Corrigé du contrôle

Exercice 1 (3 points)

1. Notons $u_n = \dfrac{(n+1)!}{1 \times 4 \times \cdots \times (3n+1)} a^n$ et raisonnons via la règle de d'Alembert.

   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+2)!a^{n+1}}{1 \times 4 \times \cdots \times (3n+4)} \times \frac{1 \times 4 \times \cdots \times (3n+1)}{(n+1)!a^n} = \frac{a(n+2)}{3n+4} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{a}{3}.$$

   Si $a < 3$, $\sum u_n$ converge.

   Si $a > 3$, $\sum u_n$ diverge.

2. Notons $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ et raisonnons via la règle de Cauchy.

   $$\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{-n\ln(1+1/n)} = e^{-n(1/n+o(1/n))} = e^{-1+o(1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-1} < 1.$$

   Ainsi $\sum u_n$ converge.

3. $\left|\dfrac{\sin(n)}{n(n+1)}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

   Or $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge donc $\sum \dfrac{\sin(n)}{n(n+1)}$ converge absolument donc converge.

Exercice 2 (3 points)

1. (u_n) est alternée et $(|u_n|)$ converge vers 0. De plus $(|u_n|)$ est décroissante car $f : t \longmapsto \dfrac{1}{\ln(\sqrt{t}+1)}$ vérifie pour tout $t \in [1, +\infty[$:

   $$f'(t) = -\frac{1}{\ln(\sqrt{t}+1)^2} \times \frac{1}{\sqrt{t}+1} \times \frac{1}{2\sqrt{t}} \leqslant 0$$

   Ainsi, via le critère spécial des séries alternées, $\sum u_n$ converge.

2. Via le théorème des croissances comparées, $n^{1/2}|u_n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

3. Via la question précédente, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$n \geqslant N \Longrightarrow n^{1/2}|u_n| > 1$$

   donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$n \geqslant N \Longrightarrow |u_n| > \frac{1}{n^{1/2}}$$

   Or $\sum \dfrac{1}{n^{1/2}}$ diverge donc $\sum |u_n|$ diverge.

Exercice 3 (3 points)

1. $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{n}$.

   On ne peut rien conclure car la suite $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ n'est pas de signe constant.

2. Via le développement limité de $\sin(x)$ en 0, on a $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} - \dfrac{(-1)^n}{6n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

3. $(u_n) = (v_n) + (w_n)$ où $(v_n) = \left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ et $(w_n) = \left(-\dfrac{(-1)^n}{6n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right)$.

   (v_n) est alternée et vérifie le critère spécial donc $\sum v_n$ converge.

   $|w_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{6n^3}$.

   Or $\sum \dfrac{1}{n^3}$ converge donc $\sum w_n$ converge absolument donc converge.

   Ainsi, la série de terme général u_n, somme de deux séries convergentes, converge.

Exercice 4 (3 points)

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

2. On cherche k tel que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.

   Comme $\dfrac{a}{a+1} < 1$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{a+1}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{a}{a+1}} = a+1$.

   Ainsi
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1 \Longleftrightarrow k(a+1) = 1$$
   d'où $k = \dfrac{1}{a+1}$.

3. Notons G la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant la loi p_n.

   $G(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} k \left(\frac{a}{a+1}\right)^n t^n$.

   Via la règle de D'Alembert, on en déduit immédiatement que le rayon de convergence R de cette série entière est
   $$\frac{a+1}{a} = 1 + \frac{1}{a}$$
   Soit $t \in]-R, R[$. Alors via le DSE classique de $\dfrac{1}{1-u}$, on a immédiatement
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{a+1}\right)^n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{a+1}t\right)^n = \frac{1}{1-\frac{a}{a+1}t} = \frac{a+1}{a+1-at}$$
   Ainsi, comme $k = \dfrac{1}{a+1}$, $G(t) = \dfrac{1}{1+a-at}$.

Exercice 5 (3 points)

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et utilisons la règle de D'Alembert.

$\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \sqrt{\dfrac{n}{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc le rayon de convergence de la série est $R = 1$.

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \dfrac{n!}{(2n)!}$ et utilisons de nouveau la règle de D'Alembert.

$\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \dfrac{n+1}{(2n+1)(2n+2)} = \dfrac{1}{2(2n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc le rayon de convergence de la série est $R = +\infty$.

Exercice 6 (3 points)

Le DSE (en 0) de $\ln(1+x)$ est $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}\cdot$

Ainsi celui de $\ln\left(1+2x^2\right)$ est $\ln\left(1+2x^2\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n x^{2n}}{n}\cdot$

$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ et $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

Ainsi, via le produit de Cauchy, on a immédiatement $\frac{e^x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\cdot$

Exercice 7 (3 points)

1. $G_X(1) = 1$ donc $25k = 1$ soit $k = \frac{1}{25}\cdot$

2. $G_X(t) = \frac{1}{25}\left(9 + 12t^2 + 4t^4\right) = \frac{9}{25} + \frac{12}{25}t^2 + \frac{4}{25}t^4$.

   Ainsi, comme $G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)t^k$, on a :

   $P(X=0) = \frac{9}{25}; P(X=1) = 0; P(X=2) = \frac{12}{25}; P(X=3) = 0; P(X=4) = \frac{4}{25}$ et pour tout $k > 4, P(X=k) = 0$.

3. $G'_X(t) = 2k(3+2t^2)4t$ donc $E(X) = G'_X(1) = 40k = \frac{40}{25} = \frac{8}{5}\cdot$