

# Laboratorio di Meccanica

## PP4-Contatore- Misura della frequenza di fenomeni radioattivi

PP4-Contatore-B2-07-Touschek

18 Maggio 2022

Matricola	2019980	1998347	1998521	2008402
Presenza	X	X	X	X
Misure	X	X	X	X
Analisi	X	X	X	X
Tabelle	X	X	X	X
Grafici	X	X	X	X
Software	X	X	X	X
Relazione	X	X	X	X

Tabella 1: Tabella delle attività svolte dagli studenti del gruppo.

## 1 Scopo dell'esperienza

- Misura dei conteggi per unità di tempo di rumore ambientale (strumentale e radioattività ambientale) per un contatore Geiger-Mueller.
- Misura dei conteggi per unità di tempo dovuti alla radiazione emessa da un blocco di tufo
- Misura dei conteggi per unità di tempo dovuti ai raggi cosmici
- Misura della radioattività di un cristallo di LYSO

## 2 Apparato sperimentale

- Un blocco di tufo
- Un cristallo di LYSO
- Un contatore Geiger-Mueller la cui superficie sensibile è di circa  $15 \text{ cm}^2$

## 3 Sequenza operazioni sperimentali

### 3.1 Misura dei conteggi per unità di tempo del fondo (disposizione orizzontale)

In questa sezione abbiamo effettuato 5 set da 50 misure ripetute di conteggio per  $\Delta t = 1, 2, 3, 4, 10 \text{ s}$ . Abbiamo avuto cura di lasciare invariata la posizione del contatore e di tenerlo ad una distanza sufficiente dal blocco di tufo così da non influenzare la misura del fondo. Di seguito riportiamo la tabella con i valori ottenuti:

CONTEGGI TOTALI					
$\Delta t_1 = 1s$	$\Delta t_2 = 2s$	$\Delta t_3 = 3s$	$\Delta t_4 = 4s$	$\Delta t_5 = 10s$	$\Delta T_{tot} = 1000s$
55	110	162	201	569	$x_{tot} = 1097$

Tabella 2: Tabella riassuntiva dei conteggi totali per ciascun tempo  $\Delta t_i$ . Il tempo totale di misurazione corrisponde a 50 volte l'intervallo considerato.

### 3.1.1 Stima di $\lambda$ e del tasso di conteggio $r$

Si assume che tutti i conteggi siano distribuiti secondo una poissoniana<sup>1</sup> con uguale rate ma diverso  $\Delta t$ . Per stimare  $\lambda_i$  per ogni intervallo  $\Delta t_i$ , avendo effettuato misure ripetute si può procedere nel seguente modo: a partire da  $N = 50$  osservazioni indipendenti consideriamo una singola osservazione che sia la somma delle  $N$  osservazioni tutte eseguite durante uno stesso  $\Delta t_i$ . Si considerano le variabili casuali  $X_{i,tot} = \sum_{k=1}^{50} X_k$ , dove  $X_k$  sono i conteggi ottenuti in una singola misura e gli intervalli di tempo totali  $\Delta T_{i,tot} = 50\Delta t_i$ . Le variabili  $X_{i,tot}$  sono sempre distribuite secondo poissoniane: per stimare  $\lambda_{i,tot}$  si può quindi applicare un'inferenza poissoniana. Poiché per ogni  $i$  il numero di conteggi totali  $x_{i,tot}$  è molto maggiore di 10 (tabella 2), possiamo approssimare le distribuzioni di Poisson con distribuzioni normali. Effettuando inferenza bayesiana, otteniamo:

$$\lambda_{i,tot} = x_{i,tot} \pm \sqrt{x_{i,tot}} \quad (1)$$

Poiché per ogni set di  $N$  misure tutti gli intervalli di tempo  $\Delta t_i$  sono uguali tra loro, vale la relazione:  $\lambda_i = \frac{\lambda_{i,tot}}{N}$ , quindi effettuando la propagazione delle incertezze si ottiene:

$$\lambda_i = \frac{x_{i,tot}}{50} \pm \frac{\sqrt{x_{i,tot}}}{50} \quad (2)$$

Per un processo di Poisson nel dominio dei tempi vale inoltre la relazione  $\lambda = r\Delta t$ , assumendo trascurabile l'incertezza sugli intervalli  $\Delta t_i$ , si stimano le rate  $r_i$  e le relative incertezze tramite la seguente formula:

$$r_i = \frac{E[\lambda_i]}{\Delta t_i} \pm \frac{\sigma[\lambda_i]}{\Delta t_i} = \frac{x_{i,tot}}{50\Delta t_i} \pm \frac{\sqrt{x_{i,tot}}}{50\Delta t_i} \quad (3)$$

	$\Delta t_1 = 1s$	$\Delta t_2 = 2s$	$\Delta t_3 = 3s$	$\Delta t_4 = 4s$	$\Delta t_5 = 10s$	unità
$\lambda$	$1.10 \pm 0.15$	$2.20 \pm 0.21$	$3.24 \pm 0.25$	$4.02 \pm 0.28$	$11.38 \pm 0.48$	-
$r$	$1.10 \pm 0.15$	$1.10 \pm 0.10$	$1.08 \pm 0.08$	$1.005 \pm 0.070$	$1.138 \pm 0.048$	$s^{-1}$

Tabella 3: Stime del coefficiente  $\lambda$  e del tasso di conteggi al secondo  $r$  per ogni ogni intervallo  $\Delta t$ .

Tramite la seguente formula si può ora studiare la compatibilità tra le diverse misure del tasso di conteggio  $r_i$ . Assumendo compatibili coppie di misure il cui coefficiente  $Z$  è minore di 2, tutte le misure risultano compatibili:

$$Z = \frac{E[r_i] - E[r_j]}{\sqrt{\sigma_{r_i}^2 + \sigma_{r_j}^2}} \quad (4)$$

	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_5$
$r_1$	-	0.0	0.12	0.58	-0.24
$r_2$	-	-	0.15	0.75	-0.33
$r_3$	-	-	-	0.68	-0.60
$r_4$	-	-	-	-	-1.6

Tabella 4: Coefficiente di compatibilità  $Z$  tra le misure di rate. La tabella si legge ad incrocio: ad ogni entrata corrisponde il coefficiente  $Z$  tra le misure che identificano l'entrata stessa.

<sup>1</sup>Sono verificate le tre condizioni per un processo di Poisson:  $P("1 \text{ conteggio in } \Delta t") = r\Delta t$ , per ogni intervallo piccolo  $\Delta t$   $P("misurare più di un conteggio in \Delta t") \ll P$  e "1 conteggio in  $\Delta t_i$ " non influenza "1 conteggio in  $\Delta t_{ij}$ ".

### 3.1.2 Stima del miglior tasso di conteggio

Tenendo conto di tutte le misure di conteggio del fondo (in posizione orizzontale) effettuate è possibile fornire la migliore stima del tasso di conteggio  $r_{best}$ . Si procede in maniera analoga a quando descritto in precedenza: si considera la variabile casuale  $X_{tot} = \sum_{i=1}^5 X_{i,tot}$  anch'essa distribuita secondo una poissoniana e il tempo totale  $\Delta T_{tot} = \sum_{i=1}^5 \Delta T_{i,tot}$ . Si effettua quindi un'inferenza poissoniana (in regime gaussiano) sul parametro  $\lambda_{tot}$  e da questo si ottiene  $r_{tot} \equiv r_{best}$ :

$$\lambda_{tot} = x_{tot} \pm \sqrt{x_{tot}} \quad (5)$$

$$r_{best} = \frac{E[\lambda_{tot}]}{\Delta T_{tot}} \pm \frac{\sigma[\lambda_{tot}]}{\Delta T_{tot}} = \frac{x_{tot}}{\Delta T_{tot}} \pm \frac{\sqrt{x_{tot}}}{\Delta T_{tot}} = (1.097 \pm 0.033) \text{ conteggi/secondo} \quad (6)$$

Grazie al risultato appena ottenuto è possibile effettuare una previsione di distribuzione statistica delle misure di conteggio per ogni intervallo di tempo  $\Delta t_i$ . Si assume che nell'intervallo di tempo  $\Delta t^2$  la variabile casuale  $X$  = "numero di conteggi in  $\Delta t$ " sia distribuita secondo una poissoniana con parametro  $\lambda = r_{best} \Delta t$ . Di conseguenza la probabilità che  $X$  si realizzi in un particolare valore  $x_j$  è:

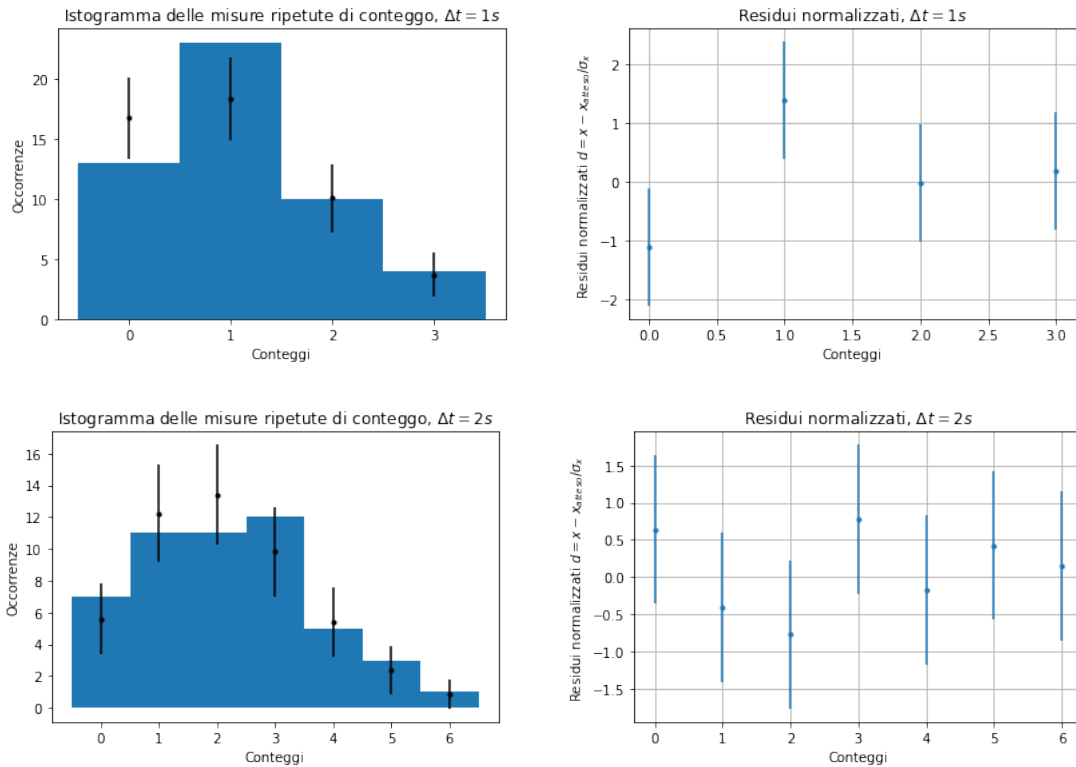
$$P_j(X = x_j) = P_\lambda(x_j) = \frac{\lambda^{x_j} e^{-\lambda}}{x_j!} \quad (7)$$

A partire da ogni valore  $x_j$  è possibile costruire la variabile casuale  $K_j$  = "numero di occorrenze  $x_j$  in  $n$  prove" distribuita secondo una binomiale di parametri  $n$  e  $P_j$  (avendo effettuato 50 misure ripetute in questo caso  $n = 50$ ). Risulta quindi che la previsione è pari al valore atteso della variabile  $K_j$  e l'incertezza sulla previsione è pari all'incertezza su  $K_j$ <sup>3</sup>:

$$E[K_j] = nP_j \quad (8)$$

$$\sigma[K_j] = \sqrt{nP_j(1 - P_j)} \quad (9)$$

Applicando questo procedimento per ogni realizzazione delle variabili  $X_i$  è possibile sovrapporre agli istogrammi dei dati l'andamento atteso, cioè la previsione con la relativa incertezza, come in figura 1.



<sup>2</sup>Viene omissso il pedice  $i$  per non appesantire la notazione.

<sup>3</sup>È pienamente corretto far uso di previsioni di distribuzione statistica solo nei casi in cui si hanno a disposizione molte realizzazioni della variabile casuale  $X$  (numero elevato di bin), in questo modo le variabili  $K_j$  non risultano correlate tra loro.

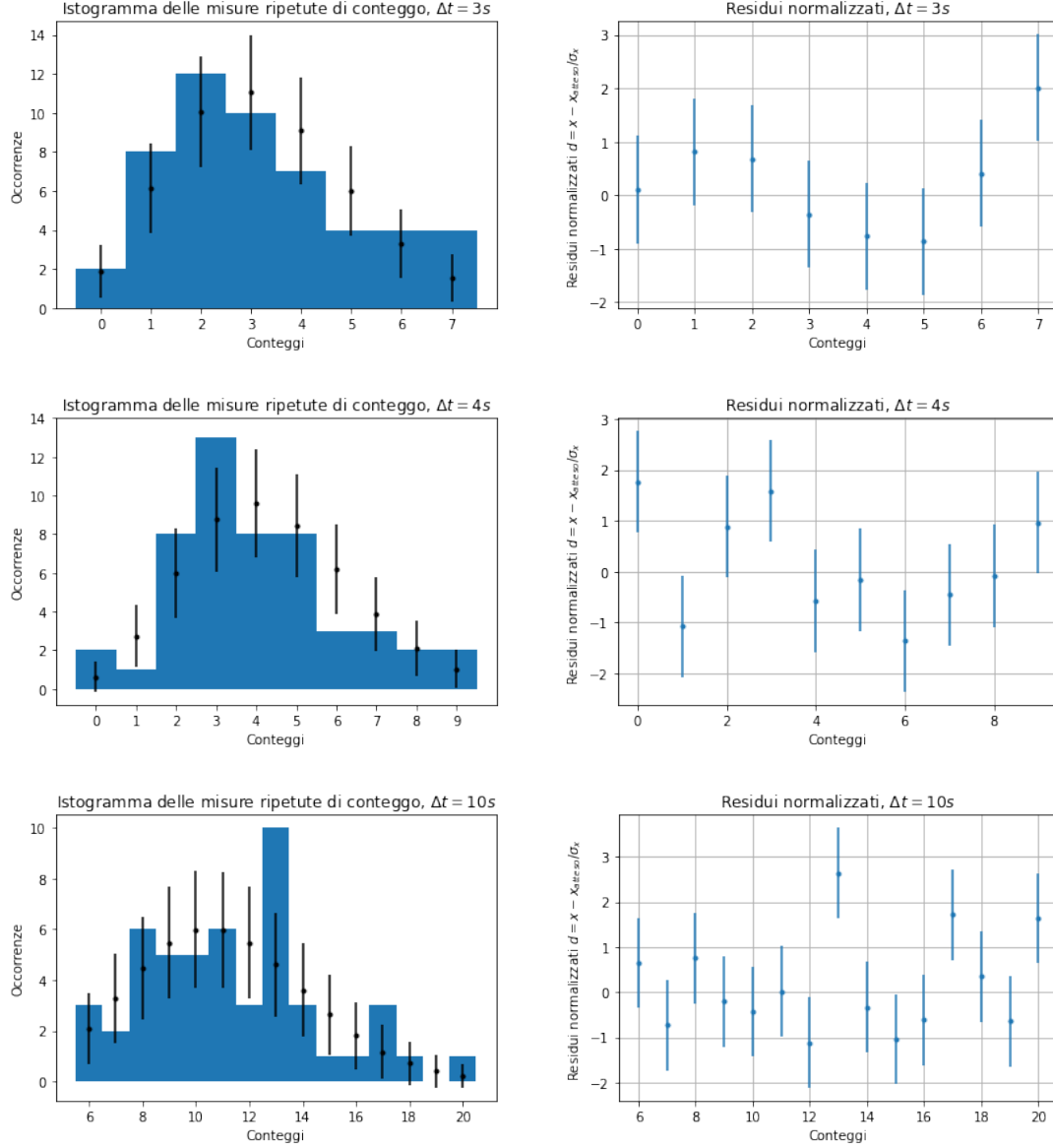


Figura 1: Istogrammi del numero di conteggi per ogni intervallo di tempo  $\Delta t_i$  a cui è sovrapposto l'andamento atteso per una distribuzione di Poisson con tasso di conteggio pari ad  $r_{best}$ . Si può notare che per alcuni bins la barra dell'incertezza raggiunge valori negativi, non vi è alcun significato fisico in questo poiché le variabili binomiali sono definite nell'intervallo  $0 \leq x \leq n$ . Accanto ad ogni istogramma è riportato il grafico dei residui normalizzati ottenuto confrontando le misure ottenute con l'andamento atteso.

Effettuando uno studio dei residui si può notare che le misure sono generalmente in accordo con l'andamento atteso. Poiché le variabili casuali  $K_j$  sono distribuite secondo delle binomiali  $B_{n, P_j}(k_j)$ , è possibile associare all'intervallo  $E[K_j] \pm \sigma[K_j]$  una probabilità  $P \simeq 68\%$  solo nel limite gaussiano della binomiale, cioè quando, per un dato bin, vale  $nP_j > 10$  e  $n(1 - P_j) > 10$ .

### 3.1.3 Frazione di conteggi

Supponendo soddisfatte le condizioni per definire il numero di conteggi in un determinato intervallo di tempo  $T$  come processo di Poisson, la densità di probabilità di osservare il primo conteggio dopo  $t$  è descrivibile dalla funzione (coincidente con la probabilità di avere 0 conteggi):

$$P_\lambda(0) = \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = e^{-rt} \quad (10)$$

In analogia al caso dell'attesa del primo conteggio, la funzione che descrive la probabilità di osservare 0 e 1 conteggi in un intervallo di tempo  $t$ , ovvero il tempo di attesa per il secondo conteggio è data da:

$$P_\lambda(0) + P_\lambda(1) = \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} + \frac{\lambda^1 e^{-\lambda}}{1!} = e^{-rt} + (rt)e^{-rt} \quad (11)$$

Eseguendo inferenza binomiale sul parametro  $k = \text{"numero di volte che ci sono stati 0 (oppure 0 e 1) conteggi in } N \text{ misure ripetute (prove)"}$ , negli intervalli di tempo  $\Delta t_i = (1, 2, 3, 4)s$  si ottiene che, essendo in alcuni casi  $k < 10$  e quindi non potendo procedere con un'approssimazione gaussiana, il valore della probabilità associata al parametro  $k_i$  è<sup>4</sup>:

$$E[P_i] = \frac{k_i + 1}{N + 2} \quad \sigma[P_i] = \sqrt{\frac{E[P_i](1 - E[P_i])}{N + 3}} \quad (12)$$

Nei seguenti grafici abbiamo confrontato il valore delle probabilità relative ai conteggi ottenute sperimentalmente con l'andamento atteso delle funzioni precedentemente descritte:

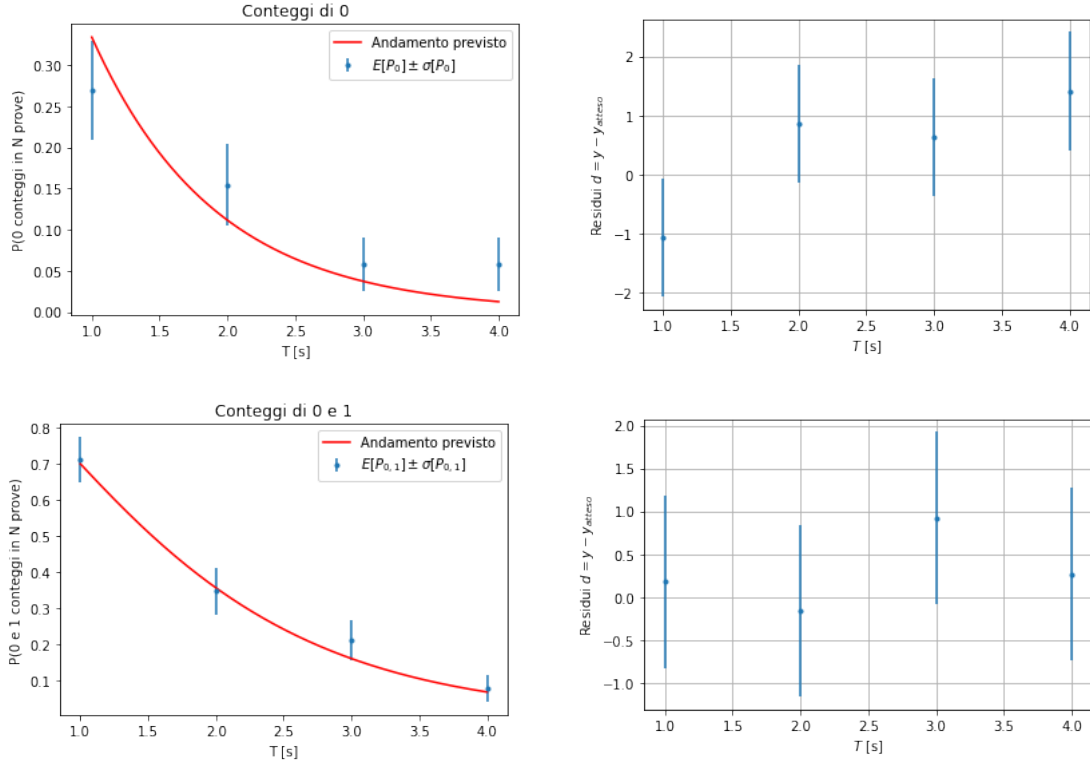


Figura 2: Confronto tra andamento previsto e valori della probabilità associata al numero dei conteggi ottenuti sperimentalmente e studio dei residui associato

Come si può vedere dallo studio dei residui, nonostante le fluttuazioni casuali nessun valore si discosta di più di 2 sigma dal valore atteso: di conseguenza ogni risultato risulta coerente con le aspettative. Si noti che non tutte le barre di incertezza riportate hanno lo stesso significato probabilistico: laddove non valido il limite gaussiano della distribuzione binomiale<sup>5</sup> non si può attribuire a tale intervallo una probabilità pari al 68%. In tal caso è possibile presentare il risultato fissando un confident level: C.L.=95% e calcolare l'upper limit  $P_o$  tale che  $P(P \simeq P_o) = C.L.$ .

È inoltre riportato in figura 3 in scala semilogaritmica il grafico della frazione di "0 conteggi" e la curva attesa:

<sup>4</sup>Usando il teorema di Bayes

<sup>5</sup>Ovvero, ove il numero di conteggi registrati risulta minore di 10.

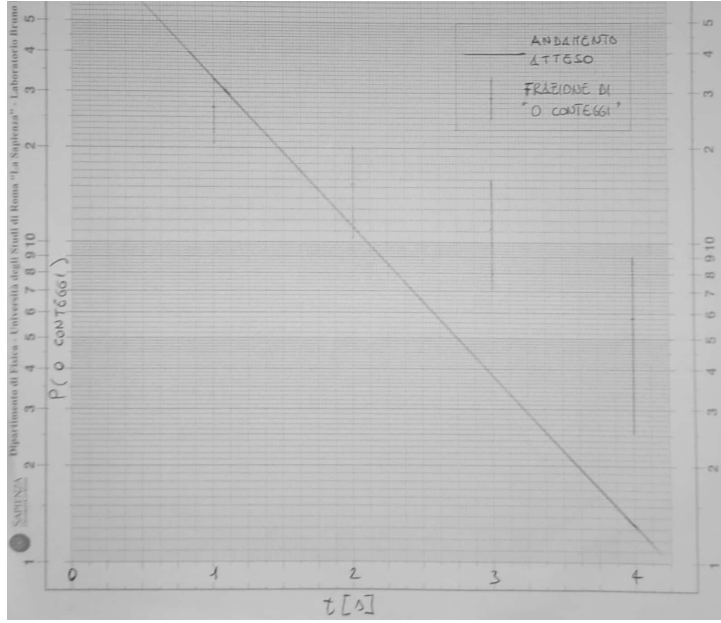


Figura 3: Grafico equivalente a 2 per la frazione di "0 conteggi" in scala semilogaritmica.

### 3.1.4 Integrali numerici per i valori di r

Facendo inferenza Poissoniana<sup>6</sup> sul parametro  $r$  (al quale da ora in poi, per motivi di leggibilità, ci riferiremo con  $R$ ), ricordando la relazione secondo la quale  $R = \frac{\lambda}{\Delta t}$  e tramite la formula di Stirling, si può ottenere che, in buona approssimazione:

$$f(R|x) = \frac{(R\Delta t)^x e^{-R\Delta t}}{x!} \Delta t \simeq (R\Delta t)^x e^{-R\Delta t} \frac{\Delta t}{\sqrt{2\pi}} e^x x^{-x} x^{-\frac{1}{2}} \quad (13)$$

Il valore atteso e la deviazione standard sono ottenibili come:

$$E[R] = \int_0^\infty R f(R) dR \quad \sigma[R] = \sqrt{E[R^2] - E[R]^2} \quad (14)$$

I risultati ottenuti relativi agli intervalli di tempo<sup>7</sup>  $\Delta t_1 = 50s$ ,  $\Delta t_4 = 200s$  e  $\Delta t_{tot} = 1000s$  sono:

$$R_1 = (1.12 \pm 0.15)s^{-1} \quad R_4 = (1.010 \pm 0.068)s^{-1} \quad R_{tot} = (1.098 \pm 0.032)s^{-1} \quad (15)$$

Di seguito il grafico relativo alle 3 posterior PDF considerate:

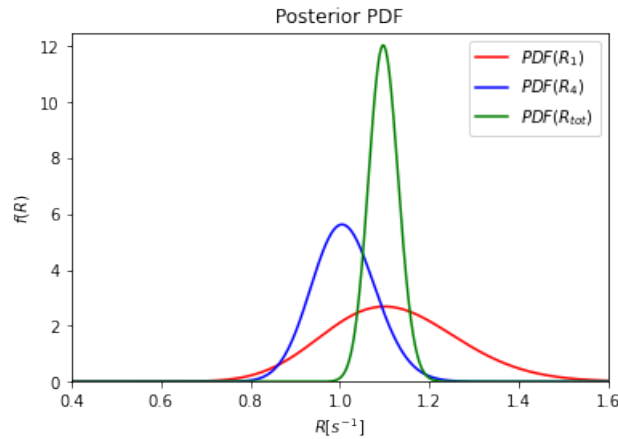


Figura 4: Posterior PDF relative agli intervalli da rispettivamente: 1 s, 4s e 20s

Facendo il confronto con i rate trovati al punto 3.1.1, attraverso la formula 4 si ottiene:

<sup>6</sup>A partire da likelihood poissoniana  $f(x|\lambda)$  dove  $x$  è il numero di conteggi e scegliendo prior vaga (costante).

<sup>7</sup>Sono riportati gli intervalli totali di tempo, ottenuti tramite la somma degli  $N=50$   $\Delta t_i$  tutti uguali tra loro, rispettivamente di 1,4 e 20 secondi. In relazione ai tempi totali vengono considerati col parametro  $\lambda_i$  i conteggi totali nelle  $N$  misurazioni relativi ai rispettivi  $\Delta t_i$ .

	$r_1$	$r_4$	$r_{best}$
$R_1$	-0.10	-	-
$R_4$	-	-0.055	-
$R_{tot}$	-	-	-0.024

Tabella 5: Coefficiente di compatibilità  $Z$  tra le misure di rate. La tabella si legge ad incrocio: ad ogni entrata corrisponde il coefficiente  $Z$  tra le misure che identificano l'entrata stessa.

## 4 Misura dei conteggi per unità di tempo dovuti al fondo ed al fondo più il tufo

Per un tempo  $\Delta t = 600s$  abbiamo effettuato le misure di conteggi per tre diverse configurazioni: una con il contatore lontano dal blocco di tufo e disposto orizzontalmente (nel farlo, abbiamo usato le stesse accortezze già descritte in 3.1), una con il contatore lontano dal blocco di tufo e disposto verticalmente ed infine una con il contatore disposto sopra al blocco di tufo e disposto orizzontalmente. Indicheremo ciascuna di queste misure, rispettivamente, come  $x_o, x_v$  e  $x_{s+f}$ .

Di seguito riportiamo, in una tabella, il risultato di queste misure dirette:

CONTEGGI		
$x_o$	$x_v$	$x_{s+f}$
675	580	1388

Tabella 6: tabella riassuntiva delle misure dirette effettuate

Notiamo immediatamente che i conteggi per  $x_o$  sono maggiori di quelli di  $x_v$ . Ciò è dovuto al fatto che, mentre entrambe le configurazioni riescono a registrare in uguale misura le radiazioni ambientali, la configurazione verticale permette di cogliere solo la metà dei raggi cosmici rispetto a quella orizzontale. Otteniamo perciò che ciascuna misura è quindi il frutto di conteggi dovuti a diversi contributi:

1.  $x_o$  = radiazione ambientale + raggi cosmici
2.  $x_v$  = radiazione ambientale +  $\frac{1}{2}$  raggi cosmici
3.  $x_{s+f}$  = radiazione ambientale + raggi cosmici + radiazione del tufo

Facendo inferenza poissoniana (in approssimazione gaussiana), è immediato estrarre i valori di  $\lambda_i$  da ciascuna delle differenti configurazioni:

$$\lambda_o = x_o \pm \sqrt{x_o} = 675 \pm 26 \quad (16)$$

$$\lambda_v = x_v \pm \sqrt{x_v} = 580 \pm 24 \quad (17)$$

$$\lambda_{s+f} = x_{s+f} \pm \sqrt{x_{s+f}} = 1388 \pm 37 \quad (18)$$

Combinando i risultati ottenuti per  $\lambda_i$  con il sistema di equazioni che scaturisce dalle condizioni sulla radiazione ambientale, la radiazione dei raggi cosmici e la radiazione del tufo, ricordando inoltre che  $r = \lambda/\Delta T$ , possiamo estrarre i valori della rate della radiazione cosmica  $r_c$ , la rate della radiazione ambientale  $r_A$  e la rate della radiazione del tufo  $r_T$ :

$$r_c = \frac{2(\lambda_o - \lambda_v)}{\Delta T} = 19.0 \text{conteggi/min} \quad (19)$$

$$r_A = \frac{2\lambda_v - \lambda_o}{\Delta T} = 48.5 \text{conteggi/min} \quad (20)$$

$$r_T = \frac{\lambda_{s+f} - \lambda_o}{\Delta T} = 71.3 \text{conteggi/min} \quad (21)$$

Essendo le varie misure dirette tra loro indipendenti, e considerando l'incertezza su  $\Delta T$  trascurabile, è possibile stimare le incertezze usando il solito metodo:

$$\sigma r_c = \sqrt{\left(\frac{\partial r_c}{\partial \lambda_o}\right)^2 \sigma_{\lambda_o}^2 + \left(\frac{\partial r_c}{\partial \lambda_v}\right)^2 \sigma_{\lambda_v}^2} = \frac{2\sqrt{\lambda_o + \lambda_v}}{\Delta T} = 7.1 \text{conteggi/min} \quad (22)$$

$$\sigma r_A = \sqrt{\left(\frac{\partial r_A}{\partial \lambda_v}\right)^2 \sigma_{\lambda_v}^2 + \left(\frac{\partial r_A}{\partial \lambda_o}\right)^2 \sigma_{\lambda_o}^2} = \frac{\sqrt{4\lambda_o + \lambda_v}}{\Delta T} = 5.5 \text{conteggi/min} \quad (23)$$

$$\sigma r_T = \sqrt{\left(\frac{\partial r_T}{\partial \lambda_{s+f}}\right)^2 \sigma_{\lambda_{s+f}}^2 + \left(\frac{\partial r_T}{\partial \lambda_o}\right)^2 \sigma_{\lambda_o}^2} = \frac{\sqrt{\lambda_{s+f} + \lambda_o}}{\Delta T} = 4.5 \text{ conteggi/min} \quad (24)$$

Possiamo quindi mostrare i risultati dell'inferenza su  $r_A$ ,  $r_c$  e  $r_T$  in un'unica tabella riassuntiva:

quantità considerata	valore (conteggi/min)	incertezza (conteggi/min)
$r_A$	19.0	7.1
$r_c$	48.5	5.5
$r_T$	71.3	4.5

Tabella 7: tabella riassuntiva dell'inferenza su  $r_A$ ,  $r_c$  e  $r_T$

## 5 Studio della radioattività del Lyso

### 5.1 Metodo 1

L'obiettivo è stabilire se il Lyso sia o meno un materiale radioattivo, con un livello di probabilità pari a  $2\sigma$  prima, e a  $5\sigma$  dopo. Prima di procedere, effettuiamo misure di solo fondo, con il contatore posto in orizzontale, per ulteriori 30 minuti: dall'insieme di questa misura e di tutte le precedenti <sup>8</sup> stimiamo la rate  $r_F$  come descritto in sezione 3.1.2. Otteniamo:

$$r_F = (1.112 \pm 0.019) s^{-1} \quad (25)$$

come si vedrà, l'incertezza sul fondo determina la possibilità di raggiungere, effettuando misure di fondo+Lyso in un generico intervallo di tempo  $\Delta T$ , un certo livello di probabilità. In generale, è possibile confrontare le rate di due processi (indipendenti) con la formula:

$$z = \frac{r_{L+F} - r_F}{\sqrt{(\sigma[r_{L+F}])^2 + (\sigma[r_F])^2}} \quad (26)$$

Supponiamo di conoscere, da misure precedenti,  $r_F$  e  $\sigma[r_F]$ , e di effettuare una misura di conteggi di fondo+Lyso in un generico intervallo di tempo  $\Delta T$ . Supponendo di operare in limite Gaussiano, vale (inferenza bayesiana):

$$r_{L+F} = \frac{x_{tot}}{\Delta T} \pm \frac{\sqrt{x_{tot}}}{\Delta T} \quad (27)$$

da cui si ricava la relazione:

$$\sigma^2[r_{L+F}] = \frac{r_{L+F}}{\Delta T} \quad (28)$$

sostituiamo tale relazione nell'equazione 26. Manipolando opportunamente si ottiene:

$$z(\Delta T) = \sqrt{\Delta T} \frac{r_{L+F} - r_F}{\sqrt{r_{L+F} + \Delta T \sigma^2[r_F]}} \quad (29)$$

ovvero un'espressione di  $z$  in funzione di  $\Delta T$ , generico tempo di misurazione. Effettuiamo una breve misura di conteggi di fondo+Lyso, con la quale stimeremo  $r_{L+F}$ : a partire da tale misura, utilizzando la relazione 29, e assumendo che tale valore sia costante a prescindere dall'intervallo  $\Delta T$  di misurazione, stimeremo il tempo necessario a raggiungere un livello di probabilità pari a  $2\sigma$ . La misurazione è stata effettuata per 10 minuti; otteniamo con il solito metodo:

$$r_{L+F} = (1.173 \pm 0.044) s^{-1} \quad (30)$$

Riportiamo un grafico della funzione:

---

<sup>8</sup>Effettuate nella medesima configurazione.



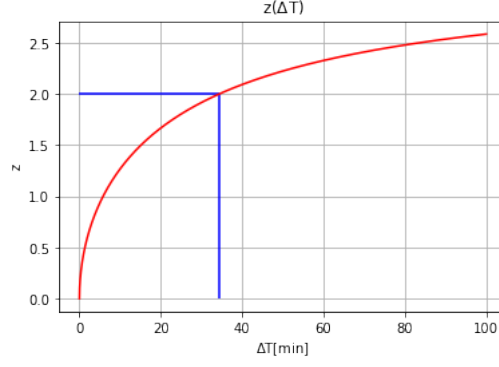


Figura 5: In figura, oltre all'andamento della funzione, è riportata una linea orizzontale corrispondente a  $z=2$ , e la corrispondente proiezione sull'asse delle ascisse.

come visibile dal grafico, stimiamo un tempo pari a circa 35 minuti per completare la misura. Per valutare l'incertezza su  $\Delta T$ , o fornire un intervallo di valori accettabili, si potrebbe propagare l'incertezza su  $z$  a partire dalla formula 29, e costruire delle bande di incertezza in funzione di  $\Delta T$ : con lo stesso metodo grafico si potrebbe stabilire quale sia un intervallo di tempi ragionevoli. Nel nostro caso, l'incertezza su  $r_F$  comporta un andamento quasi piatto, tanto da rendere tale operazione priva di alcun significato, vista l'ampiezza dell'intervallo che si troverebbe. Ci limitiamo quindi a stimare un singolo valore, che sarà ritenuto puramente indicativo. Effettuiamo misure di fondo+Lyso per ulteriori 40 minuti, arrivando ad un tempo di misurazione totale pari a 50 minuti. In totale, sono stati registrati (in 50 minuti) 3530 conteggi, che consentono di stimare una rate pari a  $r_{L+F} = (1.176 \pm 0.020)s^{-1}$ . Utilizziamo la formula 33 per valutare la compatibilità, otteniamo:

$$z = 2.32 \quad (31)$$

Come visibile dal grafico, ed osservabile analiticamente, la funzione presenta un asintoto orizzontale ( $z \approx 3.5$ ). In conclusione, con le misure effettuate, non è possibile raggiungere un livello di confidenza pari a  $5\sigma$ . Riteniamo che sia dovuto a due principali motivi:

- Dimensioni ridotte del campione
- Insufficienza di misure di fondo

## 5.2 Metodo 2

Per ovviare ai problemi discussi in sezione 5.1, supponiamo di effettuare, in un tempo  $\Delta T$  generico, misure dei conteggi provenienti dal solo fondo (contatore in posizione orizzontale), e misure dovute al fondo ed al Lyso (medesima configurazione). A partire dai conteggi ottenuti, effettuando un'inferenza Poissoniana (ragionevolmente in approssimazione Gaussiana), sarebbe possibile risalire ai valori, con relativa incertezza, di  $\lambda_F$  e  $\lambda_{L+F}$  (rispettivamente fondo e fondo+Lyso). Infine, sarebbe possibile studiarne la compatibilità con la formula nota:

$$z = \frac{\lambda_{L+F} - \lambda_F}{\sqrt{(\sigma[\lambda_{L+F}])^2 + (\sigma[\lambda_F])^2}} = \frac{\lambda_{L+F} - \lambda_F}{\sqrt{\lambda_{L+F} + \lambda_F}} \quad (32)$$

Utilizzando la relazione generale  $\lambda_i = r_i \Delta T$  (con  $\Delta T$  privo di incertezza) e sostituendo, si ottiene:

$$z(\Delta T) = \sqrt{\Delta T} \frac{r_{L+F} - r_F}{\sqrt{r_{L+F} + r_F}} \quad (33)$$

ovvero un'espressione del coefficiente di compatibilità come funzione di  $\Delta T$ . Imponendo, in maniera generica,  $z(\Delta T) = Z$ , si ottiene:

$$\Delta T = Z^2 \frac{r_{L+F} + r_F}{(r_{L+F} - r_F)^2} \quad (34)$$

A questo punto, volendo stimare l'intervallo di tempo  $\Delta T$  necessario a raggiungere un livello di probabilità pari a  $5\sigma$ , sostituendo i valori ottenuti in sezione 5.1, si ottiene:

$$\Delta T_{5\sigma} \approx 256[\text{min}] = 4.27[h] \quad (35)$$

tale stima si basa sulla supposizione che  $r_{L+F}$  e  $r_F$  siano (ragionevolmente) costanti, ovvero che effettuando misurazioni per un tempo più lungo si ottengano valori compatibili con quelli già misurati. In particolare, ancora una volta, ci limitiamo a stimare un tempo ragionevole. Si noti la differenza sostanziale tra questo procedimento e il precedente, dovuta alla supposizione di effettuare misure di fondo e fondo+Lyso nel medesimo intervallo di tempo. In questo senso, questa stima costituisce un indicatore del tempo di misurazione di solo fondo necessario a consentire il raggiungimento di un livello di probabilità pari a  $5\sigma$ , utilizzando il metodo 1.

## 6 Quesiti

**Qual è la densità di probabilità del tempo di attesa del secondo conteggio per un processo di Poisson? Dimostrare il risultato a partire dall'equazione 11.**

E' nota l'equazione:  $P(\text{"di osservare il secondo conteggio dopo } T") = P(t_2 > T) = e^{-\frac{T}{\tau}} + \frac{T}{\tau} e^{-\frac{T}{\tau}}$ . Evidentemente, vale la relazione:

$$P(t_2 < T) = 1 - P(t_2 > T) = 1 - (e^{-\frac{T}{\tau}} + \frac{T}{\tau} e^{-\frac{T}{\tau}}) \quad (36)$$

che coincide con l'espressione della cumulativa della funzione  $f(t)$ , densità di probabilità del tempo di attesa per osservare due conteggi. E' nota la relazione:

$$F(T) = \int_0^T f(t) dt \quad (37)$$

da cui, per il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$f(t) = \frac{dF}{dt} \quad (38)$$

svolgendo tale derivata si ottiene:

$$f(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{T}{\tau}} - \frac{1}{\tau} e^{-\frac{T}{\tau}} + \frac{T}{\tau^2} e^{-\frac{T}{\tau}} = \frac{T}{\tau^2} e^{-\frac{T}{\tau}} \quad (39)$$

Notiamo che tale espressione coincide (come atteso) con quella di una distribuzione di Erlang, di parametri  $\tau = 1/r$  e  $k = 2$ .