N以下の素数の逆数和が $O(\log\log N)$ であることの証明

(補題：リーマンゼータ関数の導入)

まず、任意の $p(\neq 1)$、s について、

$$\frac{1}{1-p^{-s}} = 1+p^{-s}+p^{-2s}+p^{-3s}+\cdots$$

である。(実際に、右から左へ無限級数の公式を使えばよい)
(これより下の記述について、pは素数。)
この式を、p について適用し、両辺積を取ると、

$$\underbrace{\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}}_{①} = \left(1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^{2s}}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{3^{2s}}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{5^s}+\cdots\right)\cdots$$

次に、①が $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = 1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots$ と一致することを示す。

素因数分解の一意性より、

$$(①=)\ \left(1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^{2s}}+\cdots\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{3^{2s}}+\cdots\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{5^{2s}}+\cdots\right)$$

を展開すると、すべての自然数 $n=2^a\cdot 3^b\cdot 5^c\cdots$ に対して $\frac{1}{n^s}$ が丁度1回ずつ表れる。

よって、$\displaystyle\underbrace{\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}}_{(*)}$ が示された。 □

今後、(*)を $\zeta(s)$ とする。

(証明)

補題により、

$$\zeta(s)=\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$$

$s=1$ を代入して、

$$\zeta(1)=\prod_p \frac{1}{1-p^{-1}}$$

両辺の対数をとって、

$$\log \zeta(1) = -\sum_p \log(1-p^{-1})$$
$$= -\sum_p \log\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

ここで、テイラー展開によって、

$$-\sum_p \log\left(1-\frac{1}{p}\right) = -\sum_p \left(\left(-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{p}\right)^2+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{p}\right)^3-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{p}\right)^4+\cdots\right)$$
$$= -\sum_p \left(-\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{p}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{p}\right)^4+\cdots\right)$$
$$= \sum_p \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{p}\right)^3+\cdots\right)$$
$$= \sum_p \frac{1}{p}+\frac{1}{2}\sum_p \frac{1}{p^2}+\frac{1}{3}\sum_p \frac{1}{p^3}+\cdots$$

この結果と、$\zeta(s)$ の定義から、

$$\log\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\right) = \sum_p \frac{1}{p}+\frac{1}{2}\sum_p \frac{1}{p^2}+\frac{1}{3}\sum_p \frac{1}{p^3}+\cdots$$

ここで、$k>1$について、

$$\sum_p \frac{1}{p^k}$$ は収束する。

何故ならば、nを自然数とすると、

$$\sum_p \frac{1}{p^k} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} < \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^k} = \left[\frac{x^{1-k}}{1-k}\right]_1^{\infty} \simeq \frac{1}{k-1}$$

よって等式

$$\log\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\right) = \sum_p \frac{1}{p} + \frac{1}{2}\sum_p \frac{1}{p^2} + \frac{1}{3}\sum_p \frac{1}{p^3} + \cdots$$

の右辺の1つ目の項以外は収束するため、
有限値の部分をまとめてSとすると、

$$\log\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\right) = \sum_p \frac{1}{p} + S$$

有限個の和であっても上の関係が成り立つと考えれば、
以下が得られる。

$$\sum_p \frac{1}{p} \approx \log\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\right) \approx O(\log\log n)$$

$\square$