

# 课程考试试卷答案 (学生考试用)

课程名称: \_\_\_\_\_ 学分: 3 教学大纲编号: \_\_\_\_\_

试卷编号: A 卷 考试方式: 笔试、闭卷 满分分值: 80 考试时间: 120 分钟

组卷日期: \_\_\_\_\_ 组卷教师(签字): \_\_\_\_\_ 审定人(签字): \_\_\_\_\_

1. (10 分) 某人忘记了银行卡密码的最后一位数字, 因而他随机按号,

(1) 求他按号不超过三次而选正确的概率.

(2) 若已知最后一个数是偶数, 则此概率是多少?

解法一: 设  $A_i$ ,  $i=1,2,3$  分别表示第  $i$  次按号按对,  $A$  表示按号不超过三次而选正确,

则  $A = A_1 \cup \bar{A}_1 A_2 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$ , 且三者两两互不相容, 故有

$$\begin{aligned} (1) P(A) &= P(A_1) + P(\bar{A}_1 A_2) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) \\ &= P(A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2 | \bar{A}_1) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1)P(A_3 | \bar{A}_1 \bar{A}_2), \dots\dots\dots 2 \text{ 分} \\ &= \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{9} + \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{10}. \dots\dots\dots 3 \text{ 分} \end{aligned}$$

(2) 设  $B$  表示已知最后一个数是偶数, 按号不超过三次而选正确, 则

$$P(B) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{5}. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

解法二: (1)  $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1)P(\bar{A}_3 | \bar{A}_1 \bar{A}_2) \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$$= 1 - \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{7}{8} = \frac{3}{10}. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$(2) P(B) = 1 - \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{3}{5}. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

注: 基本题, 考察古典概型和乘法公式.

2. (10 分) 设某城市成年男子的身高  $X \sim N(170, 6^2)$  (单位厘米).

(1) 问应如何设计公共汽车车门的高度, 使成年男子与车门顶碰头的机会小于 0.01?

(2) 若车门设计高度为 182 厘米, 求 10 个成年男子中与车门顶碰头的人数不多于 1 人的概率.

解: (1) 设车门高度为  $h$  厘米, 按设计要求应有  $P\{X > h\} < 0.01$ .

由题设知  $X \sim N(170, 6^2)$ , 则

$$P\{X > h\} = 1 - P\{X \leq h\} = 1 - P\left\{\frac{X-170}{6} \leq \frac{h-170}{6}\right\} = 1 - \Phi\left(\frac{h-170}{6}\right) < 0.01,$$

$$\text{即 } \Phi\left(\frac{h-170}{6}\right) > 0.99, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{查表得 } \frac{h-170}{6} > 2.33, \text{ 故 } h > 183.98. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

车门高度应高于 183.98 厘米, 才能使成年男子与车门顶碰头的机会小于 0.01.

(2) 设  $Y$  表示 10 个成年男子中身高超过 182 厘米的人数, 则  $Y \sim B(10, p)$ , 其中  $p$  为任一成年男子身高超过 182 厘米的概率,

$$p = P\{X > 182\} = 1 - P\{X \leq 182\} = 1 - P\left\{\frac{X-170}{6} \leq \frac{182-170}{6}\right\} = 1 - \Phi(2) = 0.0228. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{则 } P\{Y = k\} = C_{10}^k (0.0228)^k (1-0.0228)^{10-k}, k=0,1,\dots,10.$$

而 10 个成年男子中与车门顶碰头的人数不多于 1 人的概率为

$$\begin{aligned} P\{Y \leq 1\} &= P\{Y=0\} + P\{Y=1\} \\ &= 0.9772^{10} + C_{10}^1 \times 0.0228 \times 0.9772^9 \\ &\approx 0.9793. \dots\dots\dots 3 \text{ 分} \end{aligned}$$

注: 基本题, 考察正态分布和二项分布的计算.

3. (15 分) 设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} kx(x-y), & 0 < x < 2, -x \leq y \leq x, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求: (1) 常数  $k$ ; (2)  $X, Y$  的边缘概率密度; (3)  $P\{0 < X < 1, 0 < Y < 1\}$ .

$$\text{解: (1) 由归一性, } \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1 \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^2 \int_{-x}^x kx(x-y) dy dx = 8k, \text{ 则 } k = \frac{1}{8}. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$(2) f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_{-x}^x \frac{1}{8} x(x-y) dy & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4} x^3 & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_y^2 \frac{1}{8} x(x-y) dx & 0 < y < 2 \\ \int_{-y}^2 \frac{1}{8} x(x-y) dx & -2 < y < 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{y}{4} + \frac{1}{48} y^3 & 0 < y < 2 \\ \frac{1}{3} - \frac{y}{4} + \frac{5}{48} y^3 & -2 < y < 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$(3) P\{0 < X < 1, 0 < Y < 1\} = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{8} x(x-y) dy dx = \frac{1}{64} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

注：综合题，考察二维随机变量的归一性、边缘概率密度、概率计算。

4. (15 分) 假设二维随机变量  $(X, Y)$  在矩形  $G = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$  上服从均匀分布，记  $U = \begin{cases} 0, & \text{若 } X \leq Y \\ 1, & \text{若 } X > Y \end{cases}, V = \begin{cases} 0, & \text{若 } X \leq 2Y \\ 1, & \text{若 } X > 2Y \end{cases}$ 。

(1) 求  $U$  和  $V$  的联合分布，(2)  $U$  和  $V$  是否独立，(3) 求  $U$  和  $V$  的相关系数。

解：因  $(X, Y)$  服从均匀分布，可得  $P\{X \leq Y\} = \frac{1}{4}, P\{X \geq 2Y\} = \frac{1}{2}, P\{Y \leq X \leq 2Y\} = \frac{1}{4}$ ，

$U$  和  $V$  有四个可能取值  $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$ ， $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

$$P\{U=0, V=0\} = P\{X \leq Y, X \leq 2Y\} = P\{X \leq Y\} = \frac{1}{4},$$

$$P\{U=0, V=1\} = P\{X \leq Y, X > 2Y\} = 0,$$

$$P\{U=1, V=0\} = P\{X > Y, X \leq 2Y\} = P\{Y < X \leq 2Y\} = \frac{1}{4},$$

$$P\{U=1, V=1\} = P\{X > Y, X > 2Y\} = P\{X > 2Y\} = \frac{1}{2}, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

故  $U$  和  $V$  的联合分布率为

	$V$	0	1
$U$			
0		$\frac{1}{4}$	0
1		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

(2)  $U$  和  $V$  的分布率为

$U$	0	1
$p$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

$\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$V$	0	1
$p$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

因  $p_{ij} \neq p_i \cdot p_j$ ，所以  $U$  和  $V$  不相互独立。

$\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

$$(3) E(U) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}, D(U) = 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{16},$$

$$E(V) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, D(V) = 0^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$E(UV) = 0 \times 0 \times \frac{1}{4} + 0 \times 1 \times 0 + 1 \times 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\text{Cov}(U, V) = E(UV) - E(U)E(V) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{因此 } \rho_{UV} = \frac{\text{Cov}(U, V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}} = \frac{\frac{1}{8}}{\sqrt{\frac{3}{16}} \times \sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

注：综合题，考察随机变量的数字特征和独立性。



5. (10分) 某车间有 200 台独立工作的车床, 开工率为 0.6, 开工时耗电各为 1KW.

(1) 求某时刻正在工作的车床在 110 台到 130 台之间的概率;

(2) 问供电所至少要供给这个车间多少电力才能以 99.9% 的概率保证这个车间正常生产.

解: 记某时刻正在工作的车床数为  $X$ , 则  $X \sim B(200, 0.6)$

(1) 所求概率

$$P\{110 \leq X \leq 130\} \approx \Phi\left(\frac{130 - 200 \times 0.6}{\sqrt{200 \times 0.6 \times 0.4}}\right) - \Phi\left(\frac{110 - 200 \times 0.6}{\sqrt{200 \times 0.6 \times 0.4}}\right) \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$= \Phi(1.44) - \Phi(-1.44) = 2\Phi(1.44) - 1$$

$$= 2 \times 0.9251 - 1 = 0.8502. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

(2) 设至少要供给这个车间  $r$  KW 电才能以 99.9% 的概率保证这个车间正常生产, 由题意有  $P\{X \leq r\} \geq 0.999$ ,

$$P\{X \leq r\} \approx \Phi\left(\frac{r - 200 \times 0.6}{\sqrt{200 \times 0.6 \times 0.4}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{r - 120}{\sqrt{48}}\right) \geq 0.999, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{查表得 } \frac{r - 120}{\sqrt{48}} \geq 3.1, \text{ 故 } r \geq 141.48, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

即至少要供给这个车间 142 KW 电才能以 99.9% 的概率保证这个车间正常生产.

注: 基本题, 考察中心极限定理.

$$6. (10 \text{ 分}) \text{ 已知总体 } X \text{ 的分布函数为 } F(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\alpha}{x}\right)^\beta, & x > \alpha \\ 0, & x \leq \alpha \end{cases}$$

其中  $\alpha > 0, \beta > 1$  为参数,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是来自  $X$  的样本.

(1)  $\alpha = 1$  时, 求  $\beta$  的矩估计量. (2)  $\beta = 2$  时, 求  $\alpha$  的极大似然估计量.

$$\text{解: 由已知 } X \text{ 的分布函数可得其概率密度为 } f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\beta \alpha^\beta}{x^{\beta+1}}, & x > \alpha \\ 0, & x \leq \alpha \end{cases}$$

$$(1) \text{ 当 } \alpha = 1 \text{ 时, } X \text{ 的概率密度为 } f(x; \beta) = \begin{cases} \frac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x > 1 \\ 0, & x \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{则 } E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x; \beta) dx = \int_1^{+\infty} x \frac{\beta}{x^{\beta+1}} dx = \frac{\beta}{\beta-1}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{令 } \frac{\beta}{\beta-1} = \bar{X}, \text{ 解得 } \beta = \frac{\bar{X}}{\bar{X}-1},$$

$$\text{所以参数 } \beta \text{ 的矩估计量为 } \hat{\beta} = \frac{\bar{X}}{\bar{X}-1}. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 当 } \beta = 2 \text{ 时, } X \text{ 的概率密度为 } f(x; \alpha) = \begin{cases} \frac{2\alpha^2}{x^3}, & x > \alpha \\ 0, & x \leq \alpha \end{cases}$$

对于总体  $X$  的样本值  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 其似然函数为

$$L(\alpha) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n 2^n \alpha^{2n} x_i^{-3}, & x_i > \alpha \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{取对数得, } \ln L(\alpha) = n \ln 2 + 2n \ln \alpha - 3 \sum_{i=1}^n \ln x_i,$$

$$\text{列似然方程, 令 } \frac{d \ln L(\alpha)}{d \alpha} = \frac{2n}{\alpha} = 0, \text{ 方程无解!}$$

但因  $L(\alpha)$  单调递增, 当  $x_i > \alpha (i=1, 2, \dots, n)$  时,  $\alpha$  越大,  $L(\alpha)$  就越大, 又因为只有当  $\alpha < x_i$  时,  $L(\alpha) \neq 0$ , 因此当  $\alpha = \min\{x_i\}$  时,  $L(\alpha)$  达到最大, 故  $\alpha$  的极大似然估计为  $\hat{\alpha}_{MLE} = \min\{X_i\}$ .  $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

注: 基本题, 考察矩估计与极大似然估计.

7. (10分) 机器自动包装食盐, 设每袋盐的净重  $X \sim N(\mu, 2^2)$  (单位: 克). 机器正常工作时平均重量应为 500 克, 某天开工后, 为了检查机器工作是否正常, 从已包装好的食盐中随机抽取 6 袋, 测得其重量 (克) 为 497, 507, 510, 488, 491, 496. 已知方差不变, 问这天自动包装机工作是否正常? (取显著性水平  $\alpha = 0.05$ )

解: 给出原假设和备择假设  $H_0: \mu = \mu_0 = 500, H_1: \mu \neq 500 \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$$\text{当 } H_0 \text{ 真时, 检验统计量为 } U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

$$\text{检验的拒绝域为 } |U| \geq U_{\frac{\alpha}{2}}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{由题意, } \bar{x} = 498.1667$$

$$|u| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| = \left| \frac{498.1667 - 500}{2 / \sqrt{6}} \right| \approx 2.245 > U_{0.025} = 1.96 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

落在拒绝域中, 故拒绝  $H_0$ , 即认为这天自动包装机工作不正常.  $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

注: 基本题, 考察假设检验的基本内容.