UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

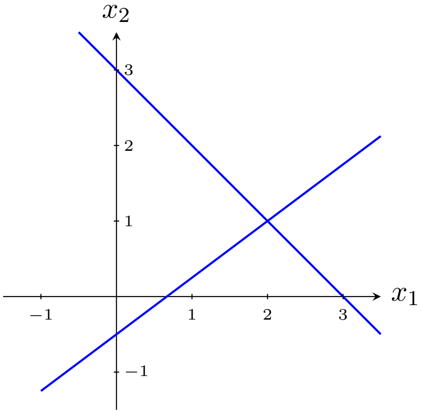
INF 285 - Computación Científica
Ingeniería Civil Informática

07: Sistemas de Ecuaciones Lineales

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Considere el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ 3x_1 - 4x_2 &= 2 \end{aligned}$$



Eliminación Gaussiana

Un sistema de ecuaciones de dos variables, desde el punto de vista geométrico, no es más que dos rectas en el plano $x_1 - x_2$.

En el caso anterior, el punto de intersección es $(x_1, x_2) = (2, 1)$, el cual satisface ambas ecuaciones.

¿Cómo resolvemos un sistema de n ecuaciones con n incógnitas?

Eliminación Gaussiana.

Eliminación Gaussiana

Se aplican **tres** operaciones a un sistema de ecuaciones que conlleva a un sistema equivalente, es decir, que tienen la misma solución:

1. Intercambiar una ecuación con otra.
2. Sumar o restar un múltiplo de una ecuación a otra.
3. Multiplicar una ecuación por una constante no nula.

Apliquemos algunas de estas operaciones al sistema anterior:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ 3x_1 - 4x_2 &= 2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

El sistema ha sido escrito como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde A es la matriz de coeficientes y $\mathbf{b}$ es el lado derecho de la ecuación (RHS).

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 3 \\ 3 & -4 & | & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \text{restar } {\color{blue}3} \times \ \text{fila}_1 \\ \text{a fila}_2 \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & -7 & | & -7 \end{bmatrix}$$

Podemos notar que las variables quedan “ocultas” durante la eliminación. Cuando el bloque izquierdo es “triangular”, podemos realizar un **back substitution**, es decir, resolver las ecuaciones desde la perte inferior hacia la superior.

Ejemplo 1

Determinar la factorización LU de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Realizamos el mismo paso anterior mediante la eliminación Gaussiana:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \text{restar } 3 \times \ \text{fila}_1 \\ \text{a fila}_2 \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} = U$$

Factorización LU

El factor utilizado en la eliminación es 3.

Se define entonces la matriz L, como triangular inferior de 2×2 que contiene valores 1's en la diagonal y el factor 3 en la posición $(2, 1)$:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego, se tiene que:

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = A$$

Factorización LU

Ejemplo 2

Determinar la factorización LU de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Factorización LU

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & \frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix}}_{L_3}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ 3 & & 1 \end{bmatrix}}_{L_2}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}}_{L_1}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{U}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}}_{L_1^{-1}}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ -3 & & 1 \end{bmatrix}}_{L_2^{-1}}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & -\frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix}}_{L_3^{-1}}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{U} = A$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ -3 & -\frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{U} = A$$

Factorización LU

Se aplica **back substitution** para resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, mediante la factorización LU de A.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Longrightarrow L\underbrace{U\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} = \mathbf{b} \Longrightarrow L\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

1. Se resuelve el sistema $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ para $\mathbf{y}$.
2. Se resuelve el sistema $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ para $\mathbf{x}$.

Factorización $PA = LU$

El **pivoteo parcial** consiste en comparar los elementos de una columna determinada, antes de realizar el paso de eliminación.

La fila con el elemento mayor en valor absoluto se intercambia con la fila que le correspondería ser pivote. En otras palabras, la primera vez, se selecciona la p-ésima fila tal que $|a_{p1}| \geq |a_{i1}|$ para todo $1 \leq i \leq n$, y luego se intercambia la fila p con la fila 1.

Luego el procedimiento sigue como antes, para eliminar a_{i1}, se usa el multiplicador

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}} \Rightarrow m_{i1} \leq 1$$

Luego, se continúa con el elemento a_{22} y se verifica todos los elementos que están en la columna 2 pero bajo la diagonal. Entonces se selecciona la p-ésima fila tal que $|a_{p2}| \geq |a_{i2}|$ para todo $2 \leq i \leq n$. Si $|a_{22}|$ es el máximo, no hay intercambio de filas.

El procedimiento se aplica para todas las columnas restantes, es decir, antes de eliminar la columna k, la fila p-ésima tal que $k \leq p \leq n$ y $|a_{pk}|$ es el máximo, las filas p y k se intercambian.

Notar que con este procedimiento, los elementos de la matriz L no serán mayores que 1 en valor absoluto.

Factorización $PA = LU$

Ejemplo 3

Encontrar la factorización $PA = LU$ *de la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Primero, las filas 1 y 2 deben ser intercambiadas

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \text{intercambiar fila 1 y 2} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Factorización $PA = LU$

Aplicamos L_1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Luego, la fila 2 y 3 deben ser intercambiadas (OJO! Las filas de L_1 también son intercambiadas)

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \text{intercambiar fila 2 y 3} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

Factorización $PA = LU$

Aplicamos L_2 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = U$$

Finalmente

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}}_{U}$$

Factorización $PA = LU$

Se puede utilizar $PA = LU$ para resolver un sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} PA\mathbf{x} &= P\mathbf{b} \\ LU\mathbf{x} &= P\mathbf{b} \end{aligned}$$

Luego,

1. Se resuelve el sistema $L\mathbf{y} = P\mathbf{b}$ para $\mathbf{y}$.
2. Se resuelve el sistema $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ para $\mathbf{x}$.

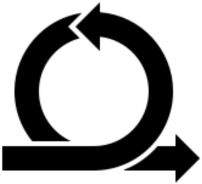
Métodos Iterativos

Jacobi

El método de Jacobi es una forma de **iteración de punto fijo** para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

El procedimiento es similar, se debe reescribir las ecuaciones para resolver las incógnitas.

Luego, se realizan las iteraciones comenzando de un punto inicial.



Iteración de punto fijo del método de Jacobi:

$$
\begin{aligned}
A\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\
(L + D + U)\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\
D\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} - (L + U)\boldsymbol{x} \\
\boldsymbol{x} &= D^{-1}(\boldsymbol{b} - (L + U)\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

donde D es la diagonal, L la parte triangular inferior y U la parte triangular superior de la matriz A respectivamente.

Método de Jacobi
$\boldsymbol{x}_0$: vector inicial
para $k = 0, 1, 2, ...$
$\quad \boldsymbol{x}_{k+1} = D^{-1}(\boldsymbol{b} - (L + U)\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}_k)$

Otra formas:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + D^{-1}\,\boldsymbol{r}_k$$

donde $\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{b} - A\,\boldsymbol{x}_k$.

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = M\,\boldsymbol{x}_k + \hat{\boldsymbol{b}}$$

donde $M = -D^{-1}(L+U)$ y $\hat{\boldsymbol{b}} = D^{-1}\,\boldsymbol{b}$

Ejemplo 4

Aplicar el método de Jacobi al sistema:

$$\begin{aligned} 3u + v &= 5 \\ u + 2v &= 5 \end{aligned}$$

comenzando con el punto inicial $(u_0, v_0) = (0, 0)$

Se despejan las ecuaciones para cada variable:

$$u = \frac{5-v}{3} \qquad v = \frac{5-u}{2}$$

Se itera sobre las ecuaciones

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5-v_1}{3} \\ \frac{5-u_1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5-5/2}{3} \\ \frac{5-5/3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/6 \\ 5/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5-v_0}{3} \\ \frac{5-u_0}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 5/2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5-v_2}{3} \\ \frac{5-u_2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5-5/3}{3} \\ \frac{5-5/6}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/9 \\ 25/12 \end{bmatrix}$$

Podemos observar que el método converge a la solución $[1, 2]$.

Método de Newton en $\mathbb{R}^n$

Aplicación del método en 1D:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

¿Qué sucede si queremos resolver el siguiente sistema no lineal?

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= 1 \\ x_2 &= x_1^2 \end{aligned}$$

Método de Newton en $\mathbb{R}^n$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 - 1 \\ y - x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_{i+1} = \boldsymbol{x}_i - J^{-1}(\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_i)$$

$$J(\boldsymbol{x}) = \left.\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_i} = \left.\begin{bmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \\ \vdots \\ \nabla f_n \end{bmatrix}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_i}$$