PCL XL Warning

IllegalMediaSource

1 （10 分）30 只铆钉随机地取来用于 6 个部件上，其中有 2 个铆钉为次品。若每个部件用 5 只铆钉，则

（1）2 个次品铆钉恰好用于同一部件的概率是多少？

（2）若已知 2 个次品铆钉都用于某一个部件，则它们都用于 1 号部件的概率是多少？

解：设 A= “2 个次品铆钉恰好用于同一部件”，A_i= “2 个次品铆钉恰好用于 i 号部件”

假设每个铆钉都已编号，则样本空间 S 中的样本点数 $\mu[S]=C_{30}^5\times C_{25}^5\times C_{20}^5\times C_{15}^5\times C_{10}^5\times C_5^5$

A 中的样本点个数 $\mu[A]=6\times C_{28}^3\times C_{25}^5\times C_{20}^5\times C_{15}^5\times C_{10}^5\times C_5^5$， 选1个有2次品

则 $P(A)=\dfrac{6\times C_{28}^3\times C_{25}^5\times C_{20}^5\times C_{15}^5\times C_{10}^5\times C_5^5}{C_{30}^5\times C_{25}^5\times C_{20}^5\times C_{15}^5\times C_{10}^5\times C_5^5}=\dfrac{6\times5\times4}{30\times29}=\dfrac{4}{29}$ ------------5 分

(2) $P(A_1)=\dfrac{C_{28}^3\times C_{25}^5\times C_{20}^5\times C_{15}^5\times C_{10}^5\times C_5^5}{C_{30}^5\times C_{25}^5\times C_{20}^5\times C_{15}^5\times C_{10}^5\times C_5^5}=\dfrac{5\times4}{30\times29}=\dfrac{2}{87}$

$P(A_1\mid A)=\dfrac{P(A_1A)}{P(A)}=\dfrac{P(A_1)}{P(A)}=\dfrac{1}{6}$ ------------5 分

注：此题为基本题，考核古典概型和条件概率。

2（15 分）设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}Ax^2e^{-kx} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad (k>0)$$

（1）求常数 A，（2）求 X 的分布函数，（3）$Y=1-X^2$ 的分布函数

解（1） $\int_0^\infty Ax^2e^{-kx}dx=1\Rightarrow A=\dfrac{k^3}{2}$ ------------5 分

（2） $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(u)du=\begin{cases}\int_0^x\dfrac{k^3}{2}u^2e^{-ku}du & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$ -----------2 分

$$=\begin{cases}1-e^{-kx}\left(\dfrac{k^2}{2}x^2+kx+1\right) & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$ -----------3 分

（3） $F_Y(y)=P\{1-X^2\le y\}=P\{X^2\ge 1-y\}$ -----------2 分

当 $y\ge 1$ 时，$F_Y(y)=1$ -----------1 分

当 $y<1$ 时，$F_Y(y)=P\left\{X\ge\sqrt{1-y}\right\}+P\left\{X\le-\sqrt{1-y}\right\}$

$$=1-P\left\{X\le\sqrt{1-y}\right\}+P\left\{X\le-\sqrt{1-y}\right\}$$

$$=1-F\left(\sqrt{1-y}\right)+F\left(-\sqrt{1-y}\right)=1-F\left(\sqrt{1-y}\right)$$

于是，$F_Y(y)=\begin{cases}e^{-k\sqrt{1-y}}\left(\dfrac{k^2}{2}(1-y)+k\sqrt{1-y}+1\right) & y<1\\ 1 & y\ge 1\end{cases}$ -----------2 分

注：此题为综合题，综合考核连续型随机变量的概率密度的归一性、分布函数、随机变量函数的分布等知识点。

3.(15 分)设随机变量（X，Y）的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}cxe^{-y}, & 0<x<y<+\infty\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

（1） 求常数 C；（2）试判断 X 与 Y 的独立性；(3)求概率 $P\{X+Y\le 1\}$；

（4）求 X 与 Y 的协方差。

解（1）根据 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$ 得

$$\int_0^{+\infty}dy\int_0^y Cxe^{-y}dx=\frac{C}{2}\int_0^{+\infty}y^2e^{-y}dy=C\Rightarrow C=1$$ ------------4 分

（2）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^{+\infty}xe^{-y}dy\\ 0\end{cases}=\begin{cases}xe^{-x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{y}xe^{-y}dx\\ 0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}y^2e^{-y} & y\ge 0\\ 0 & y<0\end{cases}$$

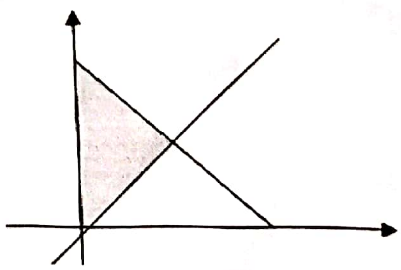
$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，故 X 与 Y 不独立。------------4 分

(3)

$$P\{X+Y\le 1\}=\int_0^{1/2}dx\int_x^{1-x}xe^{-y}dy$$

$$=\int_0^{1/2}xe^{-x}dx-\int_0^{1/2}xe^{-(1-x)}dx=1-e^{-1}-e^{-\frac{1}{2}}$$

------------3 分



PCL XL Warning

IllegalMediaSource

(4) $E(X)=\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = 2$

$$E(Y)=\int_0^{\infty} \frac{1}{2} y^3 e^{-y} dy = 3$$

$$E(XY)=\int_0^{\infty} dy \int_0^{y} x^2 y e^{-y} dx = \frac{1}{3}\int_0^{\infty} y^4 e^{-y} dy = 8$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=2$$ ------------4 分

注：此题为基本题，考核二维连续型随机变量概率密度的性质、独立性概念、概率计算及数字特征。

4、(10 分) 设某种电子元件的寿命服从均值为 10000 小时的指数分布，假定寿命大于 1000 小时为合格品，

(1)求该电子元件的合格率；(2) 为得到至少 1000 个合格品的概率不低于 90%，应生产多少个电子元件？

解：(1) 设该电子元件的寿命为 X,则 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{10000} e^{-\frac{x}{10000}} & x>0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

合格率为

$$P\{X>1000\}=\int_{1000}^{\infty} \frac{1}{10000} e^{-\frac{x}{10000}} dx = e^{-0.1} \approx 0.9$$ ---------- 5 分

(2) 设生产 n 个电子元件,其中合格品个数为 Y，则 Y~B（n，0.9），

则 $P\{Y \ge 1000\} \ge 0.9$，由中心极限定理，$P\{Y \ge 1000\} \approx 1-\Phi(\frac{1000-0.9n}{\sqrt{0.9 \times 0.1n}}) \ge 0.9$

$$\Leftrightarrow \Phi(\frac{0.9n-1000}{\sqrt{0.9 \times 0.1n}}) \ge 0.9 \Rightarrow \frac{0.9n-1000}{\sqrt{0.9 \times 0.1n}} \ge 1.28$$

解得 $\sqrt{n} \ge 33.55 \Rightarrow n \ge 1126$ -----------5 分

注：此题为基本题，考核中心极限定理及指数分布和正态分布的性质。

5. **(10 分)** 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，X 的概率密度为

$$f(x,\mu)=\begin{cases} e^{-(x-\mu)} & x \ge \mu \\ 0 & x<\mu \end{cases}$$

若取 $\hat{\mu}_1=\overline{X}-1$ ，$\hat{\mu}_2=\min(X_1,X_2,\ldots,X_n)-\dfrac{1}{n}$，求证 $\hat{\mu}_1$，$\hat{\mu}_2$ 都是 μ 的无偏估计，并比较 $\hat{\mu}_1$ 与 $\hat{\mu}_2$ 的有效性。

解 $E(\hat{\mu}_1)=E(\overline{X}-1)=E(X)-1$，而 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{\mu}^{+\infty}xe^{-(x-\mu)}dx=\mu+1$，

故 $E(\hat{\mu}_1)=\mu$ 即 $\hat{\mu}_1$ 是 μ 的无偏估计。 ------------2 分

记 $Z=\min(X_1,X_2,\ldots,X_n)$，则 $F_Z(z)=1-(1-F_X(z))^n$

而 $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}\int_{\mu}^{x}e^{-(t-\mu)}dt=1-e^{-(x-\mu)} & x\ge\mu\\ 0 & z<\mu\end{cases}$

则 $F_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-n(z-\mu)} & z\ge\mu\\ 0 & z<\mu\end{cases}$ $\therefore f_Z(z)=\begin{cases}ne^{-n(z-\mu)} & z\ge\mu\\ 0 & z<\mu\end{cases}$，

$E(Z)=\int_{\mu}^{\infty}zne^{-n(z-\mu)}dz=\mu+\dfrac{1}{n}$，故 $E(\hat{\mu}_2)=E(Z-\dfrac{1}{n})=E(Z)-\dfrac{1}{n}=\mu$

故 $\hat{\mu}_2$ 是 μ 的无偏估计。 ------------5 分

$E(X^2)=\int_{\mu}^{\infty}x^2e^{-(x-\mu)}dx=\mu^2+2\mu+2$，$D(X)=\mu^2+2\mu+2-(\mu+1)^2=1$，

则 $D(\hat{\mu}_1)=D(\overline{X}-1)=D(\overline{X})=\dfrac{D(X)}{n}=\dfrac{1}{n}$

$E(Z^2)=\int_{\mu}^{\infty}z^2ne^{-n(z-\mu)}dz=\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{2\mu}{n}+\mu^2$，$D(Z)=\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{2\mu}{n}+\mu^2-\left(\mu+\dfrac{1}{n}\right)^2=\dfrac{1}{n^2}$

则 $D(\hat{\mu}_2)=D\left(Z-\dfrac{1}{n}\right)=D(Z)=\dfrac{1}{n^2}$ 因 $D(\hat{\mu}_2)=\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{1}{n}=D(\hat{\mu}_1)$

则 $\hat{\mu}_2$ 更有效 ------------3 分

注：本题为综合题，考核估计量的无偏性、有效性。

6. （10 分）设 X_1，…，X_n 为取自参数为 λ 的泊松分布总体的样本，求 λ 的矩估计和极大似然估计。

解：(1) $E(X)=\lambda$，则 λ 的矩估计为 $\overline{X}$。 ------------4 分

（2）似然函数 $L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}P_{\lambda}(X=x_i)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}e^{-n\lambda}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}$ ------------2 分

$\ln L(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}x_i\ln\lambda-n\lambda-\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i!)$ $\frac{d[\ln L(\lambda)]}{d\lambda}=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i-n=0$------------2 分

解似然方程 $\lambda=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$，则 λ 的极大似然估计为 $\hat{\lambda}_{\mathrm{MLE}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}$------------2 分

注：此题为基本题，考核矩估计和极大似然估计。

7.(10 分) 某批矿砂的 9 个样品中的镍含量，经测定为(%):

32.56 29.66 31.64 30 31.37 31.03 29.33 30.23 31.79

设测定值总体服从正态分布,问在 α =0.05 下能否接受假设:这批矿砂的镍含量的均值为 32?

解：要检验的假设是

$$H_0:\mu=32;H_1:\mu\neq 32$$

------------2 分

H_0 下，$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$ 水平 α 的拒绝域为 $|t|\geq t_{\alpha/2}(n-1)$ -----------2 分

这里：$n=9,t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(8)=2.306,\bar{x}=30.85,s=1.09\Rightarrow t=-3.17\Rightarrow|t|>2.306$

------------4 分

满足拒绝域的要求，所以拒绝假设 H_0，即认为这批矿砂的镍含量的均值不是 32。

------------2 分

注：此题为基本题，考核正态总体均值的检验。