UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA

DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

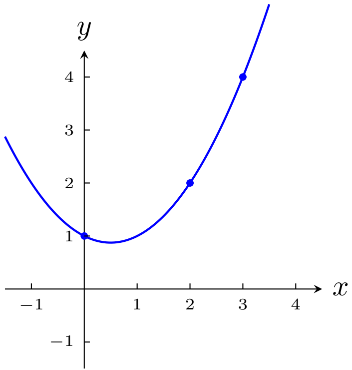
INF 285 - Computación Científica
Ingeniería Civil Informática

08: Interpolación Polinomial (I)

Interpolación Polinomial

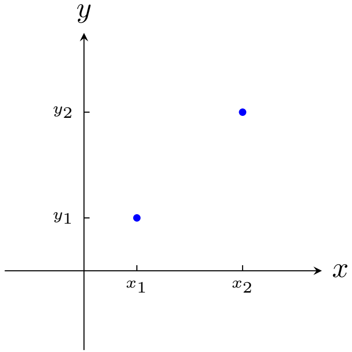
Definición 1

La función $y = p(x)$ **interpola** *los datos* $(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ *si* $p(x_i) = y(x_i)$ *para cada* $1 \leq i \leq n$.



Los puntos son interpolados por el polinomio $p(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + 1$

Interpolación Polinomial

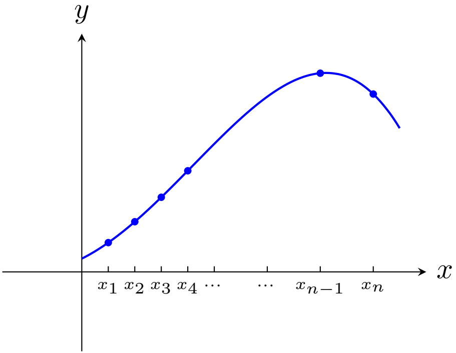


¿Cuál es el polinomio de **grado mínimo** que interpola (x_1, y_1) y (x_2, y_2)?

Interpolación Polinomial

Teorema 1

Sea $(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ n puntos en el plano $\mathbb{R}^2$ con distintos x_i, entonces existe uno y sólo un polinomio $p(x)$ de grado $(n-1)$ o menor que satisface la siguiente ecuación: $p(x_i) = y_i$ para $i \in \{1, 2, ..., n\}$.



Caso inicial: interpolar con polinomio de grado mínimo $p(x) = a_0 + a_1\,x$ los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2)

$$
\begin{aligned}
p(x_1) &= a_0 + a_1\,x = y_1 \\
p(x_2) &= a_0 + a_1\,x = y_2
\end{aligned}
$$

Matricialmente:

$$
\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}
$$

Interpolación para n puntos:

$$
\begin{bmatrix}
1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\
1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^{n-1} \\
1 & x_n & x_n^2 & \cdots & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n-2} \\ a_{n-1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n
\end{bmatrix}
$$

$$
\det(V) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)
$$

n puntos: $(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$

Interpolación de Lagrange: polinomio de grado $d = n - 1$.

Ejemplo: sean los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, entonces el polinomio

$$p_2(x) = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

es el **polinomio interpolador de Lagrange** para estos puntos.

Ejemplo 1

Encontrar el polinomio interpolador de Lagrange para los puntos $(0,1),(2,2)$ *y* $(3,4)$.

Reemplazamos en la fórmula anterior para el polinomio interpolador de Lagrange:

$$
\begin{aligned}
p_2(x) &= y_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\
&= (1)\frac{(x-2)(x-3)}{(0-2)(0-3)} + (2)\frac{(x-0)(x-3)}{(2-0)(2-3)} + (4)\frac{(x-0)(x-2)}{(3-0)(3-2)} \\
&= \frac{1}{6}\left(x^2-5x-6\right) + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2-3x\right) + 4\left(\frac{1}{3}\right)\left(x^2-2x\right) \\
&= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1
\end{aligned}
$$

Notar que $p_2(0)=1, p_2(2)=2$ y $p_2(3)=4$.

En general, dado n puntos $(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$. Para cada i entre 1 y n se define el polinomio de grado $n-1$:

$$L_i(x) = \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \qquad (1)$$

Notar que $L_i(x_i) = 1$ y $L_i(x_j) = 0$ para $i \neq j$, $i, j = \{1, ..., n\}$

$$\begin{aligned} p_{n-1}(x_k) &= y_1 \underbrace{L_1(x_k)}_{0} + y_2 \underbrace{L_2(x_k)}_{0} + \cdots + y_k \underbrace{L_k(x_k)}_{1} + \cdots + y_n \underbrace{L_n(x_k)}_{0} \\ &= y_k \end{aligned}$$

Entonces, el polinomio interpolador de Lagrange de grado $n-1$ es:

$$p_{n-1}(x) = y_1\, L_1(x) + \cdots + y_n\, L_n(x) \tag{2}$$

Otra expresión para $L_i(x)$:

$$l_i(x) = \prod_{k=1, i\neq k} (x - x_k) = (x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})(x - x_n)$$

Notar que $l_i(x) = 0$ para cualquier $x_k \neq x_i$.

¿Qué ocurre cuando $l_i(x)$ es evaluado en x_i?

$$l_i(x_i) = \prod_{k=1, i\neq k} (x_i - x_k) = (x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})(x_i - x_n) \neq 0$$

$$L_i(x) = \frac{l_i(x)}{l_i(x_i)} = \frac{(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})(x - x_n)}{(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})(x_i - x_n)}$$

Se define la función $l(x)$:

$$l(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

Se puede re-escribir $l_i(x)$:

$$l_i(x) = \frac{l(x)}{(x - x_i)}$$

Obtenemos el término asociado al denominador de $L_i(x)$:

$$w_i = \frac{1}{l_i(x_i)} = \frac{1}{l'(x_i)}$$

Podemos ahora obtener $L_i(x)$:

$$L_i(x) = \frac{l(x)}{(x - x_i)} w_i$$

Podemos re-escribir la interpolación de Lagrange:

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{i=1}^{n} y_i \, L_i(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \, \frac{l(x)}{(x - x_i)} \, w_i \\ &= l(x) \, \sum_{i=1}^{n} y_i \, \frac{w_i}{(x - x_i)} \end{aligned}$$

¿Qué sucede si interpolamos la constante $y = 1$?

$$\underbrace{p(x)}_{1} = l(x) \, \sum_{i=1}^{n} \underbrace{y_i}_{1} \, \frac{w_i}{(x - x_i)}$$

$$l(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{(x - x_i)}}$$

Finalmente se obtiene que:

$$p(x) = l(x) \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{w_i}{(x - x_i)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \dfrac{w_i}{(x - x_i)}}{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{w_i}{(x - x_i)}}$$

¿Cuál es el costo de evaluar $p(x)$ si conocemos los coeficientes w_i?

¿Cuál es el costo de obtener los coeficientes w_i?

Ejercicio 1

Utilizar interpolación polinomial para encontrar el polinomio de interpolación que pasa a través de los puntos $(0, 1), (2, 3), (3, 0)$.