

Laboratorio di Meccanica

PP5-Volano : Misura del momento di inerzia di un volano e studio del moto con attrito del mezzo in regime laminare.

PP5-Volano-B2-07-Touschek

24 Maggio 2022

Matricola	2019980	1998347	1998521	2008402
Presenza	X	X	X	X
Misure	X	X	X	X
Analisi	X	X	X	X
Tabelle	X	X	X	X
Grafici	X	X	X	X
Software	X	X	X	X
Relazione	X	X	X	X

Tabella 1: Tabella delle attività svolte dagli studenti del gruppo.

1 Scopo dell'esperienza

- Verifica della calibrazione dello strumento.
- Studio delle leggi orarie che descrivono il moto di un volano con momento di inerzia variabile.
- Misura del momento di inerzia del volano e delle forze di attrito che ostacolano la rotazione di esso.
- Studio del volano in condizione di attrito laminare del mezzo e determinazione della velocità limite.
- Studio della perdita di energia potenziale gravitazionale per effetto dell'attrito.

2 Apparato sperimentale e strumenti

Strumento	Portata	Risoluzione	σ_B
Sensore di rotazione - angolo	-	$2\pi/4000$ rad	$0.45 \cdot 10^{-3}$ rad
Sensore di rotazione - posizione	-	$3.75 \cdot 10^{-5}$ m	$1.1 \cdot 10^{-5}$ m
Nonio ventesimale	200 mm	0.05 mm	0.060 mm
Squadra	200 mm	1 mm	0.65 mm
Bilancia di precisione	3000 g	0.1 g	0.064 g

Tabella 2: Tabella riassuntiva degli strumenti utilizzati. Le incertezze di tipo B sono giustificate nel testo.

- **Un volano** sul quale è possibile montare fino a 10 coppie di bulloni e delle palette per aumentare l'attrito del mezzo. Il volano si compone anche di un rocchetto attorno al quale si arrotola il filo (considerato inestensibile e di massa trascurabile) passante per la carrucola del sensore di rotazione. All'estremità del filo è legata una massa m .
- **Un sensore di rotazione** in grado di misurare la posizione della massa m e l'angolo di rotazione della carrucola a tempi diversi. La frequenza di campionamento è stata fissata a 20 Hz, è quindi acquisito un punto sperimentale ogni 0.05 s. La risoluzione¹ in angolo e in posizione sono rispettivamente $2\pi/4000$ rad e $3.75 \cdot 10^{-5}$ m e l'incertezza di tipo B sulle misure di angolo e posizione si stima esclusivamente con il termine $Ris/\sqrt{12}$.
- **Un calibro ventesimale** è stato utilizzato per misurare lo spessore del volano e il diametro del rocchetto attorno al quale si arrotola il filo. L'incertezza di tipo di B si stima con il termine $Ris/\sqrt{12}$ e inoltre, data la difficoltà sperimentale nell'eseguire entrambe le misure, si assume un offset variabile distribuito uniformemente in ± 0.1 mm, assimilabile ad un errore massimo. Tale modello non introduce una correlazione tra le misure. L'incertezza di tipo B può quindi essere valutata come: $\sigma_B = \sqrt{(\frac{Ris}{\sqrt{12}})^2 + (\frac{2E_{MAX}}{\sqrt{12}})^2}$, dove $E_{MAX} = 0.1mm$.
- **Una squadra** è stata utilizzata per misurare la distanza dei bulloni dall'asse di rotazione. Oltre al termine dovuto alla risoluzione, si considera (analogamente a quanto fatto per il nonio ventesimale) un errore massimo pari a $E_{MAX} = 1mm$, vista la difficoltà delle misure. L'incertezza può essere valutata come riportato sopra.
- **Una bilancia di precisione.** E' noto dalla scheda tecnica dello strumento che $E_{MAX} = 0.1g$: l'incertezza di tipo B può essere valutata con la formula riportata nella sezione sul calibro ventesimale.

A partire dalle misure effettuate, in tutti i casi in cui avremo una funzione di più variabili casuali del tipo:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N) \quad (1)$$

la formula utilizzata per la propagazione delle incertezze sarà:

$$Var[Y] = \sum_{i,j} \frac{\partial Y}{\partial X_i} \frac{\partial Y}{\partial X_j} Cov[X_i, X_j] \quad (2)$$

caso particolare della formula:

$$COV[Y, Z] = \sum_{i,j} \frac{\partial Y}{\partial X_i} \frac{\partial Z}{\partial X_j} Cov[X_i, X_j] \quad (3)$$

per due funzioni delle variabili $X_1 \dots X_N$.

3 Sequenza operazioni sperimentali

3.1 Verifica della linearità della misura di posizione

L'obiettivo di questa misura è duplice: verificare la linearità della misura di posizione in funzione del numero di giri del volano e confrontare le due misure del raggio del rocchetto attorno al quale si arrotola il filo: una ottenuta da misura diretta e l'altra estratta a partire dal fit lineare. E' nota infatti la relazione lineare che lega un arco di circonferenza all'angolo θ , espresso in radianti sotteso all'arco stesso:

$$A = r\theta \quad (4)$$

In questa misura poiché, come descritto in sezione 2 il filo è fissato al rocchetto del volano, l'arco A corrisponde alla misura della posizione h , l'angolo θ è l'angolo di rotazione del volano e r è il raggio del rocchetto. Volendo verificare la linearità delle misure di posizione in funzione del numero di giri, e poiché un giro del volano corrisponde ad un angolo di rotazione $\alpha = 2\pi$ la relazione lineare può essere espressa come:

$$h = 2\pi r n \quad (5)$$

dove $n = \#giri$.

¹La risoluzione è stata individuata facendo variare il numero di cifre significative nell'output del programma di acquisizione.

Si procede innanzitutto effettuando, con il nonio ventesimale, la misura diretta del diametro $d = 2r$ del rocchetto, si ottiene $d = 21.20$ mm. Stimando le incertezze come descritto in sezione 2 e propagando sulla misura del raggio, si ottiene:

$$r = \frac{d}{2} \pm \frac{\sigma_d}{2} = (1.060 \pm 0.003) \text{ cm} \quad (6)$$

Per ottenere i punti sperimentali di posizione e numero di giri si procede nel seguente modo: a partire da una certa posizione del volano (numero di giri = 0), individuata tramite un riferimento tracciato sul volano stesso, si effettua un'acquisizione di dati per circa 10 secondi, successivamente si ruota il disco di mezzo giro (numero di giri = 0.5) e si acquisisce per altri 10 secondi. Si ripetono queste procedure per 5 posizioni, quindi fino ad aver effettuato due giri completi del volano. Si riportano in tabella 3 le medie e le deviazioni standard delle misure di posizione in funzione del numero di giri, calcolate tramite le seguenti formule:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i^N x_i}{N} \quad (7)$$

$$S_{N-1} = \sqrt{\frac{\sum_i^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} \quad (8)$$

dove N è il numero di misure ripetute per ogni posizione, dipende dal tempo ΔT di acquisizione dati e quindi non è costante.

Numero di giri	0	0.5	1.0	1.5	2.0
\bar{h}	0.026 m	0.060 m	0.094 m	0.127 m	0.160 m
S_{N-1}	$6.71 \cdot 10^{-5}$ m	$3.41 \cdot 10^{-5}$ m	$6.74 \cdot 10^{-5}$ m	$5.68 \cdot 10^{-5}$ m	$1.23 \cdot 10^{-4}$ m

Tabella 3: In tabella sono riportate media e deviazione standard campionaria delle misure ripetute di posizione in funzione del numero di giri del volano.

Si possono stimare le incertezze sulle misure di posizione sommando in quadratura l'incertezza di tipo A (ottenuta dalle misure ripetute) e l'incertezza di tipo B stimata come descritto in sezione 2:

$$\sigma_h = \sqrt{\left(\frac{S_{N-1}}{\sqrt{N}}\right)^2 + \sigma_B^2} \quad (9)$$

Per quanto riguarda l'incertezza sul numero di giri si può procedere stimando un'incertezza di tipo B dovuta alla difficoltà sperimentale nell'effettuare le misure. Si assume che, in fase di sperimentazione, cioè nel tenere fermo il volano in ognuna delle 5 posizioni, prendendo come riferimento il bordo del foro più distante dal centro del volano, si sia commesso un'errore massimo $E_{MAX} = \pm 0.6$ cm. Dato $r_b \simeq 17.00$ cm la distanza tra il rocchetto e il bordo più lontano del foro, la distanza dal centro del volano alla "fine" di un foro è $D = d/2 + r_b \simeq 18.06$ cm, ne segue che, trascurando tutte le incertezze sulle misure, si è commesso un errore angolare massimo $E_{\theta, MAX} = \pm 0.6/18.06 \simeq 0.033$ rad. Si assume quindi che questo errore massimo $E_{\theta, MAX}$ è assimilabile ad un offset non costante e l'incertezza sull'angolo di rotazione si stima come:

$$\sigma_\theta = \frac{2E_{\theta, MAX}}{\sqrt{12}} \quad (10)$$

L'obiettivo di questa misura è studiare la linearità della posizione in funzione del numero di giri e non in funzione dell'angolo di rotazione, quindi, per convertire l'incertezza sull'angolo in incertezza sul numero di giri, è sufficiente dividere σ_θ per l'angolo espresso in radianti corrispondente a un giro, $\theta = 2\pi$:

$$\sigma_{\#giri} = \frac{2E_{\theta, MAX}}{2\pi\sqrt{12}} \quad (11)$$

Nota la relazione lineare 5, si esegue un fit lineare della posizione h in funzione del numero di giri n . Inizialmente si stima il coefficiente angolare m_0 trascurando le incertezze $\sigma_{\#giri}$, poiché però le due quantità $m_0\sigma_{\#giri}$ e σ_h sono confrontabili, si esegue una seconda iterazione assumendo le nuove incertezze sulle posizioni calcolate tramite la formula:

$$\sigma'_h = \sqrt{(m_0\sigma_{\#giri})^2 + \sigma_h^2} \quad (12)$$

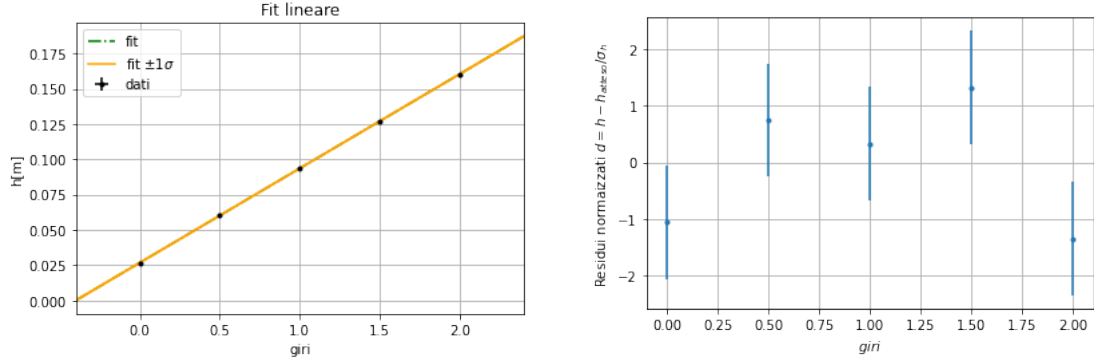


Figura 1: Grafico delle misure di posizione h in funzione del numero di giri. E' allegato anche il grafico dei residui normalizzati.

Si può osservare qualitativamente che la linearità delle misure di posizione è rispettata, tale tesi è avvalorata dallo studio dei residui. Possiamo effettuare un test del χ^2 , fissando un livello di confidenza pari a 0.05. Otteniamo un p-value pari a 0.15 (>0.05), da cui si conclude che il test è superato. Si riportano in tabella 4 il coefficiente angolare m e il termine noto c (con le rispettive incertezze), la covarianza e il coefficiente di correlazione ρ tra m e c estratti dal fit lineare.

	Valore	Incertezza	Unità di misura
m	0.0668	0.0001	m
c	0.0267	0.0002	m
$Cov[m, c]$	$-1.67 \cdot 10^{-8}$	-	m^2
$\rho[m, c]$	-0.82	-	-

Tabella 4: In tabella sono riportati il coefficiente angolare m , il termine noto c , con le relative incertezze, la covarianza e il coefficiente di correlazione tra m e c .

Dalla relazione 5 si ottiene la seguente relazione tra il coefficiente angolare m estratto dal fit lineare e il raggio r del rocchetto: $r = m/2\pi$, quindi propagando opportunamente le incertezze:

$$r_{fit} = \frac{m}{2\pi} \pm \frac{\sigma_m}{2\pi} = (1.063 \pm 0.002)cm \quad (13)$$

E' possibile infine effettuare un test d'ipotesi per confrontare le due misure del raggio tenendo conto delle rispettive incertezze:

$$Z = \frac{r - r_{fit}}{\sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_{r_{fit}}^2}} = 0.83 \quad (14)$$

Fissando un livello di compatibilità pari a $Z=2$, le misure due misure risultano tra loro compatibili.

3.2 Determinazione del momento di inerzia del volano e del momento della forza di attrito

3.2.1 Misure dirette

Per prima cosa vengono pesati tutti e 20 i bulloni (ciascun bullone si compone di vite e dado). Di seguito riportiamo in una tabella le misure della massa di ciascun bullone, ciascuno con la propria incertezza. Non essendo state eseguite misure ripetute non c'è incertezza di tipo A, ma solo di tipo B, così come riportato in 2. Le misure che abbiamo effettuato sono misure di quantità tutte diverse tra loro: ciascuna è la misura di un bullone diverso. Tuttavia, in seguito tornerà utile avere un unico valore per la massa del bullone. Ci poniamo quindi il problema di fare la miglior stima della massa di un bullone, a partire dalle misure di tutti i bulloni. Il caso presenta alcune similitudini con l'inferenza gaussiana a partire da n misure differenti, pur avendo una

differenza fondamentale: nel caso di inferenza gaussiana il misurando è lo stesso, qui i misurandi sono diversi. Analogamente al caso gaussiano, possiamo stimare il valore atteso della variabile casuale "migliore stima della massa di un bullone" come la media delle masse dei bulloni. Per quanto riguarda l'incertezza la stimiamo semplicemente come la deviazione standard delle misure, trascurando quindi il termine al denominatore \sqrt{n} . Non riteniamo opportuno propagare l'incertezza come noto: stiamo sovrastimando l'incertezza proprio perché non siamo nel caso di misure ripetute di uno stesso misurando, ma perché stiamo cercando di ottenere la miglior stima di un bullone a partire da misure di bulloni differenti. Siamo quindi interessati alla larghezza della distribuzione statistica delle masse dei bulloni (quantificabile con la deviazione standard campionaria).

$$m_b = \bar{m}_b \pm S_n = (53.56 \pm 0.27)g \quad (15)$$

bullone	massa [g]	incertezza[g]
1	53.70	0.06
2	53.80	0.06
3	53.00	0.06
4	53.20	0.06
5	53.50	0.06
6	53.40	0.06
7	53.80	0.06
8	53.70	0.06
9	53.40	0.06
10	53.20	0.06
11	53.40	0.06
12	53.50	0.06
13	53.90	0.06
14	53.70	0.06
15	53.50	0.06
16	52.90	0.06
17	53.70	0.06
18	53.60	0.06
19	53.70	0.06
20	53.40	0.06

Tabella 5: tabella riassuntiva delle misure di massa dei bulloni. La tabella riporta la miglior stima della massa, e non le misure effettuate.

Abbiamo poi eseguito la misura della massa m attaccata al filo. Nuovamente, non essendo state eseguite misure ripetute, l'incertezza sulla misura è interamente di tipo B:

$$m = (572.90 \pm 0.06)g \quad (16)$$

Infine abbiamo misurato la distanza R dei bulloni dall'asse di rotazione. Eseguire questa misura presentava alcune difficoltà. In primo luogo, non essendo il bullone un punto materiale, è necessario stabilire cosa si intende per distanza tra asse di rotazione e bullone. Dalla meccanica sappiamo che un corpo esteso può essere approssimato con il suo centro di massa. Essendo il bullone un oggetto ragionevolmente simmetrico, inoltre, sappiamo che il centro di massa si troverà sul suo asse di simmetria. La distanza R che abbiamo misurato è quindi la distanza tra l'asse di rotazione e il centro del foro nel quale viene inserito il bullone. E' chiaro che eseguire questa misura comporta una nuova difficoltà: come si fa a stabilire precisamente il centro di un foro circolare? Inoltre, la presenza del rocchetto attorno all'asse di rotazione rendeva impossibile determinare direttamente la distanza tra asse e bullone. Per ovviare al primo problema abbiamo eseguito due misure: una dal rocchetto fino al bordo più vicino del foro r_a , l'altra dal rocchetto fino al bordo più lontano r_b (cercando di fare in modo che questi due raggi giacessero sulla stessa retta passante approssimativamente per il centro del foro). La distanza tra foro e rocchetto sarà quindi data da $r_a + (r_b - r_a)/2$.

La misura di R sarà invece data dalla somma tra la quantità appena ottenuta e il raggio del rocchetto:

$$R = r + r_a + \frac{r_b - r_a}{2} \quad (17)$$

da cui, l'incertezza su R sarà (essendo tutte le misure indipendenti):

$$\sigma_R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)^2 \sigma_r^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial r_a}\right)^2 \sigma_{r_a}^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial r_b}\right)^2 \sigma_{r_b}^2} = \sqrt{\sigma_r^2 + \frac{\sigma_{r_a}^2}{4} + \frac{\sigma_{r_b}^2}{4}} \quad (18)$$

L'incertezza su r_a e r_b è solo di tipo B, ed è relativa a misure effettuate con la squadra; la misura di r è stata invece effettuata con il nonio. Riportiamo in una tabella le misure dirette con la relativa incertezza e la stima di R :

grandezza	lunghezza [mm]	incertezza[mm]
r	10.60	0.03
r_a	158.00	0.65
r_b	170.00	0.65
R	174.60	0.46

Tabella 6: tabella riassuntiva delle misure dirette di r , r_a , r_b e della stima su R . Ancora una volta, si riportano direttamente le migliori stime con la relativa incertezza.

3.2.2 Misure di posizione, velocità e calcolo delle accelerazioni

Abbiamo acquisito, tramite il sensore collegato al calcolatore, i dati sulla posizione della massa variando il numero di bulloni sul disco (variando in questo modo il momento di inerzia e conseguentemente l'accelerazione subita dalla massa). Essendo tutti i bulloni differenti, abbiamo scelto coppie di bulloni che avessero masse tra di loro compatibili. Di seguito riportiamo in una tabella il valore della massa di ciascuna coppia con la relativa incertezza calcolata come la somma in quadratura delle incertezze su ciascuna delle masse dei due bulloni (che, essendo uguali, è pari a $\sigma_{coppia} = \sqrt{2}\sigma_{bullone}$).

n(numero di coppia)	coppia di bulloni scelti	massa [g]	incertezza[g]
1	1-2	107.50	0.09
2	5-11	106.90	0.09
3	12-15	107.00	0.09
4	3-16	105.90	0.09
5	14-17	107.10	0.09
6	4-10	106.40	0.09
7	7-13	107.70	0.09
8	9-18	107.00	0.09
9	8-19	107.40	0.09
10	6-10	106.00	0.09

Tabella 7: Tabella contenente i valori della massa e la relativa incertezza su ciascuna coppia di bulloni

Come si evince dalla tabella, non tutte le coppie hanno la stessa massa complessiva: decidiamo di aggiungere 4 (o più) bulloni ad ogni run, in modo da aggiungere due coppie la cui massa totale sia circa costante; ciò consentirà di mantenere il centro di massa nel centro geometrico, e di eseguire il fit lineare in funzione del numero di coppie.

Poichè questi dati sono necessari poi per eseguire un fit lineare dal quale estrarre l'accelerazione della massa, abbiamo tenuto le seguenti accortezze nell'aggiungere le coppie:

- abbiamo scelto la configurazione 1 con una sola coppia e la configurazione 5 con 10, così da aumentare al massimo il braccio di leva del fit
- abbiamo aggiunto sempre due coppie di bulloni, così da sondare regolarmente l'andamento del fit

A partire da queste considerazioni, abbiamo pertanto che:

1. configurazione 1: è presente solo la coppia 1
2. configurazione 2: sono presenti le coppie 1, 2, 3
3. configurazione 3: sono presenti le coppie 1, 2, 3, 4, 5
4. configurazione 4: sono presenti le coppie 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
5. configurazione 5: sono presenti le coppie 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

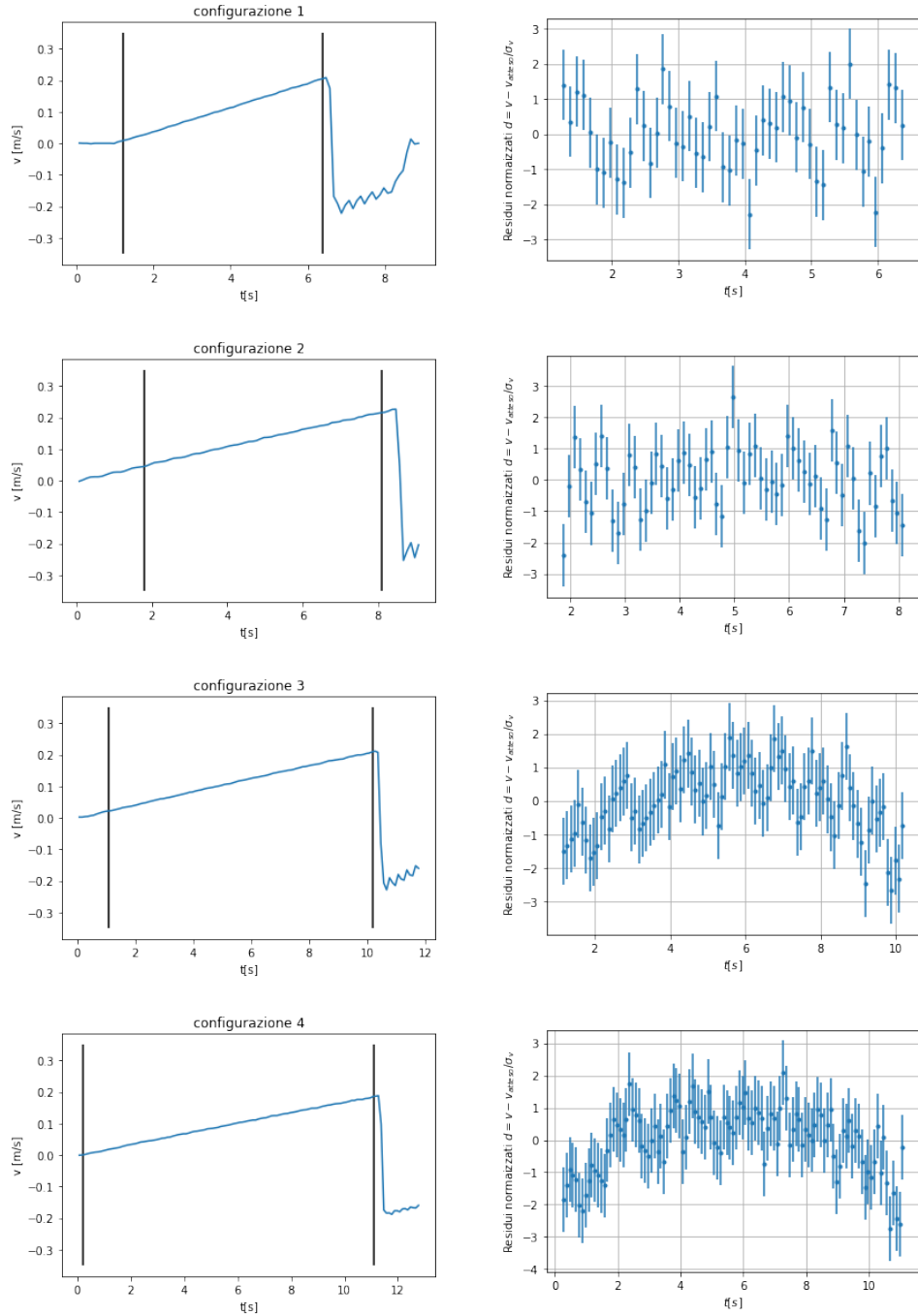
A questo punto, ottenute (tramite il sensore) le misure delle posizioni x_i , possiamo ottenere le velocità. Come già fatto per l'esperienza del carrello, per evitare la presenza di termini di correlazione, calcoleremo le velocità usando coppie di posizioni e senza mai usare la stessa posizione due volte:

$$v_i = \frac{x_{j+1} - x_j}{\Delta T} \quad (19)$$

$$v_{i+1} = \frac{x_{j+3} - x_{j+2}}{\Delta T} \quad (20)$$

E' possibile valutare l'incertezza sulla velocità propagando le incertezze a partire dalla misura di posizione² (solamente di tipo B, dovute alla risoluzione). Tale metodo comporta una forte sottostima delle incertezze. Si potrebbe pensare, conseguentemente, di procedere considerando un termine di tipo A nelle incertezze sulla posizione, ricavato come media delle deviazioni standard in tabella 3. Considerando tale termine, si ottiene una leggera sovrastima delle incertezze³. Preferiamo, in tutti i casi, procedere con le incertezze a posteriori.

Mostriamo ora i grafici delle velocità in funzione dei tempi per le cinque diverse configurazioni:



²In tutti i casi si è considerata l'incertezza su ΔT trascurabile.

³Si tenga presente che nelle misure di calibrazione il volano viene tenuto con le mani, ed è soggetto a movimenti imposti dallo sperimentatore.

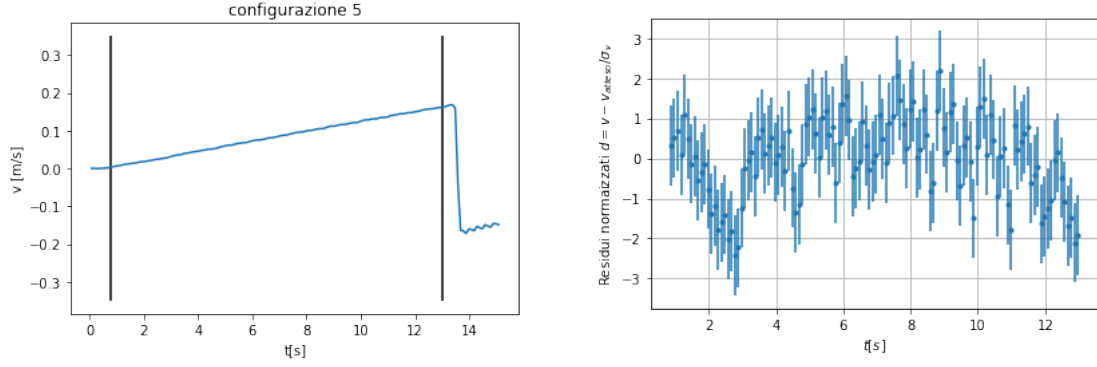


Figura 2: grafici delle velocità in funzione dei tempi per le 5 configurazioni e dei rispettivi residui. Le zone comprese tra le due linee scure sono quelle in cui l'andamento della velocità è pressoché rettilineo.

In realtà, se si osservano attentamente i grafici (in particolare i residui e la configurazione 1), si vede come l'andamento, pur essendo approssimabile con una retta, presenta, periodicamente, dei punti che si discostano da tale andamento atteso, o che oscillano periodicamente. Si ritiene che il disallineamento sia dovuto al fatto che i bulloni che sono stati via via aggiunti, pur avendo masse simili, non avevano masse identiche: ciò ha comportato che il centro di massa si spostasse leggermente dall'asse di rotazione, e quindi che il momento della forza peso causasse una accelerazione non uniforme nel corso della rotazione. Tuttavia, come si vede dallo studio dei residui, queste piccole oscillazioni non compromettono l'andamento rettilineo: nessun punto, infatti, è a più di due o al massimo tre sigma dal valore atteso.

Avendo valutato le incertezze a posteriori, non procediamo con un test del χ^2 . Di seguito riportiamo in una tabella i valori del coefficiente angolare m estrapolato dal fit, che in questo caso rappresenta l'accelerazione, con la rispettiva incertezza.

numero di coppie	accelerazione [m/s^2]	incertezza [m/s^2]
1	0.0383	0.0002
3	0.0269	0.0001
5	0.0207	0.0001
7	0.0169	0.0001
10	0.0132	0.0001

Tabella 8: tabella riassuntiva delle accelerazioni con relative incertezze ottenute dai fit per le diverse configurazioni.

3.3 Calcolo del momento dell'attrito e del momento di inerzia

Sappiamo che vale la relazione:

$$\frac{1}{a} = \frac{mr^2 + I_0}{mgr^2 - M_a r} + \frac{2m_b R^2}{mgr^2 - M_a r} \cdot n = A + Bn \quad (21)$$

dove m indica la massa del pesetto appeso al filo, r è il raggio del rocchetto, I_0 è il momento d'inerzia del disco, g l'accelerazione di gravità che si suppone nota senza incertezza e pari a $9.803 m/s^2$, m_b indica la massa del singolo bullone, M_a è il momento d'inerzia della forza d'attrito e R è la distanza tra il centro del disco e il centro dei fori dello stesso. Da questa relazione si evince che sussiste una relazione di linearità tra il numero n di coppie di bulloni e l'inverso dell'accelerazione. A partire quindi dalle accelerazioni ricavate nella sezione precedente e riassunte nella tabella 8, è possibile fare un fit lineare dell'inverso delle accelerazioni in funzione del numero n di coppie, così da ottenere A e B , da cui poi estrarre I_0 e M_a . Di seguito riportiamo il fit con i residui:

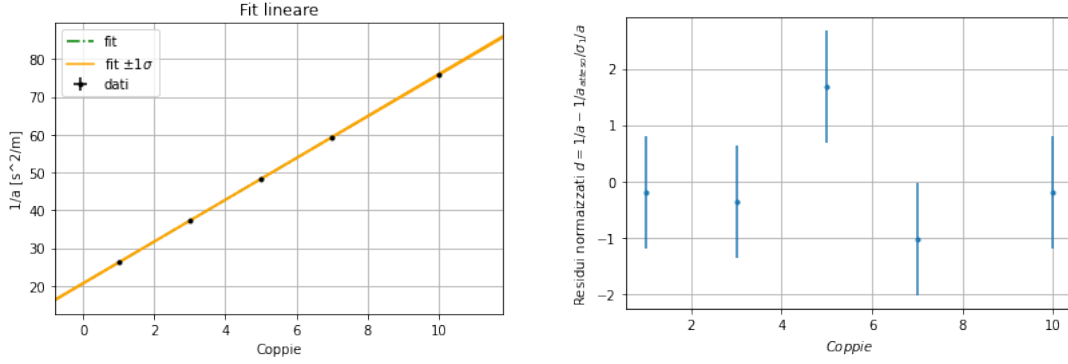


Figura 3: fit lineare di $1/a$ in funzione di n , il numero delle coppie di bulloni e rispettivi residui

In particolare, l'incertezza sull'inverso dell'accelerazione è stata valutata come:

$$\sigma\left[\frac{1}{a_i}\right] = \frac{\sigma[a_i]}{a_i^2} \quad (22)$$

Effettuiamo un test del p-value, fissando un livello di confidenza pari a 0.05. Otteniamo $p\text{-value} = 0.25 > 0.05$, per cui il test è superato. Anche lo studio qualitativo dei residui è positivo. Riportiamo ora in una tabella i risultati del fit:

parametro di interesse	valore	incertezza	unità di misura
B	5.523	0.013	s^2/m
A	20.621	0.055	s^2/m
Cov[A,B]	-0.005	-	s^4/m^2
$\rho[A, B]$	-0.73	-	-

Tabella 9: tabella riassuntiva dei valori ottenuti dal fit

A partire dai risultati del fit è possibile estrarre i valori di M_a e I_0 :

$$E[M_a] = mgr - \frac{2m_b R^2}{Br} = 0.00375 Nm \quad (23)$$

$$E[I_0] = \frac{2Am_b R^2}{B} - mr^2 = 0.01213 kg \cdot m^2 \quad (24)$$

possiamo ottenere l'incertezza su M_a considerando il termine di correlazione tra r e R (la covarianza tra r e R è pari a $\sigma^2[r]$, dalla formula 3):

$$\sigma_{M_a} = \sqrt{(gr)^2 \sigma_m^2 + \left(mg + \frac{2m_b R^2}{Br^2}\right)^2 \sigma_r^2 + \left(\frac{-4m_b R}{Br}\right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{-2R^2}{Br}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{2m_b R^2}{rB^2}\right)^2 \sigma_B^2 + 2\left(mg + \frac{2m_b R^2}{Br^2}\right)\left(\frac{-4m_b R}{Br}\right)\sigma_r^2}$$

analogamente, possiamo ottenere anche l'incertezza su I_0 , nella quale dovremo tenere in considerazione, oltre alla correlazione tra r e R , anche la correlazione tra B e A :

$$\sigma_{I_0} = \sqrt{\left(\frac{2m_b R^2}{B}\right)^2 \sigma_A^2 + \left(\frac{2AR^2}{B}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{4Am_b R}{B}\right)^2 \sigma_R^2 + (-r^2)^2 \sigma_m^2 + (-2mr)^2 \sigma_r^2 + \left(\frac{-2Am_b R^2}{B^2}\right)^2 \sigma_B^2 + 2\left(\frac{2m_b R^2}{B}\right)\left(\frac{-2Am_b R^2}{B^2}\right)Cov[A, B] + 2(-2mr)\left(\frac{4Am_b R}{B}\right)\sigma_r^2}$$

otteniamo, come migliori stime:

$$M_a = (0.00375 \pm 0.00053) Nm \quad (25)$$

$$I_0 = (0.01213 \pm 0.00011) kg \cdot m^2 \quad (26)$$

3.4 Calcolo del momento di inerzia e compatibilità con il valore ottenuto

Oltre alle misure eseguite in 3.2.1, abbiamo eseguito anche la misura dal centro del disco fino alla fine dello stesso, utilizzando la squadra. Avendo effettuato una singola misura, si ottiene per il raggio d dell'intero disco:

$$d = (19.600 \pm 0.065)cm = (0.19600 \pm 0.00065)m$$

Misuriamo anche lo spessore del disco, usando il calibro a nonio:

$$z = (0.00200 \pm 0.00006)m = (2.00 \pm 0.06)mm \quad (27)$$

Possiamo calcolare il momento di inerzia del disco usando la formula:

$$I = \frac{Md^2}{2} = \frac{\rho\pi zd^4}{2} = 0.01252kgm^2 \quad (28)$$

Dove z indica lo spessore del disco, ρ è la densità dell'alluminio che si suppone nota senza incertezze e pari a $2700 kg/m^3$. A partire da questa formula, considerando che tutte le misure sono indipendenti, possiamo stimare l'incertezza come:

$$\sigma_I = \sqrt{(2\rho\pi zd^3)^2\sigma_d^2 + (\frac{\rho\pi d^4}{2})^2\sigma_z^2} = 0.00036kgm^2 \quad (29)$$

Possiamo confrontare questo valore ottenuto del momento di inerzia con quello ottenuto nella sezione precedente:

$$Z = \frac{|I - I_0|}{\sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{I_0}^2}} = 1.03 \quad (30)$$

e concludere quindi che le due misure sono compatibili.

3.5 Studio del moto del volano in presenza di attrito laminare del mezzo

Per quanto riguarda l'apparato sperimentale si è avuto cura di montare le palette in modo radiale (parallele a 2 a 2) così da ottenere coppie di forze antiparallele di uguale intensità ed allo stesso tempo il massimo attrito con l'aria. Sappiamo valere la relazione:

$$v_{lim} = \frac{mgr^2 - M_a r}{kr^2} \quad (31)$$

Al fine di verificare sperimentalmente che, dopo un certo Δt , la velocità si stabilizzi su un valore v_{lim} sono stati acquisiti i dati relativi alle posizioni in modo diretto tramite un sensore collegato ad un calcolatore del laboratorio come descritto in sezione 2 e, da questi, con la stessa procedura descritta al punto 3.2.2 (equazioni 19 e 20) e con la stessa accortezza di rendere le misure tra loro scorrelate, abbiamo derivato le velocità con le relative incertezze (sempre seguendo la procedura descritta al punto 3.2.2). Di seguito una tabella contenente i parametri d'interesse derivanti dal fit della velocità rispetto al tempo ed il grafico relativo alle velocità insieme ai residui derivanti dal fit:

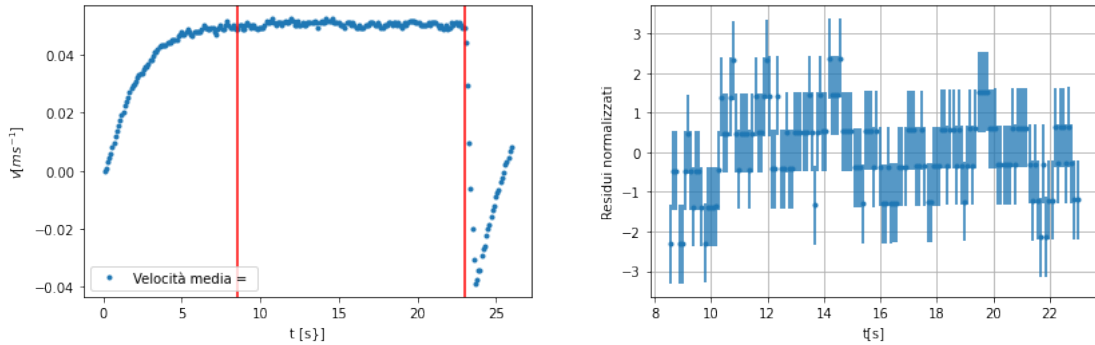


Figura 4: Andamento di v_{att} in funzione del tempo insieme ad i residui derivanti dal fit lineare di v_{lim} vs t . Le barre rosse delimitano l'intervallo che si è preso in considerazione per il fit e per questo descrivendo il fit ci si riferisce a v_{lim} e non a v_{att} .

parametro di interesse	valore	incertezza	unità di misura
m_v	-0.0011	0.0016	ms^{-2}
c_v	0.0507	0.0003	ms^{-1}

Tabella 10: Tabella riassuntiva dei valori ottenuti dal fit di $v_{lim}vst$

Per questo fit sono state utilizzate le incertezze a posteriori per ovviare ad un problema di sottostima delle incertezze. Questa scelta risulta ragionevole considerando l'assenza di misure ripetute e quindi l'obbligatorietà di considerare la sola incertezza di tipo B legata alle posizioni (opportunamente propagata⁴). Avendo effettuato il passaggio alle incertezze a posteriori, non procediamo con un test del χ^2 .

Il motivo della scelta dell'intervallo delimitato dalle sbarre rosse risiede nella volontà di considerare solo il tratto in cui la velocità del volano si assesta su una velocità limite costante.

Come si può vedere dal grafico dei residui, quasi nessuno dei punti si discosta di più di $\pm 2\sigma$ dall'andamento piatto atteso, inoltre, il valore m_v (riportato in tabella 10) risulta compatibile con il valore nullo:

$$|Z_{m_v}| = \left| \frac{m_v - 0}{\sigma_{m_v}} \right| = 0.7$$

di conseguenza è lecito considerare il valore dell'intercetta c_v ⁵ sull'asse delle y come stima di v_{lim} :

$$v_{lim} = c_v \pm \sigma_{c_v} = (0.0507 \pm 0.0003)ms^{-1}$$

A partire da questa stima e dall'equazione 31 è possibile fare una stima anche del valore k e della sua incertezza⁶:

$$k = \frac{mgr^2 - M_ar}{v_{lim}r^2} \quad (32)$$

$$\sigma_k = \sqrt{\left(\frac{M_a}{v_{lim}r^2}\right)^2\sigma_r^2 + \left(\frac{g}{v_{lim}}\right)^2\sigma_m^2 + \left(\frac{1}{v_{lim}r}\right)^2\sigma_{M_a}^2 + \left(\frac{M_a - mgr}{v_{lim}^2r}\right)^2\sigma_{v_{lim}}^2 + 2gr\sigma_m + \sqrt{+2\left(mg + \frac{2m_bR^2}{Br^2} - \frac{m_bR}{Br}\right)\sigma_r^2}} \quad (33)$$

Da cui:

$$k = (103.6 \pm 1.1)kg s^{-1}$$

4 Studio della perdita di energia potenziale gravitazionale per effetto dell'attrito

Effettuiamo una singola misura, nella configurazione 1 (3.2.2), del moto completo di discesa e risalita del volano. In particolare, attendiamo che esso si fermi del tutto prima di terminare l'acquisizione dati. Riportiamo un grafico della posizione della massa m in funzione del tempo:

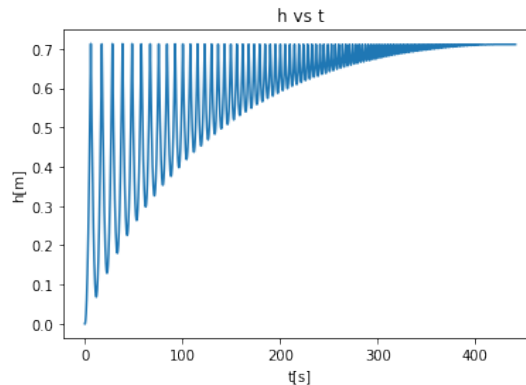


Figura 5: Posizione in funzione del tempo. Come visibile dal grafico, il volano inverte numerose volte il suo moto, prima di arrestarsi.

⁴si rimanda sempre al paragrafo 3.2.2

⁵Si fa qui riferimento al valore di c ottenuto tramite fit lineare riportato in tabella 10

⁶Nel calcolo di questa incertezza si è tenuto conto dei termini $Cov[Ma,m]$ e $Cov[Ma,r]$ oltre che all'implicito termine $Cov[R,r]$ il quale risulta necessario per la corretta valutazione del termine $Cov[Ma,r]$ come si può vedere dall'equazione 23 del paragrafo 3.3

Ricaviamo, per mezzo di un calcolatore, i massimi e minimi locali di tale curva, tramite i quali è possibile valutare h_i , l'altezza raggiunta dalla massa m all' i -esima risalita. Definiamo:

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{h_i - h_{i+1}}{h_i} \quad (34)$$

Con l'obiettivo di verificare l'indipendenza dal tempo di tale rapporto, ne calcoliamo il valore per ogni indice i .

Buona parte dei dati ottenuti si discosta eccessivamente dagli altri valori, in maniera casuale e non riproducibile: per evitare una selezione arbitraria dei valori validi, osserviamo che la maggior parte di essi presentano un ordine di grandezza pari a 10^{-2} , di conseguenza tutti gli altri⁷ vengono esclusi. Riportiamo un grafico del rapporto $\Delta h/h$ in funzione del tempo:

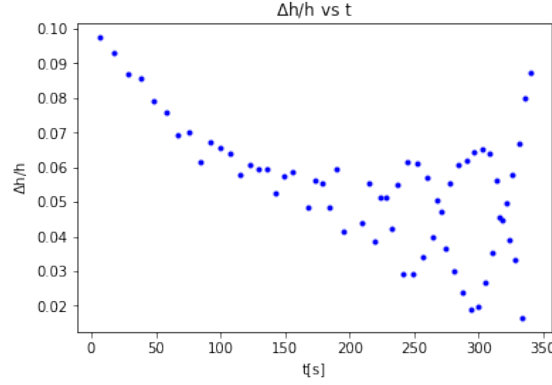


Figura 6: $\Delta h/h$ in funzione del tempo.

Dal grafico, si notano grandi fluttuazioni dei valori calcolati a partire dai 200 secondi, prima non presenti. Escludiamo tutti i punti oltre tale intervallo temporale, riportiamo un nuovo (e definitivo) andamento, insieme ad un istogramma dei dati:

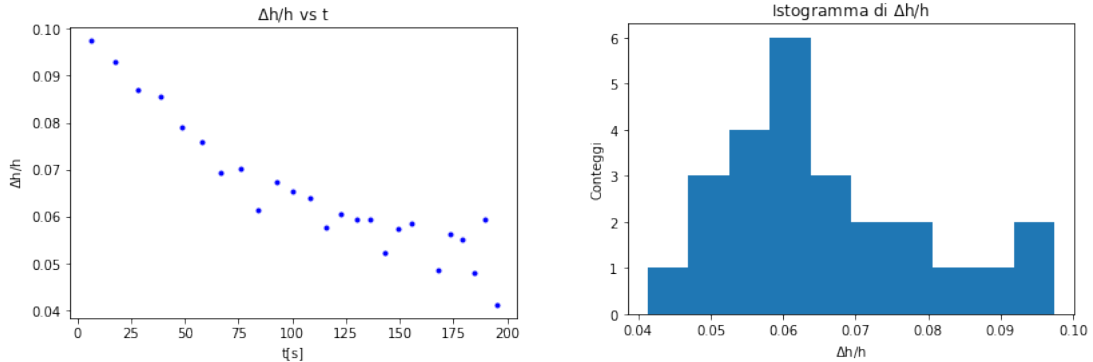


Figura 7: Andamento di $\Delta h/h$ in funzione del tempo sulla sinistra. Sulla destra, un istogramma dei dati.

Differentemente da quanto aspettato, si conclude che il rapporto $\Delta h/h$ dipende dal tempo, secondo un andamento funzionale non evidente. Si ritiene che tale osservazione rientri nei limiti sperimentali: in particolare, nell'istante di inversione del moto, il filo (molto sottile) è soggetto ad un'estensione variabile nel tempo, poiché dipendente dalla velocità raggiunta dalla massa m .

Tuttavia, siamo ancora interessati ad estrarre dai dati un valore ragionevole di $\Delta h/h$, con la relativa incertezza. Effettuiamo una stima conservativa, evitando di propagare le incertezze⁸: non potendo concludere l'invarianza del misurando, si ritiene ragionevole considerare il valore medio come miglior stima, e la deviazione standard campionaria come incertezza, divisa per la radice del numero di misure, estratta a partire dall'istogramma. E' noto, difatti, che una distribuzione statistica approssima sempre meglio una distribuzione di probabilità. Con le formule 7 e 8 (dividendo per \sqrt{N}) otteniamo:

⁷Si osserva che i valori non validi sono praticamente tutti quelli appartenenti alla coda di destra.

⁸Ciò comporterebbe una forte sottostima, a causa delle numerose fluttuazioni del misurando.

$$\frac{\Delta h}{h} = (0.0652 \pm 0.0028) \quad (35)$$

Dalla scheda dell'esperienza è nota la relazione:

$$M_{a_2} = \frac{mgr\Delta h/h}{2 - \Delta h/h} \quad (36)$$

da cui, propagando le incertezze con la formula 2, si ottiene:

$$\sigma[M_{a_2}] = \sqrt{\left(\frac{gr\Delta h/h}{2 - \Delta h/h}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{mg\Delta h/h}{2 - \Delta h/h}\right)^2 \sigma_r^2 + \left(\frac{mgr}{(2 - \Delta h/h)^2}\right)^2 \sigma^2[\Delta h/h]} \quad (37)$$

otteniamo:

$$M_{a_2} = (0.0020 \pm 0.0001)Nm \quad (38)$$

Effettuiamo un test di ipotesi per valutare la compatibilità tra M_a e M_{a_2} , tramite la versione analoga della formula 14; otteniamo:

$$z = 3.21 \quad (39)$$

da cui si conclude che i due valori non sono compatibili. Ancora una volta, si ritiene che ciò sia dovuto ai limiti sperimentali, ed in particolare ai numerosi effetti casuali ed imperfezioni sistematiche agenti nel moto di inversione del volano.