



UNIVERSIDAD TECNICA  
FEDERICO SANTA MARIA

DEPARTAMENTO  
DE INFORMÁTICA

## INF 285 - Computación Científica Ingeniería Civil Informática

### 14: Integración Numérica

## Definición 1 (Integración Numérica o Cuadratura)

*Es la obtención de la constante  $c \in \mathbb{R}$ , o una aproximación de  $c$ , de una integral definida*

$$c = \int_a^b f(x) dx$$

*utilizando algún método numérico*

Una función es integrable cuando las sumas izquierdas y derechas de Riemann convergen al mismo valor  $c$ :

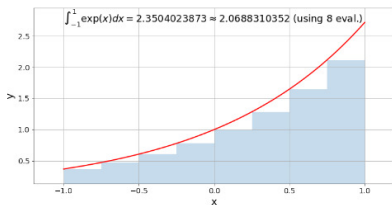
$$c = \int_a^b f(x) dx$$

# Integración Numérica

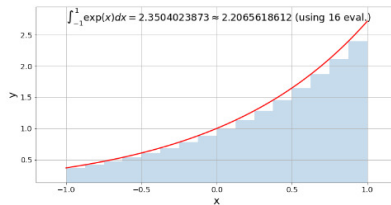
## Suma de Riemann

Por la izquierda:

$$c = \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k) + E_L$$



$m = 8, c \approx 2,06883.$



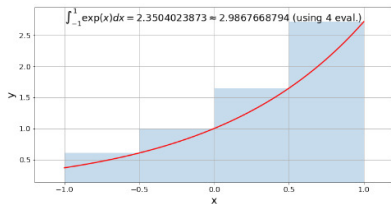
$m = 16, c \approx 2,20656.$

# Integración Numérica

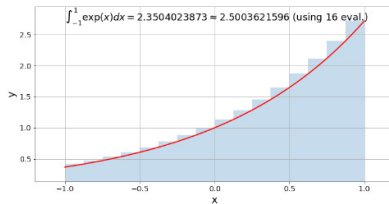
## Suma de Riemann

Por la derecha:

$$c = \sum_{k=0}^{m-1} f(x_{k+1})(x_{k+1} - x_k) + E_R$$



$m = 4, c \approx 2,98677.$



$m = 16, c \approx 2,50036.$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) (x_1 - x_0)$$

El error viene dado por:

$$E_{PM} = \frac{h^3}{24} f''(c)$$

donde  $c \in [x_0, x_1]$ .

Sea  $f(x)$  una función con segunda derivada continua definida en  $[x_0, x_1]$ . Sean los valores  $y_0 = f(x_0)$  e  $y_1 = f(x_1)$ . Consideremos el polinomio interpolador de Lagrange de grado 1  $P_1(x)$  que pasa por los puntos  $(x_0, y_0)$  y  $(x_1, y_1)$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!} f''(c) \\ &= P(x) + E(x) \end{aligned}$$

donde  $x_0 < c < x_1$

Utilizando lo anterior, integramos a ambos lados obteniendo lo siguiente:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} P(x) dx + \int_{x_0}^{x_1} E(x) dx$$

Tomemos la primera parte:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} P(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} dx + \int_{x_0}^{x_1} y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} dx \\ &= y_0 \frac{h}{2} + y_1 \frac{h}{2} = h \frac{(y_0 + y_1)}{2} \end{aligned}$$

donde  $h = (x_1 - x_0)$



Tomemos ahora la segunda parte:

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} E(x) dx &= \frac{1}{2!} \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1) f''(c) dx \\ &= \frac{f''(c)}{2} \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1) dx \\ &= \frac{f''(c)}{2} \int_0^h u(u - h) du = -\frac{h^3}{12} f''(c)\end{aligned}$$

Luego, obtenemos la **regla del trapecio**:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = h \frac{(y_0 + y_1)}{2} - \frac{h^3}{12} f''(c)$$

donde  $h = x_1 - x_0$  y  $x_0 < c < x_1$ .

De igual forma tomando el polinomio interpolado de Lagrange de segundo grado, se puede obtener otra aproximación:

$$\begin{aligned}f(x) &= y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\&\quad + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{3!} f'''(c) \\&= P(x) + E(x)\end{aligned}$$

donde  $x_0 < c < x_2$ .

Integrando se obtiene:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} P(x) dx + \int_{x_0}^{x_2} E(x) dx$$

Tomemos la primera parte:

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_2} P(x) dx &= \int_{x_0}^{x_2} y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} dx \\ &\quad + \int_{x_0}^{x_2} y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} dx \\ &\quad + \int_{x_0}^{x_2} y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} dx \\ &= y_0 \frac{h}{3} + y_1 \frac{4h}{3} + y_2 \frac{h}{3} = h \frac{(y_0 + 4y_1 + y_2)}{3}\end{aligned}$$

La segunda parte del error viene dada por:

$$\int_{x_0}^{x_2} E(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{3!} f'''(c) = -\frac{h^5}{90} f^{(iv)}(c)$$

Luego se obtiene la **regla de Simpson**:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = h \frac{y_0 + 4y_1 + y_2}{3} - \frac{h^5}{90} f^{(iv)}(c) \quad (1)$$

## Ejemplo 1

*Aplicar la regla del Trapecio y la regla de Simpson para aproximar:*

$$\int_1^{1.5} \ln x \, dx$$

*y encuentre una cota superior para el error de la aproximación.*

La regla del Trapecio estima que:

$$\int_1^{1.5} \ln x \, dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + y_1) = \frac{0.5}{2}(\ln 1 + \ln 1.5) = \frac{\ln 1.5}{4} \approx 0.101366$$

El error para la regla del Trapecio viene dado por  $-h^3 f''(c)/12$ , donde  $1 < c < 1.5$ . Dado que  $f''(x) = -1/x^2$ , la magnitud del error es a lo más:

$$-\frac{h^3 f''(c)}{12} = \frac{h^3}{12 c^2} = \frac{0.5^3}{12 c^2} \leq \frac{0.125}{12} \approx 0.01042$$

En otras palabras, la regla del Trapecio indica que:

$$\int_1^{1.5} \ln x \, dx = 0.101366 \pm 0.01042$$

La regla de Simpson estima que:

$$\begin{aligned}\int_1^{1.5} \ln x \, dx &\approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) = \frac{0.25}{3}(\ln 1 + 4 \ln 1.25 + \ln 1.5) \\ &\approx 0.108169\end{aligned}$$

El error para la regla de Simpson viene dado por  $-h^5 f^{(iv)}(c)/90$ , donde  $1 < c < 1.5$ . Dado que  $f^{(iv)}(x) = -6/x^4$ , la magnitud del error es a lo más:

$$-\frac{h^5 f^{(iv)}(c)}{90} = \frac{6 h^5}{90 c^4} = \frac{6 (0.25)^5}{90 c^4} \leq \frac{6 (0.25)^5}{90} \approx 0.00007$$

En otras palabras, la regla de Simpson indica que:

$$\int_1^{1.5} \ln x \, dx = 0.108169 \pm 0.00007$$

Las reglas del Trapecio y Simpson están limitadas a ser aplicadas en un intervalo. Sin embargo, una integral se puede aplicar sobre varios subintervalos y sumarlos. Por lo tanto, se puede aplicar sobre cada intervalo alguna regla de integración numérica y luego sumar. Esta estrategia se denomina **integración numérica compuesta**.

Consideremos que un subintervalo  $[a, b]$  se subdivide en una grilla con puntos equiespaciados:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{m-2} < x_{m-1} < x_m = b$$

donde  $h = x_{i+1} - x_i$  para cada  $i = 0, \dots, m-1$



Aplicamos la regla del Trapecio a cada subintervalo:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})) - \frac{h^3}{12}f''(c_i) \quad (2)$$

Si sumamos todas las aproximaciones se tiene que:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \left[ f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) \right] - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{h^3}{12} f''(c_i) \quad (3)$$

El término del error puede ser escrito como:

$$\sum_{i=0}^{m-1} \frac{h^3}{12} f''(c_i) = \frac{h^3}{12} \sum_{i=0}^{m-1} f''(c_i) = \frac{h^3}{12} m f''(c)$$

Dado que  $mh = (b - a)$ , el término del error es  $(b - a)h^2 f''(c)/12$ .  
Luego la **regla del Trapecio Compuesta** viene dada por:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \left[ y_0 + y_m + 2 \sum_{i=1}^{m-1} y_i \right] - \frac{(b - a)h^2}{12} f''(c) \quad (4)$$

donde  $h = (b - a)/m$  y  $a < c < b$ .

Para la regla de Simpson se sigue la misma estrategia. Consideremos la grilla de puntos equiespaciados:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{2m-2} < x_{2m-1} < x_{2m} = b$$

donde  $h = x_{i+1} - x_i$ . Luego, en cada subintervalo  $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ , para  $i = 0, \dots, m-1$ , de longitud  $2h$  se aplica la aproximación:

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})] - \frac{h^5}{90} f^{(iv)}(c_i) \quad (5)$$

Si sumamos todas las aproximaciones se tiene que:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \frac{h}{3} \left[ f(a) + f(b) + 4 \sum_{i=1}^m f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) \right] \\ &\quad - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{h^5}{90} f^{(iv)}(c_i)\end{aligned}$$

El término del error puede ser escrito como:

$$\sum_{i=0}^{m-1} \frac{h^5}{90} f^{(iv)}(c_i) = \frac{h^5}{90} \sum_{i=0}^{m-1} f^{(iv)}(c_i) = \frac{h^5}{90} m f^{(iv)}(c)$$

Dado que  $m(2h) = (b-a)$ , el término del error es  $(b-a)h^4 f''(c)/180$ .

Luego la **regla de Simpson Compuesta** viene dada por:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \left[ y_0 + y_{2m} + 4 \sum_{i=1}^m y_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^{m-1} y_{2i} \right] - \frac{(b-a)h^4}{180} f^{(iv)}(c) \quad (6)$$

donde  $a < c < b$ .

## Ejemplo 2

*Utilizando 4 subintervalos aproxime*

$$\int_0^2 e^x dx$$

*por medio de las reglas del Trapecio y de Simpson compuestas.*

Para la regla del Trapecio compuesta sobre  $[0, 2]$  se tiene que  $h = 1/2$ . La aproximación entonces es:

$$\begin{aligned}\int_0^2 e^x dx &\approx \frac{1}{2} \left[ y_0 + y_4 + 2 \sum_{i=1}^3 y_i \right] \\ &= \frac{1}{4} [e^0 + e^2 + 2(e^{0.5} + e^1 + e^{1.5})] \\ &\approx 6.52161011\end{aligned}$$

Y el error es a lo más

$$\frac{(b-a)h^2}{12}|f''(c)| = \frac{\frac{1}{2}}{12}|e^c| \leq \frac{e^2}{24} \approx 0.307877$$

Para la regla de Simpson compuesta sobre  $[0, 2]$  se tiene que  $h = 1/4$ . La aproximación entonces es:

$$\begin{aligned}\int_0^2 e^x dx &\approx \frac{1}{3} \left[ y_0 + y_8 + 4 \sum_{i=1}^4 y_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^3 y_{2i} \right] \\ &= \frac{1}{12} \left[ e^0 + e^2 + 4(e^{0.25} + e^{0.75} + e^{1.25} + e^{1.75}) \right. \\ &\quad \left. + 2(e^{0.5} + e^1 + e^{1.5}) \right] \\ &\approx 6.38919373\end{aligned}$$

Y el error es a lo más

$$\frac{(b-a)h^4}{180} |f^{(iv)}(c)| = \frac{\frac{1}{2^7}}{180} |e^c| \leq \frac{e^2}{23040} \approx 0.00032071$$

Si lo comparamos con el valor real de la integral:

$$\int_0^2 e^x dx = e^2 - e^0 = 6.38905609$$

Podemos notar que la aproximación con la regla de Simpson compuesta alcanza 3 dígitos de precisión.



La **Cuadratura Gaussiana** es un método de integración numérica que logra mejor precisión que las aproximaciones anteriores.

Para explicar cómo funciona, comencemos con la siguiente definición:

### Definición 2

*El conjunto de funciones no nulas  $\{p_0, \dots, p_n\}$  en el intervalo  $[a, b]$  es **ortogonal** sobre  $[a, b]$  si*

$$\int_a^b p_j(x) p_k(x) dx = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ \neq 0 & j = k \end{cases} \quad (7)$$

Revisemos los siguientes teoremas:

### Teorema 1

*Si  $\{p_0, \dots, p_n\}$  es un conjunto ortogonal de polinomios sobre el intervalo  $[a, b]$ , donde el grado de  $p_i = i$ , entonces  $\{p_0, \dots, p_n\}$  es una base para el espacio vectorial de polinomios de grado a lo más  $n$  sobre  $[a, b]$ .*

### Teorema 2

*Si  $\{p_0, \dots, p_n\}$  es un conjunto ortogonal de polinomios sobre el intervalo  $[a, b]$  y si el grado de  $p_i = i$ , entonces  $p_i$  tiene  $i$  raíces distintas en el intervalo  $(a, b)$ .*

### Ejemplo 3

*Encontrar un conjunto de 3 polinomios ortogonales en el intervalo  $[-1, 1]$*

Comencemos con  $p_0(x) = 1$  y  $p_1(x) = x$ . Se puede observar que:

$$\int_{-1}^1 1 \cdot x \, dx = 0$$

por lo tanto, son ortogonales.

Sigamos con  $p_2(x) = x^2$ :

$$\int_{-1}^1 p_0(x) \cdot x^2 \, dx = \int_{-1}^1 x^2 \, dx = \frac{2}{3} \neq 0$$

Luego no son ortogonales.

Ajustemos  $p_2(x) = x^2 + c$ :

$$\int_{-1}^1 p_0(x) \cdot (x^2 + c) dx = \int_{-1}^1 (x^2 + c) dx = \frac{2}{3} + 2c = 0$$

por lo tanto  $c = -1/3$ . Se invita al estudiante a comprobar que  $p_2(x) = x^2 - 1/3$  es ortogonal con  $p_1(x)$ .

Luego, el conjunto de 3 polinomios  $\{1, x, x^2 - 1/3\}$  es ortogonal sobre  $[-1, 1]$ .

Los 3 polinomios del ejemplo anterior, pertenecen al conjunto descubierto por **Legendre**.

El conjunto de los **polinomios de Legendre**

$$p_i(x) = \frac{1}{2^i i!} \frac{d^i}{dx^i} [(x^2 - 1)^i] \quad (8)$$

para  $0 \leq i \leq n$  es ortogonal sobre  $[-1, 1]$ .

Por el Teorema 2 el polinomio  $n$ -ésimo de Legendre tiene  $n$  raíces  $x_1, \dots, x_n$  sobre  $[-1, 1]$ .

La Cuadratura Gaussiana de una función es simplemente una combinación lineal de funciones evaluadas en las raíces de Legendre.

La **Cuadratura Gaussiana** viene dada por:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) \quad (9)$$

donde

$$c_i = \int_{-1}^1 L_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, n \quad (10)$$

y  $x_i$  son las raíces del polinomio de Legendre de grado  $n$ .

# Integración Numérica

## Cuadratura Gaussiana

A continuación se muestran las raíces de los polinomios de Legendre para  $n = 2, 3, 4$ :

$n$	roots $x_i$	coefficients $c_i$
2	$-\sqrt{1/3} = -0.57735026918963$	1 = 1.000000000000000
	$\sqrt{1/3} = 0.57735026918963$	1 = 1.000000000000000
3	$-\sqrt{3/5} = -0.77459666924148$	5/9 = 0.555555555555555
	0 = 0.000000000000000	8/9 = 0.888888888888888
	$\sqrt{3/5} = 0.77459666924148$	5/9 = 0.555555555555555
4	$-\sqrt{\frac{15+2\sqrt{30}}{35}} = -0.86113631159405$	$\frac{90-5\sqrt{30}}{180} = 0.34785484513745$
	$-\sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{35}} = -0.33998104358486$	$\frac{90+5\sqrt{30}}{180} = 0.65214515486255$
	$\sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{35}} = 0.33998104358486$	$\frac{90+5\sqrt{30}}{180} = 0.65214515486255$
	$\sqrt{\frac{15+2\sqrt{30}}{35}} = 0.86113631159405$	$\frac{90-5\sqrt{30}}{180} = 0.34785484513745$

### Ejemplo 4

*Aproximar*

$$\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx$$

*utilizando Cuadratura Gaussiana.*

Para  $n = 2$ , la aproximación sería:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 e^{-x^2} dx &\approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) \\ &= 1 \cdot f\left(-\sqrt{1/3}\right) + 1 \cdot f\left(\sqrt{1/3}\right) \approx 1.43306262 \end{aligned}$$



Para  $n = 3$ , la aproximación sería:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx &\approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3) \\ &= \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{3/5}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{3/5}\right) \\ &\approx 1.498679\end{aligned}$$

Se invita al estudiante a que realice la aproximación con  $n = 4$ .

Aproximación de integrales en el intervalo  $[a, b]$ .

Se utiliza la substitución  $t = (2x - a - b)/(b - a)$ .

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{(b-a)}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)t}{2} + \frac{(b+a)}{2}\right) dt$$

### Ejemplo 5

*Aproximar la integral*

$$\int_1^2 \ln x dx$$

*utilizando cuadratura Gaussiana con  $n = 4$ .*