PCL XL Warning

IllegalMediaSource

1 将 A、B、C 三个字母之一输入信道，输出为原字母的概率为 98%，而输出为其它任一字母的概率为 1%。今将字母 AAAA、BBBB、CCCC 之一输入信道，输入 AAAA、BBBB、CCCC 的概率分别为 0.3,0.3,0.4，已知输出为 ABCA，问输入是 AAAA 的概率是多少？（设信道传输每个字母的工作是相互独立的。）

（本题 10 分）解：由题意， 已知 $P(AAAA)=0.3, P(BBBB)=0.3, P(CCCC)=0.4$，

$$P(ABCA\mid AAAA)=P(A\mid A)P(B\mid A)P(C\mid A)P(A\mid A)=0.98^2\times0.01\times0.01=9.604\times10^{-5}$$

$$P(ABCA\mid BBBB)=P(A\mid B)P(B\mid B)P(C\mid B)P(A\mid B)=0.98\times0.01^3=9.8\times10^{-7},$$

$$P(ABCA\mid CCCC)=P(A\mid C)P(B\mid C)P(C\mid C)P(A\mid C)=0.98\times0.01^3=9.8\times10^{-7}$$

------5 分

由 Bayes 公式，

$$P(AAAA\mid ABCA)=$$

$$\frac{P(ABCA\mid AAAA)P(AAAA)}{P(ABCA\mid AAAA)P(AAAA)+P(ABCA\mid BBBB)P(BBBB)+P(ABCA\mid CCCC)P(CCCC)}$$

$$=\frac{9.604\times10^{-5}\times0.3}{9.604\times10^{-5}\times0.3+9.8\times10^{-7}\times0.3+9.8\times10^{-7}\times0.4}=0.977$$ ------5 分

注：此题为综合题，综合考核事件的独立性与贝叶斯公式。

2 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} ae^{-(x-\theta)} & x>\theta \\ 0 & x\le\theta \end{cases}$$

（1）求常数 a；（2）求 $Y=-2X$ 的概率密度。

解：（本题 10 分）（1）$\int_\theta^{+\infty} ae^{-(x-\theta)}dx=1\Rightarrow a=1$； ------3 分

（2）$y=-2x$ 关于 x 单调，反函数为 $x=h(y)=-\frac{y}{2}$，$h'(y)=-\frac{1}{2}$，

故 $Y=2X$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=f_X(h(y))\left|h'(y)\right|=\begin{cases} \frac{1}{2}e^{\left(\frac{y}{2}+\theta\right)} & y<-2\theta \\ 0 & y\ge-2\theta \end{cases}$$

------7 分

注：此题为基本题，考核一维连续型随机变量概率密度的性质，概率的计算及函数的概率密度。

3 某种元件的寿命 X 服从正态分布 $N\left(500,25^2\right)$。

（1）求元件寿命在 550 小时以上的概率；

（2）某仪器上装有 5 个这种元件，5 个元件损坏与否是相互独立的. 求：使用的最初 550 小时内最多有一个元件损坏的概率；

解：（本题 10 分）解

（1） $P\{X>550\}=1-\Phi\left(\dfrac{550-500}{25}\right)\approx 1-\Phi(2)=0.023$ ---------------5 分

（2）设 Y 为使用的最初 550 小时损坏的元件数，则 $Y\sim B(5,0.977)$

$P\{Y=k\}=C_5^k 0.977^k 0.023^{5-k}, k=0.1,\dots,5$

$P\{Y\le 1\}=C_5^0 0.977^0\times 0.023^5+C_5^1 0.977^1\times 0.023^4=1.37\times 10^{-6}$

---------------5 分

故使用的最初 550 小时内最多有一个元件损坏的概率为1.37×10^{-6}。

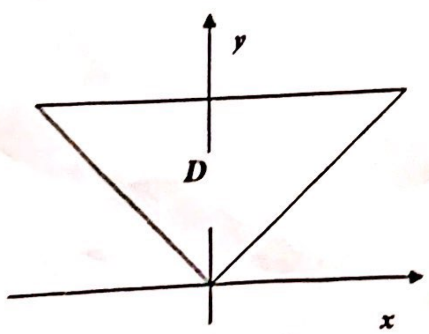
注：此题为基本题，考核正态分布与二项分布的概率计算。

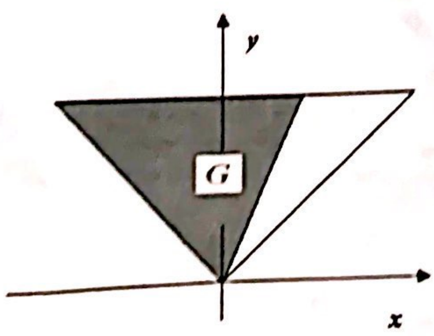
4 设(X,Y)具有概率密度 $f\{x,y\}=\begin{cases} cy & 0<|x|<y<1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$，

1) 求常数 c；2)求 P{Y>2X}；

3) 问 a,b 满足什么条件时，随机变量 $U=aX+bY$ 与 $V=aX-bY$ 不相关？

解（本题 15 分）1) 如图所示区域 D 为(X,Y)的非 0 定义域





由归一性

$$\iint_D cydxdy=1 \qquad \Rightarrow c\int_0^1 ydy\int_{-y}^{y}dx=1 \qquad \Rightarrow c=\frac{3}{2}$$ --------3 分

2）$\{Y>2X\}$如图区域 G，

$$P\{Y>2X\}=\iint_G \frac{3}{2}ydxdy=\frac{3}{2}\int_0^1 ydy\int_{-y}^{\frac{y}{2}}dx=\frac{3}{4}$$ --------5 分

(3) $Cov(U,V)=Cov(aX+bY,aX-bY)=a^2D(X)-b^2D(Y)=0$ --------2 分

其中，

$$E(X)=\iint_G \frac{3x}{2}ydxdy=\frac{3}{2}\int_0^1 ydy\int_{-y}^{y}xdx=0$$

$$D(X)=E(X^2)=\iint_G \frac{3x^2}{2}ydxdy=\frac{3}{2}\int_0^1 ydy\int_{-y}^{y}x^2dx=\frac{1}{5}$$

$$E(Y)=\iint_G \frac{3}{2}y^2dxdy=\frac{3}{2}\int_0^1 y^2dy\int_{-y}^{y}dx=\frac{3}{4}$$

$$D(Y)=E(Y^2)-\frac{9}{16}=\iint_G \frac{3}{2}y^3dxdy=\frac{3}{2}\int_0^1 y^3dy\int_{-y}^{y}dx=\frac{3}{5}-\frac{9}{16}=\frac{3}{80}$$

故由 $a^2D(X)-b^2D(Y)=0 \Rightarrow \frac{a^2}{5}=\frac{3b^2}{80} \Rightarrow |a|=\frac{\sqrt{3}}{4}|b|$ -------5 分

注：此题（1）（2），为基本题，考核二维连续型随机变量概率密度的性质和概率计算，（3）为综合题，综合考核随机变量的方差，协方差及不相关的概念及性质。

5、有 500 人参加马拉松比赛，设每人能够坚持到终点的概率为 0.9。试利用中心极限定理，计算至少有 460 人能够坚持到终点的概率。。

解：（本题 10 分）解：设 X 表示 500 人中坚持到终点的人数，则 X~B（500，0.9），则由中心极限定理，有

$$P\{X\ge 460\}\approx 1-\Phi(\frac{460-500\times 0.9}{\sqrt{500\times 0.9\times 0.1}})=1-\Phi(1.49)\approx 1-0.9319=0.068$$

--------10 分

注：此题为基本题，考核中心极限定理及正态分布的性质。

6 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为来自总体X的一简单随机样本.

$$f(x)=\begin{cases}\theta^2 xe^{-\theta x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

(1) 求θ的极大似然估计量$\hat{\theta}_{MLE}$;

(2) 求参数$\lambda=\dfrac{1}{\theta}$的极大似然估计$\hat{\lambda}_{MLE}$，并验证$\hat{\lambda}_{MLE}$的无偏性。

解:（本题10分）(1) $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta^2 x_i\, e^{-\theta x_i}=\theta^{2n}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}x_i}$

$$\ln L(\theta)=2n\ln\theta+\ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)-\theta\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$\frac{\partial\ln L(\theta)}{\partial\theta}=\frac{2n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0\Rightarrow\theta=\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}=\frac{2}{\bar{x}}$$

故θ的极大似然估计量为$\hat{\theta}_{MLE}=\dfrac{2}{\bar{X}}$; ---------5分

(2) $\lambda=\dfrac{1}{\theta}$关于$\theta$单调，所以$\hat{\lambda}_{MLE}=\dfrac{1}{\hat{\theta}_{MLE}}=\dfrac{\bar{X}}{2}$;

$$E\left(\hat{\lambda}_{MLE}\right)=\frac{E\left(\bar{X}\right)}{2}=\frac{E(X)}{2}=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\theta^2x^2e^{-\theta x}dx=\frac{1}{\theta}=\lambda$$

故$\hat{\lambda}_{MLE}$是λ的无偏估计。------------5分

注：此题（1）为基本题，考核极大似然估计概念；(2) 为提高题，考核期望的计算及估计量的评选标准。

7. （15分）某种元件的寿命服从正态分布，今抽取一个容量为9的样本，测得样本均值为3001小时，样本标准差为12小时;

（1）问在水平α=0.05下,能否认为这批元件的平均寿命为3000小时?

（2）若已知总体方差为100，问n等于多少才能使由样本$(X_1,X_2,L\ ,X_n)$构成的参数μ的95%置信区间的长度小于10?

解（本题15分）(1) 要检验的假设是

$$H:\mu=3000;H_1:\mu\neq3000$$

H_0下，$T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

水平α的拒绝域为$|T|>t_{\alpha/2}(n-1)=2.306$

已知$n=9,\bar{x}=2990$，由此得

$$|t|=2.5>t_{0.025}(8)=2.306$$

所以拒绝假设H_0，不能认为这批元件的平均寿命为3000小时。------12分

（2）μ的95%置信区间为

$\left(\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.025}(n-1),\bar{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.025}(15)\right)$，其长度为$\dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.025}=\dfrac{20\times1.96}{\sqrt{n}}$，

故令$\dfrac{20\times1.96}{\sqrt{n}}<10\Rightarrow n>15.36$ ------3分

注：此题（1）为基本题，考核正态总体均值的检验。（2）为提高题，综合考核对区间估计概念的理解及统计量的性质。