C = M_{n-1}^{-1} A M_{n-1}. \tag{3.248}$$

Запишемо проходження першого кроку:

1) якщо $a_{n,n-1} \neq 0$, то (n-1)-й стовпчик матриці A ділимо на цей елемент;

2) для того, щоб в цій матриці A в останній стрічці за винятком (n-1)-ї позиції всюди були нулі необхідно від j-го стовпчика ($j=\overline{1,n-2}$) відняти (n-1)-й стовпчик помножений на елемент a_{nj}. Тоді отримаємо матрицю $\widetilde{A}$, в якій остання стрічка прийме бажаний вигляд. Як видно в процесі перетворень виконували лише операції ділення на константу та віднімання стрічок, що являють собою лінійні перетворення матриці. В теорії матриць доводиться, що будь-які лінійні перетворення еквівалентні таким же перетворенням, які проводяться над одиничною матрицею і наступним її застосуванням у формулі (3.248). Маємо одиничну матрицю:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}, M_{n-1}=\begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ m_{n-1,1} & ... & m_{n-1,n-1} & m_{n-1,n} \\ 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.249}$$

$$m_{n-1,j} = -\frac{a_{nj}}{a_{n,n-1}}, \tag{3.250}$$

$$m_{n-1,n-1} = \frac{1}{a_{n,n-1}}. \qquad (3.251)$$

За формулами (3.250) і (3.251) визначають елементи матриці (3.249):

$$\det M_{n-1} \neq 0 \Rightarrow \exists M_{n-1}^{-1}, \qquad (3.252)$$

$$M_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n,1} & ... & a_{n,n-1} & a_{n,n} \\ 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (3.253)$$

$$M_{n-1}^{-1} M_{n-1} = E. \qquad (3.254)$$

Зробивши перше перетворення подібності, друге перетворення подібності вже здійснюється над матрицею *C*, множенням її зліва на M_{n-2}^{-1} і справа – на M_{n-2}.

$$\widetilde{C} = M_{n-2}^{-1} C M_{n-2}, \qquad (3.255)$$

$$\widetilde{C} = M_{n-2}^{-1} M_{n-1}^{-1} A M_{n-1} M_{n-2}, \qquad (3.256)$$

$$C^{(n-1)} = M_1^{-1} M_2^{-1} \dots M_{n-2}^{-1} M_{n-1}^{-1} A M_{n-1} M_{n-2} \dots M_2 M_1, \qquad (3.257)$$

$$C^{(n-1)} \approx A, \; A^{(i+1)} = M_{n-i}^{-1} A^{(i)} M_{n-i}. \qquad (3.258)$$

Повторюючи цей процес (*n*-1) разів, отримаємо матрицю, яка буде подібною до матриці *A*, тобто їх спектри будуть співпадати. Залишилося розкрити характеристичний визначник матриці $C^{(n-1)}$, яка має вигляд Фробеніуса та знайти корені відповідного характеристичного рівняння. Отже, на першому кроці за формулами (3.250) та (3.251) обчислюються елементи матриці M_{n-1}.

3.11.3. Обчислення власних векторів методом Данилевського

Розглянемо систему рівнянь такого вигляду

$$P\overline{y} = \lambda \overline{y} \qquad (3.259)$$

при $\lambda \neq 0$, $\overline{y} \neq \overline{0}$. Відомо, що одному власному значенню може відповідати скінченна або нескінченна сукупність власних векторів. З них можна виділити *нормований* вектор – це вектор, довжина якого дорівнює 1. Нехай одне з λ знайдене методом Данилевського, тоді рівняння (3.259) можна записати у такому вигляді:

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(P - \lambda E)\overline{y} = \overline{0}. \qquad (3.260)$$

$$\begin{cases} (p_1 - \lambda) y_1 + p_2 y_2 + \ldots + p_n y_n = 0 \\ y_1 - \lambda y_2 + \ldots = 0 \\ \ldots \\ y_{n-2} - \lambda y_{n-1} = 0 \\ y_{n-1} - \lambda y_n = 0 \end{cases} \qquad (3.261)$$

Система (3.261) є однорідною, і тому може мати лише нульовий розв’язок або безліч ненульових розв’язків. До того, щоб серед ненульових розв’язків знайти один необхідний, потрібно одне з невідомих оголосити вільним, тобто зафіксувати і перенести в праву частину. Тоді отримаємо (*n*-1) рівняння з (*n*-1)-им невідомим. При відомих умовах така система буде мати лише єдиний ненульовий розв’язок. Як видно, в останній рівності є лише два невідомі, а тому вибираючи $y_n = 1$ отримуємо, що $y_{n-1} = \lambda$.

$$\begin{cases} y_n = 1 \\ y_{n-1} = \lambda \\ y_{n-2} = \lambda^2 \\ \ldots \\ y_2 = \lambda^{n-2} \\ y_1 = \lambda^{n-1} \end{cases} \qquad (3.262)$$

3.11.4. Метод невизначених коефіцієнтів

Розглянемо систему рівнянь такого вигляду

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x}\ , \qquad (3.263)$$

де $\bar{x} \neq \bar{0}$ при

$$\det(A - E\lambda) = 0\ . \qquad (3.264)$$

Подамо характеристичний визначник матриці *A* у вигляді:

$$D(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \ldots + p_n = \det(\lambda E - A)\ . \qquad (3.265)$$

У формулі (3.265) коефіцієнти $p_1, p_2, \ldots, p_n$ є невизначені. Щоб їх знайти, знаходять значення полінома (3.265) при *n* різних значеннях λ.

Нехай $\lambda = \overline{0, n-1}$. Підставивши послідовно λ в (3.265) отримаємо

$$p_n = \det(-A) = D(0)\ . \qquad (3.266)$$

$$\begin{cases} 1^n + p_1 1^{n-1} + \ldots + p_n 1^0 = D(1) \\ 2^n + p_1 2^{n-1} + \ldots + p_n 2^0 = D(2) \\ \ldots \\ (n-1)^n + p_1(n-1)^{n-1} + \ldots + p_n(n-1)^0 = D(n-1) \end{cases} \qquad (3.267)$$

Система (3.267) по відношенню до елементів $p_1, p_2, \ldots, p_n$ є лінійною. Представимо цю систему у вигляді зручному для подальшого застосування в раніше вивченому методі (Крамера, Гауса, Зейделя).

$$\begin{cases} p_1 1^{n-1} + .p_2 1^{n-2} + .. + p_{n-1}1^1 = D(1) - D(0) - 1^n \\ p_1 2^{n-1} + p_2 2^{n-2} + \ldots + p_{n-1}2^1 = D(2) - D(0) - 2^n \\ \ldots \\ p_1(n-1)^{n-1} + p_2(n-1)^{n-2} + \ldots + p_{n-1}(n-1)^1 = D(n-1) - D(0) - (n-1)^n \end{cases} \qquad (3.268)$$

Подамо систему (3.268) у матричному вигляді:

$$C\bar{p} = \bar{d}\ , \qquad (3.269)$$

$$\bar{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \ldots \\ p_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad (3.270)$$

$$\bar{d} = \begin{pmatrix} D(1) - D(0) - 1^n \\ D(2) - D(0) - 2^n \\ \dots \\ D(n-1) - D(0) - (n-1)^n \end{pmatrix}. \tag{3.271}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2^{n-1} & 2^{n-2} & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n-1)^{n-1} & (n-1)^{n-2} & \dots & n-1 \end{pmatrix}. \tag{3.272}$$

Відомо, що ця матриця, яка носить назву *матриці Вандермонда*, має ненульовий визначник, а це означає, що система лінійних рівнянь (3.269) має розв'язок і цей розв'язок буде єдиний. Як бачимо, в матриці C коефіцієнти матриці A не беруть участі, ці коефіцієнти неявно входять у вектор вільних членів. А тому цей метод досить зручно використовувати для великої сукупності різних матриць однієї і тієї ж розмірності. Якщо $\det C \neq 0 \Rightarrow \exists C^{-1}$, тоді

$$\bar{p} = C^{-1}\bar{d}\,. \tag{3.273}$$

Залишається лише один раз обчислити елементи матриці C, знайти до неї обернену і порахувати n визначників вигляду:

$$D_k = \det(kE - A)\,,\ k = \overline{0, n-1}\,. \tag{3.274}$$

3.11.5. Загальна постановка задачі методів розв'язання повної проблеми власних значень і власних векторів

Нехай задано дійсну матрицю $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$; $\quad a_{ij} \in \mathbf{R}$, $\quad \dim A = n$.

Означення 3.2. *Власними значеннями* $\lambda \in \mathbf{C}$ *(комплексної площини) матриці A називаються такі* λ *, при яких система*

$$Ax = \lambda x\,. \tag{3.275}$$

має тривіальний розв'язок.

Як на практиці знайти власне значення λ ?

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda E)x = 0. \tag{3.276}$$

Система (3.275) має нетривіальний розв'язок $x \neq 0$ тоді і тільки тоді, коли

$$p(\lambda) \equiv \det(A - \lambda E) = 0. \tag{3.277}$$

Означення 3.3. $p(\lambda)$ *називається характеристичним многочленом для матриці A, а рівняння (3.277), яке еквівалентне* $\left(A - \lambda E\right) = (-1)^n \det(\lambda E - A) = 0,$ *назвемо характеристичним рівнянням для матриці A.*

Якщо розкрити визначник (3.277), то отримаємо алгебраїчне рівняння з точністю до знака:

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \dots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0, \tag{3.278}$$

де $\quad p_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}, \quad p_2 = \sum_{i<j} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad p_n \det A.$ Обчислення коефіцієнтів $p_1, p_2, \dots, p_n$ еквівалентне обчисленню $C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n - 1$ визначників різних порядків. Це технічно важка задача навіть при наявності сучасних інформаційних технологій. Тому існують спеціальні методи знаходження $p_1, p_2, \dots, p_n$ без обчислення мінорів матриці A, а саме, метод невизначених коефіцієнтів, метод інтерполювання, метод Левер'є*-Фадєєва, метод О.М.Крилова та багато інших [2] – [14], [17], [23]. Розв'язувати алгебраїчні рівняння можемо методом половинного ділення відрізка, де знаходиться корінь; методом січних, комбінованим методом дотичних, методом парабол тощо. Якщо $\{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subset \mathbf{C}$ то за основною теоремою алгебри існує n коренів $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbf{C}$.

Означення 3.4. *Власними векторами* $\{x^{(i)}, i=\overline{1,n}\} \subset \mathbf{C}^n$*, які відповідають власним значення* $\left\{\lambda_i, i=\overline{1,n}\right\}$*, назвемо розв'язки СЛАР*

$$Ax = \lambda_i x, \ \ i=\overline{1,n}. \tag{3.279}$$

Означення 3.5. *Знаходження всіх власних значень* $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\} \subset \mathbf{C}$ *та всіх власних векторів* $\{x^{(i)}, i=\overline{1,n}\} \subset \mathbf{C}^n$ *назвемо повною проблемою власних значень і векторів (ППВЗ). Задача знаходження декількох власних значень матриці назвемо частковою проблемою власних значень (ЧПВЗ).*

Розв'язати ППВЗ – це означає знайти n коренів алгебраїчного рівняння (3.278). ППВЗ еквівалентна розкриттю визначника $\det(\lambda E - A) = 0$, тобто знаходження $p_0 = 1;\ p_1; ...;\ p_n$.

3.11.6. Метод невизначених коефіцієнтів розв'язання повної проблеми власних значень і власних векторів

Потрібно від

$$p(\lambda) \equiv \det(\lambda E - A). \tag{3.280}$$

перейти до

$$p(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + ... + p_{n-1}\lambda + p_n, \tag{3.281}$$

тобто знайти $p_1, p_2, ..., p_n$?

Зауважимо, що $p(\lambda)$ визначається для $\forall \lambda \in \mathbf{C}$, бо область визначення функції $p(\lambda)$ є вся площина $\mathbf{C}$. Тоді вона визначена і для $\lambda = 0, 1, ..., n-1$. Запишемо її значення :

$$p_n = p(0),. \tag{3.282}$$

$$1^n + p_1 1^{n-1} + ... + p_{n-1}1 + p_n = p(1), \tag{3.283}$$

$$2^n + p_1 2^{n-1} + ... + p_{n-1}2 + p_n = p(2), \tag{3.284}$$

$$\left(n-1\right)^n + p_1\left(n-1\right)^{n-1} + ... + p_{n-1}\left(n-1\right) + p_n = p\left(n-1\right). \tag{3.285}$$

Тоді СЛАР (3.285) еквівалентна розв'язанню матричного рівняння

$$D_{n-1}p = d, \tag{3.286}$$

де $p = \left(p_1, p_2, ..., p_{n-1}\right)^T$;

$$d \equiv (p\left(1\right) - p\left(0\right) - 1; p\left(2\right) - p\left(0\right) - 2^n; ...; \tag{3.287}$$

$$p(n-1) - p(0) - (n-1)^n)^T; p_n = p(0) = \det A, \tag{3.288}$$

а $p(t) = \det(iE - A), i = 1, 2, ..., n-1$;

$$D_{n-1} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 2^{n-1} & 2^{n-2} & ... & 2 \\ ... & ... & ... & .. \\ \left(n-1\right)^{n-1} & \left(n-1\right)^{n-2} & ... & n-1 \end{pmatrix}. \tag{3.289}$$

$D_{n-1} \neq 0,$ як *визначник Вандермонда**. Значить існує єдиний розв'язок СЛАР (3.287). Сформулюємо результат у вигляді теореми.

<u>Теорема 3.11.1.</u> Якщо $A \equiv (a_{ij})_{i,j=1}^n \subset \mathbf{C}$ то $p = D_{n-1}^{-1}d$, де p, d, D_{n-1} –визначено(3.288).

Зауваження 5. D_{n-1}^{-1} залежить тільки від порядку $\det D_{n-1}^{-1}$. Отже, можна обчислити D_{n-1}^{-1} на комп'ютері при різних *n*, якщо маємо справу з масовим розкриттям визначників для матриці D_{n-1} однакового порядку.

3.11.7. Метод інтерполювання розв'язання повної проблеми власних значень

Власні значення $\{\lambda_j, 1 \le j \le n\}$ для *A* знаходяться як корені рівняння $p(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + ... + p_{n-1}\lambda + p_n = 0$, де $p_1, p_2, ..., p_n$ подаються через елементи матриці *A*. Теорія інтерполювання має місце і для комплексних функцій. Значить функція $p(\lambda)$ визначена і для $\lambda_0 = 0$; $\lambda_1 = 1$; $\lambda_n = n$. Запишемо (*n*+1) визначник $p(i) = \det(iE - A), i = 0, 1, ..., n.$ Складемо таблицю скінченних різниць та запишемо формулу Ньютона вперед:

$$p \le (\lambda) = p(0) + \frac{p_{1/2}^1}{1!}\lambda + \frac{p_1^2}{2!}\lambda(\lambda-1) + ... + \frac{p_{n/2}^n}{n!}\lambda(\lambda-1) = \tag{3.290}$$

$$= p(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{p_{\frac{i}{2}}^i}{i!}\lambda(\lambda-1)...(\lambda-i+1),$$

де $R_n(\lambda) = 0$.

Позначимо коефіцієнти $C_{mi}; m = \overline{1,i}; i = \overline{1,n},$ при розкритті добутку у формулі (3.290):

$$\frac{\lambda(\lambda-1)...(\lambda-i+1)}{i!} = \sum_{m=0}^{i} C_{mi}\lambda^m. \tag{3.291}$$

Тоді має місце твердження:

<u>**Теорема 3.11.2**</u>. Для $A \equiv (a_{ij})_{i,j=1}^n$, $a_{ij} \subset \mathbf{C}^1$ характеристичний многочлен має вигляд

$$p(\lambda) = p(0) + \sum_{m=1}^{n} p_m \cdot \lambda^m. \tag{3.292}$$

де $p_m = \sum_{i=m}^{n} C_{mi} p_{\frac{i}{2}}^i, \quad m = 1, 2, ..., n.$

Зауважимо, що метод інтерполювання вимагає $\approx \frac{n^4}{3}$ множень та ділень.

3.12. Приклади знаходження розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Приклад 3.12.1. Здійснюючи трикутний розклад методом Гауса з вибором ведучого елемента в стовпчику, знайти розв'язок системи $Ax = b$,

$$\text{де } A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -11 & -13 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. Введемо розширену матрицю системи

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & -11 & -13 & 10 \end{array}\right).$$

Розв'язування системи запишемо у вигляді перетворення матриці $\overline{A}$ множенням на матриці перестановок рядків P_k та на матриці виключення невідомих M_k. Маємо

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \; P_1\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -11 & -13 & 10 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right);$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 0 \\ -0{,}5 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \; \overline{A_1} = M_1 P_1 \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -11 & -13 & 10 \\ 0 & -2{,}5 & -8{,}5 & 6 \\ 0 & 1{,}5 & 5{,}5 & -4 \end{array}\right);$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 1 \end{pmatrix}; \; \overline{A_2} = M_2 P_2 \overline{A_1} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -11 & -13 & 10 \\ 0 & -2{,}5 & -8{,}5 & 6 \\ 0 & 0 & 0{,}4 & -0{,}4 \end{array}\right).$$

З останньої трикутної системи отримуємо розв'язок системи:

$$x_3 = \frac{-0{,}4}{0{,}4} = -1, \; x_2 = \frac{6-8{,}5}{-2{,}5} = 1, \; x_1 = \frac{10-13+11}{4} = 2.$$

Приклад 3.12.2. Обчислити визначник матриці A попередньої задачі.

Розв'язок. Виходячи з трикутного розкладу матриці A, маємо:

$$\det A = (-1)^l \cdot u_{11} \cdot u_{22} \cdot u_{33} = -4 \cdot (-2{,}5) \cdot 0{,}4 = 4,$$

де l – кількість перестановок рядків при перетворенні матриці A.

Приклад 3.12.3. Знайти матрицю обернену до матриці A задачі 3.12.1.

Розв'язок. Шукана матриця $C = A^{-1}$ задовольняє матричне рівняння

$$AC = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Із правими частинами цієї системи виконаємо ті самі перетворення, що і з матрицею A в задачі 3.12.1:

$$P_1 B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; M_1 P_1 B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & -0{,}5 \end{pmatrix}, \; B_2 = M_2 P_2 M_1 P_1 B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}6 & -0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язуючи матричне рівняння $A_2 C = B_2$ (тобто три системи з трикутною матрицею A_2) знаходимо

$$C = \begin{pmatrix} -15{,}25 & -10{,}25 & -2{,}75 \\ -8{,}5 & -5{,}5 & -1{,}5 \\ 2{,}5 & 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Приклад 3.12.4. Методом квадратних коренів знайти розв'язок системи $Ax = b$,

$$\text{де } A = A^* = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. Згідно з формулами методу знаходимо розклад матриці $A = S^* D S$,

$$\text{де } \; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

S^* – матриця спряжена (транспонована) до S.

Розв'язуючи систему з нижньою трикутною матрицею $S^* D y = b$, знаходимо $y_1=4$, $y_2=5$, $y_3=4$, $y_4=4$. Розв'язуючи систему з верхньою трикутною матрицею $Sx = y$, знаходимо $x_4=2$, $x_3=1$, $x_2=1$, $x_1=0$.

Приклад 3.12.5. Обчислити визначник матриці A попередньої задачі.

Розв'язок. Згідно з розкладом матриці A задачі 3.12.4 маємо

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} d_{ii} \bullet \prod_{i=1}^{n} s_{ii}^2 = 256.$$

Приклад 3.12.6. Знайти матрицю обернену до матриці A задачі 3.12.4.

Розв'язок.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{45}{256} & \frac{13}{128} & \frac{5}{64} & -\frac{1}{32} \\ \frac{13}{128} & -\frac{19}{64} & \frac{5}{32} & -\frac{1}{16} \\ \frac{5}{64} & \frac{5}{32} & -\frac{3}{15} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{32} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Приклад 3.12.7. Знайти розв'язок системи $Ax = b$,

$$\text{де } A = \begin{pmatrix} 3{,}00 & 1{,}00 & -1{,}00 \\ 6{,}00 & 2{,}01 & 0{,}00 \\ 3{,}00 & 1{,}02 & 3{,}01 \end{pmatrix}; \; b = \begin{pmatrix} -2{,}00 \\ -2{,}01 \\ 1{,}99 \end{pmatrix}$$

методом Гауса, виконуючи обчислення з чотирма значущими цифрами.

Розв'язок. Запишемо послідовність перетворень розширеної матриці A системи методом Гауса з вибором ведучого елемента в стовпчику:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \; P_1\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 6{,}00 & 2{,}01 & 0{,}00 & -2{,}01 \\ 3{,}00 & 1{,}00 & -1{,}00 & -2{,}00 \\ 3{,}00 & 1{,}02 & 3{,}01 & 1{,}99 \end{array}\right);$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & 0 \\ -0{,}5 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \; \overline{A}_1 = M_1\overline{A}P_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2{,}01 & 0 & -2{,}01 \\ 0 & -5\cdot 10^{-3} & -1 & -0{,}995 \\ 0 & 1{,}5\cdot 10^{-2} & 3{,}01 & 2{,}995 \end{array}\right);$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \; P_2\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2{,}01 & 0 & -2{,}01 \\ 0 & 1{,}5\cdot 10^{-2} & 3{,}01 & 2{,}995 \\ 0 & -5\cdot 10^{-3} & -1 & -0{,}995 \end{array}\right);$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}3333 & 1 \end{pmatrix}; \; \overline{A}_2 = M_2\overline{A}_1P_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2{,}01 & 0 & -2{,}01 \\ 0 & 1{,}5\cdot 10^{-2} & 3{,}01 & 2{,}995 \\ 0 & 0 & 3\cdot 10^{-3} & 3{,}2\cdot 10^{-3} \end{array}\right).$$

Звідси $x_3=1{,}067$, $x_2=-14{,}47$, $x_1=4{,}511$, що дуже відрізняється від точного розв'язку x=(0,–1.1).

Приклад 3.12.8. Розв'язати задачу 3.12.7, виконуючи обчислення з п'ятьма значущими цифрами.

Розв'язок. На відміну від попередньої задачі обчислення на останньому кроці дають

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}33333 & 1 \end{pmatrix}; \; \overline{A}_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2{,}01 & 0 & -2{,}01 \\ 0 & 1{,}5\cdot 10^{-2} & 3{,}01 & 2{,}995 \\ 0 & 0 & 3{,}3\cdot 10^{-3} & 3{,}3\cdot 10^{-3} \end{array}\right).$$

Звідси $x_3=1$, $x_2=-1$, $x_1=0$, що збігається з точним розв'язком системи.

Приклад 3.12.9. Визначити число обумовленості матриці A із задачі 3.12.7.

Розв'язок. Використовуючи знайдені в задачі 3.12.7 матриці P_k, M_k маємо

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2{,}240 \cdot 10^3 & -1{,}492 \cdot 10^3 & 7{,}447 \cdot 10^3 \\ -6{,}687 \cdot 10^3 & 4{,}455 \cdot 10^3 & -2{,}223 \cdot 10^3 \\ 3{,}33 \cdot 10^2 & -2{,}2 \cdot 10^2 & 1{,}111 \cdot 10^2 \end{pmatrix}.$$

Звідси $\|A^{-1}\|_\infty = 1{,}121 \cdot 10^4$, $\|A\|_\infty = 8{,}01$, $\mathrm{cond}_\infty(A) = 8{,}979 \cdot 10^4$. Таким великим числом обумовленості пояснюється відмінність розв'язку задачі 3.12.7 від точного:

$$c_k = \frac{(k-1)!!}{\mathrm{k}!!}\delta_k, \ \delta_k = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & k - \text{парне}, \\ 1, & k - \text{непарне} \end{cases}.$$

Приклад 3.12.10. Знайти розв'язок системи $Ax = b$,

$$\text{де } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 6 & 2{,}1 & 0 \\ 3 & 1{,}15 & 1{,}9999 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} +22{,}01 \\ +2{,}15 \cdot 10^{-2} \\ -0{,}8499 \end{pmatrix}.$$

виконуючи обчислення з чотирма значущими цифрами. Пояснити результат.

Розв'язок. В силу припущень, замість системи, що задана, розв'язується система з наближеною матрицею

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 6 & 2{,}1 & 0 \\ 3 & 1{,}15 & 2{,}000 \end{pmatrix}.$$

Але вона вироджена, оскільки $\det\widetilde{A} = 0$. В той час як $\det A = -3 \cdot 10^{-5}$.

Виродженість матриці $\widetilde{A}$ обумовлена похибкою заокруглення елемента a_{33}=1,9999≈2,000. Для того щоб одержати задовільний результат, потрібно збільшити кількість значущих цифр при обчисленнях.

Розв'яжіть цей приклад з п'ятьма значущими цифрами. Точний розв'язок: x=(0.1,–1).

Приклад 3.12.11. Яку похибку в розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь $Ax = b$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

спричиняє похибка ε в компоненті b_n вектора $b(b_n = b_n + \varepsilon)$? Які властивості матриці A обумовлюють цю похибку?

Розв'язок. Оскільки розв'язок системи можна знайти за рекурентними формулами $x_n = b_n$, $\widetilde{x}_{n-1} = b_{n-1} - ab_n, \dots$, то не важко знайти, що похибки в x_i є:

$$\widetilde{x}_{n-1} - x_{n-1} = b_{n-1} - ab_n - b_{n-1} + ab_n = -a\varepsilon,$$

$$\widetilde{x}_{n-2} - x_{n-2} = a^2\varepsilon, \dots, \ \widetilde{x}_1 - x_1 = (-1)^{n-1}a^{n-1}\varepsilon.$$

Якщо a>1, то ця похибка швидко зростає з ростом n. Матриця A при цьому є погано обумовленою, що і спричиняє велику похибку розв'язку.

Приклад 3.12.12. Знайти оцінку швидкості збіжності методу простої ітерації

$$y_{k+1} = By_k + b$$

для системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$x = Bx + b,$$

де B – матриця розмірності n, причому відомо, що для деякої норми $\|B\| = \rho < 1$.

Розв'язок. Якщо x^* – розв'язок системи, то $x^* = Bx^* + b$. Тому маємо $x^* - y_k = B(x^* - y_{k-1})$. Звідси $\|x^* - y_k\| \le \rho\|x^* - y_{k-1}\| \le \dots \le \rho^k\|x^* - y_0\|$. Оскільки $x^* - y_{k-1} = y_k - y_{k-1} + B(x^* - y_{k-1})$, то

$\|x^* - y_{k-1}\| \le \|y_k - y_{k-1}\| + \|B\| \|x^* - y_{k-1}\|$ та $\|x^* - y_{k-1}\| \le \dfrac{1}{1-\rho}\|y_k - y_{k-1}\|$. Остаточно маємо: $\|x^* - y_k\| \le \dfrac{\rho^k}{1-\rho} \cdot \|y_1 - y_0\|$. Оскільки $\rho < 1$, то для $k \to \infty$ $\|x^* - y_k\| \to 0$, що означає збіжність методу.

Приклад 3.12.13. Дослідити збіжність ітераційного процесу $y_{k+1} = By_k + b$ з матрицями:

$$\text{а)}\ B = \begin{pmatrix} -3/5 & 3/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix};\ \text{б)}\ B = \begin{pmatrix} 1/10 & 4/5 \\ 3/5 & -1/5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. а) $\|B\|_\infty = 6/5 > 1$, $\|B\|_E = \left(\sum\limits_{i,j} b_{ij}^2\right)^{1/2} = \sqrt{23}/5 < 1$, що означає збіжність ітераційного процесу в нормі $\|x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x^2\right)^{1/2}$, яка узгоджена з матричною нормою Шура $\|B\|_E$.

б) $\|B\|_\infty$=9/11<1, що означає збіжність ітераційного процесу в нормі $\|x\|_\infty$. Одночасно для цієї матриці $\|B\|_E = \sqrt{21/20}$ >1.

Матрична норма Шура називається також нормою Ерхарда– Шмідта або нормою Фробеніуса.

Приклад 3.12.14. Нехай матриця системи лінійних алгебраїчних рівнянь $Ax = b$ має діагональну перевагу, тобто

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{n} |a_{ij}| \le q|a_{ii}|, i = \overline{1,n}, 0 < q < 1,$$

а також є симетричною і додатньо визначеною. Дати оцінку швидкості збіжності методу Зейделя.

Розв'язок. Для похибки $z_k = y_k - x = \left(z_k^j\right)_{j=1}^n$ маємо

$$a_{ii} z_{k+1}^{(i)} = -\sum_{j<i} a_{ij} z_{k+1}^{(j)} - \sum_{j>i} a_{ij} z_k^{(j)} \text{ та } |a_{ii}| \left|z_{k+1}^{(i)}\right| = \sum_{j<i} |a_{ij}| \left|z_{k+1}^{(j)}\right| + \sum_{j>i} |a_{ij}| \left|z_k^{(j)}\right|.$$

Нехай $\max\limits_i \left|z_k^{(i)}\right| = \left|z_k^{(i_0)}\right| = \|z_k\|_C$. Тоді $|a_{i_0 i_0}| \|z_{k+1}\|_C \le \sum\limits_{j<i_0} |a_{i_0 j}| \|z_{k+1}\|_C + \sum\limits_{j>i_0} |a_{i_0 j}| \|z_k\|_C$,

$$\|z_{k+1}\|_C \le \left[\sum_{j<i_0} |a_{i_0 j}| / |a_{i_0 i_0}| - \sum_{j>i_0} |a_{i_0 j}|\right] \|z_k\|_C.$$

Користуючись умовою діагональної переваги, маємо

$$\sum_{j>i_0} |a_{i_0 j}| \le q|a_{i_0 i_0}| - \sum_{j<i_0} |a_{i_0 j}| < q\left(|a_{i_0 i_0}| - \sum_{j<i_0} |a_{i_0 j}|\right)$$

тобто $\|z_{k+1}\|_C \le q\|z_k\|_C \le \ldots \le q^{k+1}\|z_0\|_C$.

Приклад 3.12.15. Дослідити збіжність методу простої ітерації та методу Зейделя для системи $Ax = b$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, |\rho| < 1.$$

Розв'язок. Щоб застосувати метод простої ітерації зведемо систему до вигляду $x=Bx+b$, де $B = I - A = \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ \rho & 0 \end{pmatrix}$.

Власні значення матриці B визначаються з рівняння

$$|B - \lambda I| = \begin{pmatrix} -\lambda & \rho \\ \rho & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \rho^2 = 0.$$

Звідси $\lambda = \pm\rho, |\lambda| = \rho < 1$. Це означає збіжність методу. Із критерію Сільвестра маємо $A^* = A > 0$, бо $\det(a_{ii}) = 1 > 0$, $\det A = 1 - \rho^2 > 0$.Тому метод Зейделя також збіжний.

3.13. Контрольні питання

1. Дайте визначення поняття «матриця».
2. Які операції визначені над матрицями?
3. Коли матриця є невиродженою?
4. Дайте визначення рангу матриці.
5. В чому суть зворотного ходу методу Гауса?
6. Як визначається алгебраїчне доповнення?
7. Назвіть умову подібності двох матриць.
8. Яка матриця називається матрицею Фробеніуса?
9. Яку систему називають системою лінійних алгебраїчних рівнянь?
10. Що називається розв’язком СЛАР?
11. Яка система називається сумісною і несумісною?
12. Яка система називається визначеною і невизначеною?
13. Яка система називається виродженою і невиродженою?
14. Які системи називаються еквівалентними?
15. Яку СЛАР можна розв’язати на ЕОМ?
16. Які методи відносять до точних (дати означення та перелічити методи)?
17. Які методи відносять до наближених (дати означення та перелічити методи)?
18. В чому суть алгоритмів методу Гауса?
19. В чому суть прямого ходу в методах Гауса?
20. В чому суть зворотного ходу в методах Гауса?
21. Для чого в методі Гауса з послідовним виключенням елементів вводиться множник М і переставляються рівняння?
22. Чим відрізняються алгоритми методів Гауса з послідовним виключенням елементів і вибором головного елементу?
23. Чим відрізняються алгоритми методів Гауса з вибором головного елементу і з одиничною діагоналлю?
24. Чим відрізняються алгоритми методів Гауса з одиничною діагоналлю і Гауса-Жордана?
25. В чому суть методу Гауса за схемою Халецького?
26. Яку систему отримано в результаті прямого ходу методу Гауса-Жордана?

3.14. Задачі для самостійної роботи

Задача 3.14.1. Розв’язати систему за формулами Крамера. Відповідь представити в звичайних неправильних дробах. Зробити перевірку.

$$\begin{cases} 7x + y = 23 \\ -5x + 3y = 1 \end{cases}$$

Задача 3.14.2. Нехай векторна норма $\|x\|_p$ визначається формулою

$$\|x\|_p = \left\{ \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right\}^{1/p}, \; p \geq 1, \; \|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| .$$

Довести, що для узгоджених норм матриці $A = (a_{ik})_{i,k=1}^{n}$

$$\|A\|_p = \sup_{\|x\|_p \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

мають місце такі формули:

а) $\|A\|_1 = \max\limits_k \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ik}|$; б) $\|A\|_\infty = \max\limits_i \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{ik}|$; в) $\|A\|_2 = \sqrt{\max \lambda(A^* A)}$,

де $\lambda(A^* A)$ – власне значення матриці $A^* A$.

Задача 3.14.3. Довести такі нерівності:

а) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_2 \le \|A\|_1 \le \sqrt{n}\|A\|_2$; в) $n^{-1} \le \frac{\mathrm{cond}_\infty A}{\mathrm{cond}_2 A} \le n$;

б) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_2 \le \|A\|_\infty \le \sqrt{n}\|A\|_2$; г) $n^{-1} \le \frac{\mathrm{cond}_1 A}{\mathrm{cond}_2 A} \le n$,

де $\mathrm{cond}_k A = \|A\|_k \|A^{-1}\|_k$ – число обумовленості матриці A.

Задача 3.14.4. Довести, що матриця обернена до

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ має вигляд } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 & \dots & (-a)^{n-1} \\ 0 & 0 & -a & a^2 & \dots & (-a)^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

і матриця A має число обумовленості

$$\mathrm{cond}_\infty A = (1+a)\frac{a^{n-1}-1}{a-1}.$$

Підрахувати число обумовленості для n=20 , a=5.

Задача 3.14.5. Дати відповіді на запитання:

а) Як зв’язані між собою число обумовленості матриці та її детермінант?

б) Чи обов’язково погано обумовлена матриця має малі власні значення?

Задача 3.14.6. Довести, що детермінант матриці Коші

$$K_n = \left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{i,j=1}^{n}$$

дорівнює

$$\det K_n = D_n = \prod_{p=1}^{n-1}\left[\prod_{q=p+1}^{n}(a_p - a_q)\right]\cdot \prod_{r=1}^{n-1}\left[\prod_{s=r+1}^{n}(b_r - b_s)\right] \Big/ \prod_{i=1}^{n}\left[\prod_{j=1}^{n}(a_i + b_j)\right] =$$

$$= \prod_{1\le i<j\le n}(a_i - a_j)(b_i - b_j)\left(\prod_{1\le i<j\le n}(a_i + b_j)\right)^{-1}.$$

Задача 3.14.7. Знайти елементи матриці $K_n^{-1} = (b_{ij})_{i,j=1}^{n}$, яка є оберненою до матриці Коші

$$K_n = \left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{i,j=1}^{n}.$$

Задача 3.14.8. Знайти елементи матриці $H_n^{-1} == (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$, яка є оберненою до матриці Гільберта

$$H_n = \left(\frac{1}{j+i-1}\right)_{i,j=1}^{n}$$

і показати, що a_{ij} – цілі числа.

Задача 3.14.9. Довести, що (див. задачу 3.14.7)

$$\max|a_{ij}| = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi^2 n}\left(\sqrt{2}+1\right)^{4n}\left(1 + O(n^{-1})\right),$$

$$\|H_n^{-1}\|_\infty = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} 2^{7/4} n^{1/2}}\left(\sqrt{2}+1\right)^{4n}\left(1 + O(n^{-1})\right)$$

і дати оцінку числа обумовленості матриці Гільберта H_n.

Задача 3.14.10. Привести приклади систем $Ax=b$, для яких метод простої ітерації є розбіжним, але збігається метод Зейделя та навпаки.

Задача 3.14.11. Обчислити норми матриці A:

1) $$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right);$$

2) $\|A\|_2 = \sqrt{\max\limits_{1\le i\le n}\lambda_i\left(A^*\cdot A\right)}$, де $\lambda_i\left(A\right)$ власні значення матриці A^i, де A^* – матриця спряжена до A;

3) $$\|A\|_1 = \max_{1\le i\le n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right).$$

3.15. Завдання до лабораторної роботи

Перший рівень.

1. Реалізувати основні операції над матрицями. Матриці брати розмірності $n>3$. Перевірити основні властивості матриць.
2. Реалізувати знаходження визначника матриці для матриць розмірності $n>3$. Знайти обернену матрицю для невироджених матриць розмірності $n>3$.

Другий рівень.

1. Розв'язати СЛАР, використовуючи метод Крамера
2. Розв'язати СЛАР, використовуючи обернену матрицю. Матриці брати розмірності $n>3$. Здійснити перевірку отриманого розв'язку.

Третій рівень.

Реалізувати знаходження розв'язування СЛАР згідно варіанту (Матриці брати розмірності $n>3$. Знайти аналітичний розв'язок СЛАР. Здійснити перевірку отриманого розв'язку.):

1. Реалізувати метод Гауса
2. Метод Гауса за схемою Халецького (метод LU факторизації)
3. Метод Гауса з вибором головного елемента
4. Метод Гауса з одиничними коефіцієнтами
5. Метод Гауса-Жордана
6. Способи знаходження оберненої матриці
7. Застосування методу Гауса до обчислення визначника
8. Застосування методу Гауса до інверсії матриці
9. Метод простої ітерації
10. Метод Гауса-Зейделя (метод поліпшеної ітерації)
11. Особливості трьохдіагональної матриці
12. Метод Данилевського

Зміст звіту до лабораторної роботи:

1. Мета роботи
2. Індивідуальне завдання
3. Алгоритм розв'язування задачі (блок-схема).
4. Текст програми з коментарями.
5. Результати виконання програми.
6. Висновки.

Варіанти завдань для тестування

Таблиця 3.3

№	Матриця A	Вектор b	№	Матриця A	Вектор b
1	$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 17 & 0 & -14 \\ -9 & 19 & -14 & -13 & 25 \\ 9 & 21 & 25 & 15 & -2 \\ -4 & -8 & -4 & 20 & -7 \\ 6 & -12 & 22 & 10 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 0 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 25 & -18 & -19 & 22 & -16 \\ -6 & 21 & 19 & -3 & 8 \\ -19 & 22 & -17 & -4 & 18 \\ 12 & -2 & 22 & -10 & 8 \\ -10 & 1 & 19 & 4 & -8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ 13 \\ 19 \\ 16 \end{pmatrix}$

2	$\begin{pmatrix} 15 & 14 & 13 & -7 & -6 \\ 10 & 25 & 9 & 0 & 9 \\ 1 & 19 & 24 & 25 & -5 \\ -16 & 0 & 19 & 16 & -2 \\ -5 & 12 & 20 & 5 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \\ 13 \\ 8 \end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 6 & -9 & 6 \\ 0 & 6 & 20 & -18 & 20 \\ -8 & 7 & -10 & -7 & -9 \\ -1 & -17 & 0 & -6 & 24 \\ 5 & 5 & 15 & -11 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 18 \\ 11 \\ -8 \\ 20 \\ 16 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} -4 & 13 & 5 & 19 & 6 \\ -10 & 21 & 1 & -13 & -2 \\ -15 & -20 & 14 & 21 & -12 \\ 21 & -16 & -18 & 19 & 13 \\ -13 & 5 & 19 & 23 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 16 \\ 9 \\ 2 \\ -3 \\ 16 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & 8 & -8 \\ 19 & 12 & 15 & 2 & 2 \\ -15 & 12 & 0 & 15 & 7 \\ 7 & 16 & 0 & -4 & -18 \\ -3 & -13 & -15 & 6 & 12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ -2 \\ -1 \\ -10 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} -6 & -20 & 10 & 10 & -12 \\ 8 & -8 & -18 & -5 & 1 \\ -1 & 22 & 18 & 22 & 15 \\ -18 & -13 & 13 & 24 & -8 \\ -7 & 14 & 17 & -6 & -9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -8 \\ 13 \\ -1 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 10 & -7 & -7 \\ -1 & -20 & -5 & -8 & -12 \\ 9 & -1 & 14 & -3 & 3 \\ 1 & 16 & 25 & -19 & 2 \\ 7 & 23 & 12 & 2 & -17 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ -9 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 11 & 9 & 19 & 4 & -1 \\ -16 & 18 & 13 & 18 & 8 \\ -1 & 15 & -14 & 1 & -13 \\ 2 & -8 & 1 & 3 & 16 \\ 14 & 10 & 7 & 0 & 16 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 16 \\ 1 \\ 9 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -14 & -12 \\ 12 & 4 & 22 & 15 & -13 \\ 1 & -3 & 24 & -9 & 15 \\ 23 & 5 & 0 & -4 & 13 \\ -16 & -6 & 3 & 3 & -13 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 18 \\ 8 \\ 5 \\ 19 \\ 5 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 1 & 19 & 19 & -12 & 15 \\ -1 & -10 & -8 & -16 & -14 \\ 3 & -3 & 3 & 1 & 3 \\ 9 & 1 & 4 & -20 & -18 \\ 16 & -18 & 11 & -7 & 15 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ -5 \\ 16 \\ -4 \end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix} -14 & 11 & 14 & -19 & 11 \\ 14 & 0 & 6 & 14 & 21 \\ 13 & 2 & -6 & -12 & 6 \\ 1 & 19 & -11 & 18 & 5 \\ 9 & -14 & 19 & 15 & 11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -8 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 19 & -17 & 17 & 10 & -13 \\ -17 & -2 & 15 & -7 & 11 \\ -18 & 11 & -16 & -13 & 6 \\ -2 & 12 & 14 & -9 & 22 \\ 7 & -7 & -6 & -8 & 11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 19 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 8 & -1 & -8 & -8 & -17 \\ -16 & -8 & 24 & 15 & 2 \\ -5 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 5 & -9 & 6 & -18 & -12 \\ -10 & 19 & 15 & 10 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -9 \\ -10 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 6 & 3 & 10 \\ 13 & -16 & -16 & -18 & 18 \\ 14 & -17 & 17 & -10 & -20 \\ 20 & 3 & 19 & -1 & -7 \\ 17 & -9 & 21 & 22 & 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ -10 \\ 17 \\ 14 \end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix} -18 & -10 & -16 & 21 & -12 \\ 24 & -7 & -13 & -5 & 19 \\ -9 & -11 & -19 & -10 & 8 \\ -3 & -6 & -15 & -16 & 3 \\ 4 & -7 & 20 & -12 & 20 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 15 \\ 10 \\ 18 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} -6 & 18 & 15 & 8 & 6 \\ 2 & 11 & -18 & 17 & 23 \\ -13 & -2 & 8 & -10 & -5 \\ 1 & 13 & 11 & -10 & -5 \\ 10 & 21 & 8 & -1 & 11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 20 & -14 & 0 & 1 & -16 \\ -5 & 4 & 14 & -7 & -16 \\ 8 & 15 & 5 & 11 & -3 \\ 10 & 6 & -1 & 13 & -15 \\ -17 & -9 & 8 & 18 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 \\ 17 \\ 15 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} -10 & 3 & 24 & -9 & 2 \\ -1 & 15 & 5 & 20 & -12 \\ -10 & 7 & -10 & 14 & 16 \\ 22 & -4 & -10 & -6 & -6 \\ 1 & 16 & 7 & 0 & -15 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ -9 \\ 19 \\ -1 \end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix} 22 & -6 & -9 & -19 & 22 \\ -20 & 2 & 2 & -6 & 11 \\ 15 & -13 & -2 & -12 & -3 \\ -4 & 2 & -17 & 7 & 11 \\ 3 & -19 & -1 & -18 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 14 \\ -1 \\ 19 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -13 & -6 & 23 \\ -2 & 23 & 25 & -19 & 22 \\ 23 & -9 & -6 & 20 & 13 \\ -2 & -19 & 2 & -9 & -20 \\ 1 & 24 & -19 & 12 & -13 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 18 \\ 14 \\ 16 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix} -3 & -14 & 12 & 12 & 24 \\ -6 & -6 & -12 & 7 & -7 \\ 15 & -18 & -1 & 19 & -6 \\ -17 & 6 & 4 & 14 & 15 \\ -8 & 1 & -9 & 22 & -7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ 4 \\ 1 \\ 18 \end{pmatrix}$

12	$\begin{pmatrix} -5 & -11 & 13 & 21 & -2 \\ -11 & -16 & 0 & -18 & -7 \\ -19 & -1 & 19 & 17 & 8 \\ 3 & -13 & 25 & 18 & -13 \\ -14 & 12 & 23 & 6 & -14 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 7 \\ 20 \\ 17 \end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix} -13 & 12 & 7 & -19 & -4 \\ -2 & 2 & 15 & -4 & 6 \\ 16 & -7 & -16 & 8 & -15 \\ 10 & 2 & -17 & -8 & -2 \\ 0 & -18 & 7 & 2 & -12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 12 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} -19 & 7 & 7 & 24 & 6 \\ 17 & 6 & -2 & 15 & 8 \\ 0 & 16 & -6 & 8 & -16 \\ -10 & -2 & 8 & 16 & -16 \\ 13 & -18 & 25 & -13 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 17 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} 2 & -13 & -2 & 25 & 13 \\ 0 & 14 & -14 & 9 & 24 \\ 4 & -9 & -8 & 19 & 0 \\ 23 & 13 & 1 & 12 & 3 \\ 7 & 24 & 21 & -16 & -13 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 19 \\ 9 \\ 7 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix} -5 & -19 & 9 & 15 & 14 \\ 18 & 11 & 14 & 3 & -6 \\ -6 & 24 & 11 & 6 & -7 \\ -7 & 18 & 8 & 11 & -7 \\ 20 & 0 & 4 & -13 & -17 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 19 \\ 1 \\ 19 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix}$	31	$\begin{pmatrix} 20 & 19 & 18 & 17 & -17 \\ -3 & -13 & 6 & -6 & 7 \\ 2 & 0 & 16 & 9 & -6 \\ -11 & 1 & -15 & 19 & -20 \\ 23 & 24 & 14 & 7 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 15 \\ -8 \\ 17 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 & 15 & -11 \\ 7 & 9 & 10 & 0 & 20 \\ -5 & -11 & 6 & -7 & -1 \\ 16 & -6 & 14 & 7 & 20 \\ -6 & 24 & -19 & -2 & 12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 14 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$	32	$\begin{pmatrix} 22 & 17 & -16 & 18 & -7 \\ -8 & 21 & 1 & 24 & 16 \\ 2 & 23 & -18 & 4 & -8 \\ 22 & -4 & 10 & 7 & -18 \\ 18 & -2 & -15 & -20 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$
16	$\begin{pmatrix} 4 & 4 & -5 & 13 & 9 \\ 24 & -17 & -18 & -16 & 24 \\ -3 & 3 & 11 & 11 & -3 \\ -14 & -19 & 17 & 11 & -15 \\ 19 & 13 & 12 & -8 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 19 \\ 0 \\ 1 \\ 19 \\ 17 \end{pmatrix}$	33	$\begin{pmatrix} 21 & 14 & 24 & 16 & 18 \\ 17 & -4 & -10 & 0 & 13 \\ 17 & 21 & 7 & -2 & -7 \\ -2 & 3 & 19 & 18 & -13 \\ 9 & -4 & -8 & -16 & 22 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 7 \\ 19 \\ -1 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} -15 & 8 & -17 & 9 & -17 \\ 12 & -1 & 15 & 4 & -12 \\ 0 & -9 & -16 & 4 & -10 \\ -10 & 13 & -19 & 19 & 8 \\ 14 & 1 & 16 & -20 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 13 \\ 3 \\ -6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 9 & 7 & 9 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 5 & 0 & 6 \\ 1 & 9 & 7 & 8 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 6 \\ 15 \\ -7 \end{pmatrix}$

Література

1. Ляшко И.И., Макаров В.Л., Скоробагатько А.А. Методы вычислений.–Киев: Вища школа, 1977.-406С.
2. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.:Наука, 1973.–632С.
3. Гаврілюк І.П., Макаров В.Л. Методи обчислень.– Київ, Вища школа, в 2-х частинах, 1995.
4. Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений.– М.: Мир, 1969.–168С.
5. Калиткин Н.Н. Численные методы,– М.: Наука, 1978. – 512С.
6. Волков Е.А. Численные методы,– М.: Наука, 1982. – 256С.
7. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980, –280С.
8. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. – М.: Наука, 1972, – 368С.
9. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.Н. Вычислительные методы высшей математики, в 2 томах. – Минск: Вышэйшая школа, 1972, т. 1, – 304С.
10. Березин И.С., Житков Н.П. Методы вычислений. – М.: Наука, 1966. т. 1, –632С.