

Laboratorio di Meccanica

PP1-Densità : Misure di densità

PP1-Densità-B2-07-Touschek.pdf

04 Aprile 2022

Matricola	2019980	1998347	1998521	2008402
Presenza	X	X	X	X
Misure	X	X	X	X
Analisi	X	X	X	X
Tabelle	X	X	X	X
Grafici	X	X	X	X
Software	X	X	X	X
Relazione	X	X	X	X

Tabella 1: Tabella delle attività svolte dagli studenti del gruppo.

1 Scopo dell'esperienza

- Misura della densità di un certo materiale.
- Verifica che campioni differenti siano fatti o meno dello stesso materiale.
- Identificazione di un materiale sconosciuto tramite misure di densità.

2 Apparato sperimentale

2.1 Strumenti di misura

Strumento	Portata	Risoluzione Δx con interpolazione	Incertezza tipo B
Nonio ventesimale	200 mm	0.05mm	0.05 mm
Bilancia di precisione	3000g	0.1g	-
Calibro palmer	25 mm	0.001 mm	0.001 mm
Cilindro graduato	250 ml	1 ml	-

Tabella 2: Caratteristiche degli strumenti usati e relative misure. Sono inoltre riportate le incertezze legate allo strumento (incertezze di tipo B).

Riportiamo in tabella le caratteristiche degli strumenti utilizzati. Nel seguito, non possedendo i dati tecnici relativi alla bilancia di precisione e al cilindro graduato, l'incertezza di tipo B sarà valutata con il solo termine:

$$\sigma_B = \frac{Ris}{\sqrt{12}} \quad (1)$$

2.2 Campioni

- **Campione A:** 30 cilindri di dimensione variabile e di materiale ignoto. L'obiettivo è stimarne la densità con diversi metodi e strumenti.

- **Campione B:** parallelepipedo dello stesso materiale dei cilindri del campione A. Se ne stimerà la densità e la relativa incertezza.
- **Campione C:** un cristallo scintillante¹ finemente tagliato di materiale ignoto. Se ne vuole stimare la densità, valutando la procedura da seguire.

3 Sequenza Operazioni Sperimentali

3.1 Verifica degli strumenti

Sia per quanto riguarda il calibro palmer sia per quanto concerne il calibro a nonio ventesimale abbiamo eseguito delle misure ripetute all'inizio dell'esperienza per verificarne il possibile offset. Nella tabella 3 sono riportate le misurazioni effettuate:

n	Palmer [mm]	Nonio [mm]
1	0.002	0.10
2	0.003	0.10
3	0.003	0.10
4	0.004	0.10
5	0.004	0.10
6	0.004	-
7	0.003	-
8	0.003	-
9	0.004	-
10	0.003	-
\bar{x}	0.0033	0.10

Tabella 3: Misure ripetute effettuate per stimare l'offset dei calibri.

Avendo verificato uno sfasamento in verso negativo (minore dello zero) del punto di partenza, in entrambi i casi abbiamo avuto cura di aggiungere il valore medio dell'offset relativo ai due strumenti ad ogni misurazione con essi effettuata. In questa relazione tutte le misure sono riportate già corrette con il relativo valore medio dell'offset².

3.2 Misura della densità di un singolo campione A

L'obiettivo della misura è stimare la densità di un singolo cilindro estratto casualmente dal campione A, quantificandone l'incertezza complessiva. Si è proceduto effettuando 30 misure in condizioni di ripetibilità dell'altezza di tale cilindro, rispettivamente con il calibro a nonio e con il calibro Palmer: dai dati raccolti è stato scelto lo strumento più adatto per proseguire nella misura del diametro. Infine, con una bilancia digitale sono state effettuate 30 misure ripetute della massa del medesimo oggetto.

Per questioni di leggibilità e di sintesi riportiamo in tabella 4 le misure ottenute per l'altezza, il diametro e la massa del cilindro, con i relativi strumenti:

¹In particolare il numero 398

²Per semplicità il valore medio dell'offset relativo al calibro Palmer è arrotondato a $\bar{x} = 0.003\text{mm}$

n	Nonio h[mm]	Palmer h[mm]	Palmer D[mm]	Bilancia m[g]
1	20.00	20.006	11.968	6.1
2	20.00	20.006	11.970	6.1
3	20.00	20.004	11.971	6.0
4	20.00	20.004	11.971	6.0
5	20.00	20.003	11.972	6.1
6	-	20.003	11.971	6.0
7	-	20.005	11.978	6.0
8	-	20.006	11.966	6.0
9	-	20.005	11.973	6.1
10	-	20.004	11.965	6.0
11	-	20.005	11.969	6.0
12	-	20.006	11.968	6.1
13	-	20.004	11.974	6.0
14	-	20.005	11.972	6.1
15	-	20.007	11.962	6.1
16	-	20.003	11.972	6.0
17	-	20.003	11.971	6.1
18	-	20.003	11.970	6.1
19	-	20.006	11.966	6.0
20	-	20.004	11.971	6.1
21	-	20.004	11.963	6.1
22	-	20.003	11.958	6.0
23	-	20.003	11.969	6.1
24	-	20.003	11.970	6.1
25	-	20.008	11.973	6.1
26	-	20.006	11.963	6.1
27	-	20.006	11.961	6.1
28	-	20.006	11.962	6.0
29	-	20.003	11.967	6.1
30	-	20.005	11.970	6.1
S_n	-	0.0014	0.0045	0.049

Tabella 4: Misure del cilindro numero 1 del campione A. Con il calibro a nonio sono state prese solo 5 misure, poiché non soggette ad alcuna fluttuazione rilevabile. Si è indicata con S_n la deviazione standard campionaria, riportata con due cifre significative: le unità di misura sono coerenti con quelle riportate in alto.

La miglior stima dell'altezza si ottiene sfruttando le formule note:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (2)$$

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{S_n}{\sqrt{N}}\right)^2 + \left(\frac{Ris}{\sqrt{12}}\right)^2 + \sigma_B^2} \quad (3)$$

dove è stata indicata con σ_B l'incertezza dovuta alla costruzione dello strumento, riportata sulla scheda tecnica dello stesso, e con Ris la risoluzione dello strumento. Come regola generale si ometterà il secondo termine³ dell'equazione 47 nel caso in cui $S_n > Ris$. La stima ottenuta, rispettivamente con il calibro a nonio e con il calibro Palmer è:

$$h = (20.000 \pm 0.053)mm \quad (4)$$

$$h = (20.0046 \pm 0.0012)mm \quad (5)$$

La maggiore sensibilità del calibro Palmer, associata ad una precisione superiore e alla definizione del misurando, hanno condotto alla scelta di tale strumento al posto del calibro a nonio: quest'ultimo consente di effettuare misure solo sul bordo dei cilindri, non permettendo di cogliere eventuali fluttuazioni dovute a concavità degli stessi, fondamentali per ottenere una misura adeguata del volume.

Riportiamo in figura 1 un istogramma delle misure di altezza e di diametro effettuate con il calibro Palmer:

³Che produrrebbe una sovrastima dell'incertezza

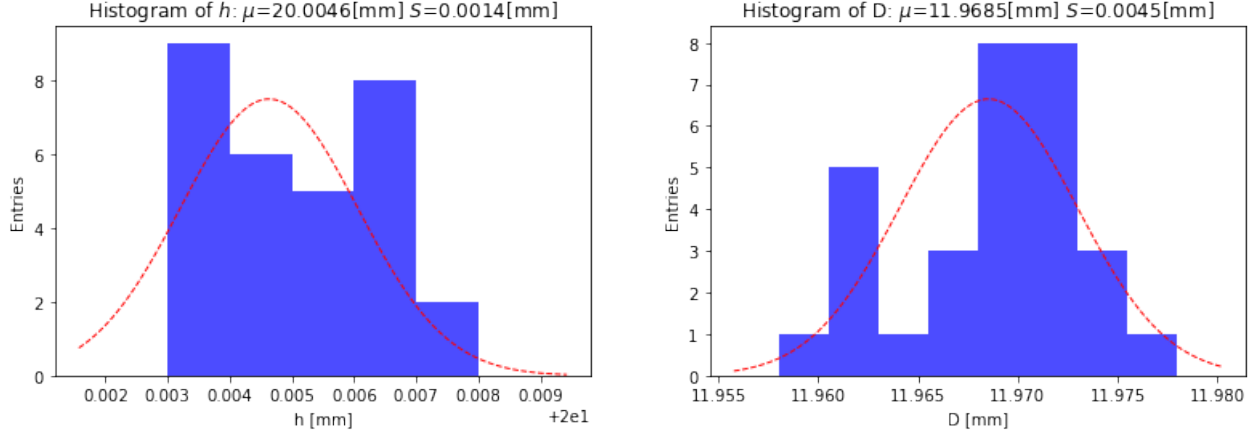


Figura 1: Istogrammi misurazione con Palmer del cilindro 1. In entrambi i casi con μ si intende il valore medio ottenuto. Sono riportate due Gaussian, di valore atteso pari a μ e deviazione standard pari a S_n , normalizzate all'integrale dell'istogramma.

Utilizzando nuovamente le formule 2 e 3, con le medesime accortezze, si ottiene la migliore stima della massa⁴ del campione e del diametro:

$$m = (6.060 \pm 0.030)g \quad (6)$$

$$D = (11.9685 \pm 0.0014)mm \quad (7)$$

Sostituendo i valori medi ottenuti si può valutare la densità del cilindro con la formula:

$$\rho = \frac{4m}{\pi D^2 h} \quad (8)$$

L'incertezza può essere valutata propagando gli errori, mediante la formula (valida per misure indipendenti):

$$\sigma_\rho = \rho \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_D}{D}\right)^2} \quad (9)$$

dove figurano rispettivamente l'incertezza relativa della massa, dell'altezza e del diametro del cilindro. La stima finale è:

$$\rho = (2.692 \pm 0.013) \frac{g}{cm^3} \quad (10)$$

in cui è stata effettuata la conversione da millimetri a centimetri per le misure di lunghezza.

Si ritiene che l'errore sia dovuto sostanzialmente al misurando e alla procedura di misura. Difatti, una misura ideale della superficie laterale del cilindro si ottiene allineando perfettamente il calibro Palmer lungo uno dei diametri, evitando di posizionarlo diagonalmente, come certamente è accaduto. Nelle misurazioni si è cercato, quanto più possibile, di variare il punto della misura, per ottenere una stima delle dimensioni medie, evidentemente più coerente con la corretta definizione del misurando.

3.3 Misura della densità dei cilindri del campione A

Lo scopo della misura è stimare la densità del campione A effettuando singole misure su 30 cilindri⁵ trasferendo l'incertezza dalle misure ripetute del singolo cilindro (punto 3.2). Una volta numerati casualmente i cilindri da 1 a 30, si procede effettuando una singola misura di massa e di dimensioni per cilindro. Per considerazioni analoghe a quelle esplicitate nel punto 3.2, le dimensioni sono misurate con il calibro Palmer, mentre la masse con la bilancia digitale. La densità di ogni cilindro è calcolata tramite la formula 8.

Le misure sono riportate in tabella 5.

L'incertezza di tipo A associata ad una singola misura di massa e di dimensioni è stimata a partire dai risultati del punto 3.2. Infatti, senza effettuare misure ripetute si considera l'incertezza di tipo A uguale alla deviazione standard campionaria calcolata nel punto precedente: $\sigma_A = S_n$. Questa considerazione quantitativa è lecita in primo luogo in quanto il misurando su cui sono state effettuate le misure ripetute è un cilindro molto simile ai 30 cilindri in esame, in secondo luogo poichè le proprietà della deviazione standard campionaria ci

⁴Non possedendo i dati tecnici relativi alla bilancia, l'incertezza di tipo B è stata valutata solo con il termine $Ris/\sqrt{12}$.

⁵I cilindri sono fatti dello stesso materiale e hanno dimensioni simili a quelle del cilindro del punto 3.2

n	m(g)	h(mm)	D(mm)	$\rho(g/cm^3)$
1	6.1	20.006	11.968	2.710±0.028
2	6.1	19.958	11.963	2.719±0.028
3	6.1	19.991	11.970	2.712±0.028
4	4.2	19.992	9.938	2.708±0.040
5	4.1	20.073	9.962	2.621±0.040
6	4.3	20.814	9.959	2.652±0.038
7	4.3	20.598	9.961	2.679±0.039
8	6.5	21.139	12.118	2.666±0.026
9	6.7	21.688	12.118	2.679±0.025
10	4.1	20.088	9.957	2.621±0.040
11	6.1	20.205	11.955	2.690±0.027
12	4.2	19.993	9.950	2.702±0.040
13	4.0	20.054	9.966	2.557±0.040
14	4.3	21.321	9.963	2.587±0.037
15	4.5	21.105	9.961	2.736±0.038
16	2.7	20.093	8.029	2.654±0.061
17	6.1	20.033	11.966	2.708±0.028
18	6.1	19.994	11.958	2.717±0.028
19	2.7	19.993	7.961	2.713±0.063
20	2.4	18.003	8.003	2.650±0.069
21	6.7	21.624	12.113	2.689±0.025
22	3.6	17.965	9.956	2.574±0.045
23	4.4	21.103	9.956	2.678±0.038
24	4.3	20.891	9.962	2.641±0.038
25	2.6	19.978	7.964	2.613±0.063
26	2.7	20.563	8.045	2.583±0.060
27	2.7	20.048	7.961	2.706±0.062
28	2.6	19.992	7.946	2.623±0.063
29	4.2	20.041	9.958	2.691±0.04
30	4.1	20.053	9.961	2.624±0.04

Tabella 5: Misure dei 30 cilindretti. Le misure di densità sono riportate con le relative incertezze.

permettono di approssimare il valore dell'incertezza su una misura con la deviazione standard stessa⁶. Essendo poi, per le misure di massa, $S_n < Ris$, si stima l'incertezza totale tramite la formula completa 47 (con $N = 1$):

$$\sigma_m \simeq 0.062g \quad (11)$$

Per ogni singola misura di dimensione l'incertezza totale si ottiene tenendo conto anche dell'incertezza di tipo B dovuta all'errore massimo di fabbricazione dello strumento, indicata nella scheda tecnica dello stesso. L'incertezza totale si stima di nuovo tramite la formula 47:

$$\sigma_D \simeq 0.0046mm \quad (12)$$

$$\sigma_h \simeq 0.0018mm \quad (13)$$

Le incertezze sulla densità di ogni singolo campione inserite in tabella 5 si quantificano attraverso la formula 9.

Riportiamo in figura 2 l'istogramma delle misure di densità ottenute.

3.3.1 Migliore stima della densità

Per dare la migliore stima della densità del campione A con la relativa incertezza a partire dalle diverse misure di densità calcolate sui 30 cilindri, è possibile applicare un'inferenza gaussiana. La migliore stima della misura si ottiene quindi calcolando la media delle densità pesate con l'inverso del quadrato delle incertezze associate:

$$\rho_p = \frac{\sum_{i=1}^{30} \frac{1}{\sigma_i^2} \rho_i}{\sum_{i=1}^{30} \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad (14)$$

⁶Le proprietà della deviazione standard campionaria citate sono: $E[S_{n-1}] \simeq \sigma$ e $\sigma[S_{n-1}] \simeq \frac{\sigma}{\sqrt{2(n-1)}}$, quindi per n sufficientemente grande $\sigma \simeq S_{n-1}$

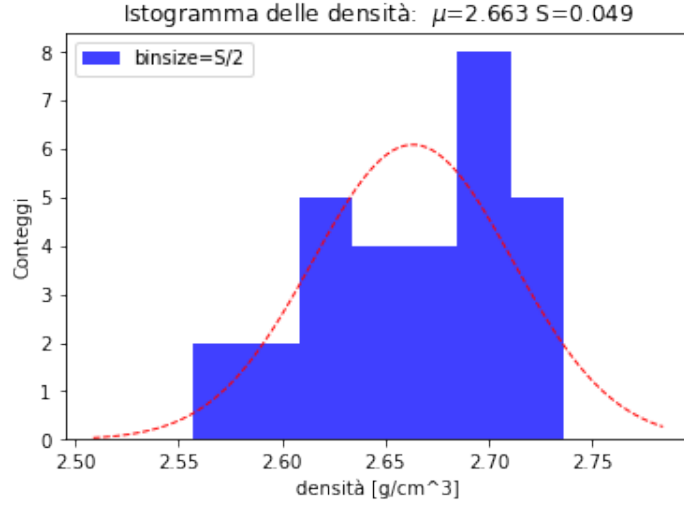


Figura 2: Istogramma delle densità. Con μ si intende la media delle densità e con S la deviazione standard campionaria. La curva in rosso tratteggiata è la gaussiana di parametri μ e $\sigma = S$.

L'incertezza si stima tramite la seguente formula:

$$\sigma_p = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{30} \frac{1}{\sigma_i^2}}} \quad (15)$$

La stima finale è:

$$\rho = (2.6749 \pm 0.0065)g/cm^3 \quad (16)$$

La stima finale della densità è più precisa della stima ottenuta al punto 3.2. Sebbene l'incertezza totale associata alla densità calcolata al punto 3.2 è minore delle incertezze associate alle densità di ogni singolo cilindro (riportate in tabella 5), la stima finale, in questo paragrafo, si calcola tramite un'inferenza gaussiana sulle 30 diverse misure di densità. Questa inferenza, come si può osservare quantitativamente ($\sigma_p = 0.0065g/cm^3 < \sigma_\rho = 0.013g/cm^3$), permette di stimare con più precisione la densità.

3.4 Misura della densità del campione B

L'obiettivo di questa parte di procedure sperimentali è quello di misurare la densità del campione B (2.2).

L'altezza h del campione viene misurata con il nonio. Si tratta di una scelta forzata dalla limitata portata del calibro palmer. Le misure dei lati di base a e b vengono invece effettuate con il calibro palmer, al fine di rendere la misura quanto più precisa possibile. La misura della massa viene effettuata con la bilancia digitale, come indicato in 2.1 Di seguito vengono riportati, in una tabella, i risultati di tali misure:

$h(mm)$	$a(mm)$	$b(mm)$	massa(g)
74.35	20.062	20.050	81.1

Tabella 6: misure del campione B

Per la stima delle incertezze di queste misure, si fa riferimento a quanto visto in 3.3. In particolare, otterremo:

$$m = (81.100 \pm 0.058)g \quad (17)$$

$$h = (74.350 \pm 0.052)mm \quad (18)$$

$$a = (20.0620 \pm 0.0018)mm \quad (19)$$

$$b = (20.0500 \pm 0.0018)mm \quad (20)$$

Possiamo ora calcolare il valore della densità ρ :

$$\rho = \frac{m}{hab} = 0.0027118g/mm^3 = 2.7118g/cm^3 \quad (21)$$

Assumiamo ora che le misure siano tra di loro indipendenti. Ricordando allora che sotto tali ipotesi la formula della propagazione degli errori per il prodotto vale

$$\nu[y = AB] = \sqrt{(\nu_A)^2 + (\nu_B)^2} \quad (22)$$

mentre nel caso di un quoziente abbiamo:

$$\nu[y = \frac{A}{B}] = \sqrt{(\nu_A)^2 + (\nu_B)^2} \quad (23)$$

e che, infine, l'incertezza relativa è uguale a:

$$\nu[y] = \frac{\sigma_y}{y} \quad (24)$$

abbiamo che l'incertezza relativa a ρ può essere calcolata come:

$$\sigma_\rho = \rho \sqrt{(\frac{\sigma_m}{m})^2 + (\frac{\sigma_h}{h})^2 + (\frac{\sigma_a}{a})^2 + (\frac{\sigma_b}{b})^2} = 0.0027g/cm^3 \quad (25)$$

Si conclude che la densità del parallelepipedo è:

$$\rho = (2.7118 \pm 0.0027)g/cm^3 \quad (26)$$

Confrontando questo risultato con quelli già ottenuti in 10 e 16, usando la formula per confronto fra due misure realizzate in maniera indipendente:

$$Z = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{(\sigma_{x_2})^2 + (\sigma_{x_1})^2}} \quad (27)$$

dove con x_1 si è indicata la misura ottenuta nelle altre sezioni e x_2 la misura ottenuta in questa, si ottiene, rispettivamente:

$$Z = -0.66 \quad (28)$$

$$Z = -5.24 \quad (29)$$

Otteniamo pertanto che, poiché in un caso $|Z| > 2$, le due misure non sono confrontabili. Questo risultato deve essere commentato. La prima cosa di cui ci si accorge è che, in entrambi i casi, $Z < 0$, cioè la misura della densità del campione B è evidentemente maggiore di quella ottenuta nelle altre sezioni. La ragione della sovrastima del valor vero risiede, molto probabilmente, in una incorretta definizione del misurando: attorno al campione B erano avvolte numerose spire di uno spago che non è stato possibile togliere. Ciò ha inevitabilmente aumentato la massa del campione, e questa imprecisione si è poi naturalmente ripercossa sul valore della densità.

Si può infine commentare la scelta di riportare le incertezze di tipo A calcolate in sezione 3.2 anche per le misure del campione B. Questa scelta appare interamente giustificata nel caso delle masse: poichè queste misure state prese usando sempre la stessa bilancia (che, essendo digitale, non permette interpolazioni, e dunque rende neutrale anche il ruolo dell'operatore), è logico aspettarsi sempre la stessa incertezza. Anche per le misure di lunghezze riportare la deviazione standard campionaria così come era stata calcolata in 3.2 è giustificata. Infatti non sussiste una sostanziale differenza tra l'altezza del cilindro e le misure dei lati del parallelepipedo a livello di misure (diverso sarebbe stato, ovviamente, se invece di considerare σ_n associata all'altezza avessimo considerato quella associata al diametro): in entrambi i casi stiamo misurando con il palmer o il nonio un campione non finemente tagliato lungo dei bordi squadrati. E' quindi naturale aspettarsi un valore molto simile di σ_n .

3.5 Misura della densità del campione C

Per quanto riguarda il cristallo scintillante abbiamo deciso di effettuare misure ripetute di ogni grandezza. Per le lunghezze, ove possibile (l_1, l_3), è stato usato il calibro palmer per sfruttare la sua precisione. Riguardo l_2 , a causa della sua incompatibilità con la portata dello strumento sopracitato, la scelta forzata è ricaduta sul calibro a nonio ventesimale. Le misure della massa sono state ottenute tramite la bilancia digitale. Di seguito una tabella contenente i dati relativi ad ogni grandezza:

n	l_1 [mm]	l_2 [mm]	l_3 [mm]	m [g]
1	3.103	55.10	2.988	3.6
2	3.103	55.10	2.989	3.6
3	3.103	55.10	2.989	3.6
4	3.104	55.10	2.986	3.7
5	3.105	55.10	2.988	3.6
6	3.105	55.10	2.986	3.6
7	3.105	55.10	2.989	3.7
8	3.104	55.10	2.988	3.6
9	3.103	55.10	2.988	3.6
10	3.103	-	2.985	3.6
11	3.102	-	2.986	3.6
12	3.102	-	2.987	3.6
13	3.104	-	2.986	3.6
14	3.104	-	2.985	3.5
15	3.102	-	2.986	3.6
16	3.102	-	2.985	3.7
17	3.102	-	2.985	3.7
18	3.103	-	2.985	3.7
19	3.103	-	2.988	3.6
20	3.103	-	2.987	3.6

Tabella 7: Misure di altezza, larghezza, lunghezza e massa del cristallo.

valori	l_1 [mm]	l_2 [mm]	l_3 [mm]	m [g]
\bar{x}	3.1031	55.100	2.9868	3.620
σ_t	± 0.0015	± 0.052	± 0.0018	± 0.060

Tabella 8: Valori medi \bar{x} e incertezze totali σ_t relative alle singole misure

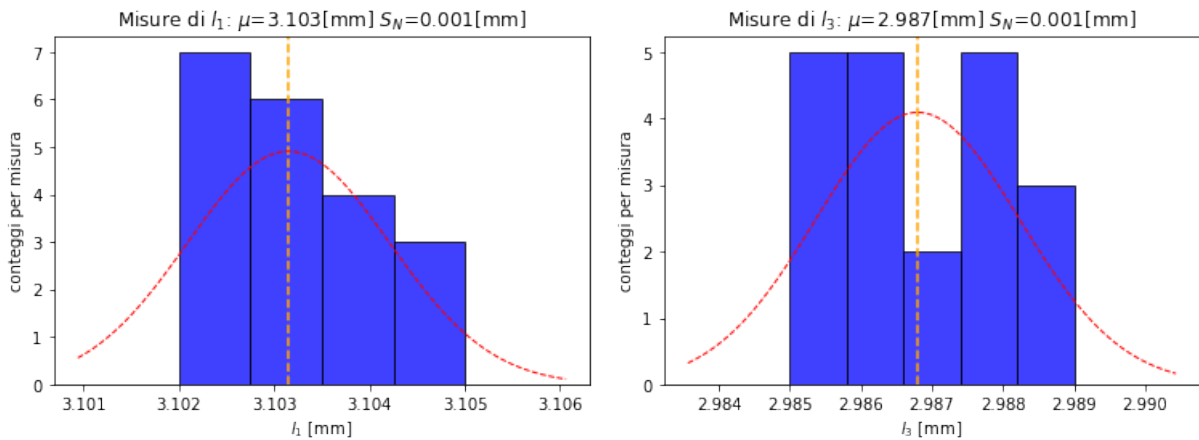


Figura 3: Grafici delle misure delle grandezze del cristallo scintillante

Con la stessa metodologia descritta al punto 3.4 si ottiene che la miglior stima della densità del campione è:

$$\rho = \frac{m}{l_1 l_2 l_3} = 7.088 \frac{g}{cm^3} \quad (30)$$

Sempre partendo dall'assunzione che le misure siano tra loro indipendenti:

$$\sigma_\rho = \rho \sqrt{\nu_m^2 + \nu_{l_1}^2 + \nu_{l_2}^2 + \nu_{l_3}^2} = 0.061 \frac{g}{cm^3} \quad (31)$$

segue:

$$\rho = (7.088 \pm 0.061) \frac{g}{cm^3} \quad (32)$$

Si può quindi affermare, con un fattore di compatibilità:

$$Z = \frac{\bar{\rho} - \rho_{LYSO}}{\sigma_\rho} = -0.197 \quad (33)$$

che il materiale di cui è composto il cristallo sia il lutezio ittio ortosilicato (**LYSO**)

3.6 Misura della densità dei campioni A con metodo grafico

L'obiettivo di questa misura è stimare per via grafica la densità dei cilindri del campione A. I cilindri sono suddivisi casualmente in dieci sottogruppi da tre cilindri ognuno e le masse sono misurate in modo integrale: misurata la massa del primo sottogruppo si aggiunge sulla bilancia anche il secondo sottogruppo e si effettua la misura, poi il terzo e così via. Le misure di volume sono effettuate in modo analogo: progressivamente si inseriscono nello stesso ordine di prima i sottogruppi in una provetta graduata e si misura la differenza di livello dell'acqua. I dati ottenuti sono riportati in tabella 9. Il volume è espresso in centimetri cubi, mentre la massa in grammi.

n	m(g)	V(cm^3)
1	18.3	6
2	30.7	11
3	48.2	18
4	62.5	23
5	75.3	28
6	90.2	34
7	102.1	38
8	114.6	42
9	122.7	44
10	133.7	49

Tabella 9: Misure di massa e volume. Con n si indica il numero di sottogruppi a cui corrisponde le misure.

Poiché non sono state effettuate misure ripetute le uniche incertezze associate alle misure di massa e volume sono di tipo B, dovute alla risoluzione degli strumenti (di cui non possediamo i dati tecnici):

$$\sigma_m = \frac{Ris_{bilancia}}{\sqrt{12}} = 0.03g \quad (34)$$

$$\sigma_V = \frac{Ris_{provetta}}{\sqrt{12}} = 0.3cm^3 \quad (35)$$

In figura 4 sono riportati in un grafico i punti corrispondenti alle misure effettuate. Le barre d'errore associate alle misure di massa non sono riportate in quanto troppo piccole e non visibili per questa scelta di scala. E' inoltre tracciata la migliore retta che pasa per i punti: tale retta è estratta graficamente considerando le barre d'errore e cercando di passare il più vicino possibile ai punti.

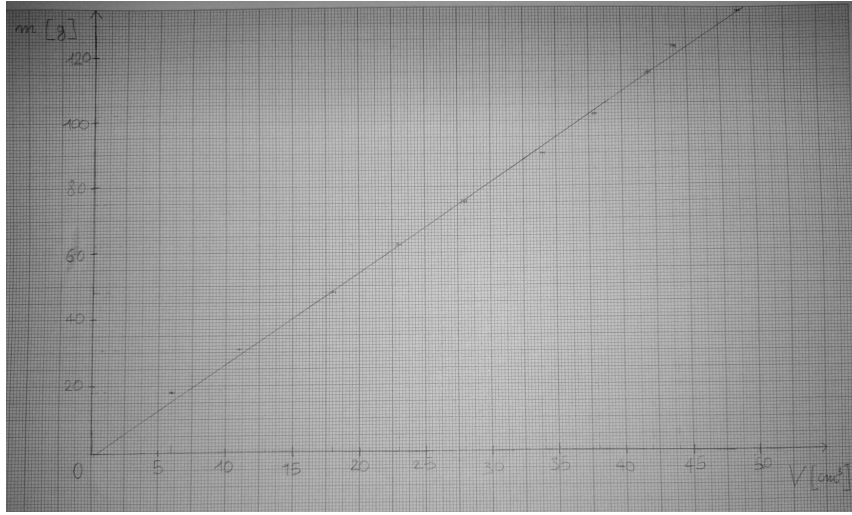


Figura 4: Grafico massa in funzione volume.

Per stimare il coefficiente angolare della retta, che equivale alla densità del campione A, si impone la condizione che le incertezze sulle misure di massa siano trascurabili. Si procede poi scegliendo poco al di fuori dell'intervallo coperto dalle misure di volume i punti $(V_1, m_1) = (3 \text{ cm}^3, 7 \text{ g})$ e $(V_2, m_2) = (50 \text{ cm}^3, 137 \text{ g})$ ⁷, si calcola Δm e ΔV . Una stima della densità e della relativa incertezza si ottiene dalle formule:

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (36)$$

$$\sigma_\rho \simeq \frac{\sqrt{2}\rho\sigma_V}{\Delta V} \quad (37)$$

In conclusione

$$\rho = (2.766 \pm 0.025) \text{ g/cm}^3 \quad (38)$$

4 Conclusioni

Riportiamo in tabella i risultati delle misure di densità di tutti i campioni con le relative incertezze:

Campione A [g/cm ³]	Campione B [g/cm ³]	Campione C [g/cm ³]
2.6749 ± 0.0065	2.7118 ± 0.0027	7.088 ± 0.061
-	-	LYSO

Tabella 10: Tabella riassuntiva misure di densità. Nell'ultima riga compare il materiale di cui si ritiene siano fatti i campioni.

Come già osservato nel paragrafo 3.4 le misure di densità del Campione A e del Campione B non sono tra loro compatibili, a causa di un fattore di confronto pari a⁸:

$$|Z| = 2.62 \quad (39)$$

Si rimanda a tale sezione per una discussione del risultato.

Analogamente, confrontando prima il Campione A ed il Campione C, e successivamente il Campione B ed il Campione C, si ottiene (formula 27):

$$|Z| = 71.93 \quad (40)$$

$$|Z| = 71.67 \quad (41)$$

Ossia, come atteso, le misure di densità non sono tra loro compatibili. Si può concludere che il materiale del Campione C sia effettivamente differente da quello del Campione A/B.

⁷I punti sono scelti in modo da garantire una facile lettura delle coordinate.

⁸Si è scelto, in generale, di considerare due misure compatibili con un fattore in modulo minore di 2.

L'analisi delle incertezze rivela una maggiore precisione nella stima della densità del Campione B: ciò è dovuto sostanzialmente alle dimensioni maggiori dello stesso. Difatti, come riportato nella formula 25 la propagazione dell'incertezza dipende dalle incertezze relative, ed è quindi influenzata dalle dimensioni del campione in esame.

La composizione del Campione C è già stata in discussa in sezione 3.5. Per quanto riguarda il Campione A e B⁹, utilizzando la tabella fornita, si dovrebbe procedere confrontando i risultati ottenuti con il valore assunto vero della densità dell'alluminio, del cemento e del vetro. Si escludono a priori il cemento ed il vetro da considerazioni qualitative sui campioni, evidentemente di materiale metallico. Per il Campione A, il fattore di compatibilità con il valore assunto vero dell'alluminio è:

$$Z = \frac{\rho_{misurato} - \rho_{vero}}{\sigma} = -3.86 \quad (42)$$

Per il Campione B (usando la medesima formula):

$$Z = 4.37 \quad (43)$$

In entrambi i casi i valori non sono compatibili. Si ritiene che tale risultato sia influenzato da errori sistematici nelle misurazioni¹⁰, da una non corretta definizione del misurando e da una costante sottostima dell'incertezza (non possedendo i dati tecnici relativi alla bilancia).

Confrontando la migliore stima della densità dei cilindri ottenuta con metodo grafico e in sezione 3.3.1, si ottiene:

$$|Z| = 13.08 \quad (44)$$

Ossia due misure assolutamente incompatibili tra loro. Si ritiene che ciò sia dovuto alla costante sottostima del volume nel caso del cilindro graduato e alla già citata sottostima delle incertezze.

5 Quesiti

1. Cosa si intende per misurando? Fare un esempio tratto dall'esperienza

Con misurando si intende la grandezza che deve essere misurata. Per evitare incertezze di misura, è dirimente dare una corretta e completa definizione di misurando. Un esempio di corretta e completa definizione di misurando era il peso del campione C, mentre un caso di incompleta definizione del misurando era il peso del campione B (per una discussione completa si rimanda alla sezione 3.4).

2. Cosa si intende per misure ripetute? Fare un esempio tratto dall'esperienza.

Con misure ripetute si intende la ripetizione di numerose misure della stessa grandezza di uno stesso misurando in condizione di ripetibilità. Le condizioni di ripetibilità comprendono

- stesso procedimento di misura
- stesso osservatore
- stessi strumenti, utilizzate nelle stesse condizioni
- stesso luogo
- ripetizioni delle misure in un breve periodo di tempo

Un esempio tratto dall'esperienza si trova in sezione 3.2, nel quale la massa di uno stesso cilindro è stata raccolta da uno stesso osservatore con lo stesso strumento nello stesso luogo e in un breve arco temporale per 30 volte. Normalmente, si eseguono misure ripetute per ridurre l'incertezza di tipo A (vedi domanda seguente).

3. Cosa si intende per riproducibilità di una misura?

La riproducibilità è grado di concordanza tra il risultato di misure successive dello stesso misurando effettuate in diverse condizioni, ad esempio variando il metodo e/o lo strumento di misura e/o l'operatore e/o in periodi più o meno vicini. Un esempio nell'esperienza è la misura della densità del materiale dei campioni A e B attraverso la stima della migliore densità dei 30 cilindri e attraverso il metodo grafico (vedi sezioni 3.3 e 3.6).

4. Cosa si intende per incertezze di misura di tipo A? Fare un esempio tratto dall'esperienza.

Esse sono classificabili come le incertezze che vengono stimate attraverso misure ripetute. Nel caso della lunghezza del campione C, per esempio:

$$\sigma_{l_1} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})}{\sqrt{N}}$$

⁹E' noto a priori che siano dello stesso materiale.

¹⁰Ad esempio un non perfetto funzionamento della bilancia, che non è stata tarata

Poichè decrescono di un fattore $1/\sqrt{N}$, all'aumentare del numero N di misure di misure, l'incertezza di tipo A diventa trascurabile.

5. *Quando posso assumere che l'incertezza di una misura sia uguale a quella di una misura simile effettuata in precedenza?*

Questa assunzione può essere fatta nel momento in cui mi trovo in condizione di ripetibilità della misura e sto misurando, con gli stessi strumenti utilizzati per la misura precedente, un campione che presenti le stesse possibili fonti di incertezza rispetto a quello preso come termine di paragone. Per due esempi tratti dall'esperienza si rimanda alle sezioni 3.3 e 3.4, dove viene anche presentata una giustificazione di tale assunzione.

6. *Cosa si intende per incertezze di misura di tipo B? Fare un esempio tratto dall'esperienza.* Le incertezze di misura di tipo B sono tutte quelle che non rientrano nell'incertezza di tipo A, cioè quelle che non sono legate alle misure ripetute. Rientra tra le incertezze di tipo B il "decalogo" fornito dall'ISO. Un esempio tratto da questa esperienza si può vedere in sezione 3.2, dove, per stimare l'incertezza delle misure, si è dovuto tenere in considerazione l'incertezza dovuta alla risoluzione finita dello strumento e l'incertezza associata allo strumento stesso, come indicato sulla scheda tecnica (o sulle dispense del corso).

7. *Con quali criteri scelgo il bin di un istogramma?*

La scelta della larghezza del bin deve essere tale da permettere la leggibilità dell'istogramma. Un binnaggio troppo largo, infatti, farebbe perdere troppo informazioni riguardo ai dati raccolti; equivalentemente, un binnaggio troppo stretto rende inutile la realizzazione di un istogramma (diventa simile a realizzare una tabella). Praticamente, si vede che un metodo efficace può essere quello di scegliere come grandezza di ogni bin la metà della deviazione standard relativa alla distribuzione delle grandezze graficate.

8. *Come estraggo graficamente il coefficiente angolare di una retta di interpolazione di misure sperimentali?* Si riportano nel grafico i punti corrispondenti alle misure effettuate insieme alle relative barre d'incertezza e si traccia la miglior retta che passa per tali punti. Si procede poi considerando trascurabile l'incertezza che, moltiplicata per il coefficiente angolare m , è molto minore dell'incertezza associata all'altra grandezza. Ad esempio se $\sigma_X m \ll \sigma_Y$, si trascura σ_X . Si individuano due punti sulla retta appena al di fuori dell'intervallo coperto dai valori sperimentali e si calcola l'intervallo ΔX e ΔY tra le coordinate di tali punti. Infine si stima il coefficiente angolare:

$$m = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \quad (45)$$

e l'incertezza associata¹¹:

$$\sigma_m = \frac{\sqrt{2}m\sigma_Y}{\Delta Y} \quad (46)$$

9. *Come si valuta il contributo dominante all'incertezza di una misura?*

Per valutare il contributo dominante, bisogna confrontare la deviazione standard campionaria S_N e la risoluzione dello strumento Δx . Si possono presentare tre casi:

- $S_N < \Delta x$. In questo caso, l'incertezza dominante è quella legata alla risoluzione ed è uguale a $\Delta x/\sqrt{12}$
- $S_N > \Delta x$. In questo caso l'incertezza dominante è quella legata alle misure ripetute ed è uguale a $S_N/\sqrt{12}$
- $S_N \simeq \Delta x$. In questo caso nessun contributo è prevalente, e le due quantità devono essere sommate in quadratura:

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{S_n}{\sqrt{N}}\right)^2 + \left(\frac{Ris}{\sqrt{12}}\right)^2} \quad (47)$$

Oltre a queste incertezze, bisogna sempre tenere in considerazione anche le altre incertezze di tipo B relative allo strumento (che normalmente sono segnalate sulla scheda tecnica dello strumento o nelle dispense), che devono essere sommate in quadratura con le altre incertezze. Per un esempio si rimanda a 3

10. *Qual è il modo corretto di riportare il risultato di una misura? Fare un esempio tratto dall'esperienza.*

Per riportare il risultato corretto di una misura bisogna riportare la media delle misure seguita dalla rispettiva incertezza. È importante riportare il numero di corretto di cifre significative: dapprima si determina quante cifre significative dare all'incertezza (normalmente 1 o 2, riportarne di più non cambia l'incertezza relativa in maniera significativa), e poi si scrive il valor medio delle misure con la stessa precisione dell'incertezza associata. Il tutto va corredato dell'appropriata unità di misura. Come indicato in 3.2, noi abbiamo scelto di usare sempre due cifre significative per l'incertezza.

¹¹Con σ_Y si intende l'incertezza che non è stata trascurata.