4 Wechselstromtechnik

Dieses Kapitel gibt einen Einstieg in die Wechselstromtechnik. Ein Ziel dabei ist es, Schaltungen mit Wechselspannungsquellen zu analysieren und zu berechnen.

Bei Anwendungen der Wechselstromtechnik ändert sich der Wert des Stromes zeitlich. Oft geschieht dies periodisch. Damit ist ein Vorgang gemeint, der stets in der gleichen Weise in einem regelmäßigen Rythmus auftritt. Die kürzeste Zeit, die zwischen zwei sich entsprechenden wiederkehrenden Stellen des Vorgangs verstreicht, wird Periodendauer oder auch Schwingungsdauer genannt, abgekürzt als Periode T mit der Einheit $[T] = 1\,s$.

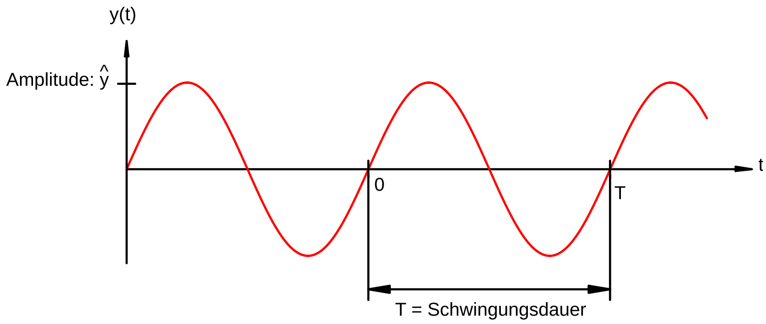
In diesem Kapitel werden meist Ströme betrachtet, deren zeitliche Mittelwerte Null sind, und deren Polarität regelmäßig wechselt.

4.1 Sinusförmige Größen

Der zeitliche Verlauf einer Wechselgröße kann prinzipiell beliebig sein. In der Audio- und Videotechnik, aber auch in der Informationstechnologie kommen oft Größen mit sinusförmigen Verlauf vor, oder Größen, die sich aus sinusförmigen Anteilen zusammensetzen lassen. Eine sinusförmige Größe kann man sich so entstanden vorstellen, indem man einen Zeiger rotieren lässt, und dessen Projektion auf eine Achse separat in einem Diagramm über der Zeit oder über dem Phasenwinkel aufträgt.

Dabei hat sich bei technischen Anwendungen folgende Schreibweise eingebürgert: Für zeitlich veränderliche Größen verwendet man für die Augenblickswerte Kleinbuchstaben, z.B. u und i. Möchte man die Zeitabhängigkeit hervorheben, kann man das mit $u(t)$ und $i(t)$ symbolisieren. Großbuchstaben werden dann z.B. für zeitliche konstante Größen oder für Effektivwerte verwendet.

Im nächsten Diagramm ist ein sinusförmiger Verlauf skizziert:



Theoretisch beginnt eine sinusförmige Schwingung vor unendlich langer Zeit, und endet nie. Mathematisch kann das so beschrieben werden:

Amplitude Kreis Frenz

$$y(t) = \hat{y} \cdot sin(\omega t + \varphi_x) \tag{4.1}$$

Zeit Nullphasenwi

Dabei sind $\hat{y}$ die Amplitude der Schwingung, ω die Kreisfrequenz und φ_x der sogenannte Nullphasenwinkel.

Die Frequenz f ist die Häufigkeit, mit der die Schwingung pro Sekunde auftritt. Sie wird in der Einheit Hertz angegeben und ist der Kehrwert der Periodendauer: $f = \frac{1}{T}$ mit $[f] = 1\,Hz$.

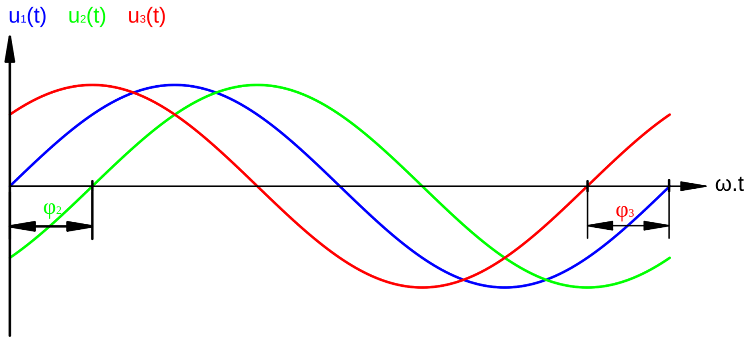
Die Kreisfrequenz ω ist eine Größe aus der Schwingungslehre. Auch sie beschreibt, wie schnell eine Schwingung abläuft. Hier wird aber nicht die Anzahl der Perioden auf die Zeit bezogen, sondern auf den überstrichenen Phasenwinkel pro Zeitspanne. Da einer Periodendauer T ein Phasenwinkel von 2π entspricht, kann man $\omega = 2\pi f$ für den Zusammenhang verwenden.

Der Nullphasenwinkel φ_x gibt die aktuelle Position im Ablauf des periodischen Vorgangs an. Ist er nicht Null, führt er zu einer Verschiebung der Kurve.

Es gibt zwei verbreitete Darstellungsarten für sinusförmige Wechselgrößen:

4.1.1 Liniendiagramme

Damit ist hier die graphische Darstellung des funktionellen Zusammenhangs z.B. einer Spannung $u(t)$ oder eines Stromes $i(t)$ über der Zeit t oder über dem Phasenwinkel $\omega \cdot t$ gemeint. Die getriggerte Anzeige eines periodischen Signals auf einem Oszilloskop kann wie ein Liniendiagramm aussehen. In diesem Beispiel sehen Sie drei zeitlich zueinander verschobene Sinuskurven mit der gleichen Frequenz:



Zählt man die Nullphasenwinkel φ_2 und φ_3 positiv, so können die Kurven mathematisch folgendermaßen beschrieben werden:

$$u_1(t) = \hat{u_1} \cdot sin(\omega t) \tag{4.2}$$

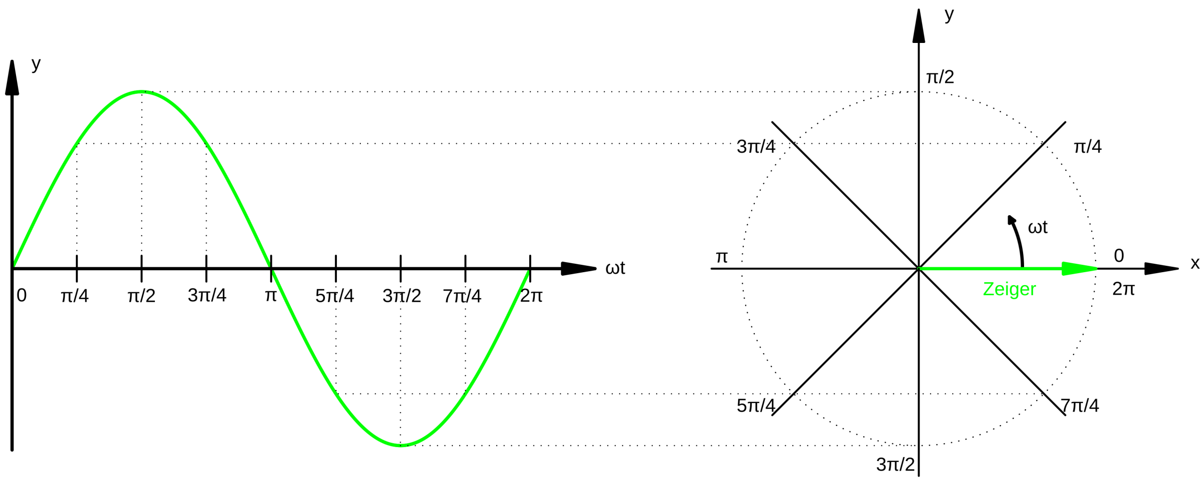
$$u_2(t) = \hat{u_2} \cdot sin(\omega t - \varphi_2) \tag{4.3}$$

$$u_3(t) = \hat{u_3} \cdot sin(\omega t + \varphi_3) \tag{4.4}$$

Man sagt dazu: „Die Spannung u_3 eilt der Spannung u_1 voraus, und u_2 eilt u_1 nach.“

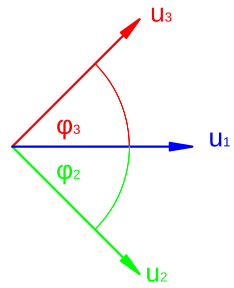
4.1.2 Zeigerdiagramme

Die Idee dahinter ist, dass die Amplitude $\hat{y}$ der Schwingung $y(t)$ einer Zeigerlänge entspricht. Dieser Zeiger dreht sich mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω in die Gegenrichtung zum Uhrzeigersinn um den Ursprung. Der momentane Winkel gegenüber der x-Achse wird mit $\varphi(t) = \omega \cdot t$ bezeichnet. Ein eventueller Nullphasenwinkel φ_x kann zusätzlich als Startwinkel berücksichtigt werden, in dem Bild unten ist er 0:



Die Sinusschwingung links im Liniendiagramm entsteht nun so, dass man über dem Phasenwinkel die Projektionslänge des Zeigers auf die y-Achse aufträgt.

Sollen mehrere Sinusschwingungen gleichzeitig betrachtet werden, und interessiert nur die relative Lage zueinander, wird die Einfachheit des Zeigerdiagramms sofort ersichtlich:



4.2 Der Mittelwert

Hier ist der arithmetische Mittelwert über der Zeit gemeint. Eine andere Bezeichnung in der Elektrotechnik ist Gleichwert. Wenn eine Überlagerung von einer Wechselgröße mit einer Gleichgröße vorliegt, gibt der Mittelwert den Gleichanteil davon an.

Bei periodischen Spannugen kann der Mittelwert folgendermaßen berechnet werden:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} u(t)dt \tag{4.5}$$

Dabei ist die Anfangszeit t_1 frei wählbar.

Analog dazu lautet die Formel für Wechselströme:

$$\bar{i} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} i(t)dt \tag{4.6}$$

Da bei sinusförmigen Spannungen $u(t) = \hat{u} \cdot sin(\omega t + \varphi_x)$ die Flächen unter der Kurve im Positiven jeweils gleich groß sind wie im Negativen, ergibt sich das Ergebnis zu:

$$\bar{u} = 0 \tag{4.7}$$

4.3 Der Gleichrichtwert

Der Mittelwert einer Sinusgröße ist null und eignet sich daher nicht, diese zu beschreiben. Eine einfache Möglichkeit, eine Wechselgröße messtechnisch zu erfassen und zu beschreiben funktioniert über den Gleichrichtwert. Dazu wird erst der Betrag der Größe gebildet, und danach gemittelt.

Technisch gesehen gibt der Gleichrichtwert eines Stromes an, welche Ladungsmenge der gleichgerichtete Wechselstrom im zeitlichen Mittel überträgt.

Mathematisch kann der Gleichrichtwert daher folgendermaßen für periodische Spannungen beschrieben werden:

$$\overline{|u|} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} |u(t)|dt \tag{4.8}$$

Für periodische Ströme ergibt sich daher:

$$\overline{|i|} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} |i(t)|dt \tag{4.9}$$

Für sinusförmige Spannungen erhält man daraus:

$$\overline{|u|} = \frac{2\hat{u}}{\pi} \tag{4.10}$$

4.4 Der Effektivwert

Der Effektivwert einer Wechselgröße ist so hoch wie jener Wert einer Gleichgröße, die in einem ohmschen Widerstand im zeitlich konstanten Mittel dieselbe Leistung bzw. die selbe Energie umsetzt. Berechnet man den Effektivwert aus Strom oder Spannung, ist er ein quadratischer Mittelwert. Er hängt von der Amplitude und von der Kurvenform ab. Im Englischen wird er mit Root Mean Square (RMS) bezeichnet.

Bei sinusförmigen Wechselgrößen wird oft anstelle der Amplitude der Effektivwert angegeben. Zum Beispiel beträgt der Nennwert in unserem Stromnetz 230 V bei einer Frequenz von 50 Hz. An ohmschen Verbrauchern lassen sich bei der Verwendung von Effektivwerten ähnliche Formeln wie in der Gleichstromtechnik einsetzen.

Bei einem periodischen Wechselspannungssignal kann der Effektivwert folgendermaßen berechnet werden:

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} u^2(t)dt} \tag{4.11}$$

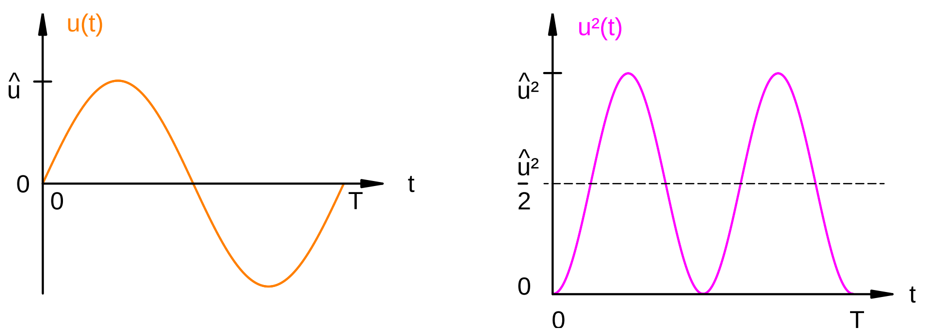
Für ein Wechselstromsignal gilt analog dazu:

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} i^2(t)dt} \tag{4.12}$$

Das Ergebnis für sinusförmige Spannungen $u(t) = \hat{u} \cdot sin(\omega t + \varphi_x)$ ergibt sich zu:

$$U_{eff} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \tag{4.13}$$

Grafische Erklärung:



4.5 Der Scheitelfaktor (Crest-Faktor)

In der Elektrotechnik beschreibt der Crest-Faktor das Verhältnis von Scheitelwert zu Effektivwert einer Wechselgröße. Er ist immer $C \geq 1$. Häufige Anwendungsgebiete sind die Messtechnik, aber auch die Tontechnik und die Nachrichtentechnik.

Mit Scheitelwert ist der größte Betrag der Augenblickswerte eines Wechselsignals gemeint. Bei sinusförmigen Wechselsignalen verwenden wir dazu den Begriff Amplitude.

Wir verwenden bei periodischen Größen daher folgende Definition:

$$C = \frac{\hat{u}}{U_{eff}} \quad \text{oder} \quad C = \frac{\hat{i}}{I_{eff}} \tag{4.14}$$

Berechnen Sie für eine sinusförmige Wechselspannung mit einem Effektivwert von $U_{eff} = 230V$ den Spitzenwert und den Crest-Faktor.

Digitale Messgeräte für die Effektivwertmessung sollen die Werte rund um den Spitzenwert des Signales schnell genug verarbeiten. Einfache Messgeräte arbeiten bei hohen Scheitelfaktoren eher ungenau, da sie eine ausreichend hohe Abtastrate benötigen, und einen entsprechenden Dynamikumfang. Weiters muss das Messgerät bei hohen Scheitelfaktoren wesentlich höhere Spitzenwerte gefahrlos verarbeiten können, als den Effektivwert.

Zu berücksichtigen ist der Scheitelfaktor auch bei unterbrechungsfreien Spannungsversorgungen (USVs) für Server und PCs. Hat ein Schaltnetzteil z.B. einen Scheitelfaktor von ca. 3, so muss eben die USV kurzzeitige Ströme liefern können, die drei Mal so hoch sind, wie der Effektivstrom.

4.6 Der Formfaktor

Eine weitere für die Messtechnik relevante Größe ist der Formfaktor. Damit ist das Verhältnis von Effektivwert zu Gleichrichtwert eines periodischen Signals gemeint:

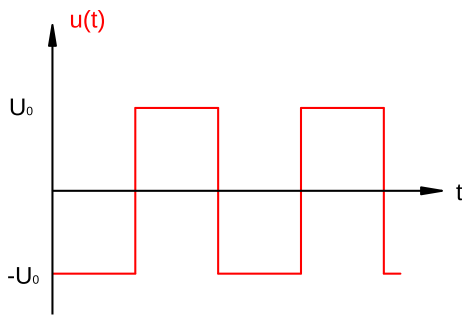
$$F = \frac{U_{eff}}{\overline{|u|}} \quad \text{oder} \quad F = \frac{I_{eff}}{\overline{|i|}} \tag{4.15}$$

Je nach Kurvenform liegt der Wertebereich daher zwischen $1 \leq F \leq \infty$.

In der Messtechnik kommt dem Formfaktor eine besondere Bedeutung zu: Angezeigt werden soll bei Wechselgrößen üblicherweise der Effektivwert. Bei einfachen Messgeräten wird aber oft nur der Gleichrichtwert erfasst, und dann das 1,11-fache davon angezeigt. Das bedeutet, dass mit diesen Messgeräten bei nicht-sinusförmigen Größen (Rechteck, Dreieck, usw.) falsche Messwerte für die Effektivwerte angezeigt werden.

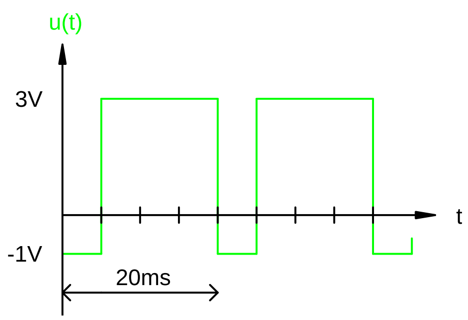
4.7 Übungsbeispiele

1. Sie haben ein symmetrisches, periodisches Rechtecksignal gegeben:

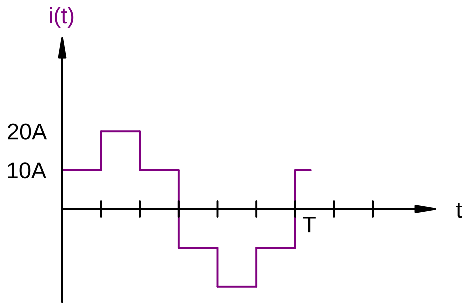


   (a) Zeichnen Sie die Periodendauer T in der Skizze ein.
   (b) Bestimmen Sie den Gleichanteil des Signals.
   (c) Berechnen Sie den Gleichrichtwert dieses Rechtecks.
   (d) Ermitteln Sie nun den Effektivwert.
   (e) Berechnen Sie daraus den Crest-Faktor und den Formfaktor.

2. Berechnen Sie für diesen Signalverlauf den Mittelwert, den Gleichrichtwert, den Effektivwert und daraus den Crest-Faktor sowie den Formfaktor:

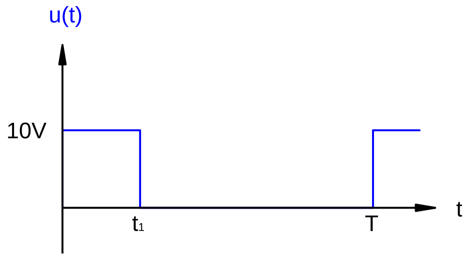


3. Ein Schaltnetzteil entnimmt einen gepulsten Stromverlauf, der in etwa so aussieht:



Errechnen Sie wieder den Mittelwert, den Gleichrichtwert, den Effektivwert, den Crest-Faktor und den Formfaktor dieses Stromverlaufes.

4. Wie groß muss das Verhältnis von $\frac{t_1}{T}$ sein, damit der Effektivwert der Spannung $U_{eff} = 5\,V$ beträgt?

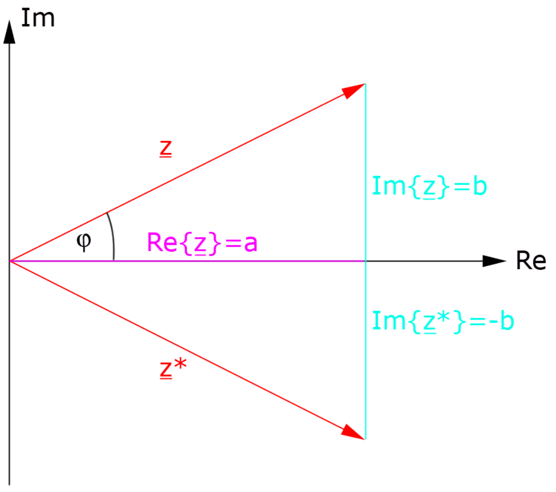


Berechnen Sie damit den Mittelwert, den Scheitelwert und den Formfaktor.

4.8 Gauß'sche Zahlenebene

Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ lässt sich bekanntlich in einer Ebene darstellen. Wechselgrößen einer Frequenz können zur Berechnung im eingeschwungenen Zustand in der Gauß'schen Zahlenebene oft als Vektoren dargestellt werden.

4.8.1 Grundbegriffe



Die imaginäre Einheit stellt für uns eine Rechenhilfe dar:

$$i = j = \sqrt{-1}$$
$$j^2 = -1$$
$$\frac{1}{j} = -j$$

Allgemeine komplexe Zahl: $\underline{z} = a + jb$

Konjugiert komplexe Zahl: $\underline{z}^{\star} = a - jb$

Betrag einer komplexen Zahl $z = |\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Phasenbeziehungen: $cos(\varphi) = \frac{a}{z}$, $sin(\varphi) = \frac{b}{z}$, $tan(\varphi) = \frac{b}{a}$.

4.8.2 Darstellungsarten

Normalform (Komponentenform):

$\underline{z} = Re\{\underline{z}\} + jIm\{\underline{z}\}$
$\underline{z}^{\star} = Re\{\underline{z}\} - jIm\{\underline{z}\}$

Trigonometrische Form:

$\underline{z} = z \cdot (cos(\varphi) + j \cdot sin(\varphi))$
$\underline{z}^{\star} = z \cdot (cos(\varphi) - j \cdot sin(\varphi))$

Exponentialform:

Polarform:

$\underline{z} = z \cdot e^{j\varphi}$
$\underline{z}^{\star} = z \cdot e^{-j\varphi}$

$\underline{z} = z^{\underline{|\varphi}} = (z ; \varphi)$

4.8.3 Grundrechnungsarten

Addition und Subtraktion von komplexen Zahlen in der Normalform:
Hier müssen Real- und Imaginärteile addiert werden.

$(a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j \cdot (b + d)$

Addition und Subtraktion von komplexen Zahlen in der Exponentialform:
Hier ist eine Zerlegung in die Komponentenform notwendig.

$z_1 \cdot e^{j\varphi_1} + z_2 \cdot e^{j\varphi_2} = ?$

$a_1 = z_1 \cdot cos(\varphi_1)$, $b_1 = z_1 \cdot sin(\varphi_1)$, usw.

Multiplikation von komplexen Zahlen in der Normalform:
Hier sind übliche Klammernregeln anzuwenden.

$(a + jb) \cdot (c + jd) = (ac + jad + jbc + j^2bd) = (ac - bd) + j \cdot (ad + bc)$

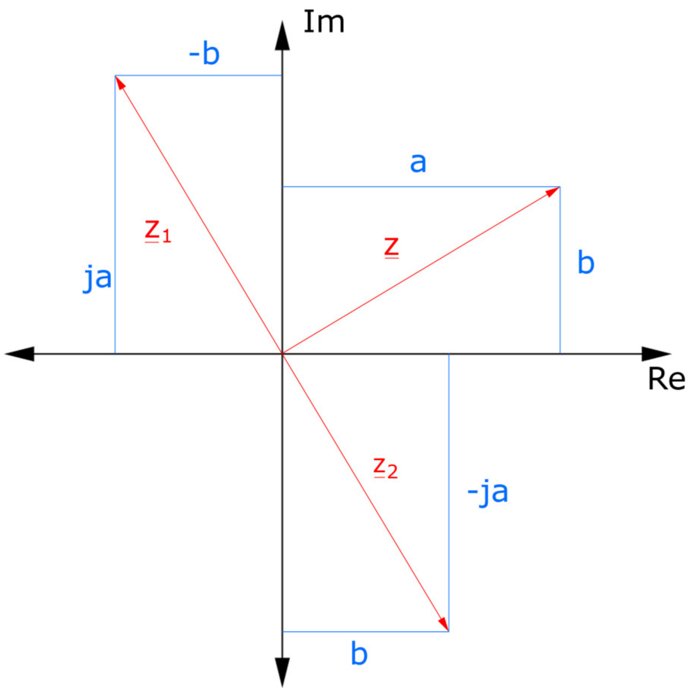
Beispiel:

$(3 + j4) \cdot (5 + j6) = -9 + j38$

Multiplikation von komplexen Zahlen in der Exponentialform:
$z_1 \cdot e^{j\varphi_1} \cdot z_2 \cdot e^{j\varphi_2} = z_1 \cdot z_2 \cdot e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$

Spezialfall:
$\underline{z} \cdot \underline{z}^{\star} = z \cdot e^{j\varphi} \cdot z \cdot e^{-j\varphi} = z^2$
$\underline{z} \cdot \underline{z}^{\star} = (a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2$

Multiplikation mit $\pm j$:
Einer Multiplikation mit $\pm j$ entspricht eine Drehung des Zeigers um $\pm 90°$:



$\underline{z} = a + jb$
$\underline{z_1} = j \cdot \underline{z} = -b + ja$
$\underline{z_2} = -j \cdot \underline{z} = b - ja$

Division von komplexen Zahlen in der Normalform:
$\frac{(a+jb)}{(c+jd)} = \frac{(a+jb)(c-jd)}{(c+jd)(c-jd)} = \frac{(ac+bd)+j\cdot(bc-ad)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + j \cdot \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$

Division von komplexen Zahlen in der Exponentialform:
$\frac{z_1 \cdot e^{j\varphi_1}}{z_2 \cdot e^{j\varphi_2}} = \frac{z_1}{z_2} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$

Weitere Regeln:
$e^{j0} = 1$
$e^{(j\frac{\pi}{2})} = e^{(j90°)} = j$
$e^{(j\pi)} = e^{(j180°)} = j^2 = -1$
$e^{(j\frac{3\pi}{2})} = e^{(j270°)} = e^{(-j90°)} = j^3 = -j$
$e^{(j2\pi)} = e^{(j360°)} = j^4 = 1$

4.8.4 Verwenden des Taschenrechners

Betrag einer komplexen Zahl: $z = |\underline{z}| = abs(z)$

Winkel einer komplexen Zahl: $\varphi = angle(z)$

Realteil einer komplexen Zahl: $a = real(z)$

Imaginärteil einer komplexen Zahl: $b = imag(z)$

4.9 Wechselstrom und Wechselspannung an den wichtigsten passiven Bauteilen

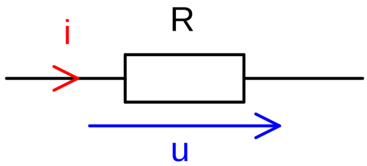
Analysiert man Schaltungen aus idealen Widerständen, Kondensatoren und Spulen, die an einer sinusförmigen Wechelspannungsquelle einer Frequenz anliegen, so können die eingeschwungenen Zustände der Ströme und Spannungen mittels komplexer Wechselstromrechung ermittelt werden. Mit dieser Technik wird die Berechnungsmethode von Wechelstromnetzen ähnlich einfach zu der von Gleichstromnetzwerken.

Die Ein- und Ausschwingvorgänge von Strömen und Spannungen führt durch die Dynamik dieser zeitabhängigen Größen zu Differenzialgleichungen, die hier nicht betrachtet werden. Solche Lösungsverfahren sind schwierig und in der Praxis daher oft ungünstig oder nicht anzuwenden. Hier wird im Bedarfsfall oftmals auf eine Simulation ausgewichen.

Zum Verständnis der komplexen Wechselstromrechnung sind einerseits die Methoden für die Berechnung von Gleichstromnetzwerken des 1.Jahrgangs erforderlich, andererseits sind mathematische Kenntnisse der komplexen Rechentechniken notwendig. Die in den Schaltungen vorkommenden Ströme und Spannungen sind vom Verlauf her sinusförmig, und nur von ein und derselben Frequenz.

Die komplexe Wechselstromtechnik ist prinzipiell nur für lineare zeitinvariante Systeme anwendbar, die Gültigkeit vom Überlagerungssatz wird vorausgesetzt. Das bedeutet, die Bauteile müssen im betrachteten Frequenzbereich linear sein (was zum Beispiel bei Spulen mit Kernen in Sättigung oder bestimmten Kondensatoren nicht erfüllt ist). Wir betrachten im Folgenden nur ideale Bauelemente:

4.9.1 Der ohmsche Widerstand



Für Augenblickswerte gilt:

$$u(t) = R \cdot i(t) \tag{4.16}$$

Für sinusförmige Ströme $i(t) = \hat{i} \cdot sin(\omega t)$ ergibt sich für die Spannung:

$$u(t) = R \cdot \hat{i} \cdot sin(\omega t) = \hat{u} \cdot sin(\omega t) \tag{4.17}$$

Bei sinusförmigem Strom ist daher die am Widerstand anliegende Spannung auch sinusförmig und ohne Phasenverschiebung zum Strom. Man sagt, Strom und Spannung sind in Phase.

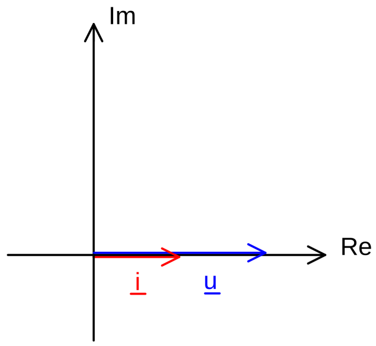
Für die Effektivwerte gilt ähnlich wie in der Gleichstromtechnik:

$$U_{eff} = R \cdot I_{eff} \tag{4.18}$$

Möchte man die Bedeutung von Strom und Spannung als komplexe Zeiger betonen, verwendet man z.B. folgende Schreibweise:

$$\underline{u} = R \cdot \underline{i} \tag{4.19}$$

Es ergibt sich für die Zeigerdarstellung:



Ein rein ohmscher Widerstand R (also ohne Kapazitäts- oder Induktivitätsanteil) wird in der Wechselstromtechnik als Wirkwiderstand (resistance) bezeichnet. Sein Kehrwert $G = \frac{1}{R}$ heißt Wirkleitwert (conductance).

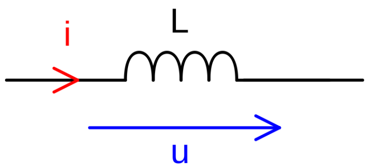
Die Impedanz $\underline{Z_R}$ (auch genannt Wechselstromwiderstand) eines ohmschen Widerstandes gibt das Verhältnis von Spannung zum Strom an. Dieser Begriff ist in der komplexen Wechselstromtechnik insbesondere von Bedeutung, da bei anderen Bauteilen zwischen Strom und Spannung eine Phasenverschiebung bestehen kann:

$$\underline{Z_R} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = R \tag{4.20}$$

Die Einheit der Impedanz ist $[Z] = 1\Omega$. Der Kehrwert der Impedanz wird mit Admittanz $\underline{Y}$ bezeichnet:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} \tag{4.21}$$

4.9.2 Die Induktivität



Unter bestimmten Voraussetzungen gilt für den Zusammenhang zwischen Spannung und Strom an einer Induktivität folgende Grundgleichung:

$$u(t) = L \cdot \frac{\delta i(t)}{\delta t} \tag{4.22}$$

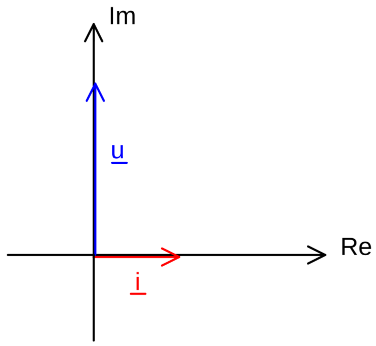
Für sinusförmige Ströme $i(t) = \hat{i} \cdot sin(\omega t)$ ergibt sich für die Spannung

$$u(t) = L \cdot \frac{\delta(\hat{i} \cdot sin(\omega t))}{\delta t} = \omega \cdot L \cdot \hat{i} \cdot cos(\omega t) = \hat{u} \cdot cos(\omega t) = \hat{u} \cdot sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \tag{4.23}$$

Dabei wird die mathematische Operation des Differenzierens verwendet (vgl. Angewandte Mathematik im 3. Jahrgang). Ein Cosinus entspricht einem um $\frac{\pi}{2}$ verschobenen Sinus:

$$cos(\alpha) = sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) \tag{4.24}$$

Zwischen Strom und Spannung entsteht also eine Phasenverschiebung von $\frac{\pi}{2}$, wobei die Spannung dem Strom voreilt. Es ergibt sich für die Zeigerdarstellung:



Sieht man sich das Verhältnis der Spitzenwerte an, so erhält man

$$\hat{u} = \omega \cdot L \cdot \hat{i} = X_L \cdot \hat{i} \tag{4.25}$$

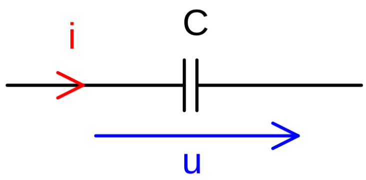
Man kann darin eine dem ohmschen Gesetz äquivalente Beziehung finden und nennt deswegen $X_L = \omega L$ den induktiven Blindwiderstand (inductive reactance). Für die Effektivwerte gilt daher auch

$$U_{eff} = X_L \cdot I_{eff} = \omega L \cdot I_{eff} \tag{4.26}$$

Die Impedanz $\underline{Z_L}$ einer Induktivität berechnet sich aufgrund der Phasenverschiebung von Strom und Spannung zu:

$$\underline{Z_L} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = j\omega L \tag{4.27}$$

4.9.3 Der Kondensator



Unter bestimmten Voraussetzungen gilt für den Zusammenhang zwischen Strom und Spannung an einer Kapazität folgende Grundgleichung:

$$i(t) = C \cdot \frac{\delta u(t)}{\delta t} \tag{4.28}$$

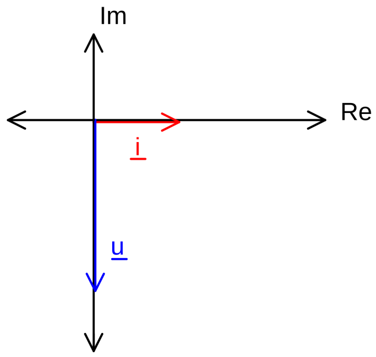
Für sinusförmige Ströme $i(t) = \hat{i} \cdot sin(\omega t)$ ergibt sich für die Spannung

$$u(t) = \frac{-1}{\omega C} \cdot \hat{i} \cdot cos(\omega t) \tag{4.29}$$

Dem zugrunde liegt die mathematische Umkehrung des Differenzierens (siehe Integrieren, 4. Jahrgang), sowie wieder die Tatsache, dass ein Sinus ein verschobener Cosinus ist:

$$-cos(\alpha) = sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) \tag{4.30}$$

Zwischen Strom und Spannung entsteht also eine Phasenverschiebung von $-\frac{\pi}{2}$, wobei die Spannung dem Strom nacheilt. Es ergibt sich für die Zeigerdarstellung:



Sieht man sich das Verhältnis der Spitzenwerte an, so erhält man

$$\hat{u} = \frac{1}{\omega C} \cdot \hat{i} = |X_C| \cdot \hat{i} \tag{4.31}$$

Man kann darin wieder eine dem ohmschen Gesetz äquivalente Beziehung finden und nennt $X_C = -\frac{1}{\omega C}$ den kapazitiven Blindwiderstand (capacitive reactance).

Diese Schreibweise entspricht der neueren internationalen Normung. In der Literatur wird manchmal der Betrag des kapazitiven Blindwiderstands mit X_C bezeichnet. Wir werden ohnehin weitgehend mit komplexen Impedanzen rechnen, dann wird diese mögliche Unstimmigkeit im Ansatz vermieden.

Für die Effektivwerte gilt daher

$$U_{eff} = |X_C| \cdot I_{eff} = \frac{1}{\omega C} \cdot I_{eff} \tag{4.32}$$

Die Impedanz $\underline{Z_C}$ einer Kapazität berechnet sich aufgrund der Phasenverschiebung von Strom und Spannung zu:

$$\underline{Z_C} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = -j\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C} \tag{4.33}$$

4.10 Analyse und Berechnung von Schaltungen mit Wechselspannungsquellen

In diesem Unterkapitel wenden wir die komplexe Wechselstromtechnik an Schaltungen mit Wechselspannungsquellen einer Frequenz an. Beachten Sie, dass damit nur die Werte der Spannungen und Ströme im eingeschwungenen Zustand berechnet werden. Ist kein Winkel bei der Spannungsquelle angegeben, gehen Sie von 0° aus. Ist für die Spannungsquelle ein Zeiger gegeben, so gibt dieser den Spitzenwert (und nicht den Effektivwert) und den Nullphasenwinkel der Spannung an.

4.10.1 Beispiel einer Serienschaltung von R und C

An einer Wechselspannungsquelle, deren Amplitude $\hat{u} = 100\,V$ mit der Frequenz $f = 400\,Hz$ beträgt, liegt eine Serienschaltung eines Widerstands $R = 330\,\Omega$ mit einem Kondensator $C = 2.2\,\mu F$.

- Erstellen Sie eine Schaltungsskizze und benenen Sie darin die Spannungen und den Strom.
- Berechnen Sie die Impedanzen der Bauteile und die der Serienschaltung.
- Ermitteln Sie den Strom und die Spannungen an den Bauteilen.
- Zeichen Sie ein maßstäbliches Zeigerdiagramm der Spannungen und des Stromes.

4.10.2 Beispiel einer Serienschaltung von R, L und C

Eine Wechselspannungsquelle mit der Spannung $\underline{u} = (60\,V; \angle 60°)$ (Spitzenwert der Spannung ist also $60\,V$) und der Frequenz $f = 500\,Hz$ ist mit einer Serienschaltung eines Widerstandes $R = 220\,\Omega$, einer Spule von $L = 100\,mH$ und einem Kondensator mit $C = 0.5\,\mu F$ verbunden.

- Erstellen Sie eine Schaltungsskizze und bezeichnen Sie darin die Spannungen und den Strom.
- Berechnen Sie die Impedanzen der Bauteile und die der gesamten Serienschaltung.
- Ermitteln Sie den Strom und die Spannungen an den Bauteilen.
- Zeichen Sie ein maßstäbliches Zeigerdiagramm der Spannungen und des Stromes.

4.10.3 Beispiel einer Parallelschaltung von R und L

An einer Wechselspannungsquelle, deren Amplitude $\hat{u} = 100\,V$ mit der Frequenz $f = 50\,Hz$ beträgt, liegt eine Parallelschaltung eines Widerstands $R = 56\,\Omega$ mit einer Spule $L = 250\,mH$.

- Erstellen Sie eine Schaltungsskizze mit Bauteilen und Strömen.
- Berechnen Sie die Impedanzen der Bauteile und die der Parallelschaltung.
- Ermitteln Sie die Ströme durch die Bauteile und den Gesamtstrom.
- Zeichen Sie ein maßstäbliches Zeigerdiagramm dieser Ströme.

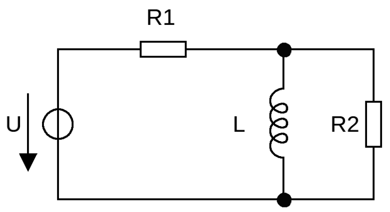
4.10.4 Beispiel einer Parallelschaltung von R, C und L

An einer Wechselspannungsquelle, deren Amplitude $\hat{u} = 80\,V$ mit der Frequenz $f = 500\,Hz$ beträgt, liegt eine Parallelschaltung eines Widerstands $R = 1.2\,k\Omega$ mit einem Kondensator $C = 1.5\,\mu F$ und einer Spule $L = 100\,mH$.

- Erstellen Sie eine Schaltungsskizze.
- Berechnen Sie die Impedanzen der Bauteile und die der Parallelschaltung.
- Ermitteln Sie die Ströme durch die Bauteile und den Gesamtstrom.
- Zeichen Sie ein maßstäbliches Zeigerdiagramm.

4.10.5 Gemischte Schaltung - Beispiel 1

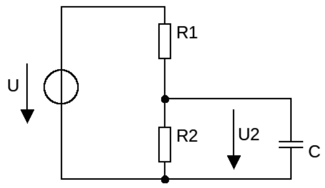
Die Schaltung liegt an einer Spannung von $\hat{u} = 10\,V$ mit der Frequenz $f = 50\,Hz$. Die ohmschen Widerstände haben die Werte $R_1 = 10\,\Omega$ und $R_2 = 22\,\Omega$. Die Spule besitzt die Induktivität $L = 100\,mH$.



Es sind alle auftretenden Ströme zu bestimmen.

4.10.6 Gemischte Schaltung - Beispiel 2

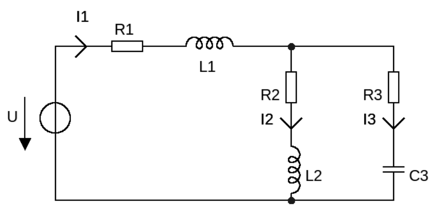
Ein Spannungsteiler aus den Widerständen $R_1 = 820\,\Omega$ und $R_2 = 100\,\Omega$ ist mit einem Kondensator belastet, der eine Kapazität von $C = 2,2\,\mu F$ besitzt. Die Spannungsquelle hat eine Amplitude von $\hat{u} = 10\,V$ mit der Frequenz $f = 400\,Hz$.



- Welche Amplitude hat die Ausgangsspannung U_2?
- Um welchen Phasenverschiebungswinkel φ ist die Ausgangsspannung gegenüber der Eingangsspannung verschoben?

4.10.7 Gemischte Schaltung - Beispiel 3

Diese Schaltung enthält die Widerstände $R_1 = 100\,\Omega$, $R_2 = 150\,\Omega$ und $R_3 = 220\,\Omega$. Die beiden eingebauten Spulen haben die Induktivitäten $L_1 = 10\,mH$ und $L_2 = 22\,mH$. Der Kondensator hat die Kapazität $C_3 = 1\,\mu F$. Die Schaltung liegt an einer Sinusquelle mit der Amplitude $\hat{u} = 24\,V$ der Frequenz $f = 1,2\,kHz$.



- Fassen Sie R_1 und L_1 zu $\underline{Z_1}$, R_2 und L_2 zu $\underline{Z_2}$ usw. zusammen, und berechnen Sie die gesamte Impedanz der Bauteile.
- Ermitteln Sie alle auftretenden Ströme und Spannungen.
- Zeichen Sie ein maßstäbliches Zeigerdiagramm der Spannungen und Ströme.

4.11 Leistungsbegriffe in der Wechselstromtechnik

Eine wichtige Rechengröße, welche die Verluste der Bauteile und die tatsächliche Belastung eines Systems im Auge behält, ist die Scheinleistung. Sie wird definiert über die Effektivwerte von Strom und Spannung und setzt sich aus einer Wirkleistung P und einer Blindleistung Q zusammen.

Die drei Leistungsformen sind bei periodischen Signalen z.B. über die Integralrechnung definiert. Bei stationären Vorgängen sind die Werte zeitunabhängig.

In der Gleichstromtechnik verschwindet die Blindleistung. Elektrische Komponenten wie Leitungen oder Transformatoren müssen bei Verwendung von Wechselströmen nicht nur auf eine bestimmte Wirkleistung ausgelegt werden, sondern oftmals auf eine größere Scheinleistung.

Statt der Einheit der Leistung Watt (Einheitenzeichen W) wird für Scheinleistung die Einheit Volt-Ampere (Einheitenzeichen VA) verwendet, für die Blindleistung die Einheit Volt-Ampere reaktiv (Einheitenzeichen var).

4.11.1 Wirkleistung

Als Wirkleistung P bezeichnet man jene Leistung, die für die Umwandlung in andere Leistungsformen (z.B. thermische, mechanische oder chemische) zur Verfügung steht. Als Einheit wird das Watt verwendet:

$$[P] = 1\,W \tag{4.34}$$

In der Gleichstromtechnik ist die Wirkleistung das Produkt von Spannung und Strom:

$$P = U \cdot I \tag{4.35}$$

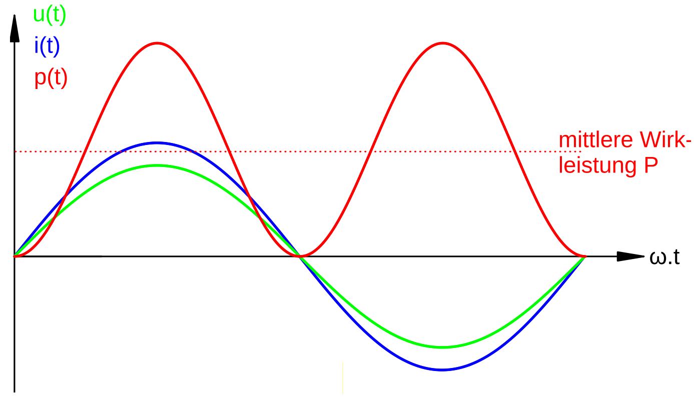
In der Wechselstromtechnik ist die Wirkleistung der arithmetische Mittelwert der Augenblicksleistung:

$$P = \overline{p} = \overline{u \cdot i} \tag{4.36}$$

Wir betrachten hier nur sinusförmige Spannungen und Ströme im eingeschwungenen Zustand. Diese treten dann auf, wenn sich nur lineare Verbraucher im Netz befinden. Daher können wir über eine Periodendauer mitteln:

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} u(t)\cdot i(t)dt = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} p(t)dt \tag{4.37}$$

Bei ohmschen Verbrauchern gibt es keinen Phasenunterschied zwischen Strom und Spannung. Multipliziert man einen sinusförmigen Strom mit einer sinusförmigen Spannung der gleichen Frequenz und ohne Phasenverschiebung zueinander, entsteht eine ins positive verschobene sinusförmige Kurve, die phasenverschoben und mit der doppelten Frequenz pendelt:



Sind Strom und Spannung in Phase zueinander, so entspricht die Wirkleistung

$$P = U_{eff} \cdot I_{eff} \tag{4.38}$$

Befinden sich kapazitive bzw. induktive Verbraucher im System, tritt eine Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung auf. Der Wirkleistungsanteil entsteht aus dem gleichphasigen Anteil, der über den Faktor $cos(\varphi)$ berechnet werden kann:

$$P = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot cos(\varphi) \tag{4.39}$$

4.11.2 Blindleistung und Scheinleistung

Wir betrachten wieder nur sinusförmige Strom- und Spannungsverläufe im eingeschwungenen Zustand. Sind Strom und Spannung nicht in Phase, d.h. beinhaltet der Verbraucher kapazitive bzw. induktive Anteile, so entsteht auch Blindleistung. Mit „Blind" ist gemeint, dass die Leistung kurzfristig aus dem Netz entnommen wird, und noch in der gleichen Periode wieder rückgeführt wird. Dieser Leistungsanteil pendelt also zwischen Netz und Verbraucher hin und her, und belastet die Versorgungsleitungen.

Man spricht von einer Verschiebungsblindleistung Q:

$$Q = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot sin(\varphi) \tag{4.40}$$

Sie kann also positive oder negative Vorzeichen annehmen, je nach induktivem oder kapazitivem Verbrauchsanteil.

Als Einheit wird zur Unterscheidung das Volt-Ampere reaktiv verwendet:

$$[Q] = 1\,var \tag{4.41}$$

Man spricht bei sinusförmigen Verläufen auch von der Gesamtbildleistung, sie berechnet sich zu:

$$Q_{total} = \sqrt{S^2 - P^2} = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \sqrt{1 - cos^2(\varphi)} = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot |sin(\varphi)| \tag{4.42}$$

Privatverbraucher müssen in der Regel nichts für den Blindleistungsaustausch bezahlen, große Firmenkunden aber oft. Es gibt einen wichtigen Grund, warum die Blindleistung immer im Auge behalten werden sollte: Die stromführenden Drähte und die Transformatoren in den Versorgungsleitungen müssen immer für den Wirkleistungsanteil und für den Blindleistungsanteil ausgelegt sein. Sonst droht z.B. ein Kabelbrand durch Überlastung. Beide Anteile zusammen werden als Scheinleistung erfasst.

Wir verwenden für die Wechselstromtechnik Zeiger in der komplexen Ebene. Es gibt dazu die Definition der komplexen Scheinleistung, die Wirkleistung und Blindleistung zusammenfasst. Sie kann auch aus den Zeigern von Strom und Spannung berechnet werden (unsere hier verwendeten Zeiger von Strom und Spannung haben die Länge der Amplitude, und sind keine Effektivwertzeiger):

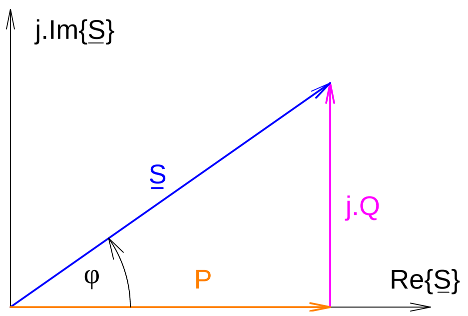
$$\underline{S} = P + jQ = \frac{1}{2} \cdot \underline{u} \cdot \underline{i}^* \tag{4.43}$$

Den Betrag der komplexen Scheinleistung $\underline{S}$ nennen wir Scheinleistung S. Sie kann mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnet werden:

$$S^2 = P^2 + Q^2 \tag{4.44}$$

Als Einheit verwendet man hier das Volt-Ampere:

$$[S] = 1\,VA \tag{4.45}$$



Bei passiven Verbrauchern gibt es positive und negative Vorzeichen der Blindleistung Q:

- Beim induktiven Verbraucher eilt die Stromstärke der Spannung nach: $Q > 0$.
- Beim kapazitiven Verbraucher eilt die Stromstärke der Spannung voraus: $Q < 0$.

Auf manchen Geräten ist der sogenannte Wirkleistungsfaktor λ angegeben. Damit ist das Verhältnis vom Betrag der Wirkleistung P zur Scheinleistung S gemeint:

$$\lambda = \frac{|P|}{S} \tag{4.46}$$

Dieser Faktor liegt zwischen 0 und 1.

Verwendet man wie wir hier in diesem Kapitel nur sinusförmige Ströme und Spannungen im eingeschwungenen Zustand, wird oft der Wirkfaktor verwendet:

$$cos(\varphi) = \frac{P}{S} \tag{4.47}$$

Ist der Wirkfaktor 1, nimmt der Verbraucher nur Wirkleistung auf.

Übungsbeispiele

4.11.3 Induktiver Verbraucher - Beispiel 1

Ein Verbraucher nimmt bei der Spannung $U_{eff} = 230\,V$ den Strom $I_{eff} = 5\,A$ auf. Dabei eilt die Spannung dem Strom um den Phasenverschiebungswinkel $\varphi = 40°$ vor. Wie groß sind die Scheinleistung S, die Wirkleistung P, die Blindleistung Q und der Wirkfaktor $cos(\varphi)$ des Verbrauchers?

4.11.4 Induktiver Verbraucher - Beispiel 2

Ein Verbraucher mit dem Wirkfaktor $cos(\varphi) = 0,85$ nimmt bei der Spannung $U_{eff} = 400\,V$ die Wirkleistung $P = 2000\,W$ auf. Wie groß ist der Strom I_{eff}?

4.11.5 Einphasenmotor - Beispiel 3

Ein Einphasenmotor gibt an einen Keilriemenantrieb $0,5\,kW$ ab. Der Wirkungsgrad beträgt $\eta = 0,7$. An $U_{eff} = 230\,V$ angeschlossen ist $cos(\varphi) = 0,68$.

- Berechnen Sie die Wirkleistung, die Scheinleistung und die Blindleistung.
- Welcher Strom fließt in der Zuleitung?

4.11.6 Gemischte Schaltung - Beispiel 4

Die Reihenschaltung eines ohmschen Widerstandes $R = 120\,\Omega$ mit einer Induktivität $L = 500\,mH$ liegt an einer Spannung $U_{eff} = 230\,V$ mit $f = 50\,Hz$. Gesucht sind Wirk-, Blind- und Scheinleistung der Schaltung.

4.11.7 Spule mit Widerstand - Beispiel 5

Von einer realen Spule ist bei $U_{eff} = 100\,V$ und $I_{eff} = 2,2\,A$ die Wirkleistung $P = 50\,W$ bekannt, die Messung wurde bei $f = 50\,Hz$ durchgeführt. Berechnen Sie die Induktivität und den Widerstand dieser Serienschaltung.

4.12 Schwingkreise

Schwingkreise sind elektronische Schaltungen, die Resonanzfähigkeit aufweisen. Sie bestehen aus einer Induktivität L und einem Kondensator C. Bei solchen LC-Schwingkreisen wird Energie zwischen dem elektrischen Feld des Kondensators und dem magnetischen Feld der Spule ausgetauscht. Dabei liegen periodisch abwechselnd höhere Stromstärken oder höhere Spannungen vor.

Zur Mechanik könnte man einen elektronischen Schwingkreis mit der Resonanz einer Stimmgabel oder eines Federpendels vergleichen.

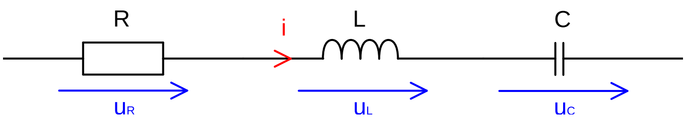
Werden Schwingkreise durch einen Impuls oder einen Einschaltvorgang kurzfristig angestoßen, so führen sie freie Eigenschwingungen aus. Aufgrund der Bauteilverluste und der Leitungen klingen diese Schwingvorgänge ab. Einen Teil der Verluste kann man mit einem Widerstand im Schaltplan abbilden. Werden Schwingkreise (z.B. in der Nähe der Resonanzfrequenz) periodisch erregt, so werden Schwingungen erzwungen.

Resonanzerscheinungen haben in der Praxis der Nachrichtentechnik und Informationstechnologie eine herausragende Bedeutung. Sie dienen zur Erzeugung von Schwingungen, als auch zur Filterung bestimmter Frequenzen oder Frequenzbereiche. Dabei wird je nach Schwingkreis-Variante die Impedanz ein Minimum oder ein Maximum.

Ein weiteres Anwendungsfeld ist die Blindstromkompensation in der Energietechnik. Verbraucher mit Induktivitäten und Kapazitäten entnehmen dem Wechselspannungsnetz Verschiebungsblindleistung. Der entnomme Strom fließt über Zuleitungen und Transformatoren und erzeugt Verlustwärme. Unnötige Verluste sind unerwünscht und können verkleinert werden, indem ein Blindstromanteil kompensiert wird. Das passiert durch den Einbau von Kondensatoren oder Filterkreisdrosseln.

4.12.1 Reihenschwingkreis

Beim Reihenschwingkreis sind die Bauteile R, L und C in Reihe geschaltet:



$$\underline{u} = \underline{u_R} + \underline{u_C} + \underline{u_L} \tag{4.48}$$

$$\underline{u_R} = R \cdot \underline{i} \tag{4.49}$$

$$\underline{u_L} = \underline{Z_L} \cdot \underline{i} = j\omega L \cdot \underline{i} \tag{4.50}$$

$$\underline{u_C} = \underline{Z_C} \cdot \underline{i} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{i} \tag{4.51}$$

$$\underline{u} = \underline{i} \cdot \underline{Z} = \underline{i} \cdot \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) = \underline{i} \cdot \left(R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right) \tag{4.52}$$

Uns interessiert die Amplitude vom Strom in Abhängigkeit von der Frequenz für eine fix angelegte Spannung $\underline{u}$. Dabei ergibt sich:

$$|\underline{i}| = \frac{|\underline{u}|}{|\underline{Z}|} = \frac{|\underline{u}|}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \tag{4.53}$$

$|\underline{i}|$ wird also ein Maximum, wenn $|\underline{Z}|$ im Nenner minimal wird. Das ist dann der Fall, wenn der ()-Ausdruck im Nenner möglichst klein wird. Die quadrierten Anteile können in Abhängigkeit von ω bei festen Bauteilwerten im kleinsten Fall Null werden. Das Minimum im Nenner wird somit erreicht, wenn $(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = 0$ wird.

Der Resonanzfall tritt also auf, wenn $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ ist. Daraus leitet sich die sog. Thomson'sche Schwingungsformel für die Resonanzfrequenz ab:

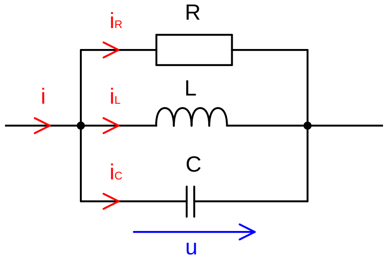
$$\omega_{res} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \tag{4.54}$$

$$f_{res} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}} \tag{4.55}$$

Bei dieser Frequenz ist der Schwingkreis in Resonanz. Die beiden Imaginärteile verursacht durch Spule und Kapazität heben sich auf. Der Betrag der Impedanz wird dabei ein Minimum.

4.12.2 Parallelschwingkreis

Bei dieser Variante liegen die Bauteile R, L und C parallel zueinander:



$$\underline{i} = \underline{i_R} + \underline{i_C} + \underline{i_L} \tag{4.56}$$

$$\underline{i_R} = \frac{\underline{u}}{R} \tag{4.57}$$

$$\underline{i_L} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z_L}} = \frac{\underline{u}}{j\omega L} \tag{4.58}$$

$$\underline{i_C} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z_C}} = \frac{\underline{u}}{\frac{1}{j\omega C}} \tag{4.59}$$

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}} = \underline{u} \cdot \frac{1}{\underline{Z}} = \underline{u} \cdot \left(\frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}\right) = \underline{u} \cdot \left(\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right) \tag{4.60}$$

Uns interessiert nun wieder die Amplitude vom Strom in Abhängigkeit von der Frequenz. Für eine bestimmte Spannung $\underline{u}$ ergibt sich:

$$|\underline{i}| = \frac{|\underline{u}|}{|\underline{Z}|} = |\underline{u}| \cdot \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \tag{4.61}$$

$|\underline{i}|$ wird also ein Minimum, wenn $|\underline{Z}|$ im Nenner maximal wird. Das ist dann der Fall, wenn der $\sqrt{}$-Ausdruck möglichst klein wird, also wenn $(\omega C - \frac{1}{\omega L}) = 0$ wird.

Die Resonanz tritt also wieder auf, wenn $\omega C = \frac{1}{\omega L}$ ist. Daraus leitet sich auch hier die Thomson'sche Schwingungsformel für die Resonanzfrequenz ab:

$$\omega_{res} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \tag{4.62}$$

$$f_{res} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}} \tag{4.63}$$

Die Ergebnisse der Resonanzfrequenzen sind bei beiden Schwingkreisformen identisch. Bei dieser Frequenz ist also der Schwingkreis in Resonanz. Beim Parallelschwingkreis wird dabei der Betrag der Impedanz ein Maximum.

4.12.3 Übungsbeispiel

a) Berechnen Sie die Resonanzfrequenz, mit der ein Schwingkreis bestehend aus einem Kondensator C = 47µF und einer Spule L = 50 mH schwingen würde.

b) Wie muss man die Kapazität ändern, damit die Frequenz auf ein Drittel des beim Punkt a) berechneten Wertes absinkt?

c) Welche Resonanzfrequenzen erhält man, wenn in der Anordnung von Teilaufgabe a) noch ein weiterer 47µF-Kondensator zum bereits vorhandenen Kondensator in Reihe bzw. parallel geschaltet wird?