

Análisis y Compresión de Imágenes mediante la Transformada de Fourier 2D

Andrés Felipe Cardozo Gómez

Repositorio del proyecto: https://github.com/Zocar5807/Proyecto_Fourier.git

Docente

Doris Elena Campo Duarte

Universidad Autonoma de Occidente

Facultad de ingeniería y ciencias basicas

Cálculo II

2025

Resumen Ejecutivo

Título de Segundo Nivel

El presente proyecto desarrolla la Opción 3: Transformada de Fourier 2D del documento guía, con el propósito de analizar, filtrar y comprimir imágenes en el dominio de la frecuencia. Se implementó un flujo de trabajo reproducible en Python y Jupyter Notebook que integra el cálculo de la transformada de Fourier bidimensional (FFT2D), el centrado del espectro, la verificación de la identidad de Parseval, el análisis de energía, el filtrado en frecuencia (ideal, Gaussiano y Butterworth) y la compresión mediante poda de coeficientes (α -pruning) en dos modalidades: global y adaptativa radial.

La calidad de las reconstrucciones fue evaluada utilizando las métricas MSE, PSNR y SSIM, junto con la medición de energía retenida. Los resultados indican que, al incrementar el valor de α , se reducen los errores (MSE) y aumentan la PSNR y el SSIM. La poda global logra mayor PSNR que la adaptativa para los mismos niveles de α , mientras que existe una relación consistente entre la fracción de coeficientes retenidos y la energía preservada. Además, se realizó una comparación con un método JPEG-like basado en DCT por bloques.

El proyecto demuestra la utilidad de las integrales dobles discretas en el estudio de energía espectral y evidencia la contribución de la inteligencia artificial en la organización, validación y documentación del proceso experimental.

Metodología

El procedimiento experimental se desarrolló mediante un pipeline estructurado en etapas secuenciales:

1. **Carga y normalización** de las imágenes, reescaladas al rango $[0, 1]$ y convertidas a escala de grises.
2. **Cálculo de la transformada de Fourier 2D** y centrado espectral mediante el desplazamiento (fftshift).

La verificación de Parseval se realizó comparando las energías espaciales y frecuenciales:

$$\sum x^2 \approx \frac{1}{MN} \sum |F|^2$$

3. **Análisis de energía espectral** mediante máscaras radiales que separan frecuencias bajas y altas.
4. **Filtrado en frecuencia**, utilizando filtros ideales, gaussianos y Butterworth, seguido de la reconstrucción inversa.
5. **Compresión por α -pruning**, implementada en dos variantes:
 - **Global:** retiene los coeficientes de mayor magnitud sin importar su ubicación.
 - **Adaptativa radial:** asigna un número de coeficientes por anillos concéntricos del espectro en proporción a la energía local.
6. **Evaluación cuantitativa**, con métricas **MSE**, **PSNR**, **SSIM**, fracción de energía retenida y relación de compresión.

Se incluyó además una comparación con un esquema **JPEG-like (DCT 8×8)**.

Los principales parámetros empleados fueron $\alpha \in \{0.3, 0.5, 0.7\}$, imágenes normalizadas y número de anillos para el método adaptativo entre 8 y 64. El enfoque priorizó la reproducibilidad, la modularidad del código (src/) y la exportación automática de resultados a la carpeta reports/.

Formulación Matemática

La energía espectral de una imagen $f(x, y)$ se define como la integral doble sobre el plano de frecuencias:

$$E = \iint_{\mathbb{R}^2} |F(u, v)|^2 du dv$$

En el caso discreto, con imágenes de tamaño $M \times N$, la identidad de Parseval establece la equivalencia entre la energía espacial y la energía espectral:

$$\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} |x[m, n]|^2 = \frac{1}{MN} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} |F[k, \ell]|^2$$

La compresión por α -pruning consiste en conservar únicamente los coeficientes de mayor magnitud del espectro F , manteniendo un porcentaje α del total de coeficientes. La energía retenida por la máscara Ω se expresa como:

$$E_{\text{ret}} = \sum_{(k, \ell) \in \Omega} |F[k, \ell]|^2, \text{Fracción de energía: } \frac{E_{\text{ret}}}{\sum |F|^2}$$

Debido a que la mayor parte de la energía en imágenes naturales se concentra en las bajas frecuencias, preservar los coeficientes de mayor magnitud produce reconstrucciones de alta calidad perceptual.

Resultados

Los resultados experimentales se documentaron en las tablas **compression_alpha_results.csv** y **compression_alpha_vs_jpeg_results.csv**.

Las tendencias observadas fueron consistentes en todas las imágenes analizadas:

- Al aumentar el valor de α , disminuye el error cuadrático medio (MSE) y aumentan los valores de PSNR y SSIM.
- El método de poda **global** alcanzó, en general, mejores métricas cuantitativas que el adaptativo.
- En $\alpha = 0.5$ (≈ 50 % de los coeficientes), se obtuvieron PSNR ≈ 38 dB (global) y ≈ 36 dB (adaptativo); para $\alpha = 0.7$, PSNR ≈ 43 dB (global) y ≈ 41 dB (adaptativo).
- La energía retenida crece de forma casi lineal con α , validando la proporcionalidad entre coeficientes seleccionados y energía espectral.

Las figuras generadas (ubicadas en reports/) complementan el análisis:

- **Figura 1:** Relación MSE vs α (mse_vs_alpha.png).
- **Figura 2:** Fracción de energía retenida vs α (energy_vs_alpha.png).
- **Figura 3:** Reconstrucciones comparativas global/adaptativo (compression_visual_grid.png).

El análisis comparativo con un esquema JPEG-like evidenció que, a bajas tasas de cuantización, el método propuesto conserva mayor energía y produce menor distorsión perceptual.

Discusión

El estudio confirma que la Transformada de Fourier 2D permite una descripción precisa de la distribución de energía en imágenes digitales. En el ámbito **multimedia**, el α -pruning controlado podría emplearse para **compresión progresiva o transmisión eficiente** sin degradar la percepción visual. En el contexto **biomédico**, la selección parcial de frecuencias actúa como filtro de ruido, mejorando la legibilidad de estructuras dominantes.

Entre las principales limitaciones se identifican la **falta de ponderación perceptual** y la **asunción de isotropía** en la versión adaptativa radial, que podría ser subóptima en imágenes con texturas direccionales. Como líneas de mejora se proponen la incorporación de máscaras anisotrópicas, ponderaciones basadas en sensibilidad visual y el empleo de **redes neuronales autoencoder** con pérdidas mixtas espacio-frecuencia.

Reflexión sobre el papel de la Inteligencia Artificial

La inteligencia artificial desempeñó un papel clave en este proyecto como **asistente de desarrollo, análisis y documentación**. Las herramientas de IA facilitaron la modularización del código, la validación automática de la energía (identidad de Parseval) y la depuración de funciones matemáticas. Además, contribuyeron a la generación de documentación reproducible y a la estandarización de las métricas y visualizaciones. Su uso permitió concentrar el esfuerzo humano en el análisis conceptual y la interpretación de los resultados.

Conclusiones y Trabajo Futuro

El proyecto logró implementar un marco experimental sólido y reproducible para el análisis y la compresión de imágenes en el dominio de Fourier 2D.

Se concluye que el método **α -pruning global** obtiene los mejores resultados en términos de PSNR y SSIM, aunque la versión **adaptativa radial** muestra ventajas conceptuales al distribuir coeficientes según energía local.

La fracción de energía retenida demuestra ser un indicador confiable de calidad de reconstrucción. En el futuro se plantea explorar modelos **perceptuales** basados en el sistema visual humano, incorporar **cuantización entropía-dirigida**, y comparar con transformadas alternativas como **wavelets** o **autoencoders con pérdida espectral**.

El estudio demuestra la sinergia entre el **cálculo integral**, el **procesamiento digital de señales** y la **inteligencia artificial** en el desarrollo de soluciones eficientes y comprensibles para el manejo de información visual.

Referencias Bibliográficas

González, R. C., & Woods, R. E. (2018). Digital Image Processing (4th ed.). Pearson.

Oppenheim, A. V., & Schafer, R. W. (2010). Discrete-Time Signal Processing. Pearson.

Goodfellow, I., Bengio, Y., & Courville, A. (2016). Deep Learning. MIT Press.

Anexo

Fórmulas clave:

$$E = \iint |F|^2, \Sigma x^2 \approx \frac{1}{MN} \Sigma |F|^2, E_{\text{ret}} = \sum_{\Omega} |F|^2.$$

Scripts relevantes:

- src/fourier_tools.py: funciones de FFT2D, energía y máscaras radiales.
- src/filters.py: implementaciones de filtros ideal, gaussiano y Butterworth.
- src/compression.py: métodos de poda global y adaptativa, energía retenida.
- src/metrics.py: métricas MSE, PSNR y SSIM.

Notebooks principales:

- 01_energy_integrals.ipynb: energía y validación de Parseval.
- 02_filtering_reconstruction.ipynb: filtrado y reconstrucción.
- 03_compression_alpha_pruning.ipynb: experimentos de compresión y comparación.

Datos y reportes:

Las figuras y tablas se encuentran en reports/ (Figuras 1–14, Tablas 1–2).