

首先, $A \leftarrow A \oplus B$, 我们的问题就变成了怎么操作使得一个空矩阵变成新的矩阵 A 。

先考虑只能操作行和列, 该怎么做。

如果这张图是合法的, 我们发现对于任意的 2×2 子矩阵 $\begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} \end{bmatrix}$, 有

$$a_{0,0} \oplus a_{0,1} \oplus a_{1,0} \oplus a_{1,1} = 0。$$

我们来证明一下, 因为对于操作行和列, 一定会操作 2×2 子矩阵中的任意两个, 那么异或结果不变。

所以, 我们定义 $a_{0,0}, a_{0,1}, a_{1,0}, a_{1,1}$ 这类异或结果不变的为**固定元素**, 其余的为不固定元素。

2×2 子矩阵中有固定元素, 也就是这个子矩阵被固定了, 所以它合法。

存不存在更小的子矩阵呢? 比如说 1×1 子矩阵。

答案是不存在的, 因为对于一个 1×1 子矩阵 $[a_{0,0}]$, 我们可以随意修改这个点, 所以不存在固定元素, 不合法。

考虑加入对角线操作。

如果还是刚刚的 2×2 矩阵, 我们发现由于对角线操作的加入可以出现形如 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 等等等的矩阵, 子矩阵中**没有一个元素是固定元素**, 这个子矩阵是不固定的!

所以考虑更大的子矩阵。

考虑一个 4×4 子矩阵, 我们发现对于任意的 4×4 子矩阵 $\begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & a_{0,3} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,0} & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$, 有

$$a_{0,1} \oplus a_{0,2} \oplus a_{1,0} \oplus a_{1,3} \oplus a_{2,0} \oplus a_{2,3} \oplus a_{3,1} \oplus a_{3,2} = 0。 \text{ (为了方便我将这些固定元素标红)}$$

证明显然:

- 对于 $a_{0,0}, a_{0,3}, a_{3,0}, a_{3,3}$, 可以进行一个对角线操作, 所以这些元素是可以随便调整的, 是不固定元素;
- 对于 $a_{0,1}, a_{0,2}, a_{1,0}, a_{1,3}, a_{2,0}, a_{2,3}, a_{3,1}, a_{3,2}$, 这些元素无法抵消, 只能进行对角线同时操作两个**固定元素**, 所以异或结果不会变化;
- 对于 $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,1}, a_{2,2}$, 这些元素可以通过乱搞抵消, 具体自己乱搞。

所以这个子矩阵是固定的。

我们继续发现, 不存在比 4×4 还小的子矩阵。

所以这道题就很简单了, 枚举矩阵 A 的子矩阵左上角 (i, j) , 只需要所有的子矩阵均满足满足 $a_{i,j+1} \oplus a_{i,j+2} \oplus a_{i+1,j} \oplus a_{i+1,j+3} \oplus a_{i+2,j} \oplus a_{i+2,j+3} \oplus a_{i+3,j+1} \oplus a_{i+3,j+2} = 0$, 则这张图有解。

时间复杂度 $O(nm)$ 。

然后这道题就可以开始加强了, 比如加入各种新印章, 都可以用这种方法轻松解决。

