数位 DP

ZnPdCo

2024 年 2 月

- 简单来说，

- 简单来说，
- 就是要求统计区间 [L,R] 内

- 简单来说，
- 就是要求统计区间 [L,R] 内
- 满足条件的数的个数

- 简单来说，
- 就是要求统计区间 [L,R] 内
- 满足条件的数的个数
- 或者能够想到打表部分分做法的

- 求是 11 位数，且不含前导的 0，$[L, R]$ 区间内所有满足号码中要出现至少 3 个相邻的相同数字，且号码中不能同时出现 8 和 4 的数的个数。
- $10^{10} \leq L \leq R \leq 10^{11}$

- $s[l, r] = s[0, r] - s[0, l - 1]$。

- $s[l,r] = s[0,r] - s[0,l-1]$。
- 从高位到低位 dp，$i = 1$ 表示最高位。

- $s[l,r]=s[0,r]-s[0,l-1]$。
- 从高位到低位 dp，$i=1$ 表示最高位。
- 设 $f[i][j][k][0/1][0/1][0/1][num]$ 表示到第 i 位，上一位是 j，这一位是 k，是否有连续 3 位的相同的数，是否有 8/4，这个数是 num（用于检查越界）。

- $s[l,r]=s[0,r]-s[0,l-1]$。
- 从高位到低位 dp，$i=1$ 表示最高位。
- 设 $f[i][j][k][0/1][0/1][0/1][num]$ 表示到第 i 位，上一位是 j，这一位是 k，是否有连续 3 位的相同的数，是否有 $8/4$，这个数是 num（用于检查越界）。
- 初始化……

- 发现储存 num 不现实。

- 发现储存 num 不现实。
- $n = 5141$ 中如果 $num = 51$（也就是 num 等于 n 的前缀）那么下一位只能填 $[0, 4]$，如果 num 小于 n 的前缀，那么下一位可以随便填。

- 发现储存 num 不现实。
- $n=5141$ 中如果 $num=51$（也就是 num 等于 n 的前缀）那么下一位只能填 $[0,4]$，如果 num 小于 n 的前缀，那么下一位可以随便填。
- 设 $f[i][j][k][0/1][0/1][0/1][f=0/1]$ 中的 $f=1$ 表示前面等于 n 的前缀，$f=0$ 表示小于 n 的前缀。

- 枚举第 i 位为 j，从高到低第 i 位为 s_i。

- 枚举第 i 位为 j，从高到低第 i 位为 s_i。
- $f[i][f=0] \leftarrow f[i-1][f=0] \qquad \text{anywise}$

- 枚举第 i 位为 j，从高到低第 i 位为 s_i。
- $f[i][f=0] \leftarrow f[i-1][f=0] \qquad \text{anywise}$
- $f[i][f=0] \leftarrow f[i-1][f=1] \qquad j < s_i$

- 枚举第 i 位为 j，从高到低第 i 位为 s_i。
- $f[i][f=0] \leftarrow f[i-1][f=0]$ anywise
- $f[i][f=0] \leftarrow f[i-1][f=1]$ $j < s_i$
- $f[i][f=1] \leftarrow f[i-1][f=1]$ $j = s_i$

- 找出 $[l, r]$ 的区间里有多少个数满足：有一个数在每一位上出现的次数超过了位数的一半。
- $100 \leq L \leq R \leq 10^{18}$

- 枚举超过位数一半的数，分开处理，这样我们的问题就变简单了，每次只需要记录一个数的出现次数就完了。

- 枚举超过位数一半的数，分开处理，这样我们的问题就变简单了，每次只需要记录一个数的出现次数就完了。
- 完了吗 ?? 当然没有。比如 1122，我们算 1 的时候会算一次，算 2 又要算一次。

- 枚举超过位数一半的数，分开处理，这样我们的问题就变简单了，每次只需要记录一个数的出现次数就完了。
- 完了吗 ?? 当然没有。比如 1122，我们算 1 的时候会算一次，算 2 又要算一次。
- 经过总结，发现如果一个数被算了两次，那么这样子的数满足位数是偶数且只由两个数字构成，所以我们在最后再来一次数位 DP，找到满足这个条件的数，减去就完事了。

- 有一个 X、Y 轴坐标范围为 $1 \sim n$ 的范围的方阵，每个点上有块黄金。一阵风来 (x, y) 上的黄金到了 $(g(x), g(y))$，$g(x)$ 为 x 各位上数字的乘积，如果黄金飘出方阵就没了。求在 k 个格子上采集黄金最多可以采集的黄金数。
- $1 \le n \le 10^{12}$
- $k \le \min(n^2, 10^5)$

- 发现 g 的个数不会太多，大概在 10^5 左右。

- 发现 g 的个数不会太多，大概在 10^5 左右。
- 所以用 $f[i][j]$ 表示枚举到第 i 位，数位乘积为 j（离散化后）的数的个数。

- 发现 g 的个数不会太多，大概在 10^5 左右。
- 所以用 $f[i][j]$ 表示枚举到第 i 位，数位乘积为 j（离散化后）的数的个数。
- 比如 $g(0001)$，数位乘积为 0，实际上结果为 1。

- 发现 g 的个数不会太多，大概在 10^5 左右。
- 所以用 $f[i][j]$ 表示枚举到第 i 位，数位乘积为 j（离散化后）的数的个数。
- 比如 $g(0001)$，数位乘积为 0，实际上结果为 1。
- 如何解决？

- 一是从低到高位枚举 dp，思路大致一样。

- 一是从低到高位枚举 dp，思路大致一样。
- 二是记录当前是否是前导零。

- 贪心选择，大根堆……

- 称一个正整数 x 是幸运数，当且仅当它的十进制表示中不包含数字串集合 s 中任意一个元素作为其子串。例如当 $s = \{22, 333, 0233\}$ 时，233 是幸运数，2333、20233、3223 不是幸运数。给定 n 和 s，计算不大于 n 的幸运数个数。
- n 没有前导 0，但是 s_i 可能有前导 0。
- $1 \leq n < 10^{1201}$
- $1 \leq m \leq 100$
- $1 \leq \sum_{i=1}^{m} |s_i| \leq 1500$

- 多模式串匹配？

- 多模式串匹配？
- AC 自动机？

- 建好自动机后用 $f[i][j]$ 表示第 i 个数位，到第 j 个节点。

- 建好自动机后用 $f[i][j]$ 表示第 i 个数位，到第 j 个节点。
- 好了吗？当然没有。比如说 $s = 012$，那么 12 本质上是没有问题的，但是实际上我们会枚举为 012，匹配了。

- 建好自动机后用 $f[i][j]$ 表示第 i 个数位，到第 j 个节点。
- 好了吗？当然没有。比如说 $s = 012$，那么 12 本质上是没有问题的，但是实际上我们会枚举为 012，匹配了。
- 记录一个 $0/1$ 记录当前是否是前导零。如果是则不更新 j。

- 求不含前导的 0，$[L, R]$ 区间内所有满足号码中要出现至少 3 个相邻的相同数字，且号码中不能同时出现 8 和 4 的数的个数。
- $100 \leq L \leq R \leq 10^{44}$

- 高精度不好写，可以这么写：

- 高精度不好写，可以这么写：
- $s[l,r] = s[0,r] - s[0,l] + check(l)$。

- 思考:
- 给定 n, m, k，求 $\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(i \oplus j \oplus k) + \mu(i \oplus j \oplus k) + d(i \oplus j \oplus k)\right) \bmod 998,244,353$。
- $1 \le n, m, k \le 10^{10}$