7 Das elektrostatische Feld

Es existieren zwei Arten von Ladungen: negative und positive Ladungen. Träger von Ladungen sind Elektronen und Protonen. Die Ladung eines Protons wird Elementarladung $e = 1,602176634 \cdot 10^{-19} C$ genannt.

7.1 Die elektrische Ladung und ihre Wirkung

Wie wurde die Größe der Elementarladung bestimmt?

Robert Andrews Millikan (1868-1953, Nobelpreis: 1923) konnte durch ein Experiment, in welchem er das Verhalten eines geladenen Öltröpfchen in einem Kondensator beobachtete, bestimmen.

7.1.1 Millikan-Versuch

Dabei werden Öltröpfchen zwischen die Platten eines Kondensators gesprüht. Durch das Sprühen haben sie eine geringe Ladung. Sie sinken unter dem Einfluss der Schwerkraft hinunter. Aufgrund des äußeren homogenen elektrischen Feldes wirkt eine weitere Kraft auf die Teilchen (elektrische Kraft). Durch Regulierung der Spannung U an den Kondensatorplatten können die Öltröpfchen in Schwebe gehalten werden.

Dann sind Gewichtskraft G und elektrische Kraft F gleich groß. Es gilt

$G = F \Rightarrow m \cdot g = E \cdot Q$, damit ergibt sich für die Ladung: $Q = \frac{m \cdot g}{E}$ (3.01)

Dabei ist G die Gewichtskraft ($[G] = N$), F die elektrische Kraft ($[F] = N$), m die Masse des Öltröpfchens ($[m] = kg$), g die Erdbeschleunigung ($[g] = \frac{m}{s^2} = \frac{N}{kg}$ ($g = 9,81 \frac{m}{s^2}$)), E die elektrische Feldstärke ($[E] = \frac{V}{m} = \frac{N}{C}$) und Q die Ladung des Öltröpfchens ($[Q] = C$).

Für die Feldstärke E gilt

$$E = \frac{U}{d} \tag{3.02}$$

Dabei ist U die elektrische Spannung und d der Abstand zwischen positiver und negativer Ladung (z.B. Plattenabstand eines Kondensators).

Für die Ladung Q ergibt sich damit

$$Q = \frac{m \cdot g}{E} = \frac{m \cdot g \cdot d}{U} \tag{3.03}$$

Es gilt $F = m \cdot a$, damit ergibt sich für die Beschleunigung eines Elementarteilchens

$$a = \frac{e}{m} \cdot \frac{U}{d} \; ; \; [a] = \frac{m}{s^2} \tag{3.04}$$

Millikan bestimmte die Ladung vieler Öltröpfchen und stellte fest, dass die Ladungsgröße immer ganzzahlige Vielfache einer bestimmten Ladung entsprach. Daraus folgerte er, dass es eine kleinste Ladung (Elementarladung) geben muss.

7.1.2 Aufgaben

1. Wie groß ist die Kraft auf ein geladenes Staubteilchen ($5 \cdot 10^{-16} C$), das sich
   (a) im natürlichen elektrostatischen Erdfeld (180 N/C) befindet? [$0,9 \cdot 10^{-13} N$]
   (b) im Feld eines Elektrofilters ($4 \cdot 10^5 \, N/C$) befindet? Es muss dabei überprüft werden, ob die Kraft ausreichend groß ist - ein Vergleich mit der Schwerkraft ist dazu geeignet (Masse des Staubteilchens: $2 \cdot 10^{-12} \, kg$). [$2 \cdot 10^{-10} \, N; 19,62 \cdot 10^{-12} \, N$] [Ja - da, die Gewichtskraft kleiner ist!]
2. Welche Kraft wirkt auf ein $\alpha-Teilchen$ (Ladung des Heliumkerns: $2e$), das sich im homogenen elektrischen Feld eines Detektors ($40000 \, N/C$) befindet? Welche Beschleunigung wirkt auf das Teilchen? ($m_\alpha = 4 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \, kg$) [$F = 12,8176 \cdot 10^{-15} \, N$; $a = 1,918 \cdot 10^{12} \, m/s^2$]
3. Eine Kugel hat einen Überschuss von 10^{13} Elektronen und ist daher negativ aufgeladen. Durch ein elektrisches Feld der Stärke $E = 10^4 \, V/m$ kann sie in Schwebe gehalten werden. Wie groß ist die Masse (m) der Kugel? [$m = 1,633 \, g$]
4. Eine Kugel hat eine Masse von $m = 20 \, g$ und eine Ladung von $50 \, \mu C$. Sie befindet sich zwischen zwei parallelen Metallplatten, die einen Abstand von $2 \, cm$ haben. Durch Anlegen einer Spannung an die Platten soll die Kugel in Schwebe gehalten werden. Welche Spannung muss zwischen den Platten bestehen, damit die Kugel schwebt? [$U = 78,48 \, V$]

7.2 Die elektrischen Feldgrößen

Ladungen erzeugen Felder. Ein Feld ist im Allgemeinen eine physikalische Größe, die im gesamten Raum wirksam und somit messbar ist.

7.2.1 Skalare und vektorielle Feldgrößen

Sind physikalische Größen den Punkten eines Raumes zugeordnet, so nennt man diesen Raum ein Feld und die den Raumzustand charakterisierende Größe eine Feldgröße. Ist die Feldgröße eine ungerichtete Größe, wie z.B. die Temperatur oder der Druck, so spricht man von einer skalaren Feldgröße, ist die Feldgröße durch Betrag und Richtung gekennzeichnet, so liegt eine vektorielle Feldgröße vor.

Skalare Feldgröße (Skalarfeld) Skalare Felder lassen sich durch Flächen darstellen, auf denen die Feldgröße überall den gleichen Wert hat. Es wird eine skalare Größe zugeordnet.

Vektorielle Feldgröße (Vektorfeld) Hat eine Feldgröße auch eine Richtung, kann

- die Richtung allein durch Feldlinien (deren Abstand bzw. Dichte ist Maß für ihren Betrag) oder
- der Betrag und die Richtung gemeinsam durch Vektorpfeile (Länge ~ Betrag)

dargestellt werden.

Abbildung 7.1: Darstellung von Feldern durch Feldlinien oder durch Vektoren in Rasterpunkten

Es wird ein Vektor zugeordnet (Elektrisches Feld, Gravitationsfeld, Kraftfeld, ...).

Homogene und inhomogene Vektorfelder

- Homogenes Feld: Feldgrößen sind überall gleich, d.h. vom Ort unabhängig! (Die Dichte der Feldlinien ist konstant.)
- Inhomogenes Feld: Feldgrößen sind vom Ort abhängig! (Die Dichte der Feldlinien ist nicht konstant und deutet damit auf ein inhomogenes Feld hin.)

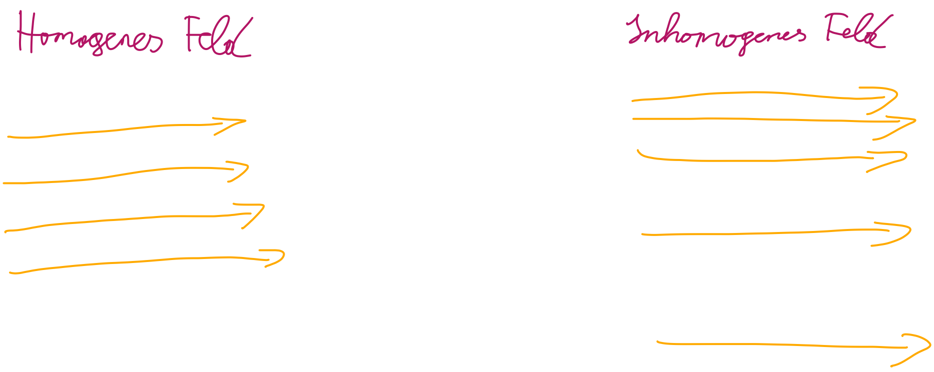


Abbildung 7.2: Beispiel für ein homogenes Feld (a) und für ein inhomogenes Feld (b)

Es gibt noch weitere Unterscheidungsmöglichkeiten, wie

- Statisches (zeitlich unabhängiges) Feld (Gravitationsfeld, elektrostatisches Feld,...) und Wechselfeld (zeitlich veränderliches Feld) (elektromagnetisches Feld, ...)
- Quellenfeld: Die Feldlinien entspringen in einer Quelle (positive Ladung) und enden in einer Senke (negative Ladung), z.B. das elektrostatische Feld.
- Wirbelfeld: Die Feldlinien sind in sich geschlossen, z.B. ein Magnetfeld.

Abbildung 7.3: Reines Quellenfeld (links) und reines Wirbelfeld (rechts)

Das elektrische Feld ist ein Raum, in dem jedem Punkt eine Kraft auf eine Ladung zugeschrieben werden kann. Bei ruhenden elektrischen Ladungen spricht man vom elektrostatischen Feld. Bei bewegten Ladungen spricht man vom elektrischen Feld.

7.2.2 Feldlinien

Elektrische Felder sind genausowenig sichtbar wie elektrische Ströme. Zum besseren Verständnis können aber elektrische Felder durch Feldlinien dargestellt werden. Sie geben an jeder Stelle die Richtung der dort vorhandenen elektrischen Feldstärke an. Feldlinien beginnen bei den positiven Ladungen und enden bei den negativen Ladungen.

Eingeführt wurde der Begriff "Feldlinien" von M. Faraday. Er hat damit ein anschauliches Modell für die räumliche Gestalt eines elektrischen Feldes geschaffen. Feldlinien sind geometrische Kurven im Raum, deren Tangente an einem beliebigen Punkt die Richtung der elektrostatischen Kraft angibt.

Dieses Feldlinienbild gibt aber nicht nur Auskunft über die in bestimmten Punkten vorhandene Richtung des elektrischen Feldes, sondern auch über seine Stärke. Je enger die Feldlinien an gewissen Stellen beieinander liegen, desto grösser ist die Stärke des elektrischen Feldes. Als Maß für den relativen Betrag der Feldstärke wird also die Dichte der eingezeichneten Feldlinien gewählt. Die elektrischen Feldlinien geben somit ein anschauliches Bild von der Struktur des Feldes, das die Ladungen umgibt.

Eigenschaften von Feldlinien:

- Feldlinien enden nie frei im Raum. Sie beginnen bei positiven Ladungen und enden bei negativen Ladungen.
- Feldlinien stehen stets normal (senkrecht) auf Oberflächen gut leitender Materialien.
- von + nach -: Die Richtung der Feldlinien in einem Punkt entspricht der Richtung der elektrischen Feldstärke, d.h. der Kraftwirkung auf eine positive Ladung in diesem Punkt. Feldlinien gehen von positiven Ladungen aus und laufen auf negative Ladungen zu. Die Richtungsdefinition ist willkürlich.
- Keine Überschneidung: Linien können sich nicht kreuzen, denn in jedem Raumpunkt gibt es nur einen Kraftvektor (nur eine Tangente), d.h. die Kraftwirkung ist in jedem Punkt eindeutig.
- Es gibt unendlich viele Feldlinien. Zeichnen kann man aber nur eine begrenzte Anzahl und so wählt man eine zur Größe der Ladung proportionalen Anzahl der Feldlinien. Je dichter die Feldlinien, desto stärker ist dort die Kraftwirkung.

- In großer Entfernung wirkt ein System von Ladungen wie eine einzige Punktladung, deren Größe der Gesamtladung des Systems entspricht.

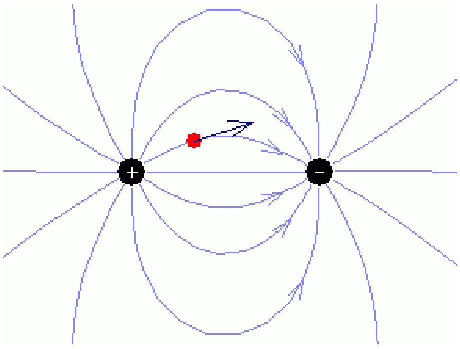


Abbildung 7.4: Elektrische Feldlinien einer Anordnung von zwei entgegengesetzten Punktladungen (Dipol).

7.2.3 Elektrische Feldstärke

Die elektrische Feldstärke E gibt an, wie groß die Kraft F auf eine Ladung Q im elektrischen Feld ist.

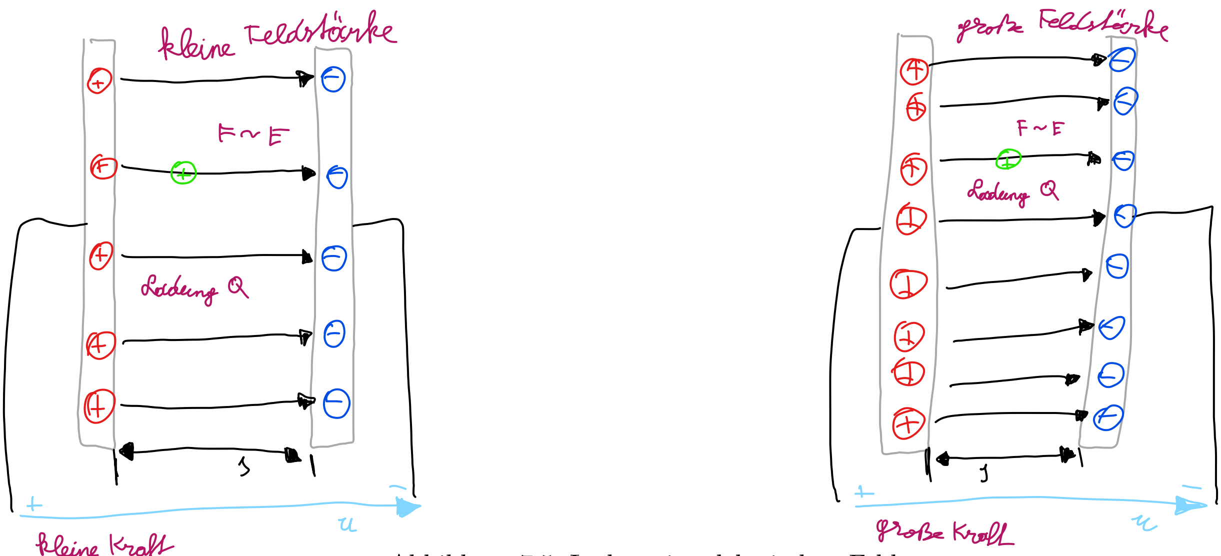


Abbildung 7.5: Ladung im elektrischen Feld

Die Elektrische Feldstärke ist somit die Kraft pro Ladung.

$$E = \frac{F}{Q} \tag{3.05}$$

Die Einheit der elektrischen Feldstärke: $[E] = \frac{V}{m}$

Anmerkung: Eine Kraft wird in Newton oder Wattsekunde pro Meter gemessen und eine elektrische Ladung in Ampere Sekunden oder Coulomb und daraus ergibt sich für die elektrische Feldstärke die Einheit Volt pro Meter ($[E] = \frac{N}{C} = \frac{\frac{Ws}{m}}{As} = \frac{Ws}{As \cdot m} = \frac{V \cdot As}{As \cdot m} = \frac{V}{m}$, $1\,N = 1\,\frac{VAs}{m}$).

Bringen wir nun eine positive Probeladung Q in dieses homogene Feld, so können wir, ausgehend von der Kraft, welche auf die Ladung wirkt, die Stärke dieses Feldes bestimmen. Bewegen wir die Probeladung von links nach rechts, so haben wir eine Kraft zu überwinden. Über die ganze Wegstrecke betrachtet, hier als Plattenabstand l, müssen wir eine bestimmte Arbeit W verrichten, welche dem Produkt der Kraft und des Weges entspricht. Ersetzen wir die Kraft mit dem Produkt von Ladung und Feldstärke und die Arbeit mit demjenigen aus Ladung und elektrischer Spannung, so stellen wir fest, dass die elektrische Feldstärke E und die elektrischen Spannung U proportional sind. Der Proportionalitätsfaktor entspricht dem Abstand l der beiden Platten.

Elektrische Feldstärke = Spannung zwischen Platten pro Plattenabstand (z.B. Plattenkondensator)

$$E = U/d \tag{3.06}$$

Dabei ist **E** die elektrische Feldstärke, **F** ist die Kraft auf die Ladung Q, Q ist die elektrische Ladung im Feld, U ist die Spannung zwischen den Platten und l ist der Plattenabstand.

Die Richtung der Feldstärke wird als positiv gezählt, wenn sie von der positiven zur negativen Ladung zeigt.

7.2.4 Aufgaben

1. Auf eine Ladung von $20\,nC$ wirkt eine Kraft von $8\,mN$. Berechnen Sie die Feldstärke. (0,4 $\frac{MV}{m}$)
2. Zwei Kondensatorplatten mit dem Abstand $l = 5\,mm$ werden an eine Gleichspannung von $U = 1,8\,kV$ angeschlossen. Berechnen Sie
   (a) die elektrische Feldstärke E zwischen den Platten. (0,36 $\frac{MV}{m}$)
   (b) Welche Kraft F wirkt im Kondensator auf eine Ladung von $Q = 0,12\,nC$? ($43 \cdot 10^{-6}\,N$)
3. In einem homogenen elektrischen Feld mit der Feldstärke $E = 2,5\,kV/m$ wirkt auf einen Körper eine Kraft von $50\,\mu N$. Bestimmen Sie die Ladung des Körpers. (20 nC)
4. Bei einem Kondensator mit einem Plattenabstand von $0,17\,mm$ darf eine Feldstärke von $1500\,kV/m$ nicht überschritten werden. Überprüfen Sie, ob dieser Kondensator a) an $220\,V$ und b) an $325\,V$ betrieben werden darf.
5. Zwischen den Aluminiumfolien eines Wickelkondensators, der an einer Gleichspannung von $60\,V$ liegt, befindet sich Polyester mit $0,02\,mm$ Dicke. Berechnen Sie die elektrische Feldstärke zwischen den Folien. (3 $\frac{MV}{m}$)
6. Was sagt das folgende Feldlinienbild über die beiden Ladungen A und B aus?

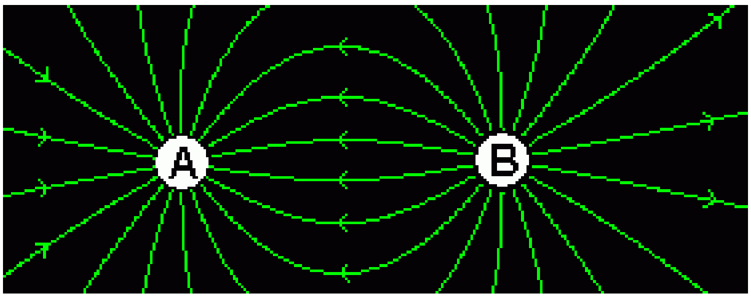


Abbildung 7.6: Beispiel: Feldlinien

7.3 Der Kondensator

7.3.1 Verhalten eines Kondensators

Ein Kondensator (bedeutet: Verdichter) besteht im Grundaufbau aus zwei elektrisch leitenden Platten, z.B. Metallfolien, mit einem Isolierstoff dazwischen, dem Dielektrikum.

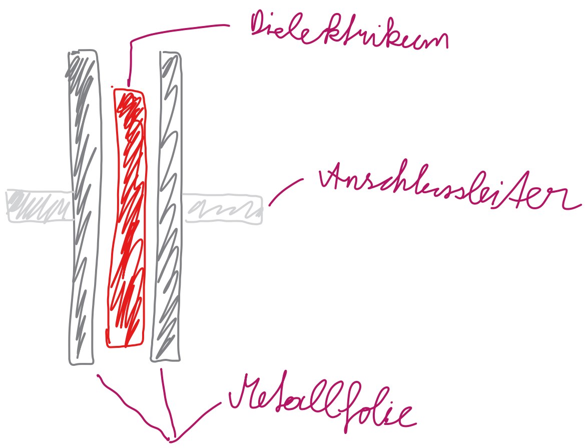


Abbildung 7.7: Grundaufbau eines Kondensators

Beim Laden fließt zu Beginn ein hoher Ladestrom. Während des Aufladens wird der Ladestrom immer kleiner, bis er zu null wird. Dann sperrt der Kondensator den Gleichstrom.

Der Kondensator sperrt nach dem Aufladen den Gleichstrom.

Der Kondensator kann elektrische Ladungen speichern.

7.3.2 Kapazität eines Kondensators

Erhöht man die Spannung an einem Kondensator auf den doppelten Wert, so fließt auch die doppelte Ladung auf die Kondensatorplatten. Das Verhältnis Q/U ist konstant. Es wird Kapazität (bedeutet: Fassungsvermögen) C genannt.

Ein Kondensator hat die Kapazität 1 Farad (1 F), wenn er von der Ladung 1 As um 1 V aufgeladen wird ($1F = 1As/V$).

Es gilt für die Kapazität eines Kondensators

$$C = Q/U \,, \quad [C] = As/V = F \tag{3.07}$$

Die Einheit Farad ist für die Praxis meist zu groß. Man verwendet deshalb kleinere Kapazitäteinheiten, z.B.

1 Millifarad	$= 1\,mF = 10^{-3}\,F$
1 Mikrofarad	$= 1\,\mu F = 10^{-6}\,F$
1 Nanofarad	$= 1\,nF = 10^{-9}\,F$
1 Pikofarad	$= 1\,pF = 10^{-12}\,F$

Tabelle 8: Übersicht: Einheitenvorsätze der Kapazität

7.3.3 Berechnung der Kapazität von Plattenkondensatoren

Die Kapazität eines Kondensators ist durch seinen Aufbau festgelegt.

- Bei Vergrößerung der Plattenoberfläche steht den Ladungen eine größere Fläche zur Verfügung.
- Bei kleinerem Plattenabstand ziehen sich positive und negative Ladungen auf den Platten stärker an. Dadurch drückt die angelegte Spannung mehr Ladung in den Kondensator als bei großem Plattenabstand. (Bei Halbierung des Plattenabstandes zeigt das Messgerät eine Verdoppelung der Kapazität an.) (Die Kapazität verändert sich je nach der Art des Isolierstoffes zwischen den Platten.)

Merke: Die Kapazität C eines Plattenkondensators ist abhängig von

- Plattenfläche A
- Plattenabstand l
- Permittivitätszahl ε_r

Die Kapazität eines Kondensators wird umso größer, je größer die Permittivitätszahl, je größer die Plattenfläche und je kleiner der Plattenabstand ist.

Die **Permittivitätszahl** ε_r ist ein Maß für die Polarisation (bzw. Polarisierbarkeit) des Stoffes. Sie hat keine Einheit und ist materialabhängig. Polarisation bezeichnet den Vorgang des Ausrichtens von Molekulardipolen im Dielektrikum. Ein Dipol wird ein System aus zwei gleich großen ungleichnamigen Ladungen Q mit kleinem Abstand l genannt.

Da die elektrischen Feldlinien den Isolierstoff zwischen den Platten eines Kondensators durchdringen, nennt man den Isolator (z.B. Glas, Keramik, Polyester, ...) auch **Dielektrikum**.

Die **Permittivität** (Dielektrizitätskonstante) ist definiert durch

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \tag{3.09}$$

Die Permittivität ist eine physikalische Größe, welche die Durchlässigkeit von Materie für elektrische Felder angibt. In der Elektrotechnik wird die Größe $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \mathbf{E}$ als **elektrische Flussdichte** bezeichnet.

- Absolute (für Vakuum gültige) Dielektrizitätszahl $\varepsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$
- Relative Dielektrizitätszahl (einheitslose, materialspezifische Größe) ε_r

Für die Kapazität von Plattenkondensatoren gilt

$$C = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{A}{d} \;;\; [C] = \frac{As}{V} = F \tag{3.10}$$

Die Zahl, die angibt, wie viel mal größer die Kapazität eines Kondensators wird, wenn statt Luft ein anderer Isolierstoff verwendet wird, heißt Permittivitätszahl des betreffenden Isolierstoffes.

7.3.4 Aufgaben

1. Ein Kondensator von $C = 4\,\mu F$ ist an eine Gleichspannung von $U = 230\,V$ angeschlossen.
   (a) Wie groß ist die aufgenommene Ladung Q des homogenen Feldes? (920 µAs)
   (b) -Welche Anzahl n von Elementarladungen befinden sich dabei auf einer Kondensatorplatte? ($5,74 \cdot 10^{15}$)
2. Ein Kondensator hat den Plattenabstand $d = 2\,mm$. Bei der Spannung $U = 100\,V$ misst man über einen Messverstärker die aufgenommene Ladung $Q = 4,5 \cdot 10^{-8}\,As$.
   (a) Berechnen Sie die Kapazität C_1 des Kondensators. (0,45 nF)
   (b) Wie groß ist die wirksame Plattenfläche A? ($0,102\,m^2$)

(c) Zwischen die Platten wird ein Bogen Paraffinpapier ($\varepsilon_r = 2,5$) eingelegt. Nach Anschieben der Platten hat sich die Kapazität auf $C_2 = 10\,nF$ erhöht. Welche Dicke d hat das Papier? ($0,225$ mm)

3. Ein Plattenkondensator mit dem Plattenabstand 0,5 mm hat eine Plattenfläche von 30 cm². Welche Kapazität hat der Kondensator, wenn als Dielektrikum

   (a) Luft ($\varepsilon_r = 1$) und (53,1 pF)

   (b) Hartpapier ($\varepsilon_r = 4$) mit 0,5 mm Dicke verwendet wird? (212,4 pF)

4. Ein Kondensator wird von zwei kreisrunden Platten von $20\,cm$ ⌀ (Durchmesser) im Abstand von 2 mm gebildet. Das Dielektrikum ist Luft.

   (a) An welche Spannung können Sie maximal angeschlossen werden, wenn die Durchschlagfestigkeit von Luft etwa 2 kV/mm beträgt? Hinweis: Bei Überschreiten der Druchbruchspannung (= Durchbruchfeldstärke E=U/d) kann das Dielektrikum durch Funkenüberschlag zwischen den Folien zerstört werden. (4 kV)

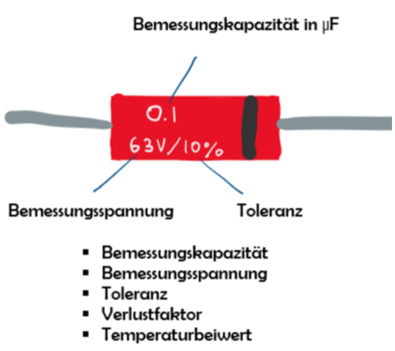
   (b) Wie groß ist die maximale Ladung? ($556 \cdot 10^{-9}$ As)

7.3.5 Kenngrößen und Bauarten von Kondensatoren

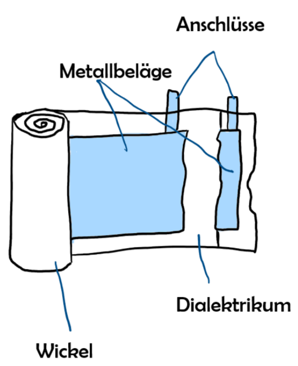
Kondensatoren werden in der Elektrotechnik vielfältig verwendet. Je nach Anwendung müssen Kenngrößen, Bauarten und Eigenschaften beachtet werden.

Wichtige Kenngrößen:

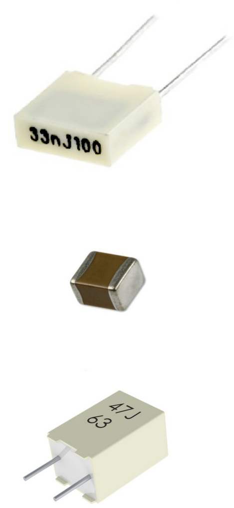
- **Bemessungskapazität** (Nennkapazität).
- **Bemessungsspannung**: maximal zulässige Spannung, die dauernd am Kondensator liegen darf.
- **Toleranz**: Abweichung von der Bemessungskapazität.
- **Verlustfaktor**: Wärmeverlust bei Wechselstrom.
- **Temperaturbeiwert**: gibt die Kapazitätsänderung je Kelvin (0 K = −273,15 °C) Temperaturänderung an.



Kenngrößen



Kondensatoraufbau



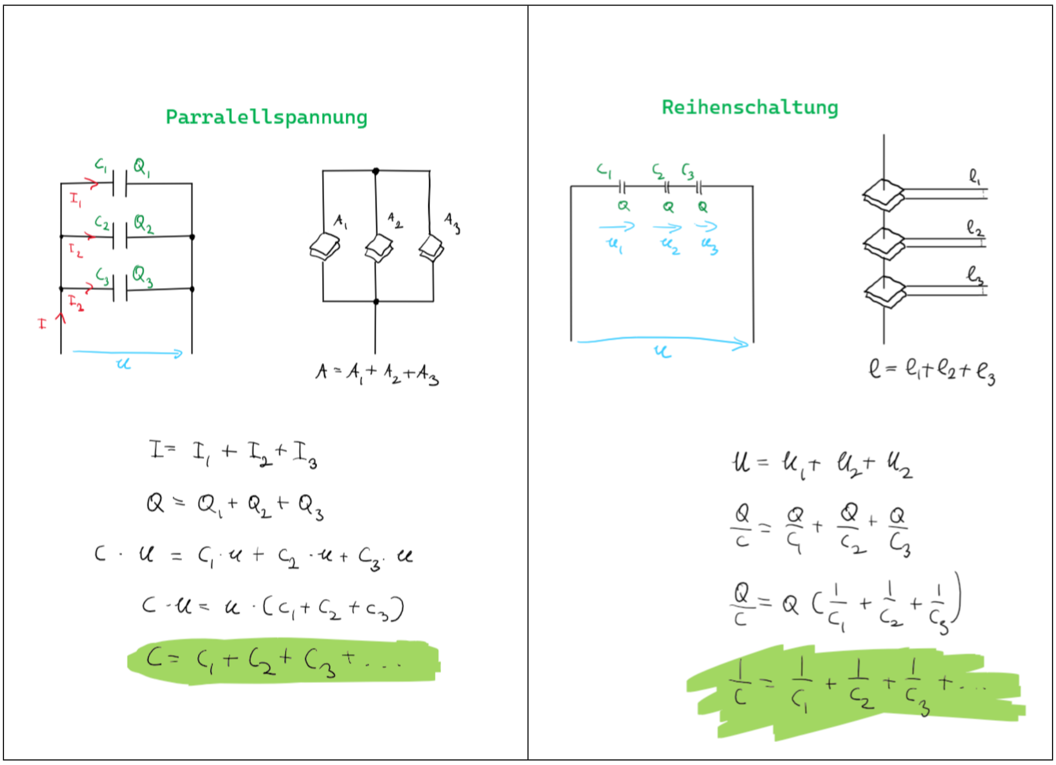
Folienkondensatoren

Mögliche Bauarten:

- **Kunststofffolien-Kondensatoren**: Kennzeichen K, haben als Dielektrikum Kunststofffolien, z.B. aus Polycarbonat. Die Kapazitätswerte gehen von einigen nF bis in den μF-Bereich. Die Bemessungsspannungen reichen von $63\,V$ bis $1000\,V$.
- **Keramikkondensatoren**: haben als Dielektrikum eine keramische Masse.
- **Aluminium-Elektrolyt-Kondensatoren**: haben eine positive Elektrode aus einer Aluminiumfolie (wirkt als Dielektrikum); die andere Elektrode ist ein Elektrolyt.

7.3.6 Schaltungen von Kondensatoren

Kondensatoren können in Parallel-, Reihen- und Gruppenschaltungen (gemischte Schaltungen) betrieben werden.



Parallelschaltung

Eine Parallelschaltung mehrerer Kondensatoren wirkt wie eine Vergrößerung der Plattenoberfläche. Die Gesamtkapazität C erhält man als Summe der Einzelkapazitäten:

$C = C_1 + C_2 + C_3 + ...$

Reihenschaltung

Die Reihenschaltung von Kondensatoren wirkt wie eine Abstandsvergrößerung der Kondensatorplatten und führt somit zu einer Verkleinerung der Kapazität:

$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + ...$ bzw. $C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$ (Serienschaltung zweier Kondensatoren)

Am Kondensator mit der kleineren Kapazität liegt die größere Spannung.

Aufgaben Schaltungen von Kondensatoren

1. Ein Zweifachkondensator $C_1 = 36\,\mu F$ und $C_2 = 12\,\mu F$ wird entweder parallel oder in Reihe geschaltet. Berechnen Sie
   (a) die Ersatzkapazität der Parallelschaltung, (48 μF)
   (b) die Ersatzkapazität der Reihenschaltung, (9 μF)
   (c) die von der Reihenschaltung gespeicherte Ladung bei einer Gesamtspannung von 10 V und (90 μC)
   (d) die Teilspannungen an den Kondensatoren bei Reihenschaltung. (2,5 V; 7,5 V)
2. Drei Kondensatoren mit $C_1 = 9,1\,\mu F$, $C_2 = 15\,\mu F$ und $C_3 = 4,7\,\mu F$ sind
   (a) parallel und (28,8 μF)
   (b) in Reihe geschaltet. (2,56 μF)

   Berechnen Sie für beide Schaltungen die Ersatzkapazität C.
3. Ein Schaltung besteht aus den Kondensatoren mit 2,7 pF, 6,8 pF und 22 pF. Berechnen Sie welche Ersatzkapazität sich ergibt bei
   (a) Parallelschaltung oder (31,5 pF)
   (b) Reihenschaltung. (1,78 pF)
4. Ein Kondensator von 390 pF soll mit einem zweiten in Reihe geschaltet werden, damit sich eine Ersatzkapazität von 80 pF ergibt. Berechnen Sie die Kapazität des zweiten Kondensators. (101 pF)
5. Drei parallel geschaltete Kondensatoren haben eine Ersatzkapazität von $48\,\mu F$. Die Einzelkapazitäten verhalten sich wie 1:2:3.
   (a) Berechnen Sie die Kapazität der einzelnen Kondensatoren.
   (b) Berechnen Sie die Ersatzkapazität bei Reihenschaltung der Kondensatoren. (4,4 μF)

7.3.7 Ladung und Energie von Kondensatoren

Kondensatoren können elektrische Energie im elektrischen Feld und elektrische Ladungen auf den Platten speichern. Zwischen den Kondensatorplatten wirkt eine Kraft.

Für die gespeicherte Ladung gilt

$$Q = C \cdot U,\ [Q] = F \cdot V = \frac{As \cdot V}{V} = As = C. \tag{3.11}$$

Für die gespeicherte Energie gilt

$$W = \frac{C \cdot U^2}{2},\ [W] = As \cdot V = Ws = J. \tag{3.12}$$

Für die Kraft zwischen den geladenen Kondensatorplatten gilt

$$F = \frac{Q \cdot E}{2} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot A \cdot U^2}{2 \cdot l^2} \text{ bzw.} F = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot A \cdot E^2}{2},\ [F] = \frac{As \cdot m^2 \cdot V^2}{Vm \cdot m^2} = \frac{J}{m} = N. \tag{3.13}$$

Beispiel. Drei Kondensatoren mit den Kapazitäten $C_1 = 2\,\mu F$, $C_2 = 3\,\mu F$ und $C_3 = 5\,\mu F$ werden folgendermaßen geschaltet: C_1 und C_2 parallel und anschließend C_3 in Reihe.

1. Zeichnen Sie diese Schaltung!
2. Welche Gesamtkapazität C hat diese Schaltung? (2,5 μF)
3. Welche Ladung Q kann mit dieser Schaltung bei einer angelegten Spannung von 24 V gespeichert werden und wie verteilt sich diese auf die Einzelkapazitäten? (60 μC)

Aufgaben Ladung und Energie

1. Die Platten eines Kondensators haben einen Abstand von 2,8 mm und eine Fläche von 530 cm^2. Der Kondensator liegt an einer Gleichspannung von 1,8 kV. Berechnen Sie
   (a) die Kapazität, (167,6 pF)
   (b) die gespeicherte Ladung, (301,7 nC)
   (c) die gespeicherte Energie und (271,5 μJ)
   (d) die Kraft zwischen den geladenen Platten. (96,965 mN)
2. Ein PKW hat eine Starterbatterie von 12 V, 63 Ah. Berechnen Sie die Kapazität eines Kondensators, der bei gleicher Spannung dieselbe Ladung aufnehmen kann. (18 900 F)
3. Zwischen zwei Platten mit einer Fläche von je 700 cm^2 besteht eine Feldstärke von 3100 V/cm. Berechnen Sie mit welcher Kraft sich die beiden Platten anziehen ($\varepsilon_r = 1$). (29,78 mN)
4. An einer Gleichspannungsquelle von 60 V liegt ein Kondensator mit der Kapazität von 220 μF. Um wieviel Prozent steigt die gespeicherte Energie, wenn man die Spannung
   (a) verdoppelt oder (300%)
   (b) um 22% erhöht. (48,84%)

7.3.8 Laden und Entladen eines Kondensators

Die Ladezeit eines Kondensators wird um so größer, je größer die Kapazität C und der Vorwiderstand R sind.

Abbildung 7.8: Schaltung zum Laden und Entladen eines Kondensators

Beispiel. Wie lange dauert es, bis der Kondensator von 10 μF (siehe Abbildung), der über 1 MΩ an 30 V Gleichspannung angeschlossen wird, nahezu vollständig geladen ist?

Lösung.

Kondensatorspannung und Zeit Nach τ (griech. Kleinbuchstabe tau) ist der Kondensator auf 63%, nach $5 \cdot \tau$ auf ca. 100% der angelegten Spannung U_0 geladen.

Beim Enladen sinkt die Kondensatorspannung U_C nach τ auf 37% des Anfangswertes U_0, nach $5 \cdot \tau$ ca. auf Null.

Der Spannungsverlauf beim Laden und Entladen erfolgt nach e-Funktionen.

Abbildung 7.9: Spannungsverlauf beim Laden und Entladen eines Kondensators

Für die Spannung beim Laden gilt

$$u_C = U_0(1 - e^{-t/\tau}) \tag{3.14}$$

Dabei ist U_0 die Ladespannung bzw. Spannung des aufgeladenen Kondensators, u_C der Momentanwert der Spannung am Kondensator, t die Zeit und τ die Zeitkonstante.

Für die Spannung beim Enladen gilt

$$u_C = U_0.e^{-t/\tau} \tag{3.15}$$

Für die Zeitkonstante gilt

$$\tau = R \cdot C \tag{3.16}$$

$$t_c = 5 \cdot \tau$$

$$[\tau] = \Omega \cdot F = \frac{V}{A} \cdot \frac{As}{V} = s$$

Dabei ist t_C die Lade- bzw. Entladezeit, e die Eulersche Zahl ($e = 2,718...$), R der Widerstand im Stromkreis und C die Kapazität.

Beispiel. Ein Kondensator von 22 μF wird über einen Vorwiderstand $R = 10\,k\Omega$ an $U_0 = 60$ V Gleichspannung angeschlossen.

1. Nach welcher Zeit ist der Kondensator geladen?
2. Berechnen Sie die Spannung nach einer Ladezeit $t_c = 0,5$ s.

Lösung.

Kondensatorstrom und Zeit Beim Laden eines Kondensators sinkt die Stromstärke entsprechend einer e-Funktion nach $5 \cdot \tau$ auf fast 0 A.

Nach der Zeitkonstanten τ ist der Ladestrom auf 37% des Anfangswertes I_0 gesunken.

Der Entladestrom hat die engegengesetzte Richtung wie der Ladestrom.

Abbildung 7.10: Stromverlauf beim Laden und Entladen eines Kondensators

Für die Stromstärke beim Laden gilt

$$i_C = I_0 \cdot e^{-t/\tau} \tag{3.17}$$

$$I_0 = \frac{U_0}{R}$$

Dabei ist i_C der Momentanwert des Lade- bzw. Entladestromes und I_0 die Anfangsstromstärke.

Für die Stromstärke beim Entladen gilt

$$i_C = -I_0 \cdot e^{-t/\tau} \tag{3.18}$$

$$I_0 = \frac{U_C}{R}$$

Dabei ist U_C die Kondensatorspannung bei Entladebeginn.

Beispiel. Berechnen Sie die Stromstärke i_C beim Laden eines Kondensators nach einer Zeit $t = 3,9$ ms, wenn die Zeitkonstante $\tau = 2,4$ ms und die Anfangsstromstärke $I_0 = 125$ mA beträgt.

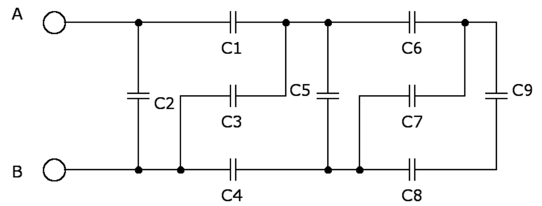
Lösung.

Aufgaben Laden und Entladen von Kondensatoren

1. Ein Kondensator von $4,7\,\mu F$ ist an Gleichspannung voll aufgeladen. Er wird über einen Widerstand von $1,5\,M\Omega$ entladen. Berechnen Sie
   (a) die Zeitkonstante und (7 s)
   (b) die Entladezeit. (35 s)
2. Ein 100-Ω-Widerstand und ein Kondensator sind in Reihe geschaltet. Nach dem Einschalten fließt ein Strom für eine Zeit $t = 0,1\,ms$. Welche Kapazität hat der Kondensator? ($0,2\,\mu F$)
3. Eine Reihenschaltung aus einem Widerstand von $120\,k\Omega$ und einem Kondensator von $27\,nF$ wird an eine Gleichspannung $2,8\,kV$ gelegt. Berechnen Sie
   (a) die Ladezeit und (16,2 ms)
   (b) die Spannung am Kondensator nach 10 ms, wenn der Kondensator im Einschaltmoment entladen ist. (2672 V)
4. Um einen Kondensator von $47\,\mu F$ nach dem Abschalten zu entladen, wird ein Widerstand von $2,2\,k\Omega$ parallel geschaltet. Die Spannung des aufgeladenen Kondensators beträgt 780 V. Berechnen Sie
   (a) die Zeitkonstante, (103 ms)
   (b) die Entladezeit nach dem Abschalten und (517 ms)
   (c) die Entladestromstärke 10 ms nach Entladebeginn. (- 0,32 A)
5. Ein ohmscher Widerstand von $240\,k\Omega$ und ein Kondensator mit $33\,nF$ werden in Reihe an eine Gleichspannung von 65 V geschaltet. Berechnen Sie
   (a) die Anfangsstromstärke, ($271\,\mu A$)
   (b) die Zeitkonstante, (7,92 ms)
   (c) die Ladezeit und (39,6 ms)
   (d) die Ladestromstärke 5 ms nach Ladebeginn. ($144\,\mu A$)
6. Ein Kondensator mit $16\,\mu F$ wird über einen Widerstand an 84 V geladen. Nach einer Ladedauer von $11,4$ s werden am Kondensator 61 V gemessen. Berechnen Sie
   (a) die Zeitkonstante (8,8 s) und die Ladezeit,
   (b) den Widerstandswert. (0,55 $M\Omega$)
   (c) Wie groß ist die Spannung am Widerstand 3,5 s nach Ladebeginn? (56,44 V)

Weitere Aufgaben

1. Ein Plattenkondensator hat einen Durchmesser von 10 cm und einen Plattenabstand von 5 mm.
   (a) Berechnen Sie die Kapazität des beschriebenen Kondensators. (13,9 pF)
   (b) Berechnen Sie die Kapazität, wenn der Abstand zwischen den Platten verdoppelt wird. Skizzieren Sie den Zusammenhang von Kapazität und Plattenabstand in allgemeiner Form in einem Diagramm. (6,95 pF)
   (c) An den Kondensator wird nun eine Spannung von 200 V gelegt. Berechnen Sie, welche Ladungsmenge sich nun auf den Elektroden befindet. (1,39 nC)
   (d) Letztendlich soll bei angeschlossener Spannung der urpsrüngliche Plattenabstand (5 mm) wieder hergestellt werden. Berechnen Sie, wie groß nun die Ladungsmenge auf den Platten ist. Wie erklären Sie sich die Ladungsmengendifferenz zu c)? (2,78 nC)
2. Ein Wickelkondensator bestehend aus 2 Metallfolien mit 20 m Länge und 5 cm Breite. Dazwischen liegen Papierstreifen und bilden das Dielektrikum, Dicke $25\,\mu m$ ($\varepsilon_r = 2,5$). Berechnen Sie die Kapazität. (1,77 μF)
3. Berechnen Sie die Kapazität der nachfolgenden Schaltung, wenn alle Kondensatoren den Wert $C_0 = 1\,nF$ haben.



4. Die nachfolgende Schaltung liegt an einer Gleichspannung von 100 V. Berechnen Sie die Ladungen Q_1 bis Q_4 und die Spannungen U_1 bis U_4, wenn gilt: $C_1 = 4\,nF$, $C_2 = 2\,nF$, $C_3 = 5\,nF$, $C_4 = 1\,nF$.