Laboratorio di Meccanica
PP3-Carrello : Misura dell'accelerazione di gravità attraverso lo studio del moto di un carrello su di un piano inclinato.

PP3-Carrello-B2-07-Touschek

03 Maggio 2022

Matricola	2019980	1998347	1998521	2008402
Presenza	X	X	X	X
Misure	X	X	X	X
Analisi	X	X	X	X
Tabelle	X	X	X	X
Grafici	X	X	X	X
Software	X	X	X	X
Relazione	X	X	X	X

Tabella 1: Tabella delle attività svolte dagli studenti del gruppo.

1 Scopo dell'esperienza

- Calibrazione di uno strumento
- Misura della velocità del suono
- Misura dell'accelerazione di gravità (g)
- Misura del coefficiente di attrito dinamico (μ_d)
- Studio della riproducibilità delle misure

2 Apparato sperimentale

2.1 Strumenti di misura

Strumento	Portata	Risoluzione	σ_B
Scala graduata	230 cm	0.1 cm	0.065 cm
Sonar	8 m	10^{-6} s	$0.29 \cdot 10^{-6}$ s
Squadra	25 cm	0.1 cm	0.065 cm
Metro	200 cm	0.1 cm	0.29 cm

Tabella 2: Tabella riassuntiva degli strumenti utilizzati. Le incertezze di tipo B sono giustificate nel testo.

- **Scala graduata:** applicata sul piano inclinato, è stata utilizzata per le misure di lunghezza funzionali alla calibrazione del Sonar. Oltre al termine dovuto alla risoluzione, vista la difficoltà delle misure, si ritiene ragionevole considerare un offset distribuito uniformemente in ±1[mm], centrato in zero e non costante (assimilabile ad un errore massimo). Tale modello non altera l'indipendenza delle misure. L'incertezza di tipo B può essere valutata come: $\sigma_B = \sqrt{(\frac{Ris}{\sqrt{12}})^2 + (\frac{2E_{MAX}}{\sqrt{12}})^2}$, dove $E_{MAX} = 1mm$.

- **Sonar:** i dati tecnici relativi allo strumento sono disponibili a questo link. L'incertezza di tipo B relativa alle misure di tempo può essere valutata solo con il termine dovuto alla risoluzione: $\sigma_B = \frac{Ris}{\sqrt{12}}$.

- **Squadra:** è stata utilizzata per effettuare misure di altezza della guida, funzionali a valutarne l'inclinazione. Oltre al termine dovuto alla risoluzione, si considera (analogamente a quanto fatto per la scala graduata) un errore massimo pari a $E_{MAX} = 1mm$, vista la difficoltà delle misure. L'incertezza può essere valutata come riportato sopra.

- **Metro:** utilizzato per effettuare misure di lunghezza della guida, fino al suo punto d'appoggio (un supporto di altezza regolabile). Si considera un ulteriore termine per l'incertezza, pari a $E_{MAX} = 0.5cm$, ancora una volta schematizzabile come un offset non costante, centrato in zero e distribuito uniformemente. Si ritiene ragionevole assumere una tale incertezza a causa dell'impossibilità di individuare il reale punto di appoggio della guida sul supporto: in ogni caso, risulterà trascurabile (come sarà visibile dal calcolo delle incertezze relative). In conclusione, con la medesima formula: $\sigma_B = 0.29cm$

A partire dalle misure effettuate, in tutti i casi in cui avremo una funzione di più variabili casuali del tipo:

$$Y = f(X_1, X_2, ..., X_N) \tag{1}$$

la formula utilizzata per la propagazione delle incertezza sarà:

$$Var[Y] = \sum_{i,j} \frac{\partial Y}{\partial X_i} \frac{\partial Y}{\partial X_j} Cov[X_i, X_j] \tag{2}$$

2.2 Campioni e metodi

- **Guida inclinata:** è possibile lasciar partire il carrello dalla sommità da fermo o con una velocità iniziale. Le misure sono state effettuate in entrambe le configurazioni, per lo studio della riproducibilità.

- **Carrello:** la massa può essere modificata rimuovendo dei pesi. Per lo studio della riproducibilità sono state effettuate misure nelle configurazioni con le diverse masse.

2.3 Calibrazione dello strumento

2.3.1 Descrizione procedimento

Per la calibrazione dello strumento abbiamo effettuato misure ripetute dei Δt_i associati alla singola posizione del carrello nella guida rispetto allo zero arbitrario posto in corrispondenza del sensore. Come primo punto ci siamo accertati che l'angolo θ tra la guida ed il piano fosse nullo così da impedire al carrello degli spostamenti durante le misurazioni (senza dover quindi ricorrere all'uso di pesi posti come blocco dietro il carrello, i quali avrebbero potuto deformare la guida). Abbiamo eseguito misure ripetute per 11 differenti posizioni (misurate attraverso la scala graduata di cui sopra) nell'intervallo [0.50m, 1.50m][1] e per ogni iterazione abbiamo acquisito dati per 10 secondi. La frequenza del sonar è stata impostata su 20 Hz quindi per ogni posizione il set di dati a disposizione è composto da circa 200 misure indipendenti. Le misure ottenute sono inserite in tabella 3. Abbiamo quindi eseguito un fit lineare delle posizioni in funzione dei Δt_i.

2.3.2 Incertezze

Non sono state eseguite misure ripetute delle posizioni, di conseguenza non sono presenti incertezze di tipo A. Per questo motivo le incertezze relative alle lunghezze sono state ottenute considerando esclusivamente il termine σ_B, relativo alla scala graduata, descritto in sezione 2.1. Per quanto riguarda le incertezze relative ai Δt_i, date le misure ripetute con le derivanti deviazioni standard campionarie e l'incertezza di tipo B legata allo strumento di misura, esse sono state ottenute come:

$$\sigma_{\Delta t_i} = \sqrt{(\frac{S_N}{\sqrt{N}})^2 + (\frac{Ris}{\sqrt{12}})^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\Delta t_i - \overline{\Delta t})^2}{(N-1)N} + (\frac{Ris}{\sqrt{12}})^2} \tag{3}$$

[1]Le posizioni sono state scelte più distanti possibile tra loro, in modo tale da aumentare il braccio di leva del fit.

L [m]	$\overline{\Delta t}$ [s]	$\sigma_{\Delta t_i}$ [s]
0.50	$2.9880 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-7}$
0.60	$3.5538 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-7}$
0.70	$4.1382 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-7}$
0.80	$4.7073 \cdot 0^{-3}$	$3 \cdot 10^{-7}$
0.90	$5.2863 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-7}$
1.00	$5.8645 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-7}$
1.10	$6.4421 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-7}$
1.20	$7.0175 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-7}$
1.30	$7.5905 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-7}$
1.40	$8.1710 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-7}$
1.50	$8.7563 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-7}$

Tabella 3: In tabella sono inseriti per ogni posizione L la media dei tempi di volo e la relativa incertezza totale calcolata tramite la formula 3.

2.3.3 Retta di calibrazione

A partire dai dati in tabella 3, eseguendo un fit lineare $l = m\Delta t + c$, con le formule note si ottiene:

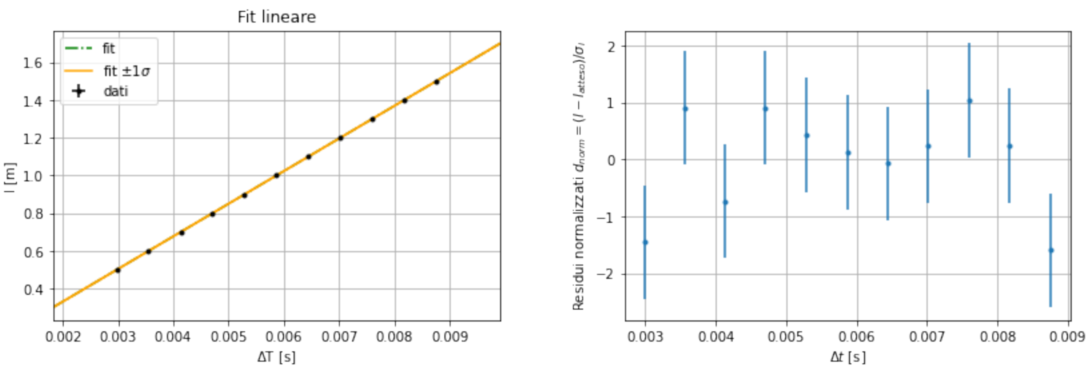


Figura 1: Retta di calibrazione del sonar e studio dei residui ad essa associato. Dal grafico dei residui non si ritiene necessario procedere con le incertezze a posteriori. Inoltre $\sigma_l > m\sigma_{\Delta t_i}$, le incertezze sulle misure Δt_i sono quindi trascurabili e non è necessario eseguire una seconda iterazione del fit.

	valore	σ_{tot}	unità
m	173.38	0.11	m/s
c	-0.0169	0.0007	m
$Cov[m, c]$	-0.001	-	m^2/s
$\rho[m, c]$	0.96	-	-

Tabella 4: Risultati ottenuti dal fit di calibrazione.

I valori riportati in tabella 4 saranno utili per convertire misure di tempi di volo in posizioni, dalle quali si ricaveranno le velocità ai diversi istanti di tempo.

Considerando che il carrello è fermo e che il segnale viene emesso a velocità costante si può dedurre che

$$l_i = \frac{v_s \cdot \Delta t_i}{2} \tag{4}$$

dove v_s è la velocità del suono. Quindi, riconsiderando la relazione lineare utilizzata per il fit:

$$v_s = 2m; \qquad \sigma_{v_s} = 2\sigma_m; \tag{5}$$

dove m è il coefficiente angolare della retta di calibrazione. La velocità del suono stimata corrisponde a:

$$v_s = (346.76 \pm 0.22) m/s$$

E' inoltre noto che la velocità del suono nell'aria dipende dalla temperatura secondo la legge:

$$v = \sqrt{\bar{R}\gamma T} \tag{6}$$

dove $\bar{R}$ è la costante universale dei gas per unità di massa e vale 287 J/(KgK), T è la temperatura in kelvin e γ il coefficiente di dilatazione adiabatica dei gas, che, per l'aria secca a temperatura ambiente vale 1.4. E' possibile stimare una temperatura in laboratorio di (25 ± 2) °C, da cui, convertendo la temperatura da Celsius a Kelvin e propagando le incertezze sulla formula 6, si può ottenere un valore per la velocità del suono con relativa incertezza pari a :

$$\sigma[V_{suono}] = \frac{\bar{R}\gamma}{2\sqrt{\bar{R}\gamma T}} \tag{7}$$

$$V_{suono} = (344.9 \pm 1.2) m/s \tag{8}$$

Confrontando questo valore con quello ottenuto dal fit si ottiene:

$$|Z| = \frac{|v_s - v_{suono}|}{\sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_{suono}^2}} = 1.5 \tag{9}$$

con ciò possiamo concludere che i due valori sono compatibili.

Dal fit otteniamo inoltre un valore di c, con relativa incertezza, pari a :

$$c = (-0.0169 \pm 0.0007) m \tag{10}$$

Come ci aspettiamo, c ha un valore non nullo. Questo potrebbe dipendere dal fatto che il punto dal quale veniva emesso il segnale acustico non coincideva esattamente con lo zero della scala graduata applicata lungo la guida. In questo modo, giustificheremmo anche il segno negativo di c. Infine, sempre dal fit, è possibile notare che m e c sono fortemente correlate: in tal senso, ove necessario, si considererà nella propagazione delle incertezze il termine relativo alla loro correlazione.

3 Angoli

Incliniamo la guida di 5 angoli diversi θ_i e per ciascuno lasciamo andare il carrello, senza imprimere una velocità iniziale. Misurando i tempi con il sonar, è possibile ricavare le posizioni x_i del carrello tramite la retta di calibrazione, da cui poi si possono estrarre le velocità, l'accelerazione di gravità g e il coefficiente di attrito dinamico μ_d.
Abbiamo scelto di inclinare la guida di 5 angoli θ con le seguenti caratteristiche:

- gli angoli sono, per quanto possibile, equidistanti tra loro, in modo da sondare regolarmente l'andamento del fit;
- sono minori di 5 gradi (0.1 rad), cosicché sia valida l'approssimazione: $sin(\theta) \approx \theta$, $cos(\theta) \approx 1$
- la differenza tra θ_{min} e θ_{max} è la massima possibile (compatibilmente con i limiti sperimentali), in maniera da aumentare il braccio di leva del fit.

3.1 Calcolo degli angoli con relativa incertezza

La rotazione della guida attorno al perno forma un triangolo rettangolo la cui ipotenusa l è data dalla lunghezza della guida (misurata fino al punto di appoggio) e la cui altezza è la differenza tra h_1 (l'altezza per $\theta = 0$) e h_i (l'altezza per un determinato angolo θ_i). Nell'approssimazione $sin(\theta) \approx \theta$, valida per i piccoli angoli con cui stiamo lavorando, otteniamo:

$$\theta_i = \frac{h_i - h_1}{l} \tag{11}$$

Per la stima delle incertezze, non essendo state eseguite misure ripetute; si considererà dunque solo l'incertezza di tipo B (2.1).Notiamo che l'incertezza sul metro, con il quale abbiamo preso la misura di l, è maggiore rispetto

a quelle riportate in tabella per strumenti con identica risoluzione. Ciò dipende dal fatto che,non essendo il perno ideale, il perno stesso ha una misura di lunghezza: possiamo perciò soltanto stimare con maggiore incertezza la posizione del punto esatto attorno al quale la guida ruota. Di questo fatto si è tenuto conto in 2.1 .
Di seguito riportiamo in una tabella le misure di h_1,h_i e l con le relative incertezze:

lunghezza	valore (cm)	incertezza(cm)
h_1	8.80	0.06
h_2	9.80	0.06
h_3	11.80	0.06
h_4	14.80	0.06
h_5	17.80	0.06
h_6	19.0	0.06
l	141.0	0.3

Tabella 5: Tabella riassuntiva delle misure di lunghezza con relative incertezze

Considerando inoltre le misure di l, h_i e h_1 come indipendenti e tenendo conto del fatto che l'incertezza su h_i e h_1 è la stessa (essendo state eseguite entrambe le misure con la squadra) otteniamo che l'incertezza associata a θ_i è:

$$\sigma_{\theta_i} = \sqrt{2(\frac{1}{l})^2\sigma_h^2 + (\frac{h_i - h_1}{l^2})^2\sigma_l^2} \tag{12}$$

Di seguito riportiamo, in radianti, gli angoli per i quali abbiamo preso le misure, con le relative incertezze:

angolo	valore (rad)	incertezza(rad)
θ_1	0.00709	0.00065
θ_2	0.02128	0.00065
θ_3	0.04255	0.00065
θ_4	0.06383	0.00066
θ_5	0.07234	0.00066

Tabella 6: Tabella riassuntiva delle misure degli angoli

4 Posizioni

Utilizzando la retta di calibrazione, è possibile estrarre la posizione del carrello x_i corrispondente al Δt_i misurato. Per farlo, è sufficiente considerare la relazione lineare:

$$x_i = m\Delta t_i + c \tag{13}$$

Ogni valore ottenuto per la posizione è associato ad un istante temporale, anch'esso fornito dal Sonar. Per ciascun valore della posizione è possibile inoltre stimare la corrispondente incertezza. Nel calcolo di quest'ultima, è necessario ricordare che m e c sono fortemente correlate (come mostrato nella sezione precedente).
La formula generale per il calcolo delle incertezze diventa quindi:

$$\sigma_{x_i} = \sqrt{\sigma_c^2 + m^2\sigma_{\Delta t_i}^2 + \Delta t_i^2\sigma_m^2 + 2\Delta t_i Cov[m,c]} \tag{14}$$

In particolare, l'incertezza su ΔT_i è stata valutata considerando, oltre al termine dovuto alla risoluzione dello strumento, anche un'incertezza di tipo A pari alla media delle deviazioni standard ottenute a partire dai dati raccolti per le misure di calibrazione. Ovvero (avendo eseguito, di fatto, una singola misura di ogni tempo di volo):

$$\sigma[\Delta_{T_i}] = \sqrt{(\overline{S_N})^2 + (\frac{Ris}{\sqrt{12}})^2} \tag{15}$$

Di seguito riportiamo i grafici relativi all'andamento in funzione del tempo delle posizioni ottenute:

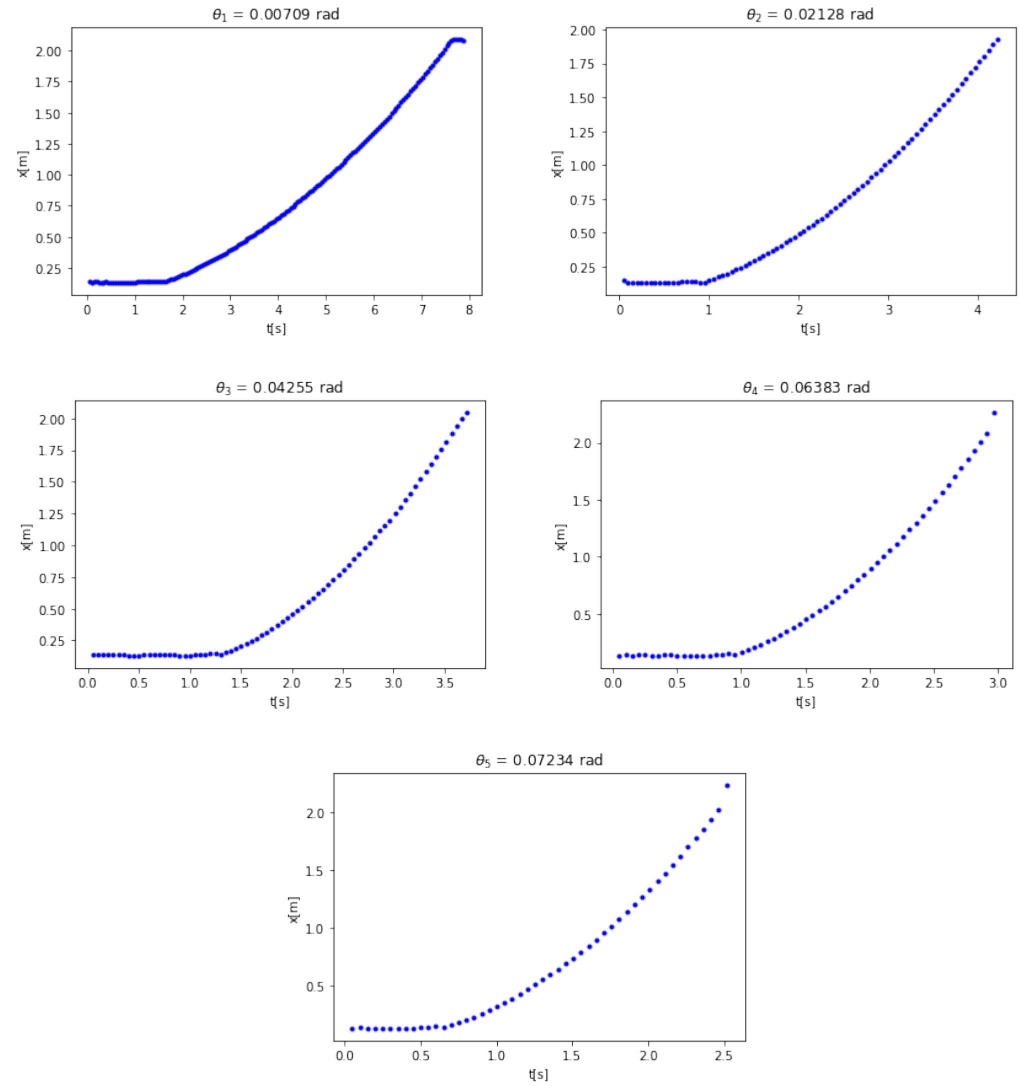


Figura 2: Posizioni in funzione dei tempi. Le barre di incertezza, seppur riportate, non sono visibili.

Come è atteso, l'andamento funzionale ipotizzabile è quadratico. Come visibile in tutti i grafici, all'inizio di ogni misurazione è presente un intervallo di tempo in cui il carrello rimane fermo: ciò è dovuto alle procedure sperimentali, per cui è necessario attivare il Sonar e poi lasciar partire il carrello.

5 Velocità

Sappiamo che la velocità media in ciascun intervallo si calcola come:

$$v_i = \frac{x_{2i+1} - x_{2i}}{t_{2i+1} - t_{2i}} = \frac{m(\Delta T_{2i+1} - \Delta T_{2i})}{t_{2i+1} - t_{2i}} \tag{16}$$

dove la differenza $\Delta t = t_{2i+1} - t_{2i} = 0.05s$ si assume costante e nota senza incertezza (poiché ampiamente trascurabile). Per evitare dei termini di correlazione a coppie tra le misure delle velocità, che si genererebbero nel momento in cui venisse utilizzato uno stesso valore di x_i, utilizziamo ciascun valore della posizione una sola volta, di modo che otterremo un numero di valori della velocità pari esattamente alla metà dei valori che avevamo a disposizione per le posizioni. Nel calcolo dell'incertezza sulle v_i, inoltre, bisogna tenere presente che i valori di x_i sono stati ottenuti a partire dello stesso fit, e dunque m e c hanno lo stesso valore per ciascuna x_i (difatti, il termine noto c si cancella nella differenza). Partendo da queste considerazioni otteniamo che l'incertezza sulle velocità si calcola come (tenendo conto che l'incertezza su ΔT_i è uguale per tutti i valori):

$$\sigma_v = \sqrt{(\frac{\Delta T_{i+1} - \Delta T_i}{\Delta t})^2 \sigma_m^2 + 2(\frac{m}{\Delta t})^2 \sigma_{\Delta T_i}^2} \tag{17}$$

Nonostante tali accorgimenti, si può notare dalla formula 16 che tutte le velocità v_i risultano correlate perché funzione dello stesso termine m, ricavato dal fit di calibrazione. Per avere una stima quantitativa della correlazione tra le due variabili casuali sono riportati la covarianza $Cov[v_1, v_2]$ e il coefficiente di correlazione $\rho[v_1, v_2]$ tra le prime due velocità per ognuna delle 5 discese.

$$Cov[Y, Z] = \sum_{i,j} \frac{\partial Y}{\partial X_i} \frac{\partial Z}{\partial X_j} Cov[X_i, X_j] \tag{18}$$

$$\rho[Y, Z] = \frac{Cov[Y, Z]}{\sigma[Y]\sigma[Z]} \tag{19}$$

Si ottiene quindi:

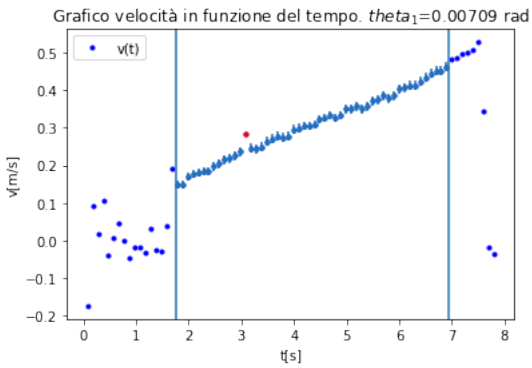
$$Cov[v_1, v_2] = \frac{(\Delta T_2 - \Delta T_1)(\Delta T_4 - \Delta T_3)}{\Delta t^2}\sigma_m^2, \qquad \rho[v_1, v_2] = \frac{Cov[v_1, v_2]}{\sigma[v_1]\sigma[v_2]}$$

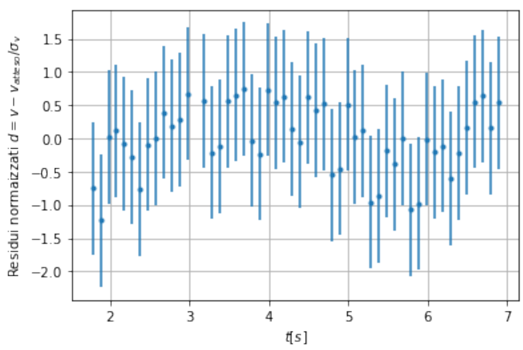
Come risulta chiaro osservando la tabella 7 la correlazione tra le misure risulta trascurabile, è quindi lecito eseguire il fit lineare.

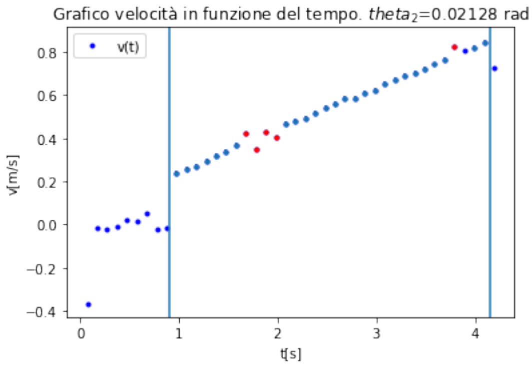
	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5
$Cov[v_1, v_2][m^2/s^2]$	$-1.15 \cdot 10^{-9}$	$2.93 \cdot 10^{-9}$	$1.23 \cdot 10^{-9}$	$-3.65 \cdot 10^{-9}$	$-3.96 \cdot 10^{-10}$
$\rho[v_1, v_2]$	$-8.10 \cdot 10^{-6}$	$2.06 \cdot 10^{-5}$	$8.62 \cdot 10^{-6}$	$-2.55 \cdot 10^{-5}$	$-2.78 \cdot 10^{-6}$

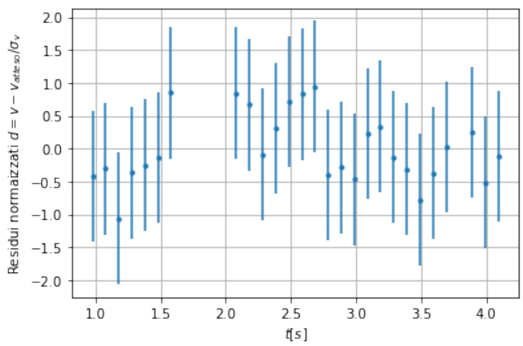
Tabella 7: Covarianza e coefficiente di correlazione tra le prima due misure di velocità.

Di seguito riportiamo i grafici delle velocità in funzione del tempo e i rispettivi residui (ricavati dal fit lineare che qui non è riportato per motivi di spazio). Per ciascun grafico viene indicato, nel titolo, l'angolo al quale il grafico si riferisce.
Nei grafici ci sono dei punti che si discostano molto dall'andamento lineare. Tipicamente, sono i punti all'inizio e alla fine della discesa: quei valori sono stati scartati. Abbiamo scartato anche quei punti che, pur stando nell'intervallo considerato, si discostano troppo dall'andamento lineare (indicati in rosso nel grafico). Questi punti scartati non compaiono nello studio dei residui, si rimanda alla sezione 7.1.2 per una giustificazione esaustiva. Eseguendo uno studio dei residui si è ritenuto necessario per il fit con θ_3 stimare le incertezze a posteriori[2].









[2]Il grafico dei residui inserito in figura 3 è ottenuto tenendo conto delle incertezze a posteriori.

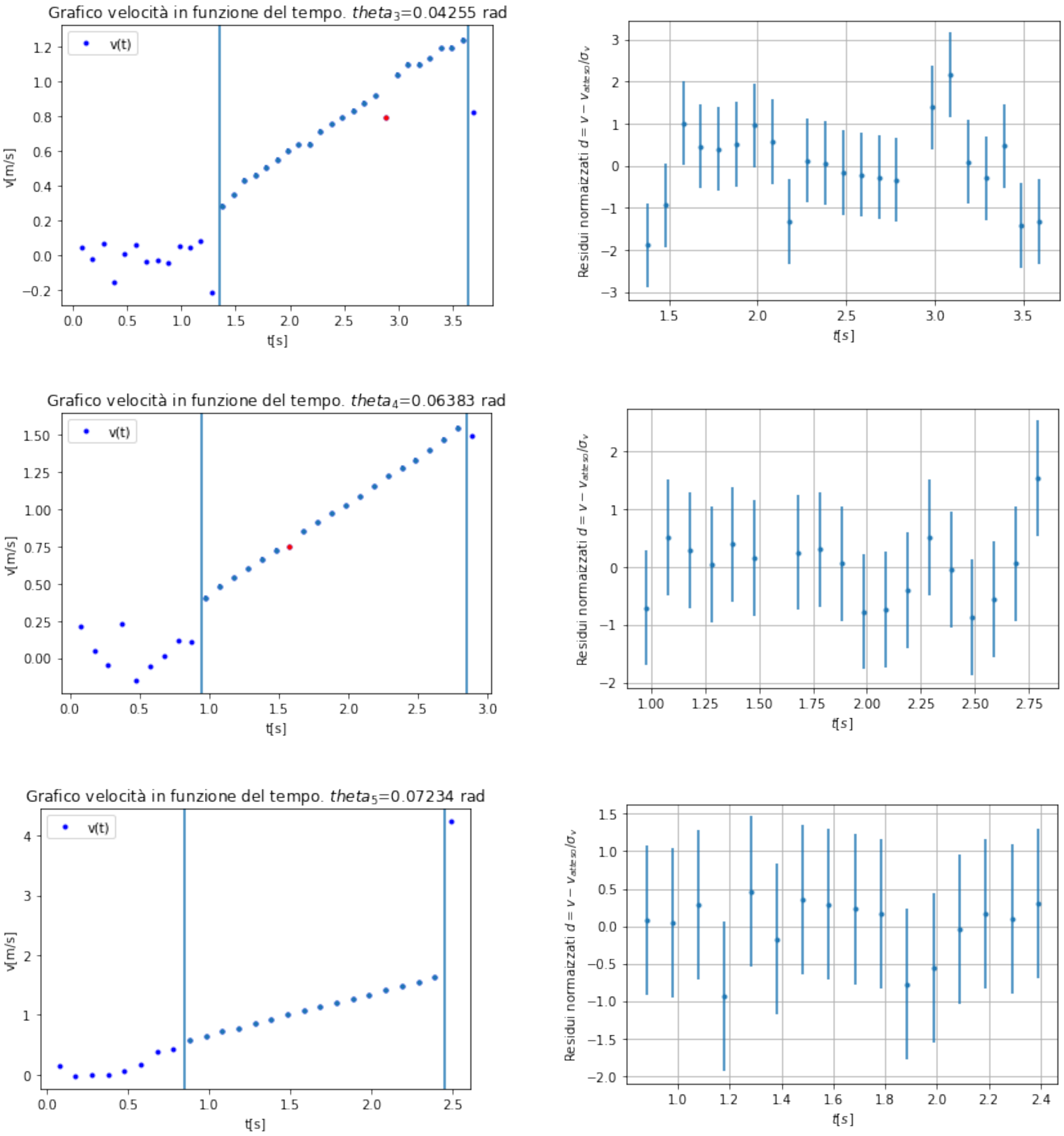


Figura 3: Velocità in funzione dei tempi. La porzione di piano compresa tra le due linee blu rappresenta la zona nella quale sono stati considerati i punti e, in rosso, vengono indicati i punti che, all'interno dei valori considerati, si discostano troppo dall'andamento lineare (sono tutti e soli i punti oltre le 5 sigma). Le barre di incertezza, seppur riportate, sono generalmente non visibili.

La relazione lineare considerata è: $v = at + v_0$. Riportiamo nella successiva tabella i valori ottenuti di a a partire dal fit[3], in funzione dell'angolo θ, con la relativa incertezza:

angolo	accelerazione$[m/s^2]$	incertezza associata $[m/s^2]$
θ_1	0.0580	0.0011
θ_2	0.1933	0.0025
θ_3	0.4253	0.0066
θ_4	0.6143	0.0050
θ_5	0.6952	0.0064

Tabella 8: Tabella riassuntiva delle misure delle accelerazioni e delle incertezze ad esse associate per ogni θ_i

[3] a è il coefficiente angolare della retta considerata.

6 Stima di g e di μ_d

Considerando la relazione[4] $a = M\theta + C = g(\theta - \mu_d)$ e disponendo di diversi valori dell'accelerazione in funzione di θ, ottenuti in sezione 5 abbiamo eseguito un ulteriore fit lineare, dal quale è possibile estrarre M e C con la relativa incertezza. In particolare, si nota che valgono le relazioni:

$$g = M \qquad \mu_d = -\frac{C}{M} \tag{20}$$

dalle quali sarà possibile estrarre il valore di g e di μ_d con le relative incertezze, calcolate come (tenendo conto della covarianza):

$$\sigma_g = \sigma_M \qquad \sigma_{\mu_d} = \mu_d\sqrt{\nu_M^2 + \nu_C^2 + 2\rho_{MC}\nu_M\nu_C} \tag{21}$$

Eseguendo la prima iterazione del fit si ottiene che σ_{a_i} è confrontabile con $M_0\sigma_{\theta_i}$, quindi si procede con una seconda iterazione del fit considerando nulle le incertezze sugli angoli e le nuove incertezze sulle accelerazioni ottenute tramite la formula:

$$\sigma'_{a_i} = \sqrt{\sigma_{a_i}^2 + (M_0\sigma_{\theta_i})^2} \tag{22}$$

Di seguito riportiamo il grafico del fit lineare (di a in funzione di θ) con annesso studio dei residui:

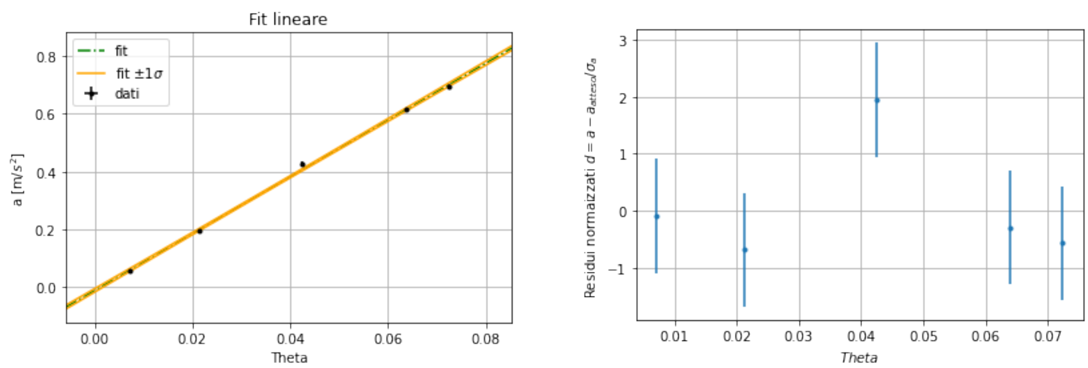


Figura 4: Fit di accelerazione in funzione di θ e studio dei residui ad esso associato. Non si ritiene necessario procedere con le incertezze a posteriori.

Si ottiene:

$$M_1 = (9.84 \pm 0.14)m/s^2 \tag{23}$$

$$C_1 = (-0.011 \pm 0.006)m/s^2 \tag{24}$$

da cui, utilizzando le relazioni 20 e 21:

$$g_1 = (9.84 \pm 0.14)m/s^2 \qquad \mu_{d_1} = (0.00113 \pm 0.00062) \tag{25}$$

[4]Valida solo per piccoli angoli.

7 Riproducibilità

Al fine di testare la riproducibilità delle misure di g e μ_d abbiamo ripetuto le misure dei Δt_i variando la massa del carrello, nello specifico rimuovendo i due pesi che avevamo posto sopra il carrello per il primo set di misurazioni e facendo partire il carrello con una certa velocità iniziale $v_0 \neq 0$. Abbiamo avuto cura di utilizzare la stessa retta di calibrazione per ottenere le posizioni x_i a partire dai nuovi Δt_i, di mantenere invariati gli angoli θ_i utilizzati per il precedente set di misure e di mantenere inalterato il resto dell'apparato sperimentale. Rimandiamo alle sezioni precedenti per la descrizione di come abbiamo ottenuto le misure delle posizioni, delle velocità e delle accelerazioni. Di seguito ci limitiamo a riportare i grafici relativi ai dati sperimentali ottenuti.

7.1 Assenza di pesi aggiuntivi

7.1.1 Posizioni

Riportiamo i grafici delle posizioni in funzione nel tempo per i diversi angoli θ_i, ottenuti con lo stesso procedimento illustrato nella sezione 4.

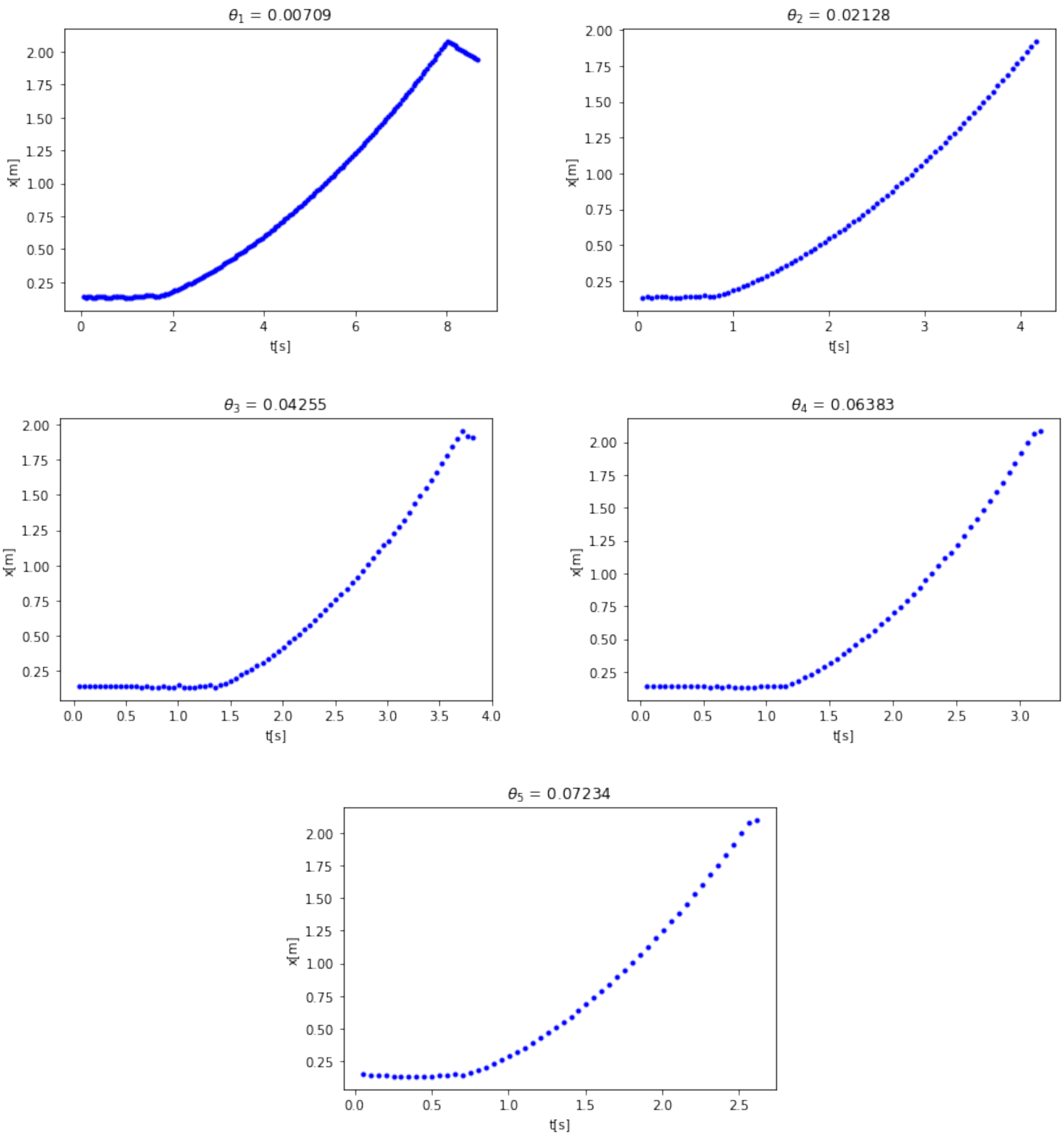
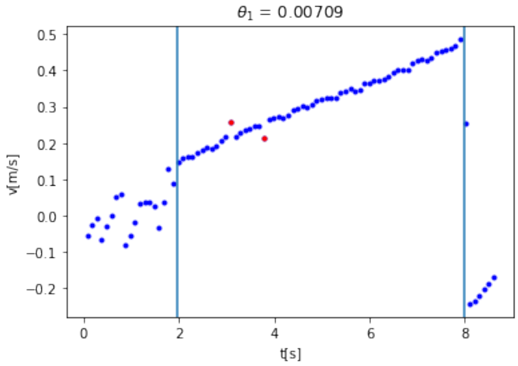


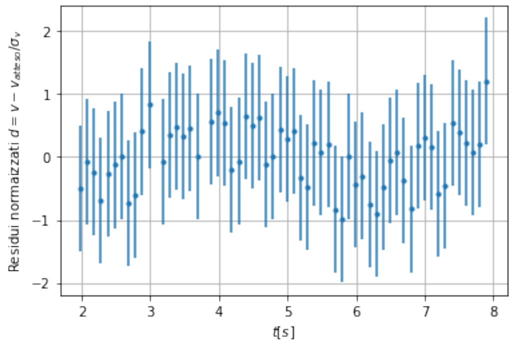
Figura 5: Posizioni in funzione dei tempi

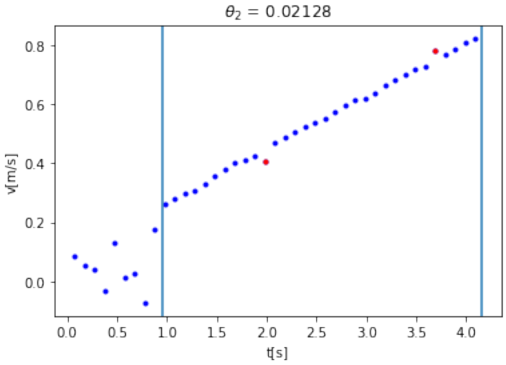
ancora una volta, l'andamento corrisponde a quello aspettato. Come si vedrà in sezione 7.1.2, tali grafici sono stati utili per risalire ad eventuali deformità della guida, o intervalli di lunghezze soggetti a particolari errori sistematici, che hanno causato evidenti fluttuazioni dall'andamento previsto per le velocità.

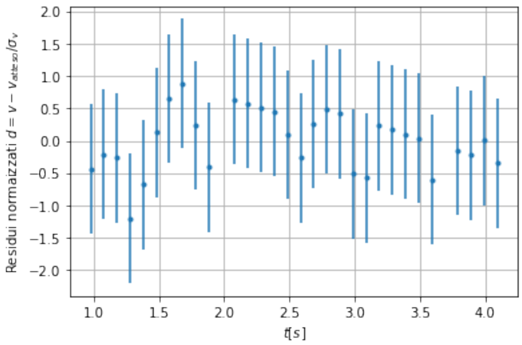
7.1.2 Velocità

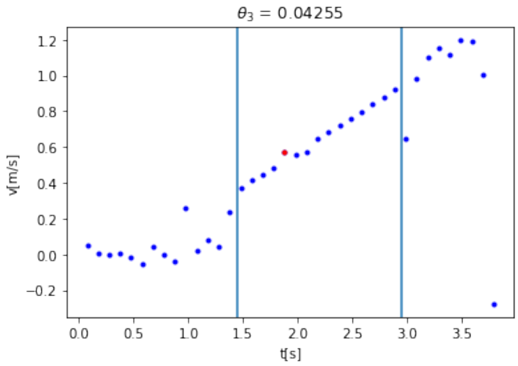
Riportiamo i grafici ottenuti per le velocità, con le solite convenzioni:

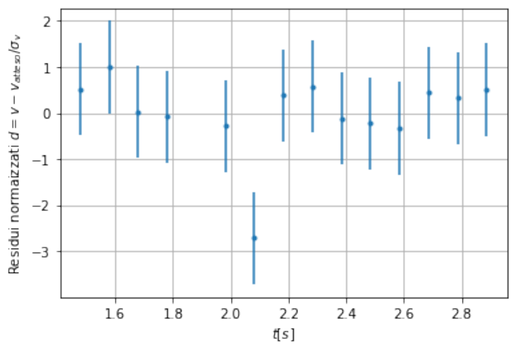


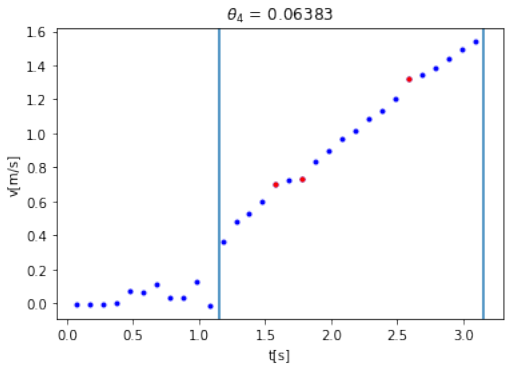


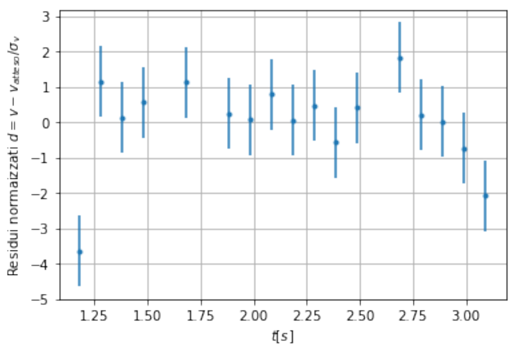












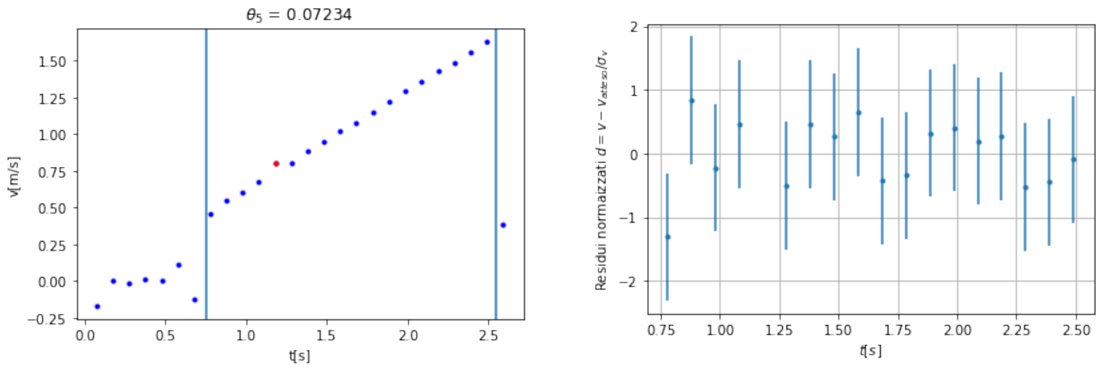


Figura 6: Velocità in funzione dei tempi. Per la lettura dei grafici valgono considerazioni analoghe a quelle di figura 3

Andando ad incrociare i tempi relativi ai punti rossi presenti nei grafici della velocità con le corrispondenti posizioni allo stesso istante t_i (guardando i grafici delle posizioni) si può riscontrare che in tutti i casi è presente una fluttuazione della velocità nell'intorno della posizione 0.50m. Ciò suggerisce che probabilmente in quel punto era presente una deformazione della guida tale da modificare la velocità del carrello rispetto al suo andamento lineare. Il fenomeno si verifica anche nel caso del carrello con le masse (vedere sezione 5) ma è maggiormente apprezzabile con questa configurazione dell'apparato.

Riportiamo una tabella riassuntiva dei valori dell'accelerazione in funzione di θ_i, che useremo per il successivo fit lineare:

angolo	accelerazione$[m/s^2]$	incertezza associata $[m/s^2]$
θ_1	0.0534	0.0009
θ_2	0.1799	0.0023
θ_3	0.3916	0.0072
θ_4	0.6043	0.0048
θ_5	0.6775	0.0055

Tabella 9: Tabella riassuntiva delle misure delle accelerazioni e delle incertezze ad esse associate per ogni θ_i

7.1.3 Stima di g e μ_d:

Con lo stesso procedimento descritto in sezione 6 si ottiene il seguente fit:

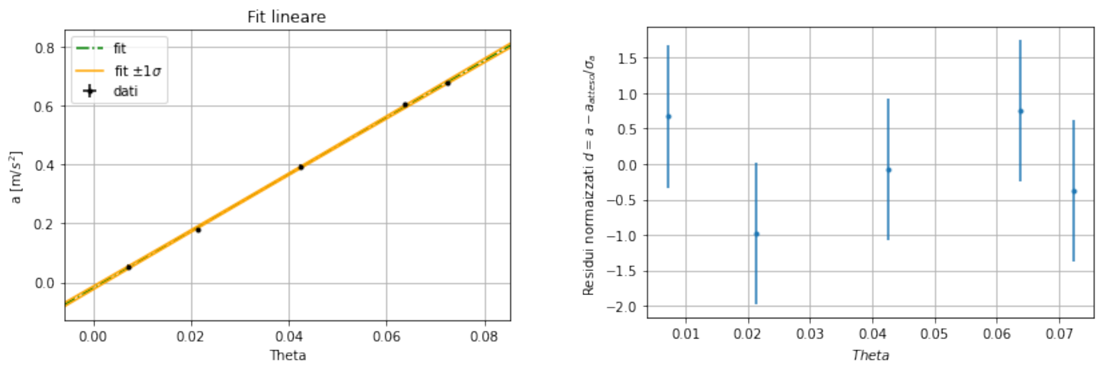


Figura 7: Fit di accelerazione in funzione di θ e studio dei residui ad esso associato.

Da cui si possono estrarre i valori:

$$M_2 = (9.68 \pm 0.13)m/s^2 \qquad C_2 = (-0.020 \pm 0.006)m/s^2 \tag{26}$$

Utilizzando ancora una volta le formule 20 e 21 si ottiene:

$$g_2 = (9.68 \pm 0.13)m/s^2 \qquad \mu_{d_2} = (0.00201 \pm 0.00062) \tag{27}$$

7.2 Velocità iniziale non nulla

Ripetiamo gli stessi passaggi, ma con il carrello con velocità iniziale e senza pesetti, per la **posizione:**

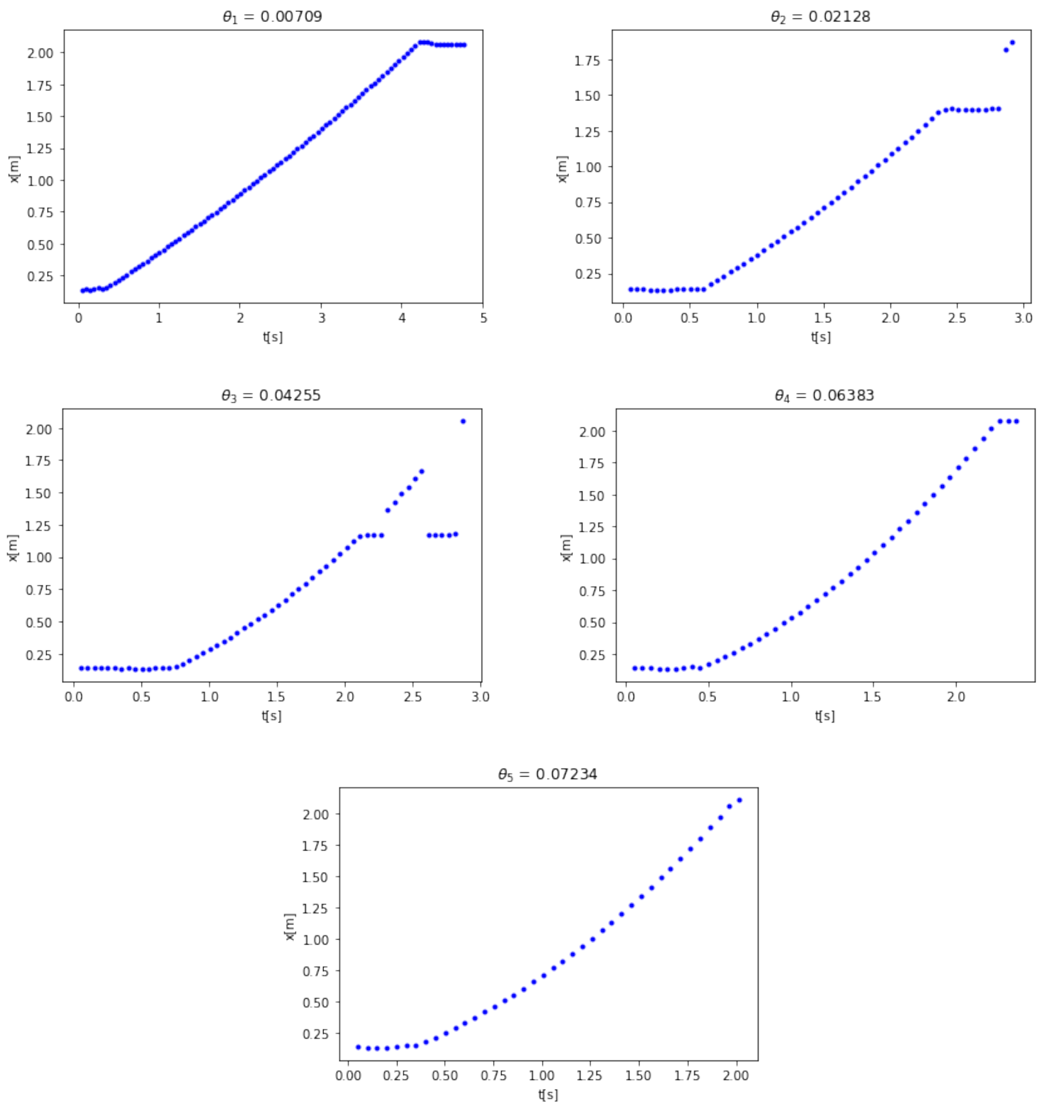
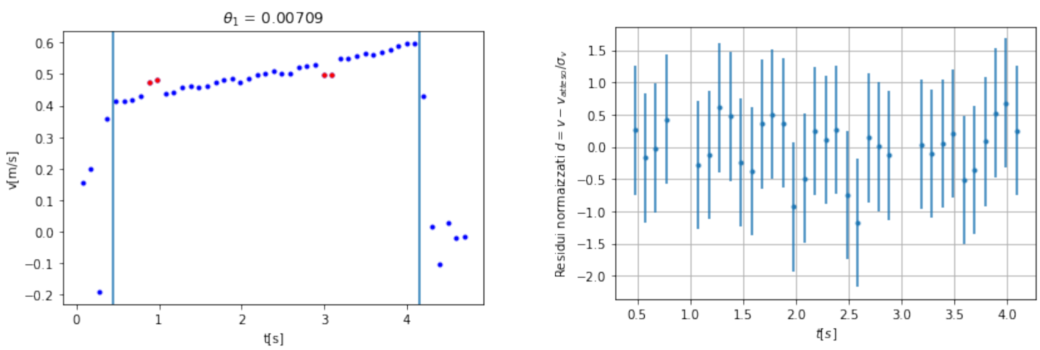


Figura 8: posizione in funzione dei tempi. In alto è indicato l'angolo di discesa.

Come si nota dai grafici, alcune zone differiscono particolarmente dall'andamento aspettato: tali errori di misura si ritengono risultato di condizioni non agevoli: lanciare il carrello può provocare l'uscita di quest'ultimo dai binari ed amplifica gli effetti dovuti ad avvallamenti o piccoli ostacoli lungo la guida, che alterano la qualità delle misure.

Analogamente per le **velocità:**



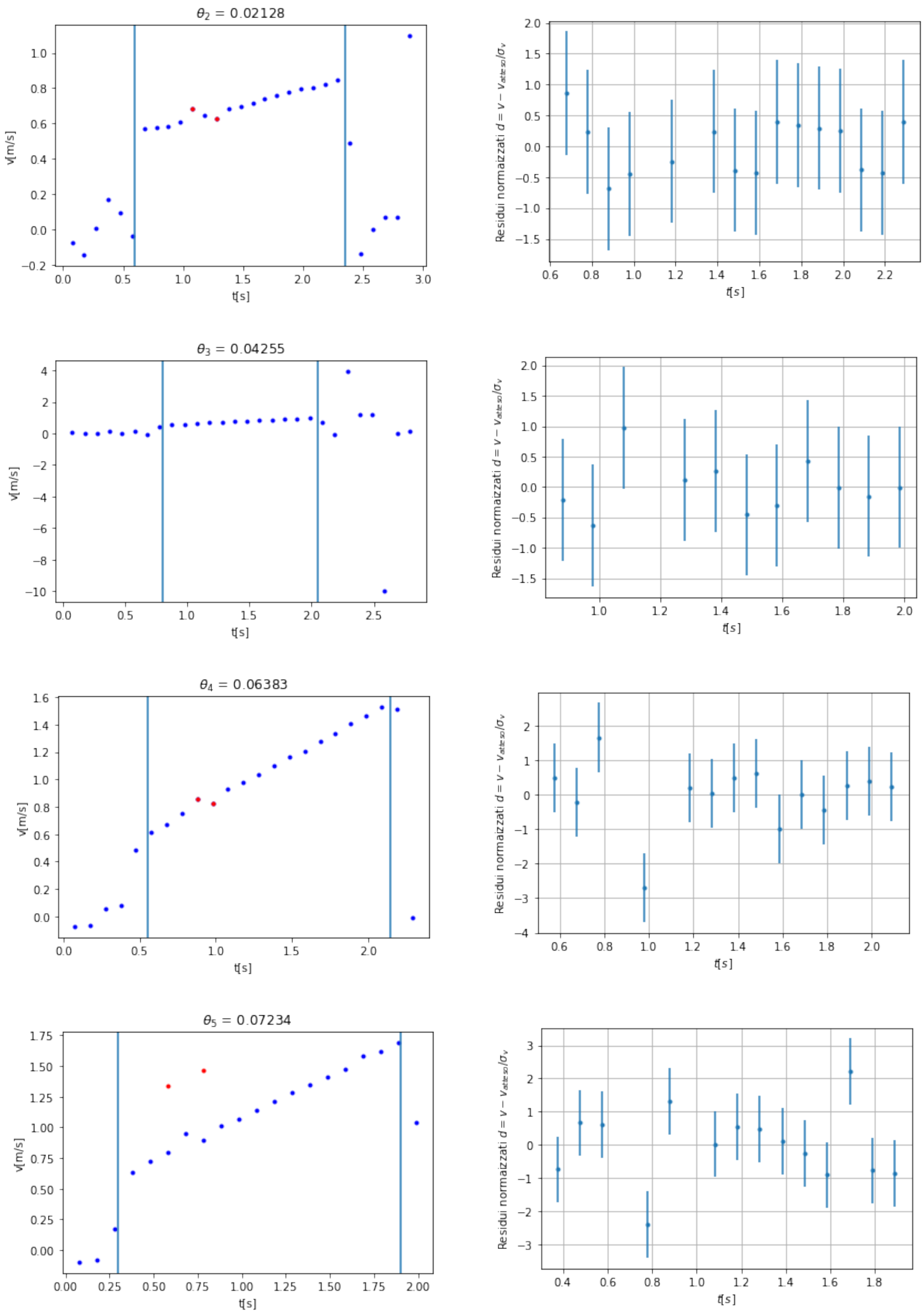


Figura 9: velocità in funzione dei tempi. In alto è indicato l'angolo di discesa. Per $\theta = \theta_3$ è presente un punto molto distante dall'andamento lineare, che si interpreta come un chiaro errore di misura.

Riportiamo infine il **fit delle velocità** (per ragioni di spazio omettiamo la tabella con i dati in input):

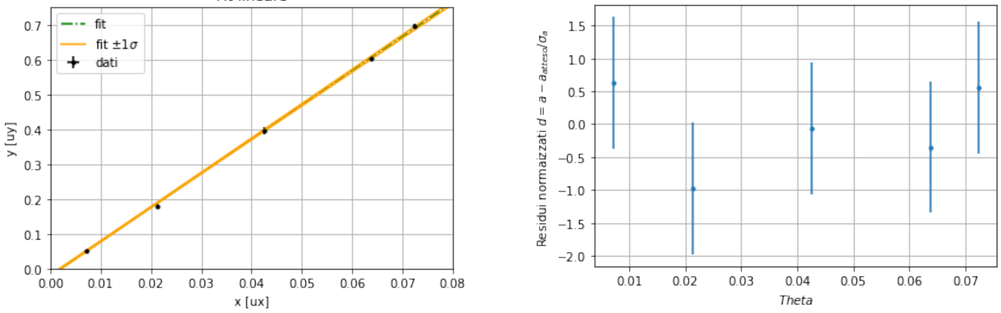


Figura 10: fit delle velocità in funzione di θ

Si stimano infine i seguenti valori per l'accelerazione di gravità e il coefficiente d'attrito dinamico (ottenuti con il solito metodo):

$$g_3 = (9.86 \pm 0.15) m/s^2 \qquad \mu_{d_3} = (0.00236 \pm 0.00068) \tag{28}$$

8 Conclusioni:

Di seguito riportiamo, in una tabella, i risultati delle misure di g e μ_d, ottenuti a partire sia dalle discese con masse senza velocità iniziale (li indicheremo con g_1 e μ_{d_1}), sia dalle discese senza masse e senza velocità iniziale (li indicheremo con g_2 e μ_{d_2}), sia dalle discese con velocità iniziale (g_3 e μ_{d_3}).

quantità	valore	incertezza	unità di misura
g_1	9.84	0.14	m/s^2
g_2	9.68	0.13	m/s^2
g_3	9.86	0.15	m/s^2
μ_{d_1}	0.0011	0.0006	-
μ_{d_2}	0.0020	0.0006	-
μ_{d_3}	0.0024	0.0007	-

Tabella 10: Tabella riassuntiva delle misure di g e μ_d, con relativa incertezza.

Possiamo studiare la compatibilità tra questi risultati ottenuti, usando la formula:

$$|Z| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \tag{29}$$

E' inoltre possibile confrontare le stime dell'accelerazione di gravità ottenute sperimentalmente con il valore atteso "dell'accelerazione di gravità nel laboratorio di meccanica".

L'accelerazione di gravità presso la città di Roma[5] è: $g_{lab.} = 9.807 m/s^2$. .Possiamo confrontare i valori ottenuti di g con g_{lab} usando la formula

$$|Z| = \frac{|x_1 - x_{vero}|}{\sigma_{x_1}} \tag{30}$$

Possiamo costruire una tabella che mostri il confronto tra i valori ottenuti nelle tre discese (con peso, senza peso e con velocità iniziale non nulla) e il confronto con il valore vero di g:

-	g_1	g_2	g_{lab}	μ_{d_1}	μ_{d_2}
g_1	-	0.83	0.24	-	-
g_2	-	-	0.97	-	-
g_3	0.10	0.91	0.35	-	-
μ_{d_2}	-	-	-	1.0	-
μ_{d_3}	-	-	-	1.4	0.04

Tabella 11: Tabella riassuntiva dei confronti tra g e μ_d. La tabella deve essere letta nel seguente modo: all'incrocio tra ogni riga e colonna si trova il valore della compatibilità $|Z|$. Se i due valori non sono confrontabili (o sono la stessa quantità), la casella viene lasciata vuota

Dalla tabella possiamo concludere che i due valori di g ottenuti sono compatibili tra di loro e sono compatibili anche con il valore vero g_{lab}. Infatti, il valore di Z è sempre minore di 2. Inoltre, sono compatibili tra di loro anche i valori ottenuti del coefficiente di attrito dinamico.

Nel complesso, si ritiene la misura riproducibile, seppur poco agevole nel caso con velocità iniziale non nulla. In particolare, come è noto, l'effetto della resistenza dell'aria è sempre maggiore al diminuire della massa dell'oggetto in esame (se la forma di questo non varia) e all'aumentare della velocità: in questo senso si ritiene conveniente eseguire le misure nella configurazione con massa maggiore e senza velocità iniziale.

[5]Fonte: INRiM, https://www.roma1.infn.it/ meddif/LabMecMaterialeDidattico$_A A2010 - 2011/note\%20su\%20g\%20a\%20Roma_3 00417.pdf$