UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

DEPARTAMENTO
DE INFORMÁTICA

INF 285 - Computación Científica
Ingeniería Civil Informática

9: Interpolación Polinomial (II)

Teorema 1

Asuma que $P(x)$ es un polinomio interpolador, de grado $n-1$ o menor, que se ajusta a los puntos $(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$. El error de interpolación es:

$$f(x) - P(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{n!} f^{(n)}(c), \tag{1}$$

donde $c \in [x_1, x_n]$ y $f(x)$ es la función de donde se obtienen los datos $y = f(x)$.

Ejemplo 1

Sea $y = \sin(x)$ *y considere los puntos* $0, \pi/6, \pi/3$ *y* $\pi/2$. *Calcular una cota superior para la interpolación en* $x = 1$.

Aplicamos la ecuación (1):

$$\sin(x) - P(x) = \frac{(x-0)(x-\pi/6)(x-\pi/3)(x-\pi/2)}{4!} f^{(4)}(c)$$

donde $0 < c < \pi/2$. La cuarta derivada de $f^{(4)}(c) = \sin(c)$ varía entre 0 y 1 en este rango. Por lo tanto, el valor máximo de $|\sin(c)|$ es 1. Luego podemos obtener una expresión para una cota superior del error:

$$|\sin(x) - P(x)| \leq \frac{|(x-0)(x-\pi/6)(x-\pi/3)(x-\pi/2)|}{24} |1|$$

Para $x = 1$:

$$|\sin(1) - P(1)| \leq \frac{|(1)(1-\pi/6)(1-\pi/3)(1-\pi/2)|}{24} \approx 0.0005348$$

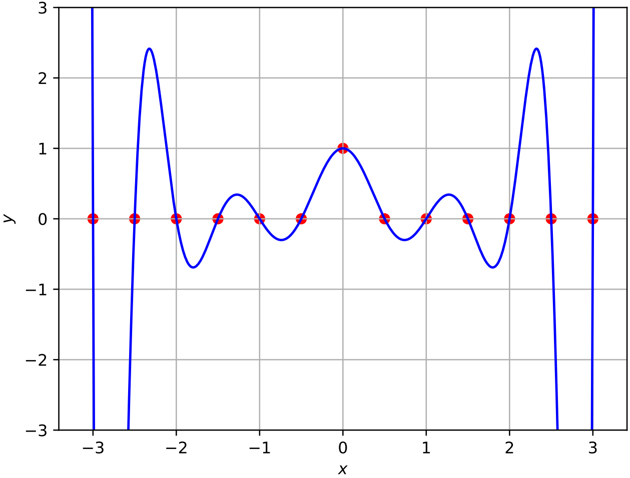
Los polinomios pueden interpolar cualquier conjunto de datos.

Sin embargo, los polinomios prefieren algunas “formas” por sobre otras.

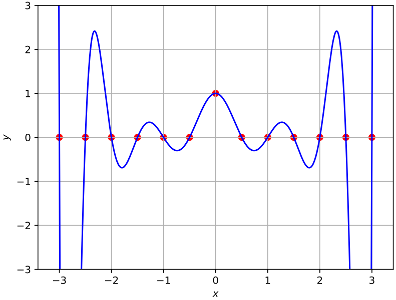
Supongamos que $y_k = 0$, en los puntos $x_k = -3 + \frac{k}{2}$ para $k = 0, ..., 12$ excepto en $x_6 = 0$ donde $y_6 = 1$. Veamos el polinomio interpolador resultante.

Interpolación

Fenómeno Runge



El polinomio interpolador pasa a través de los puntos, pero no se mantiene entre 0 y 1.

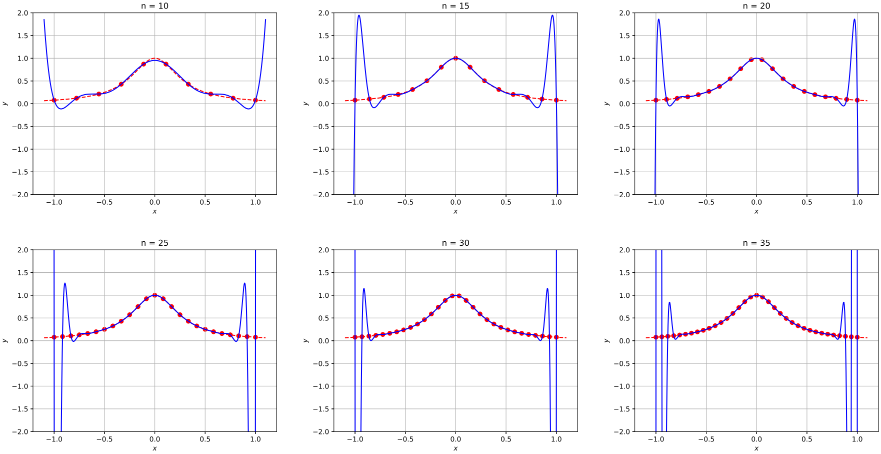


El **fenómeno Runge** ocurre cuando hay una cierta "oscilación" para la interpolación de polinomios de grado mayor sobre puntos equiespaciados.

Ejemplo 2

Interpolar la función $f(x) = 1/(1 + 12x^2)$ *con puntos equiespaciados en el intervalo* $[-1, 1]$.

Realizaremos 6 interpolaciones distintas con $10, 15, 20, 25, 30$ y 35 puntos equiespaciados respectivamente.



Podemos observar el **fenómeno Runge** para todos los casos.

Sabemos que el máximo error de interpolación (cota superior) viene dado por:

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{n!}\, f^{(n)}(c)$$

sobre el intervalo de interpolación.

¿Se puede encontrar puntos $x_1, x_2, ..., x_n$ de tal manera que esta cota sea mínima?

En otras palabras, el objetivo es encontrar ciertos puntos donde el valor máximo del error de interpolación sea el menor posible.

Teorema 2

Los números reales $-1 \leq x_1, ..., x_n \leq 1$ *que logra que el valor de*

$$\underset{-1 \leq x \leq 1}{max} |(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)|$$

sea el menor posible, son:

$$x_i = \cos \frac{(2i - 1)\pi}{2n} \qquad para\ i = 1, ..., n$$

y el mínimo valor es $1/2^{n-1}$*, donde es alcanzado por*

$$(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$$

donde $T_n(x)$ *es el polinomio de Chebyshev de grado* n*.*

Ejemplo 3

Encontrar una cota para el error de interpolación en el intervalo $[-1, 1]$ *entre la función* $f(x) = e^x$ *y el polinomio interpolador de Chebyshev de grado* 4.

El error viene dado por:

$$f(x) - P_4(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)}{5!} f^{(5)}(c)$$

donde

$$x_1 = \cos\frac{\pi}{10} \quad x_2 = \cos\frac{3\pi}{10} \quad x_3 = \cos\frac{5\pi}{10} \quad x_4 = \cos\frac{7\pi}{10} \quad x_5 = \cos\frac{9\pi}{10}$$

son los puntos de Chebyshev y $-1 < c < 1$.

De acuerdo, al teorema anterior:

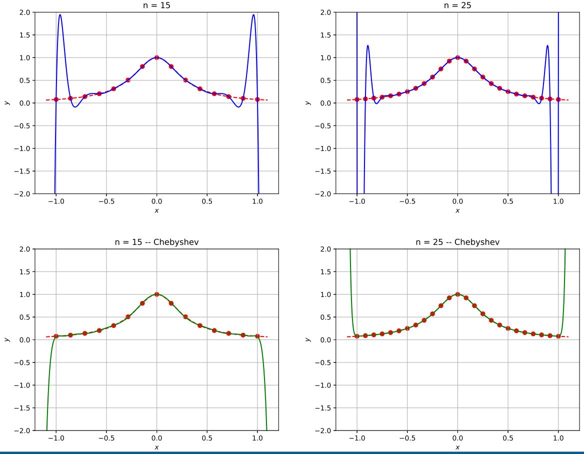
$$|(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)| \leq \frac{1}{2^4}$$

Además $|f^{(5)}| \leq e^1$ en el intervalo $[-1, 1]$.

El error de interpolación entonces es

$$|e^x - P_4(x)| \leq \frac{e}{2^4\,5!} \approx 0.00142$$

Regresemos a la función $f(x) = 1/(1 + 12x^2)$. Ahora, se eligen como puntos de interpolación, los puntos de Chebyshev para $n = 15$ y 25.



Podemos observar que el **fenómeno Runge** no aparece al escoger los puntos de Chebyshev como puntos de interpolación en el intervalo $[-1, 1]$.

Los puntos de Chebyshev mostrados anteriormente se utilizan en el intervalo $[-1, 1]$.

Cuando estamos interpolando en un intervalo distinto, se debe realizar un **cambio de intervalo** para calcular los "nuevos" puntos.

Por lo tanto, los puntos tendrán la misma posición relativa en $[a, b]$, como lo tenían en el intervalo $[-1, 1]$.

Para esto, se realiza un proceso de ajuste y traslación de los puntos.

Sea el intervalo $[a, b]$, los puntos de Chebyshev son

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n}$$

para $i = 1, ..., n$.

La desigualdad

$$|(x - x_1) \cdots (x - x_n)| \leq \frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^n}{2^{n-1}}$$

se cumple en $[a, b]$.

Ejemplo 4

Encontrar los 4 puntos de Chebyshev para la interpolación en el intervalo $[0, \pi/2]$, y encontrar una cota superior para el error de interpolación para $f(x) = \sin(x)$.

Los puntos de Chebyshev para $n = 4$ en el intervalo $[0, \pi/2]$ son

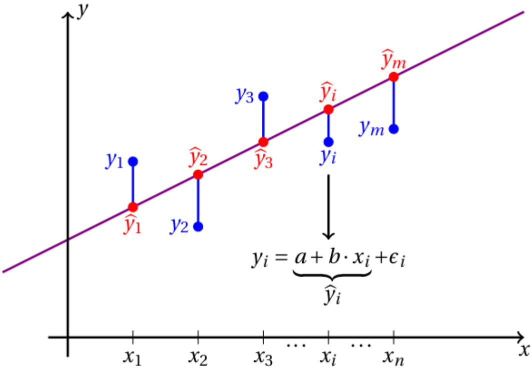
$$\frac{\frac{\pi}{2} + 0}{2} + \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{2} \cos \frac{(2i-1)\pi}{2(4)}$$

para $i = 1, ..., 4$. Por lo tanto

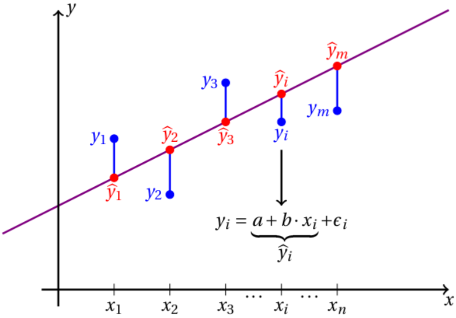
$$x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{8} \quad x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \cos \frac{3\pi}{8} \quad x_3 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \cos \frac{5\pi}{8} \quad x_4 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \cos \frac{7\pi}{8}$$

La cota superior para el error es

$$\begin{aligned} |\sin x - P_3(x)| &= \frac{|(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)|}{4!} |f^{(4)}(c)| \\ &\leq \frac{\left(\frac{\frac{\pi}{2}-0}{2}\right)^4}{4!\, 2^3} 1 \approx 0.00198 \end{aligned}$$



y
x
y_1
y_2
y_3
y_i
y_m
$\widehat{y}_1$
$\widehat{y}_2$
$\widehat{y}_3$
$\widehat{y}_i$
$\widehat{y}_m$
$y_i = \underbrace{a + b \cdot x_i}_{\widehat{y}_i} + \epsilon_i$
x_1
x_2
x_3
$\cdots$
x_i
$\cdots$
x_n



Error Cuadrático

$$F(a,b) = \sum_{i=1}^{m} (y_i - f(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{m} (y_i - a - b\,x_i)^2$$

¿Cómo minimizar $F(a,b)$?

$$F(a,b) = \sum_{i=1}^{m} (y_i - a - b\,x_i)^2 \Rightarrow \nabla F = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \sum_{i=1}^{m} 2\,(y_i - a - b\,x_i)\,(-1) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = \sum_{i=1}^{m} 2\,(y_i - a - b\,x_i)\,(-x_i) = 0$$

$$\begin{bmatrix} m & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_i & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_i\,y_i \end{bmatrix}$$