

铜棒动态杨氏模量求解方法

陈洪叶

(山东农业大学 信息科学与工程学院, 山东 泰安 271018)

摘要: 本文以动态杨氏模量实验^[1]为基础, 探讨铜棒在室温环境下动态杨氏模量的大小, 采用增加悬挂点数目、用游标卡尺测量悬挂点位置、用 Origin 7. 5 统计软件^[2]统计, 拟合出铜棒发生共振时, 共振频率与悬挂点相对位置的散点图、拟合方程、拟合曲线, 并求出了相对误差很小的铜棒的动态杨氏模量大小, 反映出此方法的优势。

关键词: 动态杨氏模量; 铜棒; 共振频率; 悬挂点; 统计; 拟合

中图分类号: 04—3 文献标识码: A 文章编号: 1000—2324 (2010) 01—0125—04

THE DISCUSSION OF THE SOLUTION ABOUT DYNAMIC METAL YOUNG'S MODULUS OF COPPER ROD CHEN Hong-ye

(College of Information Science and Engineering Shandong Agricultural University, Taian 271018, China)

Abstract: Based on the experiment about dynamic metal Young's modulus of copper rod, it discusses the numerical value of dynamic Young's modulus of copper rod in the condition of room temperature. It increases the number of suspension points, measures the locations of suspension points by vernier calipers, stats the data by Origin 7. 5. It fits the scatter diagram, fitted equation, fitted curve between resonant frequency and relative suspension points when it comes into being resonance. It brings off very low relation error of dynamic Young's modulus of copper rod, which response the superiority of the method.

Keywords: Dynamic Young's modulus; copper rod; resonant frequency; suspension points; statistic; fitting

杨氏弹性模量是工程材料中固体材料的重要物理参量, 其测量也是大学物理实验中重要的实验之一, 它标志着材料抵抗弹性形变的能力。测量杨氏模量的方法主要有静态测量法、动态测量法、波速测量法等。其中动态测量法中的共振法包括弯曲共振 (横向共振) 法、纵向共振法、扭转共振法, 用动力学法测定的弹性模量称为动态杨氏模量。

理论上, 将一均匀细棒悬挂起来, 使之做微小横振动, 其振动方程为

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\rho S \partial^2 y}{EJ \partial t^2} = 0 \tag{1}$$

式 (1) 中 y 表示横振动位移, x 表示细棒上任一点的纵向位置, ρ 为细棒密度, S 为细棒截面积, E 为细棒的杨氏模量, J 为横截面相对于轴中心的转动惯量。

若细棒为圆形细棒, 如黄铜棒, 则有

$$E = 1.6067 \frac{m l^3}{d^4 f} \tag{2}$$

式 (2) 中 m 为细棒质量, l 为细棒的长度, d 为细棒直径, f 为基频频率, 此式即为求解圆形棒杨氏模量的计算公式。

可分析出, 细棒在两端自由的条件下, 当做基频振动时, 存在两个节点, 它们的位置距离端面分别在 $0.224l$ 和 $0.776l$ 。实验时悬丝若悬挂在节点上, 试样不振动。根据上述原理, 采用悬丝耦合弯曲

收稿日期: 2009—10—18

作者简介: 陈洪叶 (1975—), 女, 山东泰安人, 硕士, 讲师, 主要从事物理教学与研究。

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

共振法来测定金属材料的杨氏模量，本实验采用的基本方法是：将一根截面均匀的试样（圆截面细棒）悬挂在两只传感器下面，在两端自由的条件下振动，根据悬丝悬挂在偏离节点不同位置时测到的共振信号的差异，找到试样的基频频率，根据试样的几何尺寸、密度等，带入公式（2），求出材料的杨氏模量。图 1 为杨氏模量实验装置图，由测量仪和振动装置两部分构成。

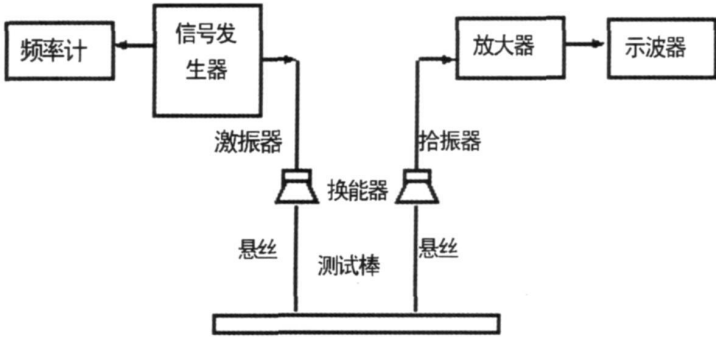


图 1 杨氏模量实验装置图
Fig 1 The experimental setup of Young's modulus

一般的动态悬挂法中悬丝耦合弯曲共振法求杨氏模量，存在几个需要改进的问题：悬挂点数目较少（一般是 6 对悬挂点）；用描点画图法来寻找基频频率产生较大的人为误差、随机误差；不能精确地拟合出共振频率与悬挂位置间的关系式。本文主要就如下几个方面进行了探讨：

1 对称悬挂点由 6 对增加到 15 对

铜棒在出厂时两侧已经刻好了 6 对刻线（凹槽线），在此基础上，增加到 15 对刻线，如图 2 所示，标注 2、4、6、8、10、12 为铜棒原来刻好的刻线（实线表示），标注 1、3、5、7、9、11、13、14、15 为新刻线（虚线表示），一共有 15 对刻线。图 2 中 AB 为铜棒节点位置之一。通过增加刻线数目，也增加了悬挂点数目。结合换能器本身的大小、两条刻线间平均间距的考虑，刻线对数一共是 15 对。

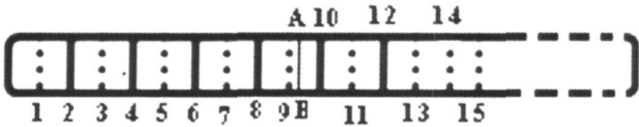


图 2 铜棒左侧刻线分布
Fig 2 The engraved lines distribution of copper rods left

2 找到悬挂点相对位置 x_m/l 与共振频率 的对应关系

用游标卡尺测量悬挂点（以铜棒左侧的 15 条刻线进行测量）的位置，铜棒左侧 15 条刻线距离铜棒左端面的距离如表 1 所示。

表 1 悬挂点个数与悬挂点位置

Table 1 The number of suspension points and the positions of suspension points

悬挂点个数 (n)	悬挂点位置 (mm)	悬挂点个数 (n)	悬挂点位置 (mm)
The number of suspension points	The positions of suspension points	The number of suspension points	The positions of suspension points
1	4.24	9	44.20
2	9.58	10	49.10
3	14.28	11	54.16
4	19.52	12	59.20
5	23.88	13	64.44
6	29.14	14	70.24
7	33.54	15	75.26
8	39.70		

悬挂点位置 x_i 均除以铜棒的总长度 $L=0.20000\text{ m}$ ，得到铜棒左侧 15 个悬挂点的相对位置 x_i/L 。根据实验测量出各自对应的共振频率 f_i ，把 x_i/L 、共振频率 f_i 填写到表 2 中，如表 2 所示，其中 $x_i/L=221.0$ 位置，它距离铜棒左端点为 44.20 mm ，靠近节点（节点距离左端点 44.80 mm ），共振信号很微弱，检测不到。

表 2 悬挂点相对位置与共振频率
Table 2 The suspension points relative positions and resonant frequency

悬挂点个数 The number of suspension points	悬挂点相对位置 ($\times 10^{-3}$) The suspension points relative positions	共振频率 (Hz) resonant frequency
1	21.20	460.21
2	47.90	457.27
3	71.40	455.03
4	97.60	451.93
5	119.4	451.45
6	145.7	454.35
7	167.7	449.79
8	198.5	449.00
9	221.0	— — —
10	245.5	450.60
11	270.8	450.55
12	296.0	450.02
13	322.2	450.41
14	351.2	450.52
15	376.3	454.80

3 通过统计软件拟合悬挂点相对位置与共振频率的关系

把悬挂点相对位置坐标 x_i/L 与共振频率 f_i 的数值输入到 Origin 7.5 统计软件中进行统计，先选择 Plot—Scatter，来观察两个变量之间的散点图，

分析散点图的特点（如图 3 所示）。Origin 7.5 统计软件将拟合两者可能存在的一次方关系、二次方关系、三次方关系等、指数关系、对数关系等拟合模型进行选择，观察它们各自对应的相关系数，再进行分析筛选，选择最佳拟合关系。

通过分析对比，选择 Origin 7.5 统计软件中 Tools—Polynomial 再选取 Fit 命令，发现当分别选取 Order 下 1、2、3 等进行多项式拟合，观察分析拟合结果，当选择 Order 下 2 时，即二项式拟合，从相关系数、方差、显著性等来观察是最佳的拟合关系。

多项式回归分析得到的拟合方程为：
$$Y = A + B_1 X + B_2 X^2$$

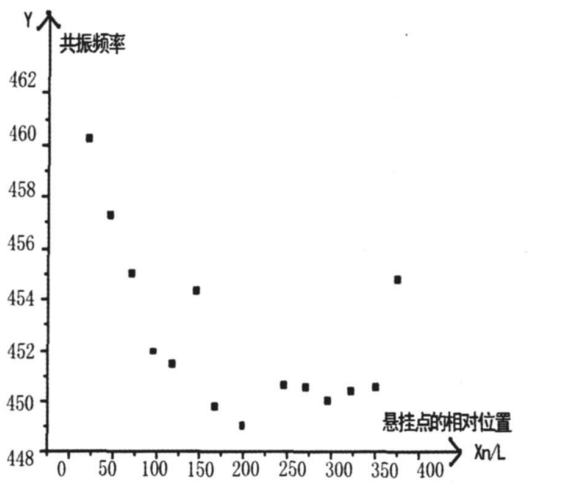


图 3 共振频率与悬挂点相对位置散点图
Fig 3 The scatter figure of resonant frequency and suspension points relative positions

表 3 拟合方程中的参量、数值、误差
Table 3 The Parameters values errors of the fitting equation

参量 Parameters	数值 Values	误差 Errors
A	461.52175	1.2305
B ₁	-0.10124	0.01468
B ₂	2.12784E-4	3.58154E-5

表格 4 拟合对应的其它相关量
Table 4 The other and related values of the fitting

相关系数 R 的平方 (COD) The square of correlation coefficient	标准差 SD Standard deviation	拟合点个数 N Fitting points	P
0.84284	1.4149	14	< 0.0001

表 4 表明参与拟合的悬挂点相对位置与共振频率两个量相关系数很高 ($R^2=0.84284$ 则 $R=0.918$)，P 值表明此统计具有高度的统计学意义。

拟合方程为：

$$Y=461.522-0.10124X+2.1278\times 10^{-4}X^2$$

即 $Y=f=461.522-0.10124x/L+2.1278\times 10^{-4}(x/L)^2$ (3)

铜棒做基频频率振动时，存在两个节点，它们的位置距离铜棒左端面或右端面均为 $0.224L$ 位置处，即对于长为 $L=0.2000m$ 的铜棒来说，两节点与对应两端面的距离为 $0.0448m$ 。根据以上表格的分析，节点在方程中对应的相对位置坐标 $x=224$ 将 $x=224$ 代入上式 (3) 得：

$$f=449.52\text{ (Hz)}$$

此频率 $f=449.52\text{ Hz}$ 即为铜棒共振时的基频频率，实验中用电子天平称量铜棒质量 m ，用游标卡尺测出铜棒长度 L ，用螺旋测微器测出铜棒直径 d 大小分别为：

$$m=47.46\text{ g} \quad L=0.2000\text{ m}$$
$$d=5.973\times 10^{-3}\text{ m}$$

将这些数据统一单位后代入铜棒杨氏模量公式 (2) 得：

$$E=9.4846\times 10^{10}\text{ (N}\cdot\text{m}^{-2}\text{)}$$

取铜棒的杨氏模量 $E=0.9485\times 10^{11}\text{ (N}\cdot\text{m}^{-2}\text{)}$ 。

查阅黄铜室温环境下的杨氏模量值^[3]： $0.91\times 10^{11}\text{ (N}\cdot\text{m}^{-2}\text{)}$ — $0.99\times 10^{11}\text{ (N}\cdot\text{m}^{-2}\text{)}$ ，选取平均值 $0.95\times 10^{11}\text{ (N}\cdot\text{m}^{-2}\text{)}$ 为标准值。

则此方法对应的相对误差为： $\frac{\Delta E}{E_{标准}}=$

$$\frac{E_{测量}-E_{标准}}{E_{标准}}\times 100\%=0.158\%\approx 0.16\%$$

从最后的结果看，此方法得到很好的实验结果，相对误差很小。拟合曲线如图 4 所示。

参考文献

[1] 厉爱玲, 穆秀家主编. 大学物理实验 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2006. 207—211

[2] 成正维主编. 大学物理实验 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2002. 177—181

[3] Г. С. 皮萨连科, А. П. 亚科符列夫, Б. Б. 马特维也夫. 范钦珊 朱祖成译. 材料力学手册 [M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1978. 165

[4] 赵丽华, 倪涌舟主编. 新编大学物理实验 [M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2007. 52

[5] 金清理, 黄晓虹主编. 基础物理实验 [M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2007. 251

[6] 周殿清主编. 大学物理实验教程 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2005. 156

[7] 张兆奎, 缪连元, 张立. 大学物理实验 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2002. 331—314

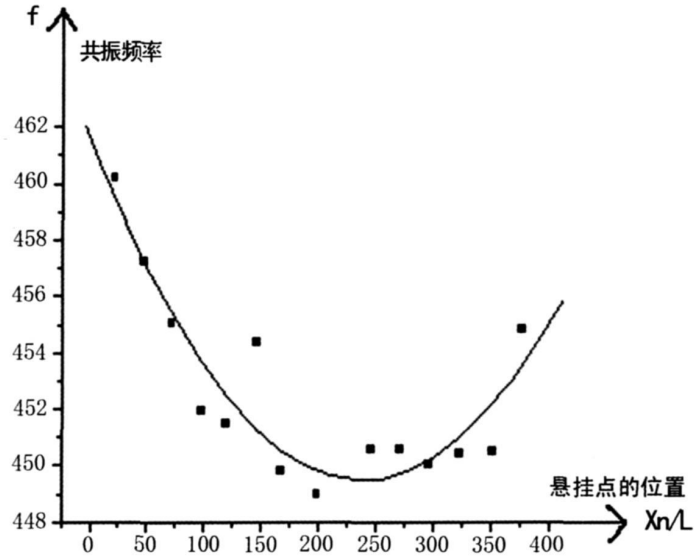


图 4 共振频率与悬挂点相对位置的拟合曲线
Fig 4 The fitting curve of resonant frequency and suspension points relative positions