UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA

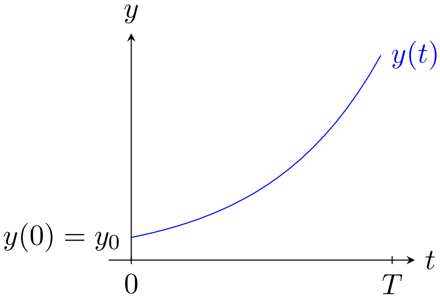
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

INF 285 - Computación Científica
Ingeniería Civil Informática

15: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (I)

Un **problema de valor inicial (IVP)** para una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, es la ecuación misma junto con una condición inicial en un intervalo específico $0 \leq t \leq T$:

$$\text{IVP} \begin{cases} y' = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \\ t \in [0, T] \end{cases}$$



La ecuación es **autónoma** si el lado derecho es independiente de t, es decir, $y' = f(y(t))$.

Por ejemplo, la *ecuación logística* utilizada para modelar la tasa de cambio en una población viene dada por:

$$y' = c\,y\,(1-y)$$

Que tiene solución analítica:

$$y(t) = 1 - \frac{1}{1 + \frac{y_0}{1-y_0}\,\exp(ct)}$$

para valor inicial $y_0 \neq 1$

Un ejemplo de una ecuación **no-autónoma** es el siguiente:

$$\text{IVP}\begin{cases} y' = ty + t^3 \\ y(0) = 1 \\ t \in [0,1] \end{cases}$$

La cual tiene solución conocida:

$$y(t) = 3\,\exp\left(\frac{t^2}{2}\right) - t^2 - 2$$

Initial Value Problems (IVP)

Forma general:

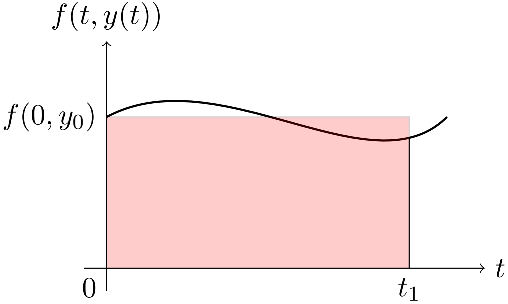
$$\text{IVP}\begin{cases} y' = f\left(t, y(t)\right) \\ y(0) = y_0 \\ t \in [0, T] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} y'(s)\,\mathrm{d}s &= \int_0^{t_1} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s \\ y(t_1) - y(0) &= \int_0^{t_1} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s \\ y(t_1) &= y_0 + \int_0^{t_1} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

Aplicamos suma de Riemann por la izquierda:

$$y(t_1) = y_0 + \int_0^{t_1} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s \approx y_0 + f(0, y(0))\;(t_1 - 0)$$

$$y_1 = y_0 + f(0, y_0)\,t_1$$



Forward Euler

$$y_{i+1} = y_i + (t_{i+1} - t_i) f(t_i, y(t_i))$$

Ejemplo 1

Aplicar el método de Euler al problema de valor inicial:

$$IVP \begin{cases} y' = ty + t^3 \\ y(0) = 1 \\ t \in [0, 1] \end{cases}$$

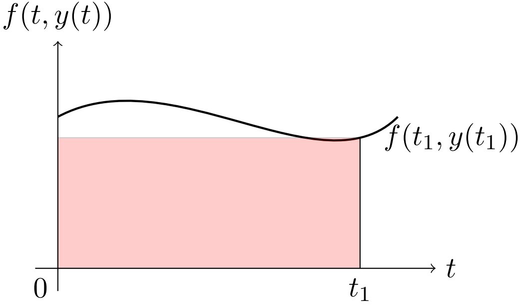
Forma general:

$$\text{IVP}\begin{cases} y' = f\left(t, y(t)\right) \\ y(0) = y_0 \\ t \in [0, T] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} y'(s)\,\mathrm{d}s &= \int_0^{t_1} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s \\ y(t_1) - y(0) &= \int_0^{t_1} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s \\ y(t_1) &= y_0 + \int_0^{t_1} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

Aplicamos suma de Riemann por la derecha:

$$y(t_1) = y_0 + \int_0^{t_1} f(s, y(s))\, ds \approx y_0 + f(t_1, y(t_1))\, t_1$$
$$y_1 = y_0 + f(t_1, y_1)\, t_1$$



$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + f(t_1, y_1)\, t_1 \\
y_1 - f(t_1, y_1)\, t_1 &= y_0
\end{aligned}
$$

Problema de búsqueda de ceros:

$$\hat{f}(y_1) = y_1 - f(t_1, y_1)\, t_1 - y_0 = 0$$

De forma general, se debe resolver en cada time-step:

$$\hat{f}(y_{i+1}) = y_{i+1} - f(t_{i+1}, y_{i+1})\,(t_{i+1} - t_i) - y_i = 0$$

Ejemplo 2

Aplicar el método de Backward Euler al problema de valor inicial:

$$IVP\begin{cases} y' = ty + t^3 \\ y(0) = 1 \\ t \in [0, 1] \end{cases}$$

Forma general:

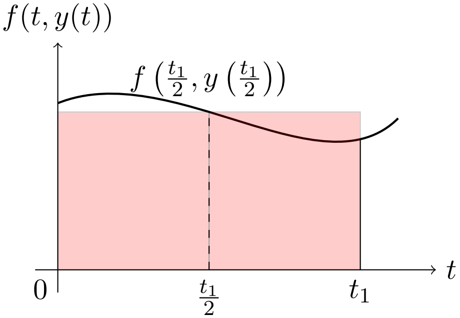
$$\text{IVP}\begin{cases} y' = f\left(t, y(t)\right) \\ y(0) = y_0 \\ t \in [0, T] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} y'(s)\,\mathrm{d}s &= \int_0^{t_1} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s \\ y(t_1) - y(0) &= \int_0^{t_1} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s \\ y(t_1) &= y_0 + \int_0^{t_1} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

Aplicamos Punto Medio:

$$y(t_1) = y_0 + \int_0^{t_1} f(s, y(s))\, ds \approx y_0 + f\left(\frac{t_1}{2}, y\left(\frac{t_1}{2}\right)\right) t_1$$

$$y_1 = y_0 + f\left(\frac{t_1}{2}, y\left(\frac{t_1}{2}\right)\right) t_1$$



No conocemos $y\left(\frac{t_1}{2}\right)$!!

Pedimos ayuda a Euler!

$$k_1 = f(0, y(t_0)) = f(0, y_0)$$

$$y\left(\frac{t_1}{2}\right) \approx y_0 + \frac{t_1}{2} f(0, y_0) = y_0 + k_1\,\frac{t_1}{2}$$

Sea $h = t_{i+1} - t_i$, entonces en forma general:

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + h\,f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}\,k_1\right)$$

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(t_i, y_i) \\
k_2 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}\, k_1\right) \\
k_3 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}\, k_2\right) \\
k_4 &= f\left(t_i + h, y_i + h\, k_3\right) \\
y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{6}\,\left(k_1 + 2\, k_2 + 2\, k_3 + k_4\right)
\end{aligned}
$$

Los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias pueden ser aproximados mediante una extensión de los métodos vistos anteriormente.

$$\begin{aligned}
y_1' &= f_1(t, y_1, y_2, ..., y_n) \\
y_2' &= f_2(t, y_1, y_2, ..., y_n) \\
&\vdots \\
y_n' &= f_n(t, y_1, y_2, ..., y_n)
\end{aligned}$$

En un problema de valor inicial, cada variable requiere de su propia condición inicial.

Ejemplo 3

Aplicar el método de Euler al siguiente sistema dinámico:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2^2 - 2\,y_1 \\ y_2' &= y_1 - y_2 - t\,y_2^2 \\ y_1(0) &= 0 \\ y_2(0) &= 1 \end{aligned}$$

Una ecuación diferencial ordinaria de mayor orden puede ser convertida en un sistema.

Sea

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$$

una ecuación diferencial de orden n.

Se definen las variables

$$\begin{aligned} y_1 &= y \\ y_2 &= y' \\ y_3 &= y'' \\ &\vdots \\ y_n &= y^{(n-1)} \end{aligned}$$

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Entonces, la ecuación original

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$$

se puede escribir como

$$\begin{aligned}
y_1' &= y_2 \\
y_2' &= y_3 \\
y_3' &= y_4 \\
&\vdots \\
y_{n-1}' &= y_n \\
y_n' &= f(t, y_1, y_2, ..., y_n)
\end{aligned}$$

es convertida en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Ejemplo 4

De la Física se sabe que las oscilaciones de un péndulo con excitación $\varphi(t)$ y amortiguamiento proporcional a la velocidad instantánea de oscilación, vienen modeladas por el problema de valores iniciales

$$\vartheta''(t)+\kappa\vartheta'(t)+\mu\sin\vartheta(t)=\varphi(t),\quad \vartheta'(t_0)=\vartheta'_0,\quad \vartheta(t_0)=\vartheta_0 \quad (1)$$

donde $\vartheta=\vartheta(t)$ es el ángulo instantáneo que forma el péndulo con la vertical.

Aplicar el método de Euler, considerando $\kappa=10$, $\mu=2$, $\varphi(t)=0$ y las condiciones iniciales:

$$\begin{bmatrix}\vartheta_0\\ \vartheta'_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\pi/2\\ 0\end{bmatrix}$$

Satélite

La segunda ley de Newton establece que la aceleración a de un satélite está relacionada a la fuerza F aplicada al mismo como $F = m\,a$, donde m es su masa. La ley de la gravitación expresa la fuerza sobre un cuerpo de masa m_1 debido a la masa de un cuerpo de masa m_2 como:

$$F = \frac{g\,m_1\,m_2}{r^2} \tag{2}$$

donde r es la distancia entre los cuerpos.

En el caso de un satélite orbitando un planeta, la masa de este se puede despreciar, quedando un **problema de un cuerpo**. Esta simplificación permite despreciar la fuerza del satélite sobre el planeta, luego, el planeta es considerado como fijo.

Satélite

Consideremos que el planeta está posicionado en el origen y que la posición del satélite viene dada por (x, y). La distancia entre las masas entonces es $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y la fuerza sobre el satélite es central, es decir, en la dirección de la masa mayor. El vector dirección (unitario) viene dado por:

$$\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \tag{3}$$

Luego, la fuerza sobre el satélite es,

$$(F_x, F_y) = \left(\frac{g\, m_1\, m_2}{x^2 + y^2} \, \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{g\, m_1\, m_2}{x^2 + y^2} \, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \tag{4}$$

Satélite

Considerando la ley de movimiento de Newton y la ecuación anterior, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
m_1\, x'' &= -\frac{g\, m_1\, m_2\, x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\
m_1\, y'' &= -\frac{g\, m_1\, m_2\, y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

Satélite

Tomando $v_x = x'$ y $v_y = y'$, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$
\begin{aligned}
x' &= v_x \\
v_x' &= -\frac{g\, m_2\, x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\
y' &= v_y \\
v_y' &= -\frac{g\, m_2\, y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}
\end{aligned}
$$