Ayudantía - Rúbrica
SCT - Semana - 01

- **Contexto Pregunta**: Considere el siguiente problema: $x + y = 1$, $ax + y = b$. Aquí se considera que a y b son "conocidos" y se debe buscar x e y. Comente como abordaría este problema.

- **Desarrollo Pregunta 1**:

  Nos enfrentamos a un sistema de ecuaciones lineales 2x2 (2 variables y 2 incognitas). Como son solo dos variables lo primero que se podría hacer es despejar una, en este caso y, para luego encontrar los diferentes casos, dependiendo de los valores de a y b:

$$ax + y = b \rightarrow y = b - ax$$
$$x + y = 1 \rightarrow y = 1 - x$$

$$b - ax = 1 - x$$
$$b - 1 = (a - 1)x$$

  De lo anterior notamos que existen 3 casos (intente identificarlos antes de ver la respuesta).

  - $a = 1$ y $b = 1$
  - $a \neq 1$
  - $a = 1$ y $b \neq 1$

  Que respectivamente corresponden a:

  - $0 = 0 \cdot x$ infinitas soluciones.
  - $c = d \cdot x$ única solución.
  - $b - 1 = 0 \cdot x$ no existe solución.

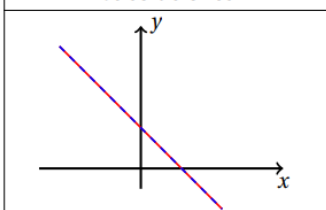
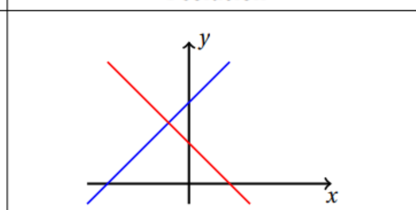
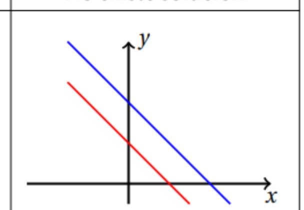
Caso 1	Caso 2	Caso 3
$a = 1$	$a \neq 1$	$a = 1$
$b = 1$		$b \neq 1$
$y = 1 - x$	$x = \frac{b-1}{a-1} \wedge y = \frac{a-b}{a-1}$	
∞ soluciones	1 solución	No existe solución
		
Existe sobreposición de rectas	Las rectas intersectan en un solo punto	Las rectas son paralelas

Figura 1: Tres casos de un sistema de ecuaciones 2×2.

Sin embargo, el análisis de interes surge al resolver este problema mediante matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix}$$

En el cual nombrarémos la matriz A que está multiplicando a un vector de incógnitas $\hat{x} = (x, y)^T$, e igualados a un vector constante $\hat{b}$:

$$A\hat{x} = \hat{b}$$

Notar que si multiplicamos la matriz por el vector de incógnitas recuperamos el sistema de ecuaciones original. Esta es una visualización equivalente del mismo problema.

En esta representación podemos realizar un análisis muy similar al hecho anteriormente: cuando $a = 1$ en el problema original teniamos que podiamos tener una única solución o infinitas soluciones. Esto llevado a la matriz corresponde con la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La cual tiene la peculiaridad de tener su determinante igualado a 0:

$$det(A) = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0$$

Por otro lado nos queda el caso en que $a \neq 1$, donde el determinante ya no puede ser 0:

$$det(A) = 1 - a \neq 0$$

Con esto llegamos a la conclusión de que **cualquier sistema de ecuaciones lineales puede ser llevado a un sistema $Ax = b$, en el que la factibilidad de una única solución depende únicamente de la no-nulidad del determinante de A.**

La pregunta evidente que surge es ¿Por qué podría ser de interés utilizar este formato para resolver sistemas de ecuaciones en una asignatura de informática?

La resupesta se irá construyendo a lo largo del curso con los diversos métodos numéricos que iremos estudiando.[1]

[1] *pd: por si quedaba la duda, efectivamente, este curso se trata de (entre otras cosas) resolver sistemas $Ax = b$. Bienvenidos a Computación Científica.*