

Laboratorio di Meccanica

PP2-Molla : Misura della costante elastica di una molla e dell'accelerazione di gravità

PP2-Molla-B2-07-Touschek

04 Aprile 2022

Matricola	2019980	1998347	1998521	2008402
Presenza	X	X	X	X
Misure	X	X	X	X
Analisi	X	X	X	X
Tabelle	X	X	X	X
Grafici	X	X	X	X
Software	X	X	X	X
Relazione	X	X	X	X

Tabella 1: Tabella delle attività svolte dagli studenti del gruppo.

1 Scopo dell'esperienza

- Misura della costante elastica (k) di una molla con due metodi diversi.
- Misura dell'accelerazione di gravità (g) con due metodi diversi.

2 Apparato sperimentale

L'apparato sperimentale consiste in una molla appesa ad un supporto con carta millimetrata. Si stimerà la misura della costante elastica e l'accelerazione di gravità tramite il moto oscillatorio della molla.

2.1 Strumenti di misura

Strumento	Portata	Risoluzione Δx con interpolazione	Incertezza costruzione
Carta millimetrata	280 mm	0.5mm	-
Cronometro digitale	-	0.01s	-
Bilancia digitale	2000g	0.1g	0.1g

Tabella 2: Caratteristiche degli strumenti usati. Sono inoltre riportate le incertezze legate alla costruzione dello strumento, indicate sulla scheda tecnica (incertezze di tipo B).

Oltre agli strumenti elencati in tabella, si disponeva anche di un righello, con il quale però non sono state effettuate misure: è servito solo ad allineare la molla alla carta millimetrata per consentire una lettura più precisa dell'allungamento (vedi sezione 3). Oltre all'incertezza di tipo B associata allo strumento (come indicata sulla scheda tecnica), riportata in tabella solo per bilancia digitale, l'incertezza di tipo B sarà valutata anche con il termine (qualora necessario):

$$\sigma_B = \frac{Ris}{\sqrt{12}} \quad (1)$$

2.2 Campioni

- 10 dischetti di dimensioni simili che si possono appendere alla molla. Nel corso delle operazioni sperimentali saranno utilizzati per studiare l'allungamento della molla e la durata dei periodi di oscillazione al variare della massa.

3 Sequenza operazioni sperimentali

3.1 Metodo 1

L'obiettivo è stimare il valore dell'accelerazione di gravità g e della costante elastica k della molla tramite misure ripetute di elongazioni della molla e di periodi di oscillazione della stessa.

Come prima cosa, sono state eseguite misure ripetute del peso dei dischetti in due blocchi separati, uno da 5 elementi ed uno da 10 (si veda sezione 2.2). D'ora in poi faremo riferimento ai due blocchi come m_1 e m_2 . Si è poi proceduto misurando l'allungamento rispetto alla posizione di equilibrio della molla. Per farlo, prima m_1 poi m_2 sono stati appesi alla molla e si è misurata la posizione di equilibrio del sistema rispetto ad un'origine fissata nella maniera più conveniente per eseguire le misure. La scelta dell'origine arbitraria è giustificata dal fatto che per calcolare g e k dovremo calcolare la differenza tra le due posizioni d'equilibrio (d'ora in avanti x_1 e x_2): tale differenza è quindi indipendente dall'origine. Anche per x_1 e x_2 sono state eseguite misure ripetute. Riuscire a leggere esattamente la posizione dei dischetti sulla carta millimetrata ha comportato notevoli difficoltà:

1. la molla continuava a compiere leggere oscillazioni, che rendevano difficile trovare l'esatta posizione di equilibrio;
2. spesso non si riusciva a posizionare la riga perfettamente perpendicolare alla carta millimetrata: ciò rendeva difficile effettuare una misura precisa;

Queste difficoltà hanno ovviamente inciso sulla precisione delle misure.

Terminate queste operazioni, si è proceduto con la misura dei periodi, eseguite con il cronometro digitale(2). Prima m_1 e poi m_2 sono state appese alla molla, e sono state eseguite, per ciascuna massa, 40 misure di 10 periodi. Per ottenere la misura di una singola oscillazione, dunque, bisognerà dividere tali valori per 10 (alla singola oscillazione della massa m_1 e m_2 ci riferiremo, rispettivamente, come T_1 e T_2 , mentre alle misure di tempo effettuate come t_1 e t_2). Prima di far partire il cronometro, abbiamo sempre aspettato che la molla completasse un paio di oscillazioni, sia per essere sicuri che si stabilizzasse sia per evitare ritardi nell'attivazione del cronometro. Il tempo di reazione umana non costituisce un elemento di cui tener conto in tale esperimento. Abbiamo poi ripetuto le stesse operazioni misurando per 10 volte 40 periodi della molla con le masse m_1 e m_2 (alle misure ci riferiamo come t_1^* e t_2^* , alla singola oscillazione, ottenuta dividendo per 40 i valori misurati, ci riferiremo come T_1^* e T_2^*).

Di seguito riportiamo in una tabella tutti i valori di queste misure. Nella penultima riga viene inoltre riportata la media delle misure, ottenuta con la formula

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad (2)$$

e nell'ultima la deviazione standard campionaria, ottenuta con

$$s_{N-1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} \quad (3)$$

Entrambi questi valori torneranno utili nella discussione delle incertezze in 3.1.1

n	m ₁ [g]	m ₂ [g]	x ₁ [mm]	x ₂ [mm]	t ₁ [s]	t ₂ [s]	t ₁ [*] [s]	t ₂ [*] [s]
1	392.2	797.4	40.0	121.0	5.94	8.20	23.68	32.97
2	392.1	797.4	40.0	121.0	5.96	8.27	23.84	32.94
3	392.2	797.4	40.0	121.5	5.88	8.27	23.71	33.07
4	3.292	797.4	40.0	121.5	5.84	8.19	23.81	32.78
5	392.1	797.4	40.0	121.5	5.97	8.28	23.84	32.88
6	392.3	797.4	40.0	122.0	5.94	8.19	23.78	32.95
7	393.3	797.4	40.0	121.5	5.87	8.35	23.75	32.96
8	393.3	797.3	40.0	122.0	5.96	8.21	23.70	32.82
9	393.3	797.3	40.0	122.0	6.00	8.27	23.71	32.95
10	393.3	797.3	-	-	5.94	8.28	23.75	33.03
11	393.3	797.3	-	-	5.97	8.28	-	-
12	393.3	797.3	-	-	5.94	8.20	-	-
13	393.3	797.3	-	-	6.08	8.33	-	-
14	393.3	797.3	-	-	5.93	8.27	-	-
15	393.3	797.3	-	-	5.91	8.21	-	-
16	393.3	797.3	-	-	5.94	8.22	-	-
17	393.3	797.3	-	-	5.97	8.25	-	-
18	393.3	797.3	-	-	5.95	8.13	-	-
19	393.3	797.3	-	-	5.96	8.13	-	-
20	393.3	797.3	-	-	6.00	8.18	-	-
21	-	-	-	-	6.00	8.26	-	-
22	-	-	-	-	5.97	8.34	-	-
23	-	-	-	-	5.90	8.12	-	-
24	-	-	-	-	5.95	8.14	-	-
25	-	-	-	-	5.89	8.33	-	-
26	-	-	-	-	5.89	8.20	-	-
27	-	-	-	-	5.87	8.32	-	-
28	-	-	-	-	5.94	8.21	-	-
29	-	-	-	-	5.89	8.15	-	-
30	-	-	-	-	5.94	8.20	-	-
31	-	-	-	-	5.88	8.20	-	-
32	-	-	-	-	5.97	8.27	-	-
33	-	-	-	-	5.95	8.20	-	-
34	-	-	-	-	6.03	8.22	-	-
35	-	-	-	-	5.94	8.25	-	-
36	-	-	-	-	5.94	8.19	-	-
37	-	-	-	-	5.89	8.14	-	-
38	-	-	-	-	5.97	8.26	-	-
39	-	-	-	-	5.90	8.26	-	-
40	-	-	-	-	6.03	8.22	-	-
\bar{x}	392.19 [g]	797.33 [g]	40.0 [mm]	121.55 [mm]	5.94 [s]	8.23 [s]	23.76 [s]	32.94 [s]
S_n	0.0366 [g]	0.047 [g]	-	0.36 [mm]	0.049 [s]	0.060 [s]	0.056 [s]	0.084 [s]

Tabella 3: Misure ripetute di massa, posizione di equilibrio e tempo di oscillazione della molla. Al termine della tabella sono inserite anche la media delle misure \bar{x} e la deviazione standard S_{N-1}

3.1.1 Stima delle incertezze associate alle misure dirette

- **Massa:** essendo $S_n \ll Ris$ (vedere tabelle 3 e 2), l'incertezza di tipo A viene ritenuta trascurabile. L'incertezza totale si stima sommando in quadratura l'incertezza di tipo B indicata nella scheda tecnica dello strumento con quella dovuta alla risoluzione:

$$\sigma_{m_1} = \sigma_{m_2} = \sqrt{\left(\frac{Ris}{\sqrt{12}}\right)^2 + \sigma_B^2} \quad (4)$$

$$\sigma_{m_1} = \sigma_{m_2} = 0.10g \quad (5)$$

All'inizio delle operazioni sperimentali sono state effettuate misure di masse assunte note: non essendo state rilevate fluttuazioni o discordanze con tali valori, la bilancia si assume ben calibrata.

- **Allungamento:** non essendo state rilevate fluttuazioni dalla prima misura della posizione di equilibrio x_1 , l'incertezza si stima esclusivamente tramite il termine 1:

$$\sigma_{x_1} = 0.14mm \quad (6)$$

Per quanto riguarda x_2 , poiché $S_n = 0.36mm$ è confrontabile con la risoluzione dello strumento $Ris = 0.5mm$, l'incertezza totale sull'allungamento x_2 si ottiene sommando in quadratura l'incertezza di tipo A e quella di tipo B:

$$\sigma_{x_2} = \sqrt{\left(\frac{S_n}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(\frac{Ris}{\sqrt{12}}\right)^2} = 0.19mm \quad (7)$$

- **Tempi di oscillazione:** per ogni misura dei tempi di oscillazione le incertezze dovute alla risoluzione del cronometro digitale sono trascurabili ($S_n \gg Ris$). Le incertezze di tipo B sono state stimate a partire dai dati raccolti durante la prima esperienza, riguardanti le misure di tempi noti. Si è ritenuto opportuno modellizzare questa incertezza a partire da un errore massimo $E_{max} = \pm 0.02[s]$. Si tratta, in questo caso, di una distribuzione uniforme: riteniamo che l'incertezza di tipo B su ogni misura possa quindi essere stimata con il termine

$$\sigma_B = \frac{2E_{max}}{\sqrt{12}} \quad (8)$$

Tale termine dovrà essere sommato in quadratura con l'incertezza di tipo A dovuta a misure ripetute (calcolata come S_N/\sqrt{N}). E' importante notare che il termine appena considerato come incertezza di tipo B, è da considerarsi come un errore massimo, variabile a seconda dello sperimentatore e in questo senso non costante durante le misure. Ciò ci consente di stabilire fin da ora che tutte le misure che abbiamo effettuato sono misure tra di loro indipendenti (essendo state effettuate da operatori differenti con misurandi differenti). Otteniamo:

$\sigma_{t_1} [s]$	$\sigma_{t_2} [s]$	$\sigma_{t_1^*} [s]$	$\sigma_{t_2^*} [s]$
0.014	0.015	0.021	0.029

Tabella 4: Incertezze associate alle misure di periodo

3.1.2 Misure di un singolo periodo

Come precedentemente affermato, t_1 e t_2 sono misure di 10 periodi di oscillazione della molla, mentre t_1^* e t_2^* sono misure di 40 periodi. Per ottenere il valore atteso di un singolo periodo è sufficiente dividere la media delle misure per il numero di oscillazioni corrispondenti. Propagare le incertezze da una misura che è n volte una grandezza di interesse permette di ridurre sensibilmente le incertezze: dato $Y = kX$, dalle formule di propagazione si ottiene:

$$\sigma_Y = k\sigma_X \quad (9)$$

Ne consegue che l'incertezza associata ad un singolo periodo, calcolata a partire dalla misura dei periodi di dieci oscillazioni t_1 , è espressa attraverso la seguente formula:

$$\sigma_{T_1} = \frac{\sigma_{t_1}}{10} = 1.4 \cdot 10^{-3}s \quad (10)$$

e si procede in maniera analoga per le altre misure. Nella seguente tabella sono riportati i valori attesi delle misure dei periodi di una singola oscillazione della molla nelle diverse configurazioni, insieme alle relative incertezze:

$T_1 [10^{-2}s]$	$T_2 [10^{-2}s]$	$T_1^* [10^{-2}s]$	$T_2^* [10^{-2}s]$
59.42 ± 0.14	82.29 ± 0.15	59.39 ± 0.053	82.23 ± 0.072

Tabella 5: Periodi di oscillazione della molla con le relative incertezze. Per una questione di leggibilità le misure sono riportate in notazione scientifica.

In figura 1 e 2 riportiamo gli istogrammi delle misure del periodo di una singola oscillazione della molla per 5 e per 10 dischetti:

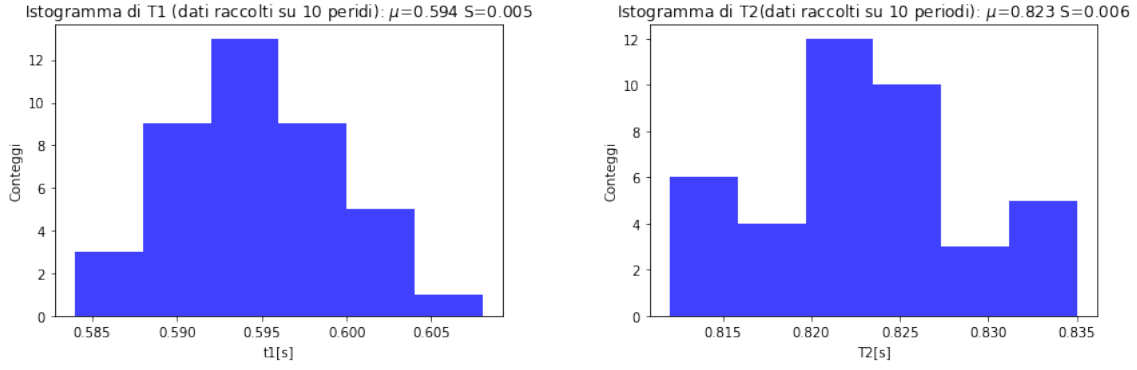


Figura 1: Istogrammi misure del periodo di una singola oscillazione: a sinistra nella configurazione con 5 dischetti, a destra con 10 dischetti, le misure dirette sono effettuate sul tempo complessivo per 10 oscillazioni. Con μ si intende la media dei periodi e con S la deviazione standard campionaria.

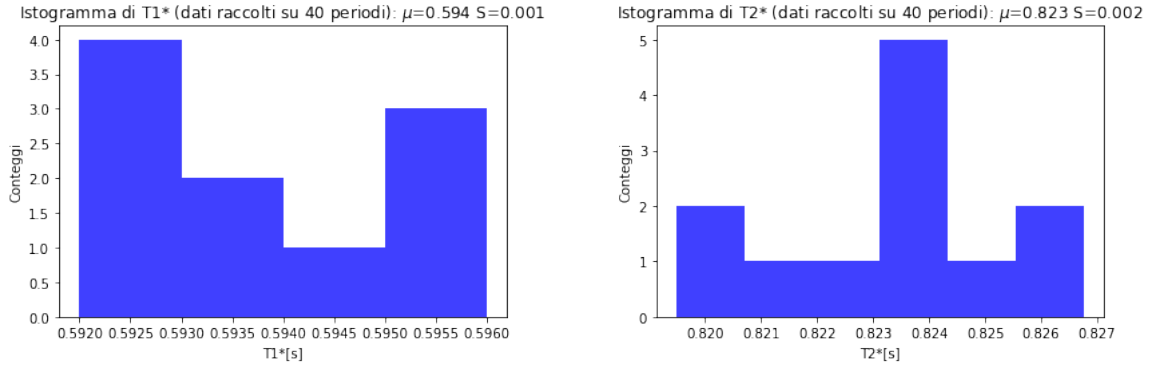


Figura 2: Istogrammi misure del periodo di una singola oscillazione: a sinistra nella configurazione con 5 dischetti, a destra con 10 dischetti, le misure dirette sono effettuate sul tempo complessivo per 40 oscillazioni. Con μ si intende la media dei periodi e con S la deviazione standard campionaria.

3.1.3 Misura della costante elastica della molla

È nota dalla scheda dell'esperienza la seguente formula per il calcolo della costante elastica della molla:

$$k = 4\pi^2 \frac{m_2 - m_1}{T_2^2 - T_1^2} \quad (11)$$

E' possibile calcolare l'incertezza associata alla misura di k tramite le formule di propagazione delle incertezze. In particolare, eseguendo una linearizzazione su k (calcolando cioè una funzione lineare che approssima k in un intorno dei valori attesi delle grandezze misurate), essendo le misure di m_1 , m_2 , T_1 e T_2 tutte indipendenti tra di loro, si può stimare l'incertezza tramite la seguente formula:

$$\sigma_k = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial m_2}\right)^2 \sigma_{m_2}^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial m_1}\right)^2 \sigma_{m_1}^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial T_2}\right)^2 \sigma_{T_2}^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial T_1}\right)^2 \sigma_{T_1}^2} \quad (12)$$

sviluppando le derivate parziali si ottiene:

$$\frac{\partial k}{\partial m_2} = \frac{4\pi^2}{T_2^2 - T_1^2}, \quad \frac{\partial k}{\partial m_1} = -\frac{4\pi^2}{T_2^2 - T_1^2}, \quad \frac{\partial k}{\partial T_2} = -\frac{8\pi^2 T_2 (m_2 - m_1)}{(T_2^2 - T_1^2)^2}, \quad \frac{\partial k}{\partial T_1} = \frac{8\pi^2 T_1 (m_2 - m_1)}{(T_2^2 - T_1^2)^2}$$

Con m_2 , m_1 , T_2 e T_1 si considerano rispettivamente le masse e il periodo di un'oscillazione della molla con 10 e 5 dischetti. Sostituendo i dati numerici nelle formule 11 e 12 si ottiene la seguente stima della costante k :

$$k_1 = (49.34 \pm 0.45) N/m \quad (13)$$

Per stimare k tramite le misure di tempo di 40 oscillazioni si sostituiscono nuovamente i dati facendo attenzione a porre $T_2 = T_2^*$ e $T_1 = T_1^*$:

$$k_2 = (49.18 \pm 0.20) N/m \quad (14)$$

E' possibile confrontare le due misure appena ottenute calcolandone la differenza normalizzata alla somma in quadratura delle incertezze associate. Per due misure a e b qualisiasi la formula è:

$$Z = \frac{a - b}{\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}} \quad (15)$$

Per le due misure di k si ottiene:

$$Z = 0.31 \quad (16)$$

Le misure k_1 e k_2 sono quindi compatibili¹. Si noti che l'incertezza sulla prima misura è maggiore dell'incertezza sulla seconda: $\sigma_{k_1} = 0.45N/m > \sigma_{k_2} = 0.20N/m$, ne segue che la stima k_2 della costante è più precisa della stima k_1 . Apparentemente in contraddizione con quanto appena affermato, osservando le incertezze sulle misure dirette inserite nella tabella 4, si nota che le misure del tempo di 10 oscillazioni (da cui si stima k_1) sono note con maggiore precisione delle misure di tempo di 40 oscillazioni (da cui si stima k_2)². Questa apparente contraddizione si risolve per quanto affermato al punto 3.1.2: per ottenere l'incertezza sulla misura di una grandezza d'interesse a partire da un suo multiplo si applica la formula 9, dove $k = \frac{1}{n}$ e $X = nY$. Per σ_{T_1} e σ_{T_2} $n = 10$, mentre per $\sigma_{T_1^*}$ e $\sigma_{T_2^*}$ $n = 40$. Si può facilmente notare quantitativamente quanto appena dichiarato confrontando le tabelle 4 e 5.

3.1.4 Misura dell'accelerazione di gravità

È nota dalla scheda dell'esperienza la seguente formula per il calcolo dell'accelerazione di gravità g :

$$g = 4\pi^2 \frac{x_2 - x_1}{T_2^2 - T_1^2} \quad (17)$$

In modo analogo a quanto affermato per la costante elastica k si propaga l'incertezza su g tramite la seguente formula:

$$\sigma_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T_2}\right)^2 \sigma_{T_2}^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T_1}\right)^2 \sigma_{T_1}^2} \quad (18)$$

sviluppando le derivate parziali:

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} = \frac{4\pi^2}{T_2^2 - T_1^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial x_1} = -\frac{4\pi^2}{T_2^2 - T_1^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial T_2} = -\frac{8\pi^2 T_2 (x_2 - x_1)}{(T_2^2 - T_1^2)^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial T_1} = \frac{8\pi^2 T_1 (x_2 - x_1)}{(T_2^2 - T_1^2)^2}$$

Sostituendo i dati numerici nelle formule 17 e 18 si ottengono le seguenti stime dell'accelerazione di gravità g :

$$g_1 = (9.931 \pm 0.095)m/s^2 \quad (19)$$

$$g_2 = (9.900 \pm 0.050)m/s^2 \quad (20)$$

Applicando la formula 15 si ottiene che le misure sono tra loro compatibili:

$$Z = 0.29 \quad (21)$$

Anche per queste due misure $\sigma_{g_1} = 0.095m/s^2 > \sigma_{g_2} = 0.050m/s^2$, cioè g_2 è più precisa di g_1 . Poichè, in modo analogo alla costante k , l'accelerazione di gravità g è calcolata in funzione del periodo di oscillazione della molla, le ragioni della differenza di incertezza sono già state chiarite al punto precedente.

3.2 Metodo 2

L'obiettivo è stimare la costante elastica k della molla e l'accelerazione di gravità g , con le relative incertezze, per mezzo di un fit lineare.

Dopo aver opportunamente numerato i dischetti (2.2) sono state eseguite misure di massa e di tempo per diversi sottogruppi degli stessi. In particolare, a partire da un sottogruppo di 3 dischi (fino al gruppo completo di 10 dischi) sono state eseguite misure di massa degli stessi, dell'allungamento della molla e del relativo periodo di oscillazione. Una volta terminate le operazioni per un sottogruppo, si è aggiunto un ulteriore dischetto. La scelta di partire da un gruppo formato da 3 dischi è forzata dal fatto che una quantità minore non permette di osservare allungamenti e di effettuare misure di periodo.

¹Consideriamo due misure o una misura ed un valore noto compatibili per $-2 < Z < 2$.

²La differenza tra le incertezze associate alle misure dirette è dovuta al fatto che all'aumentare del numero di misure ripetute decresce l'incertezza di tipo A e sono state effettuate 40 di misure ripetute di tempo t_1 e t_2 e solamente 10 misure ripetute di tempo t_1^* e t_2^* .

Riportiamo in tabella 6 le misure di allungamento e di massa dei vari sottogruppi:

n	3	4	5	6	7	8	9	10
X_{eq} [m]	0.010	0.027	0.044	0.059	0.075	0.091	0.106	0.122
m [kg]	0.2426	0.3250	0.4051	0.4864	0.5627	0.6403	0.7186	0.7973

Tabella 6: Misure relative alle posizioni di equilibrio ed alle masse di $n=3$ fino a $n=10$ pesetti. Per le misure di allungamento lo zero è ancora una volta arbitrario. Sono state eseguite singole misure poiché non soggette a fluttuazioni rilevabili.

Le misure di periodo sono state effettuate considerando un multiplo composto da 10 periodi di oscillazione, per motivazioni analoghe a quelle discusse in sezione 3.1.2. Riportiamo in tabella 7 le misure effettuate. Per ogni sottogruppo sono state effettuate 20 misure ripetute:

n	$t_3[s]$	$t_4[s]$	$t_5[s]$	$t_6[s]$	$t_7[s]$	$t_8[s]$	$t_9[s]$	$t_{10}[s]$
1	4.75	5.44	6.00	6.62	7.06	7.41	7.91	8.20
2	4.77	5.45	6.01	6.51	6.97	7.53	7.89	8.27
3	4.87	5.47	6.08	6.57	7.03	7.40	7.83	8.27
4	4.95	5.52	6.00	6.62	7.00	7.46	7.84	8.19
5	4.88	5.53	6.03	6.56	7.01	7.44	7.88	8.28
6	4.75	5.47	6.03	6.58	6.96	7.47	7.84	8.19
7	4.95	5.44	6.07	6.53	6.97	7.46	7.85	8.35
8	4.91	5.40	6.01	6.59	7.03	7.52	7.94	8.21
9	4.88	5.47	6.02	6.57	7.00	7.47	7.82	8.27
10	4.75	5.50	6.01	6.59	6.96	7.43	7.81	8.28
11	4.89	5.50	6.07	6.51	7.03	7.39	7.84	8.28
12	4.87	5.52	6.02	6.53	7.03	7.50	7.89	8.20
13	4.84	5.44	6.02	6.56	7.00	7.37	7.81	8.33
14	4.95	5.40	6.03	6.53	7.02	7.40	7.94	8.27
15	4.82	5.53	6.01	6.52	6.95	7.45	7.90	8.21
16	4.91	5.50	6.07	6.53	6.94	7.51	7.84	8.22
17	4.96	5.52	6.10	6.58	6.96	7.46	7.96	8.25
18	4.88	5.50	6.01	6.51	7.02	7.40	7.81	8.13
19	4.84	5.47	6.02	6.56	7.00	7.43	7.88	8.13
20	4.89	5.53	6.07	6.57	7.03	7.44	7.87	8.18
$\bar{t}[s]$	4.865	5.480	6.033	6.552	6.998	7.447	7.867	8.235
$S_{N-1}[s]$	0.068	0.041	0.030	0.032	0.033	0.044	0.045	0.059

Tabella 7: Misure ripetute di 10 periodi con masse crescenti effettuate a partire da 3 pesetti fino ai 10 totali ed aggiungendo un pesetto per ogni set di 20 misurazioni.

3.3 Fit lineare 1

E' nota dalla scheda dell'esperienza la relazione lineare:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m_0}{k} + \frac{4\pi^2 m}{k} = T_0^2 + \alpha_1 m \quad (22)$$

dove con T si intende la durata del singolo periodo di oscillazione. Stimando i parametri T_0^2 e α_1 con le relative incertezze è possibile risalire ai valori di m_0 (massa dell'oscillatore) e di k . Conoscendo la durata di 10 oscillazioni t_i e l'incertezza associata si può risalire al valore atteso di T_i^2 e alla relativa incertezza per mezzo delle formule:

$$T_i^2 = \frac{t_i^2}{100} \quad (23)$$

$$\sigma[T_i^2] = \sigma\left[\frac{t_i^2}{100}\right] = \sqrt{\left(\frac{\partial T_i^2}{\partial t_i}\right)^2 \sigma_{t_i}^2} = \frac{t_i \sigma_{t_i}}{50} \quad (24)$$

L'incertezza su t_i può essere valutata come riportato in sezione 3.1.1, mentre per il valore di t_i si utilizza la media delle misure in tabella 7. Riportiamo nel seguente grafico l'andamento di T^2 vs m , privo delle barre di incertezza per questioni di leggibilità (l'incertezza sulla massa è ancora quella riportata in 5):

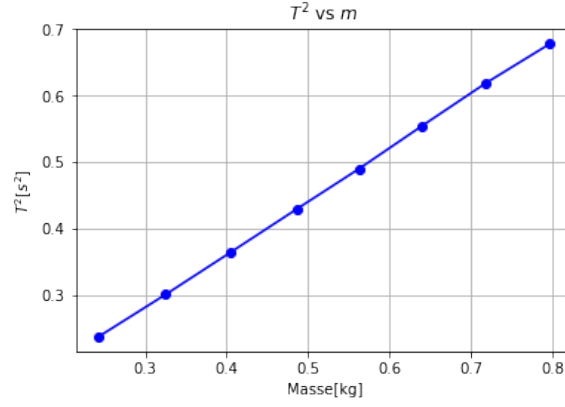


Figura 3: Andamento di T^2 in funzione della massa m

Eseguendo un fit lineare si ottiene:

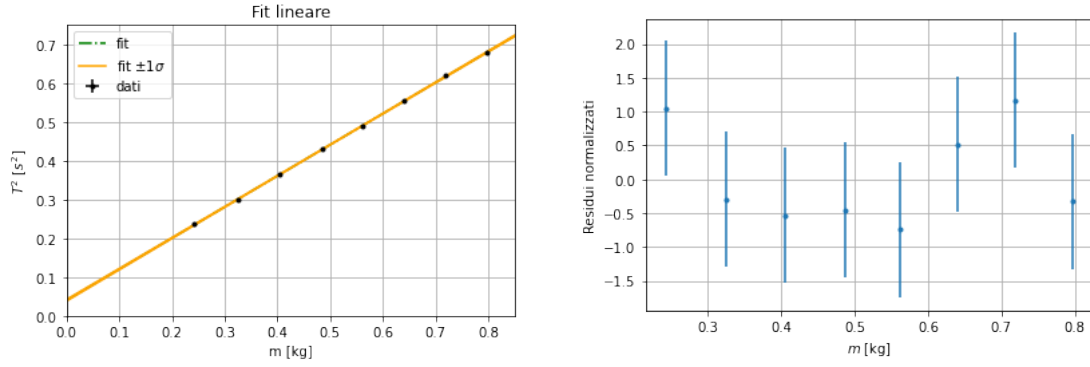


Figura 4: Fit lineare e residui normalizzati. Si ritiene, analizzando i residui, che non sia necessario procedere valutando le incertezze a posteriori.

La miglior stima di α_1 e T_0^2 è:

$$\alpha_1 = (0.8012 \pm 0.0042) \frac{s^2}{kg} \quad (25)$$

$$T_0^2 = (0.0404 \pm 0.0021) s^2 \quad (26)$$

dove T_0^2 è la durata di un singolo periodo al quadrato di un'oscillazione completa, senza masse aggiuntive. Evidentemente, tale parametro è influenzato dalla massa m_0 dell'oscillatore (poiché non ideale). Se l'oscillatore fosse ideale tale periodo sarebbe uguale a zero. E' possibile ricavare k a partire dalla relazione:

$$k = \frac{4\pi^2}{\alpha_1} \quad (27)$$

e valutarne l'incertezza propagando l'incertezza sul coefficiente angolare:

$$\sigma[k] = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial \alpha_1}\right)^2 \sigma^2[\alpha_1]} = \frac{4\pi^2 \sigma[\alpha_1]}{\alpha_1^2} \quad (28)$$

ottenendo:

$$k_3 = (49.27 \pm 0.26) \frac{N}{m} \quad (29)$$

Per valutare m_0 si può usare la relazione:

$$m_0 = \frac{T_0^2 k}{4\pi^2} = \frac{T_0^2}{\alpha_1} \quad (30)$$

da cui, propagando le incertezze (tenendo conto del termine di covarianza):

$$\begin{aligned}
\sigma[m_0] &= \sqrt{\left(\frac{\partial m_0}{\partial T_0^2}\right)^2 \sigma^2[T_0^2] + \left(\frac{\partial m_0}{\partial \alpha_1}\right)^2 \sigma^2[\alpha_1] + 2 \frac{\partial m_0}{\partial T_0^2} \frac{\partial m_0}{\partial \alpha_1} \text{Cov}[T_0^2, \alpha_1]} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^2 \sigma^2[T_0^2] + \left(\frac{-T_0^2}{\alpha_1^2}\right)^2 \sigma^2[\alpha_1] - 2 \frac{T_0^2}{\alpha_1^3} \text{Cov}[T_0^2, \alpha_1]}
\end{aligned} \tag{31}$$

La miglior stima è:

$$m_0 = (0.0504 \pm 0.0028) \text{kg} = (50.4 \pm 2.8) \text{g} \tag{32}$$

Tale parametro rappresenta la massa dell'oscillatore nella sua totalità, ovvero la somma delle masse della molla e del gancio metallico utilizzato per attaccare i dischetti nel corso di tutte le operazioni sperimentali.

3.4 Fit lineare 2

E' nota la relazione lineare:

$$x_{eq} = \left(x_0 + \frac{m_0 g}{k}\right) + \frac{m g}{k} = \overline{x_0} + \alpha_2 m \tag{33}$$

Dai dati in tabella 6 si ricava il seguente grafico (x_{eq} vs m):

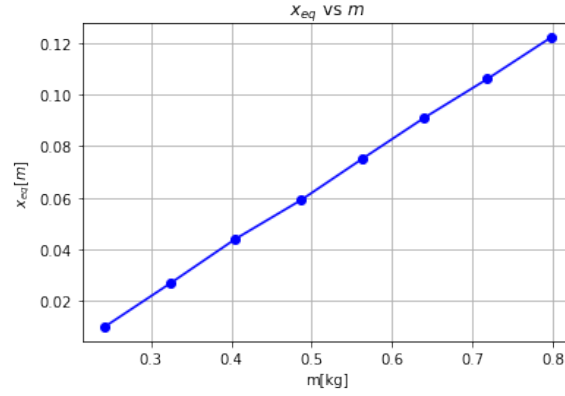


Figura 5: Andamento di x_{eq} in funzione della massa m . Per motivi di leggibilità non sono riportate le barre di incertezza.

L'incertezza sulla singola misura di allungamento può essere valutata con il solo termine:

$$\sigma[x_{eq}] = \frac{Ris}{\sqrt{12}} = 0.00028m \tag{34}$$

dove si è tenuto conto di una risoluzione pari ad 1mm^3 . L'incertezza sulla massa è la medesima riportata in 5.

L'evidente sottostima delle incertezze sulle misure di allungamento ha comportato la necessità di utilizzare le incertezze a posteriori, stimate con il metodo dei residui, nel fit lineare:

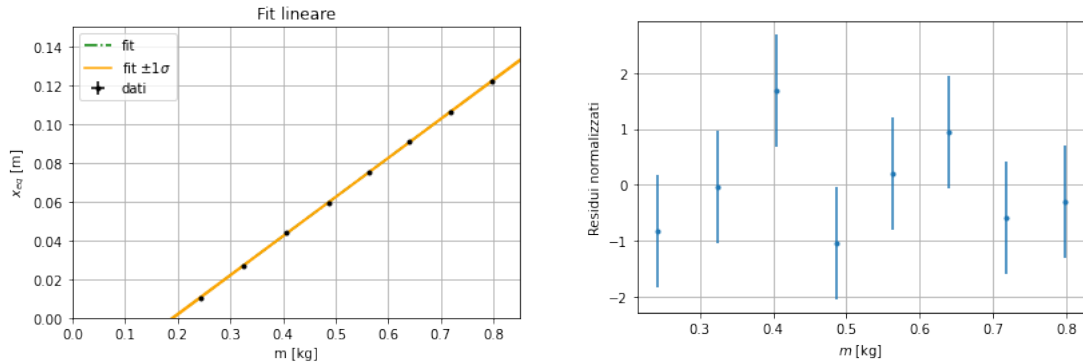


Figura 6: Fit lineare e residui normalizzati (ottenuti con incertezze a posteriori).

³Per le misure integrate di allungamento è stato ritenuto più opportuno evitare di interpolare, come invece è stato fatto per le misure ripetute in sezione 3.1.1

La miglior stima di α_2 e \bar{x}_0 è:

$$\alpha_2 = (0.201 \pm 0.001) \frac{m}{kg} \quad (35)$$

$$\bar{x}_0 = (-0.0384 \pm 0.0005)m \quad (36)$$

Dove \bar{x}_0 rappresenta la posizione a riposo, rispetto allo zero arbitrario, dell'estremo libero dell'oscillatore utilizzato per gli esperimenti. Tale posizione dipende dalla massa m_0 dell'oscillatore, non essendo questo ideale.

Si può ricavare g dalla relazione:

$$g = \frac{4\pi^2\alpha_2}{\alpha_1} \quad (37)$$

con incertezza, ottenuta tramite le incertezze relative:

$$\sigma[g] = g \sqrt{\left(\frac{\sigma[\alpha_2]}{\alpha_2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma[\alpha_1]}{\alpha_1}\right)^2} \quad (38)$$

ottenendo:

$$g_3 = (9.925 \pm 0.071) \frac{m}{s^2} \quad (39)$$

3.5 Fit lineare 3

E' nota la relazione lineare:

$$x_{eq} = x_0 + \left(\frac{g}{4\pi^2}\right)T^2 = x_0 + \alpha_3 T^2 \quad (40)$$

dove con T^2 si intende un singolo periodo al quadrato. Le incertezze su x_{eq} e T^2 sono state valutate come discusso in sezione 3.4 e 3.3.

Riportiamo un grafico di x_{eq} vs T^2 :

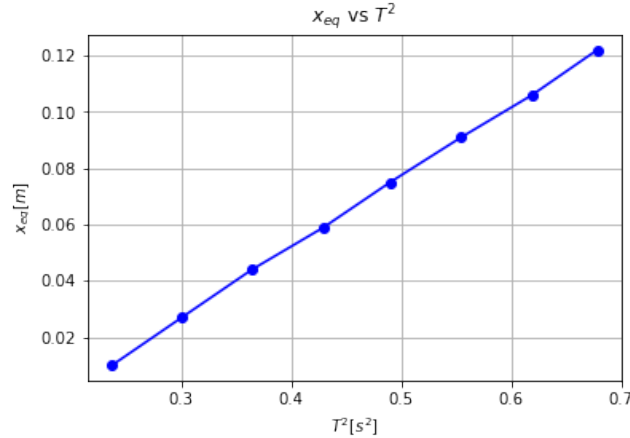


Figura 7: Andamento di x_{eq} in funzione di t^2 . Per motivi di leggibilità non sono riportate le barre di incertezza.

Eseguendo un fit lineare, ancora una volta utilizzando le incertezze calcolate con il metodo dei residui⁴ si ottengono i grafici:

⁴Si ritiene che ciò sia dovuto ancora una volta ad una sottostima delle incertezze sulle misure di allungamento.

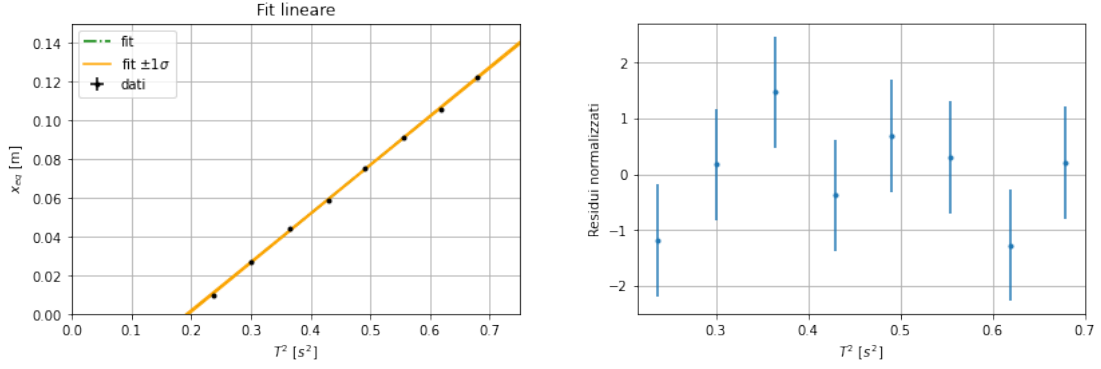


Figura 8: Fit lineare e residui normalizzati (ottenuti con incertezze a posteriori).

da cui si ricava la miglior stima di α_3 e di x_0 :

$$\alpha_3 = (0.2513 \pm 0.0018) \frac{m}{s^2} \quad (41)$$

$$x_0 = (-0.0486 \pm 0.0009) m \quad (42)$$

Dove x_0 è la posizione che si avrebbe dell'estremo libero dell'oscillatore rispetto allo zero arbitrario se questo fosse ideale⁵. Conoscendo la posizione dell'estremo fisso della molla si potrebbe risalire alla lunghezza ideale dell'oscillatore.

E' possibile estrarre il valore di g con la relativa incertezza tramite le relazioni:

$$g = 4\pi^2 \alpha_3 \quad (43)$$

$$\sigma[g] = 4\pi^2 \sigma[\alpha_3] \quad (44)$$

ottenendo:

$$g_4 = (9.921 \pm 0.072) \frac{m}{s^2} \quad (45)$$

4 Conclusioni

Riportiamo in tabella 8 i valori di g e k ottenuti con i metodi 1 e 2.

RISULTATI DELLE MISURE					
Metodo 1			Metodo 2		
g_1 [ms^{-2}]	9.931±0.095		g_3 [ms^{-2}]	9.925±0.071	
g_2 [ms^{-2}]	9.900±0.050		g_4 [ms^{-2}]	9.921±0.072	
k_1 [Nm^{-1}]	49.34±0.45		k_3 [Nm^{-1}]	49.27±0.26	
k_2 [Nm^{-1}]	49.18±0.20		-	-	

Tabella 8: Valori dell'accelerazione di gravità g e della costante elastica della molla k ottenuti tramite i due metodi.

E' possibile confrontare in maniera quantitativa le misure ottenute con i due metodi differenti⁶ tramite la formula 15. In tabella 9 sono riportati i valori dei coefficienti di compatibilità tra le misure.

	g_1	g_2	k_1	k_2
g_3	0.05	0.29	-	-
g_4	0.08	0.24	-	-
k_3	-	-	0.13	0.27

Tabella 9: La tabella si legge ad incrocio: ogni entrata corrisponde al coefficiente di compatibilità Z , preso in valore assoluto, tra le misure che identificano l'entrata stessa.

⁵Ad esempio, se la molla potesse comprimersi senza subire la reazione vincolare delle spire.

⁶Per il confronto tra le misure ottenute con il metodo 1 si rimanda ai paragrafi 3.1.3 e 3.1.4.

Risulta che tutte le misure dell'accelerazione e della costante elastica ottenute tramite i due metodi diversi, quindi in condizioni di riproducibilità, sono tra loro compatibili. Di conseguenza si può fornire una stima finale delle due misure tenendo conto di tutti i risultati ottenuti: è possibile effettuare cioè un'inferenza gaussiana tra misure (tra loro compatibili) ottenute in condizioni di riproducibilità. Tale stima si ottiene calcolando la media delle misure pesate con l'inverso del quadrato delle incertezze associate:

$$\mu_p = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} x_i}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad (46)$$

mentre l'incertezza si stima tramite la seguente formula:

$$\sigma_p = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}}} \quad (47)$$

Applicando le due formule precedenti per il calcolo finale di k e g si ottengono i seguenti risultati:

$$k = (49.23 \pm 0.15) \frac{N}{m} \quad (48)$$

$$g = (9.914 \pm 0.033) \frac{m}{s^2} \quad (49)$$

Infine è possibile confrontare le stime dell'accelerazione di gravità ottenute sperimentalmente con il valore atteso "dell'accelerazione di gravità nel laboratorio di meccanica".

L'accelerazione di gravità presso la città di Roma⁷ è: $g_{lab.} = 9.807 m/s^2$. Tramite la seguente formula si stima quindi il coefficiente di compatibilità tra g_1, g_2, g_3, g_4 e $g_{lab.}$:

$$Z = \frac{g_i - g_{lab.}}{\sigma} \quad (50)$$

In tabella 10 sono inseriti i coefficienti di compatibilità così ottenuti:

COMPATIBILITA' DELLE MISURE DI g CON $g_{lab.}$			
Metodo 1		Metodo 2	
$ Z_{g1} $	1.38	$ Z_{g3} $	1.76
$ Z_{g2} $	2.00	$ Z_{g4} $	1.68

Tabella 10: Gradi di compatibilità dei risultati delle misurazioni con il valore locale di g .

In conclusione risulta che tutte le misure effettuate sono compatibili con il valore atteso $g_{lab.}$. Si ritiene che (come dimostra la necessità di stimare le incertezze a posteriori tramite il fit lineare punti 3.4 e 3.5) molte misure siano soggette ad una sottostima delle incertezze dovuta ad errori sistematici nelle misurazioni e ad un apparato strumentale che ha celato fonti di incertezza che non è stato possibile quantificare: riportiamo ad esempio la difficoltà ad allineare perfettamente la squadra sulla carta millimetrata durante le misure di lunghezza, oppure le oscillazioni della molla che, nonostante l'accortezza degli sperimentatori, non sono sempre state verticali e unidimensionali.

5 Quesiti

1. *Cosa si intende per riproducibilità di una misura?*

La riproducibilità è il grado di concordanza tra il risultato di misure successive dello stesso misurando effettuate in diverse condizioni, ad esempio variando il metodo e/o lo strumento di misura e/o l'operatore e/o in periodi più o meno vicini. Effettuare misure in condizioni di riproducibilità è spesso utile per stimare gli effetti di errori sistematici.

2. *Cosa si intende per incertezze di misura di tipo A? Fare un esempio tratto dall'esperienza.*

Esse sono classificabili come le incertezze che vengono stimate attraverso misure ripetute, quindi a posteriori. Nella nostra esperienza, come si può vedere al punto 3.2, sono state eseguite misure ripetute dei periodi di diverse masse. Le incertezze di tipo A ad esse correlate sono riportate nella parte bassa della tabella 7 e sono state ottenute tramite:

⁷Fonte: INRiM, https://www.roma1.infn.it/meddif/LabMecMaterialeDidattico_A42010 — 2011/note%20su%20g%20a%20Roma300417.pdf

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} \quad (51)$$

Risulta chiaro che questo tipo di incertezza, essendo dipendente dal numero N di misure, può essere minimizzato.

3. *Cosa si intende per incertezze di misura di tipo B? Fare un esempio tratto dall'esperienza.*

Le incertezze di misura di tipo B sono tutte quelle che non rientrano nell'incertezza di tipo A, cioè quelle che non sono legate alle misure ripetute. Rientra tra le incertezze di tipo B il "decalogo" fornito dall'ISO. Un esempio tratto da questa esperienza si può vedere in sezione 3.1.1, dove, per stimare l'incertezza delle misure, si è dovuto tenere in considerazione l'incertezza dovuta alla risoluzione finita dello strumento e l'incertezza associata allo strumento stesso, come indicato sulla scheda tecnica (o sulle dispense del corso).

4. *Qual è la differenza nell'incertezza tra misurare più periodi e misurare più volte il periodo?*

Misurare un multiplo intero di un periodo è utile per minimizzare le incertezze di tipo B, nel caso in cui queste non si modifichino in funzione del multiplo considerato. Misurare più volte un singolo periodo consente solo di minimizzare le incertezze di tipo A, le quali decrescono con un fattore \sqrt{N} .

5. *Qual è la differenza tra valutare direttamente $\sigma[T^2]$ e fare la propagazione di $\sigma[T]$ su T^2 ?*

Se si valutasse direttamente $\sigma[T^2]$ si andrebbe incontro ad una sottostima dell'incertezza, infatti eseguendo la propagazione si ottiene: $\sigma[T^2] = \sqrt{(2E[T])^2 \sigma[T]^2} = 2E[T]\sigma[T]$ che è sicuramente maggiore di $\sigma[T^2]$ calcolata come riportato al quesito 2. Difatti, non possedendo uno strumento adatto a misurare i periodi al quadrato, sarebbe impossibile, valutando direttamente $\sigma[T^2]$ tenere conto dell'incertezza di tipo B.

6. *Qual è il modo corretto di riportare il risultato di una misura? Fare un esempio tratto dall'esperienza.*

Per riportare il risultato corretto di una misura bisogna riportare la media delle misure seguita dalla corrispondente incertezza. E' importante riportare il numero corretto di cifre significative: dapprima si determina quante cifre significative dare all'incertezza (normalmente 1 o 2, riportarne di più non cambia l'incertezza relativa in maniera significativa), e poi si scrive il valor medio delle misure con la stessa precisione dell'incertezza associata. Il tutto va corredato dell'appropriata unità di misura. Come indicato in 3.2, noi abbiamo scelto di usare sempre due cifre significative per l'incertezza.

7. *Qual è la differenza tra estrarre g da α_2/α_1 e direttamente da α_3 ?*

Evidentemente vale la relazione:

$$\alpha_3 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad (52)$$

L'incertezza su α_2 ed α_1 dipende dall'incertezza sulle masse (oltre che da quella sui periodi e sugli allungamenti), diversamente dall'incertezza su α_3 , stimata attraverso un fit lineare indipendente dalle misure di massa. In questo senso, estrarre g nei due casi è sostanzialmente differente: nel nostro caso le misure risultano compatibili, come riportato in tabella 9.