# Folgen und Reihen

**1.1** ***1)*** 12, gerade Zahlen ***2)*** 17, Primzahlen ***3)*** 36, Quadratzahlen

**1.2** $a_n = 2 + (n - 1) \cdot 3$ oder $a_{n+1} = a_n + 3$ mit $a_1 = 2$

**1.6** ***1)*** 9, ungerade Zahlen ***2)*** 117 649, Vielfache von 7
***3)*** −6, positive ungerade Zahlen abwechselnd mit negativen geraden Zahlen
***4)*** −11, die Folgeglieder werden jeweils um 4 kleiner

**1.7** ***a)*** $\langle 2, 5, 17, 65, 257 \rangle$ ***b)*** $\langle -2, -\frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}, -2 \rangle$ ***c)*** $\langle 10^8, 10^4, 10^2, 10^1, 10^{\frac{1}{2}} \rangle$

**1.8** ***a)*** $\langle 6, 12, 24, 48, 96 \rangle$ ***b)*** $\langle 0, 1, 0, -3, -8 \rangle$ ***c)*** $\langle 1, 1, 1, 1, 1 \rangle$

**1.9** ***a)*** $a_{n+1} = a_n + 5$ mit $a_1 = 2$ — Das erste Folgeglied ist 2, die Folgeglieder werden jeweils um 5 größer.

***b)*** $a_{n+1} = 3 \cdot a_n$ mit $a_1 = 1$ — Das erste Folgeglied ist 1, das nachfolgende Glied ist jeweils das Dreifache des vorhergehenden.

***c)*** $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}$ mit $a_1 = -\frac{1}{2}$ — Das erste Folgeglied ist $-\frac{1}{2}$, die Folgeglieder werden jeweils um $\frac{1}{2}$ kleiner.

***d)*** $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$ mit $a_1 = \frac{1}{2}$ — Das erste Folgeglied ist $\frac{1}{2}$, das nachfolgende Glied ist jeweils die Hälfte des vorhergehenden.

**1.10** ***a)*** $a_n = 2n - 1$ — Folge der ungeraden Zahlen
***b)*** $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ — alternierende harmonische Folge
***c)*** $a_n = 10^{n-1}$ — Folge der Zehnerpotenzen
***d)*** $a_n = \frac{n}{n+1}$ — Zähler: Folge der natürlichen Zahlen, beginnend mit eins
Nenner: Folge der natürlichen Zahlen, jeweils um eins größer als der Zähler

**1.11** ***a)*** $\langle 2, 1, 0, -1, -2 \rangle$ ***b)*** $\langle 5, 1, 16, 19, 67 \rangle$

**1.12** ***a) 1)*** $\langle -4{,}888..., -4{,}777..., -4{,}554..., -4{,}109..., -3{,}21875, -1{,}4375, 2{,}125, 9{,}25, 23{,}5, 52 \rangle$

***2)*** $a_{40} = 61\,203\,283\,963$

***b) 1)*** $\langle \sqrt[27]{10}, \sqrt[9]{10}, \sqrt[3]{10}, 10, 10^3, 10^9, 10^{27}, 10^{81}, 10^{243}, 10^{729} \rangle$

***2)*** $a_{50} = 10^{(3^{46})}$

**1.13** ***1)*** Die fortpflanzungsfähigen Kaninchenpaare bringen jeweils ein weiteres Kaninchenpaar hervor. Die Anzahl der Kaninchenpaare $f_n$ ist daher die Summe der Anzahl der im Monat davor vorhandenen Kaninchenpaare $f_{n-1}$ und der Anzahl der im Monat davor fortpflanzungsfähigen Kaninchenpaare $f_{n-2}$.

***2)*** $\langle 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610 \rangle$

233 Kaninchenpaare

***3)*** $f_{31} = 1\,346\,269$ Kaninchenpaare

**1.14** ***1)*** $\langle 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ... \rangle$

***2)*** $s_{10} = 110$

**3)** Gleichfärbige Kreise stellen jeweils ein Folgeglied der Folge der geraden Zahlen dar. Die Kreise sind so in Rechteckform angeordnet, dass sich die Summe $s_1 = 1 \cdot 2$ durch die zwei weißen Kreise ergibt.
$s_2 = 2 \cdot 3$ ist das Produkt der Länge und der Breite des durch die zwei weißen und vier gelben Kreise festgelegten Rechtecks.
$s_3 = 3 \cdot 4$ ist das Produkt der Länge und der Breite des durch die zwei weißen, vier gelben und sechs orangefarbenen Kreise festgelegten Rechtecks.
$s_n$ ist daher ein Rechteck der Länge n und der Breite (n + 1), und es gilt $s_n = n \cdot (n + 1)$

**1.17** **a)** $1 + 6 + 11 + 16 + 21$
**b)** $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \frac{1}{16}$
**c)** $\frac{124}{11} + \frac{215}{13} + \frac{342}{15} + \frac{511}{17} + \frac{728}{19} + \frac{999}{21} + \frac{1\,330}{23} + \frac{1\,727}{25}$
**d)** $1\,000 + 100 + 10 + 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}0001$

**1.18** **a)** $\sum_{n=0}^{7}(2n + 1)$ **b)** $\sum_{n=1}^{5} 7n$ **c)** $\sum_{n=0}^{5} 10^n$ **d)** $\sum_{n=1}^{11} (-1)^n \cdot 3$

**1.19** **a)** **1)** $-2 + 4 - 8 + 16 - 32$ **2)** $-22$
**b)** **1)** $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ **2)** $\frac{31}{32}$
**c)** **1)** $1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11$ **2)** $-6$

**1.20** **a)** ***A)*** und ***C)*** geben dieselbe Reihe an.

$$\sum_{i=1}^{7}(-1)^i = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 = \sum_{i=0}^{6}(-1)^{i+1} = -1, \text{ aber}$$

$$\sum_{k=1}^{7}(-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 1 \text{ und } \sum_{n=1}^{7}\sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 1 + 0 - 1 + 0 + 1 + 0 - 1 = 0$$

**b)** ***A)*** und ***C)*** geben dieselbe Reihe an.

$$\sum_{n=1}^{8}\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{17} = \sum_{n=2}^{9}\frac{1}{2n-1}, \text{ aber}$$

$$\sum_{n=1}^{8}\frac{1}{2n-1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{15} \text{ und } \sum_{n=1}^{9}\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{19}$$

**1.21** $\sum_{n=1}^{\infty}(2n)^2,\ s_4 = 120$

**1.22** **a)** 1. Schritt: $n = 1 \Rightarrow f_1 = f_3 - 1$
$1 = 2 - 1$
3. Schritt: $f_1 + f_2 + \ldots + f_n + f_{n+1} = f_{n+2} - 1 + f_{n+1} = f_{n+3} - 1$
**b)** 1. Schritt: $n = 1 \Rightarrow f_1 = f_2$
$1 = 1$
3. Schritt: $f_1 + f_3 + \ldots + f_{2n-1} + f_{2\cdot(n+1)-1} = f_{2n} + f_{2\cdot(n+1)-1} = f_{2n} + f_{2n+1} = f_{2n+2} = f_{2\cdot(n+1)}$

**1.23** **a)** 1. Schritt: $n = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} \cdot (1 + 1)$
3. Schritt: $1 + 2 + \ldots + n + n + 1 = \frac{n}{2} \cdot (n + 1) + n + 1 = \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{n+1}{2} \cdot (n + 2)$
**b)** 1. Schritt: $n = 1 \Rightarrow 2 \cdot 1 = 1 \cdot (1 + 1)$
3. Schritt: $2 + 4 + \ldots + 2n + 2 \cdot (n + 1) = n \cdot (n + 1) + 2 \cdot (n + 1) = (n + 1) \cdot (n + 2)$
**c)** 1. Schritt: $n = m + 1 \Rightarrow LS = 2m + 1 = RS$
3. Schritt: LS: $m + m + 1 + \ldots + n + n + 1 = \frac{(m+n)\cdot(n-m+1)}{2} + n + 1 = \frac{n^2 - m^2 + m + 3n + 2}{2}$
RS: $\frac{(m+n+1)\cdot(n+1-m+1)}{2} = \frac{n^2 - m^2 + m + 3n + 2}{2}$

***d)*** 1. Schritt: $n = 1 \Rightarrow 2a + 1 = \frac{(1+1)\cdot(2a+1)}{2}$

3. Schritt: $a + a + 1 + \ldots + a + n + a + n + 1 = \frac{(n+1)\cdot(2a+n)}{2} + a + n + 1 =$

$= \frac{2an + 4a + n^2 + 2n + n + 2}{2} = \frac{2a\cdot(n+2) + n\cdot(n+2) + 1\cdot(n+2)}{2} = \frac{(n+2)\cdot(2a+n+1)}{2}$

**1.24** ***a)*** 1. Schritt: $n = 1 \Rightarrow 1^2 = \frac{1\cdot(2-1)\cdot(2+1)}{3}$

3. Schritt: LS: $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 + (2\cdot(n+1)-1)^2 = \frac{n\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}{3} + (2n+1)^2 =$

$= \frac{4n^3 + 12n^2 + 11n + 3}{3}$

RS: $\frac{(n+1)\cdot(2\cdot(n+1)-1)\cdot(2\cdot(n+1)+1)}{3} = \frac{4n^3 + 12n^2 + 11n + 3}{3}$

***b)*** 1. Schritt: $n = 1 \Rightarrow 1^3 = \frac{1^2\cdot 2^2}{4}$

3. Schritt: LS: $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4}{4}$

RS: $\frac{(n+1)^2\cdot(n+1+1)^2}{4} = \frac{n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4}{4}$

**1.25** Werden die natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \ldots n\}$ durch Kreise veranschaulicht, so kann die Summe $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ durch ein Dreieck dargestellt werden. Das Doppelte einer Dreieckszahl entspricht zwei gleichen Dreiecken, die sich zu einem Rechteck zusammenfügen lassen (siehe Abbildung im Buch Seite 11). Dieses Rechteck ist $(n + 1)$ Kreise lang und n Kreise breit und enthält somit $n\cdot(n + 1)$ Kreise. Eine Dreieckszahl entspricht der Hälfte der Kreise, woraus sich die in ***1.23 a)*** angegebene Formel für Dreieckszahlen ergibt.

**1.26** ***1)*** und ***2)*** 42 925

***3)*** 1. Schritt: $n = 1 \Rightarrow 1^2 = \frac{1\cdot(1+1)\cdot(2+1)}{6}$

3. Schritt: LS: $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}$

RS: $\frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(2\cdot(n+1)+1)}{6} = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}$

***4)*** Jede Quadratzahl kann durch eine quadratische Schicht gleich großer Würfel dargestellt werden. Die Summe der Quadratzahlen kann durch Aufeinanderstapeln dieser Schichten dargestellt werden (siehe Buch Seite 11). Drei solcher gleicher Pyramiden können zu einem Quader mit den Kantenlängen n, $(n + 1)$ und $\left(n + \frac{1}{2}\right)$ zusammengefügt werden. Das Volumen des Quaders berechnet sich mit der Formel $n\cdot(n + 1)\cdot\left(n + \frac{1}{2}\right)$ oder $\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{2}$.
Um die Summe der Quadratzahlen zu erhalten, muss noch durch 3 dividiert werden, also $\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$.

**1.27** ***1)*** jeweils 36 cm ***2)*** 234 cm, 252 cm, 270 cm, $n\cdot 18$ cm

**1.32** ***1)*** Arithmetische Folge; die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder ist jeweils –4.
***2)*** Keine arithmetische Folge; die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder ist nicht konstant.
***3)*** Arithmetische Folge; die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder ist jeweils null.
***4)*** Keine arithmetische Folge; die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder ist nicht konstant.

**1.33** D

**1.34** ***1)*** $\langle 7, 11, 15, 19, 23\rangle$ ***2)*** $\langle 7, 5, 3, 1, -1\rangle$ ***3)*** $\langle 12, 7, 2, -3, -8\rangle$

**1.35** ***a) 1)*** $a_{n+1} = a_n - 0{,}5$ mit $a_1 = 2$ ***2)*** $a_n = 2 - 0{,}5 \cdot (n-1)$
***b) 1)*** $a_{n+1} = a_n + 4$ mit $a_1 = -19$ ***2)*** $a_n = 4 \cdot (n-1) - 19$
***c) 1)*** $a_{n+1} = a_n - \frac{2}{3}$ mit $a_1 = 3$ ***2)*** $a_n = 3 - \frac{2}{3} \cdot (n-1)$

**1.36** ***a)*** $\langle 11, 14, 17, 20, 23 \rangle$ ***b)*** $\langle 125, 121, 117, 113, 109 \rangle$ ***c)*** $\langle -2{,}5, -2, -1{,}5, -1, -0{,}5 \rangle$

**1.37** ***a)*** $a_n = -2 + (n-1) \cdot 2$ ***b)*** $a_n = 119 - (n-1) \cdot 4$ ***c)*** $a_n = -3{,}75 + (n-1) \cdot 0{,}75$

**1.38** ⟨10 Dosen, 7 Dosen, 4 Dosen, 1 Dose⟩

**1.39**

| | *1)* | *2)* | *3)* |
|---|---|---|---|
| Länge der kürzeren Seite | 52,5 cm | 243 mm | 103,2 m |
| Länge der längeren Seite | 70 cm | 324 mm | 137,6 m |
| Länge der Diagonale | 87,5 cm | 405 mm | 172 m |

**1.40** $T(n) = 15\,°C - 7\,\frac{°C}{km} \cdot n$

**1.41** ***a)*** 769 ***b)*** 2 499 ***c)*** 243

**1.42** ***1)*** $x = 13$, $a_n = -6 + (n-1) \cdot 25$ ***2)*** 69, 94, 119

**1.43** $a : b : c = 3 : 4 : 5$

**1.44** Gegeben sei die arithmetische Folge $\langle a_n \rangle = \langle ..., a_k - d, a_k, a_k + d, ... \rangle$. Dann gilt:
$\frac{(a_k - d) + (a_k + d)}{2} = \frac{2a_k}{2} = a_k$

**1.45** Sind $a_m$ und $a_n$ ($m > n$) beliebige Glieder einer arithmetischen Folge, dann gilt:
I: $a_m = a_1 + (m-1) \cdot d$ und II: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$. Umformen der zweiten Gleichung auf $a_1$ ergibt $a_1 = a_n - (n-1) \cdot d$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt $a_m = a_n - (n-1) \cdot d + (m-1) \cdot d$. Herausheben von d und zusammenfassen ergibt $a_m = a_n + (m-n) \cdot d$.

**1.46** ***1)*** 8 Bücher ***2)*** 110 Bücher

**1.48** ***a)*** $s_{14} = 157{,}5$ ***b)*** $s_{23} = 2\,691$ ***c)*** $s_{60} = 4\,260$

**1.49** ***a)*** $n = 14$ ***b)*** $n = 34$

**1.50** ***a)*** $\sum_{k=1}^{20} (3k - 10)$ ***b)*** $\sum_{k=1}^{20} \left(\frac{k}{4} - 2\right)$ ***c)*** $\sum_{k=1}^{20} (3k - 12)$

**1.51** 3,10 €

**1.52** ***a)*** 15 000,00 €
***b)*** 1. Preis: 1 916,67 €, 2. Preis: 1 816,67 €, 3. Preis: 1 716,67 €

**1.53** 7 071 071

**1.54** $\langle -29, -14, 1, 16, 31 \rangle$

**1.55** $s_{10}$ ist die Summe der Plätze in den ersten 10 Reihen und $s_5$ ist die Summe der Plätze in den ersten 5 Reihen. Daher ist die Differenz $s_{10} - s_5$ die Summe der Plätze in den Reihen 6 bis 10.

**1.56** ab der 13. Reihe

**1.57** ***1)*** am 31. Tag ***2)*** 963,9 m

**1.58** 1 073,741... $m^2$, 128,877... min = 2,147... h

**1.62** ***a)*** $\langle 48, 144, 432, 1\,296, 3\,888\rangle$, $b_4 = 1\,296$ ***c)*** $\langle 6, 36, 216, 1\,296, 7\,776\rangle$, $b_8 = 1\,679\,616$
***b)*** $\langle 4, 20, 100, 500, 2\,500\rangle$, $b_8 = 312\,500$

**1.63** ***a) 1)*** $b_{n+1} = 2 \cdot b_n$ mit $b_1 = 7$; $b_n = 7 \cdot 2^{n-1}$ bzw. $b_{n+1} = -2 \cdot b_n$ mit $b_1 = -7$; ***2)*** $b_n = (-7) \cdot (-2)^{n-1}$
***b) 1)*** $b_{n+1} = 0{,}1 \cdot b_n$ mit $b_1 = 200\,000$; $b_n = 200\,000 \cdot 0{,}1^{n-1}$ bzw. $b_{n+1} = -0{,}1 \cdot b_n$ mit $b_1 = -200\,000$; ***2)*** $b_n = -200\,000 \cdot (-0{,}1)^{n-1}$
***c) 1)*** $b_{n+1} = -4 \cdot b_n$ mit $b_1 = -10$; ***2)*** $b_n = -10 \cdot (-4)^{n-1}$

**1.64** ***a)*** 18, 45, 112,5 ***b)*** 8,1, 24,3, 72,9 ***c)*** 3,2, 16, 80

**1.65** ZB $\langle 3, 3, 3, ...\rangle$ ist eine arithmetische Folge mit $a_1 = 3$ und $d = 0$. $\langle 3, 3, 3, ...\rangle$ ist aber auch eine geometrische Folge mit $b_1 = 3$ und $q = 1$.

**1.66** 10 000,00 €, 8 333,33 €, 6 944,44 €, 5 787,04 €, 4 822,53 €

**1.67** ***1)*** $\left\langle \frac{M_0}{2}, \frac{M_0}{4}, \frac{M_0}{8}, \frac{M_0}{16}, \frac{M_0}{32}, \frac{M_0}{64}, ...\right\rangle$ ist die Folge der nach n = 1, 2, 3, ... Halbwertszeiten jeweils vorhandenen Menge bei einer Ausgangsmenge $M_0$. Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder ist konstant 0,5. Daher liegt eine geometrische Folge vor.

***2)*** $M = M_0 \cdot 0{,}5^{\frac{90}{30}}$ ***3)*** nach 150 Jahren

**1.68** $\langle 860\ \text{min}^{-1}, 1\,030{,}068...\ \text{min}^{-1}, 1\,233{,}767...\ \text{min}^{-1}, 1\,477{,}749...\ \text{min}^{-1}, 1\,769{,}980...\ \text{min}^{-1}, 2\,120\ \text{min}^{-1}\rangle \approx$
$\approx \langle 860\ \text{min}^{-1}, 1\,030\ \text{min}^{-1}, 1\,234\ \text{min}^{-1}, 1\,478\ \text{min}^{-1}, 1\,770\ \text{min}^{-1}, 2\,120\ \text{min}^{-1}\rangle$

**1.69** ***1)*** 73-mal ***2)*** 26,998... m

**1.70** ***a)***

| | | | |
|---|---|---|---|
| c′ = 261,625... Hz | e′ = 329,627... Hz | g′ = 391,995... Hz | ais′ = 466,163... Hz |
| cis′ = 277,182... Hz | f′ = 349,228... Hz | gis′ = 415,304... Hz | h′ = 493,883... Hz |
| d′ = 293,644... Hz | fis′ = 369,994... Hz | a′ = 440 Hz | c″ = 523,251... Hz |
| dis′ = 311,126... Hz | | | |

***b)*** Das Frequenzverhältnis benachbarter Töne ist konstant. Die Frequenzen der Töne bilden daher eine geometrishe Folge. Eine Oktave ist in 1 200 Cent unterteilt. Für einen um eine Oktave höheren Ton gilt daher $b_{1201} = b_1 \cdot q^{1200}$. Für den Kammerton a′ und den um eine Oktave höheren Ton a″ erhält man die Gleichung $880 = 440 \cdot q^{1200}$. Umformen auf q ergibt $q = 1{,}000577789... \approx 1{,}00057779$. Das entspricht einem Frequenzunterschied von 0,57779 ‰.

**1.71** ***a)*** Sei $\langle b_1, b_1 \cdot q, b_1 \cdot q^2, b_1 \cdot q^3, ...\rangle$ eine geometrische Folge und $\langle \log(b_1), \log(b_1 \cdot q), \log(b_1 \cdot q^2), \log(b_1 \cdot q^3), ...\rangle$ die Folge der Logarithmen ihrer Glieder. Dann erhält man durch Anwenden der Rechenregeln für Logarithmen
$\langle \log(b_1), \log(b_1) + \log(q), (\log b_1) + 2 \cdot \log(q), \log(b_1) + 3 \cdot \log(q), ...\rangle$
mit $a_1 = \log(b_1)$ und $d = \log(q)$, also eine arithmetische Folge.

***b)*** Seien $\left\langle ..., \frac{b_k}{q}, b_k, b_k \cdot q, ...\right\rangle$ drei aufeinander folgende Glieder einer geometrischen Folge,
dann gilt: $\sqrt{\left(\frac{b_k}{q}\right) \cdot (b_k \cdot q)} = \sqrt{b_k^2} = b_k$.

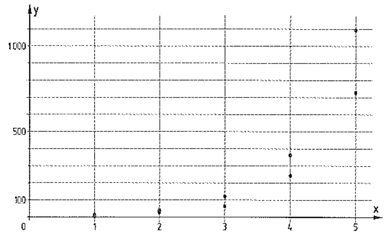
**1.72** $\langle 40, 160, 640, 2\,560, 10\,240, 40\,960\rangle$
$\langle -4{,}\dot{4}; -40; -360; -3\,240; -29\,160; -262\,440\rangle$

**1.73** 8 + 4 + 2 + 1 = 15 Spiele

**1.75** ***a)*** $s_5 = 366{,}09375$ ***b)*** $s_7 = -32{,}753...$ ***c)*** $s_{10} = 9{,}042...$

**1.76** ***1)*** und ***2)***

| Stunde | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. |
|---|---|---|---|---|---|
| **neue informierte Person** | 4 | 27 | 81 | 243 | 729 |




Die Funktionswerte beider Graphen werden exponentiell größer. Der Graph zu ***2)*** ist stärker steigend als der Graph zu ***1)***.

**1.77** $b_n = 2^n$

**1.78** $s_6 = \frac{63}{8}$

**1.79** Beginnend mit der jüngsten Person 80 000,00 €, 40 000,00 €, 20 000,00 € bzw. 10 000,00 €.

**1.80** Am Donnerstag der dritten Woche. 40,544... km

**1.81** 68,25 m; 88,72 m; 115,34 m; 149,94 m; 194,92 m; 253,40 m; 329,42 m

**1.82** $\langle 1, 2, 4, 8, 16, 32 \rangle$

**1.83** $1{,}014... \cdot 10^{12}$t
Die Belohnung beträgt fast das 1 500-Fache (1455,625...) der Welternte 2014.

**1.84** ***1)*** 40,951 cm ***2)*** 1 758,174... g

**1.85** 214 748 364 Kreuzer 15 Paradeinlein

**1.86** Der Durchmesser der mittleren Mutter beträgt ***1)*** $d_a = 20$ mm bzw. ***2)*** $d_g = 17{,}320...$ mm.
Auf die grafische Darstellung wird verzichtet.
Fall ***2)*** entspricht eher dem Gefühl für „gleichmäßig" wachsend. Die gezeichneten Sechsecke können so angeordnet werden, dass ihre Umkreise zwei gemeinsame Tangenten haben.

**1.88** ***a)*** 1,584... ***b)*** 1,258... ***c)*** 1,122... ***d)*** 1,059...

**1.89** ***a)*** 99,53 % (99,526...) ***b)*** 58,49 % (58,489...) ***c)*** 216,23 % (216,227...) ***d)*** 58,49 % (58,489...)

**1.90** ***a)*** 10 cm, 15,8489 cm, 25,1189 cm, 39,8107 cm
***b)*** 100 mm, 112,2018 mm, 125,8925 mm, 141,2538 mm, 158,4893 mm, 177,8279 mm, 199,5262 mm
***c)*** 0,1 m, 0,1259 m, 0,1585 m, 0,1995 m, 0,2512 m, 0,3162 m, 0,3981 m

**1.91** ***1)*** und ***2)***

| Genauwerte von R40 | R40 | prozentuelle Abweichung |
|---|---|---|
| 1,0000 | 1 | |
| 1,0593 | 1,06 | 0,066... |
| 1,1220 | 1,12 | −0,178... |
| 1,1885 | 1,18 | −0,715... |
| 1,2589 | 1,25 | −0,706... |
| 1,3335 | 1,32 | −1,012... |
| 1,4125 | 1,4 | −0,884... |
| 1,4962 | 1,5 | 0,253... |
| | ... | |

Die maximale Abweichung beträgt ca. 1 %.

**1.92** Maße in mm

| **Normzahlenreihe** | 211,3489 | 298,5382 | 421,6965 | 595,6621 | 841,3951 | 1 188,5022 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Papierformate** | A5: 210 | A4: 297 | A3: 420 | A2: 594 | A1: 841 | A0: 1 189 |

**1.93** Duck erhält 10 000,00 \$, Klever erhält 10 100,00 \$

**1.98** ***a)*** 11,20 € ***b)*** 1,75 € ***c)*** 9,17 € ***d)*** 4,25 €

**1.99** ***a)*** 3,490... % ***b)*** 4,08 %

**1.100** ***a)*** 216 Tage ***b)*** 199,804... Tage

**1.101** ***a)*** 5,950... % ***b)*** 11,174... %

**1.102** ***a)*** 57,142... Jahre ***b)*** $44{,}\dot{4}$ Jahre ***c)*** 25 Jahre ***d)*** 15,384... Jahre

**1.103** ***a) 1)*** 1,015 ***2)*** 1,01125 ***c) 1)*** 1,0375 ***2)*** 1,028125
***b) 1)*** 1,02125 ***2)*** 1,0159375 ***d) 1)*** 1,04375 ***2)*** 1,0328125

**1.104** ***a)*** 4 375,81 € ***b)*** 308,50 € ***c)*** 75 135,86 € ***d)*** 57,96 €

**1.105** ***a)*** q = 1,053..., i = 5,375... % ***c)*** q = 1,011..., i = 1,166... %
***b)*** q = 1,018..., i = 1,874... % ***d)*** q = 1,021..., i = 2,174... %

**1.106** ***a)*** 9,284... Jahre ***b)*** 15,869... Jahre ***c)*** 5,322... Jahre

**1.107** ***a)*** 18,530... Jahre ***b)*** 30,333... Jahre

**1.108** $K_n = K_0 \cdot 1{,}06^3 \cdot 1{,}03125^5 \cdot 1{,}045^2$

**1.109** 1 → B, 2 → C

**1.110** ***a)*** Herr Franz würde für das Sparbuch nur 282 231,22 € erhalten. Er soll also das zweite Angebot annehmen.
***b)*** Herr Franz soll 3 815,53 € verlangen, damit ist die Inflation abgedeckt.

**1.111** Eva: 2 414,78 €, Maria: 2 287,26 €, Achim: 2 052,08 €

**1.112** 2,999... %

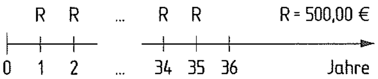
**1.113** Rechnet man zB mit 1 % Zinsen, so beträgt die Schuld nach 400 Jahren ca. 30 000,00 €, und zB bei 2 % Zinsen ca. 1,6 Mio. €. Es ist daher klar, dass Prinz Charles versucht, die Bezahlung von Zinsen zu vermeiden.

**1.114** ***1)*** 1 744,15 € (1 744,146...) ***2)*** 69,77 € (69,765...)

**1.116** ***1)*** Wird die erste Rate zu Beginn der ersten Verzinsungsperiode bezahlt, spricht man von einer vorschüssigen Ratenzahlung. Wird die erste Rate hingegen am Ende der ersten Verzinsungsperiode bezahlt, spricht man von einer nachschüssigen Ratenzahlung.
***2)*** Für den Endwert einer vorschüssigen Rate gilt
$E = R \cdot q + R \cdot q^2 + ... + R \cdot q^n = R \cdot q \cdot (1 + q + q^2 + ... + q^{n-1})$.
Anwenden der Summenformel für endliche geometrische Reihen ergibt $E = R \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.
***3)*** vorschüssig: Pensionszahlungen
nachschüssig: Kreditraten

**1.117** ***a)*** 20 824,53 € (20 824,531...)

***b)*** 45 160,15 € (45 160,153...)

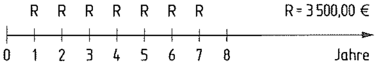



**1.118** ***a)*** 4 882,82 € (4 882,820...) ***b)*** 4 491,29 € (4 491,292...)

**1.119** 6 659,05 € (6 659,045...)

**1.120** 8 Jahre (7,764...)

**1.121** ***1)***




***2)*** 31 612,85 € (31 612,846...)

**1.122** ***1)*** Uschis Endwert wird mit der Formel $E_v = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ berechnet, Georgs Endwert mit der Formel $E_n = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q = E_v \cdot q$. Georgs Endwert ist um den Faktor $q = 1{,}04$ größer.
***2)*** 2 600,00 € ***3)*** 21 088,33 € (21 088,329...)

**1.123** ***1)*** 70 428,07 € (70 428,067...) ***2)*** 46,700... Jahre
***3)*** Die Dauer verdoppelt sich nicht. (170,914... Jahre)

**1.124** ***1)*** $B_A$ = 82 657,61 € (82 657,606...), $B_B$ = 83 757,84 € (83 757,844...)
***2)*** Der Barwert von Angebot B ist höher. Für den Verkäufer ist daher Angebot B vorzuziehen.

**1.125** Variante A. Ungefähr 39 Jahre lang erhält man bei Variante B weniger als bei Variante A.

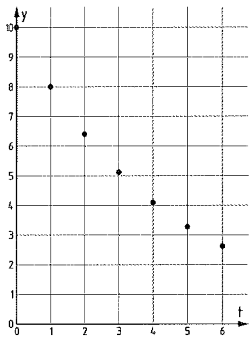
**1.128** ***a)*** $y(t) = 4 \cdot t + 2$ ***b)*** $y(t) = 5 \cdot 1{,}1^t$

**1.129** ***a)*** exponentielles Wachstum, $y(t + 1) = 1{,}0225 \cdot y(t)$
***b)*** lineares Wachstum, $y(t + 1) = y(t) - 5$
***c)*** exponentieller Zerfall, $y(t + 1) = 0{,}5 \cdot y(t)$

**1.130**

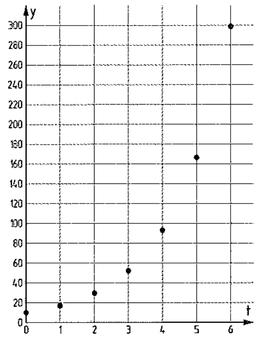
***a)*** ***1)***

| t | y |
|---|---|
| 0 | 10 |
| 1 | 8 |
| 2 | 6,4 |
| 3 | 5,12 |
| 4 | 4,096 |
| 5 | 3,276... |
| 6 | 2,621... |



***2)***

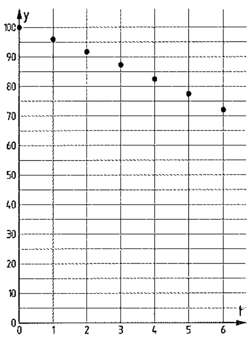
| t | y |
|---|---|
| 0 | 10 |
| 1 | 17 |
| 2 | 29,6 |
| 3 | 52,28 |
| 4 | 93,104 |
| 5 | 166,587... |
| 6 | 298,856... |



Bei ***1)*** ist die Wachstumsrate kleiner als 1. Die Folge konvergiert gegen null. Bei ***2)*** ist die Wachstumsrate größer als 1. Die Folge divergiert daher.

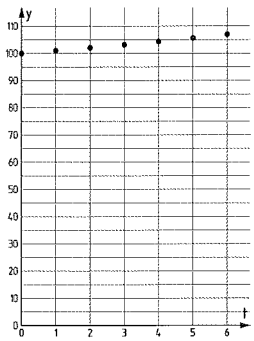
***b)*** ***1)***

| t | y |
|---|---|
| 0 | 100 |
| 1 | 96 |
| 2 | 91,76 |
| 3 | 87,265... |
| 4 | 82,501... |
| 5 | 77,451... |
| 6 | 72,098... |



***2)***

| t | y |
|---|---|
| 0 | 100 |
| 1 | 101 |
| 2 | 102,06 |
| 3 | 103,183... |
| 4 | 104,374... |
| 5 | 105,637... |
| 6 | 106,975... |



Bei **1)** ist die Zunahme durch die Wachstumsrate 1,06 geringer als die Abnahme um –10. Die Folgeglieder werden immer kleiner, die Folge divergiert. Bei **2)** ist die Zunahme durch die Wachstumsrate 1,06 größer als die Abnahme um –5. Die Folgeglieder werden immer größer, die Folge divergiert.

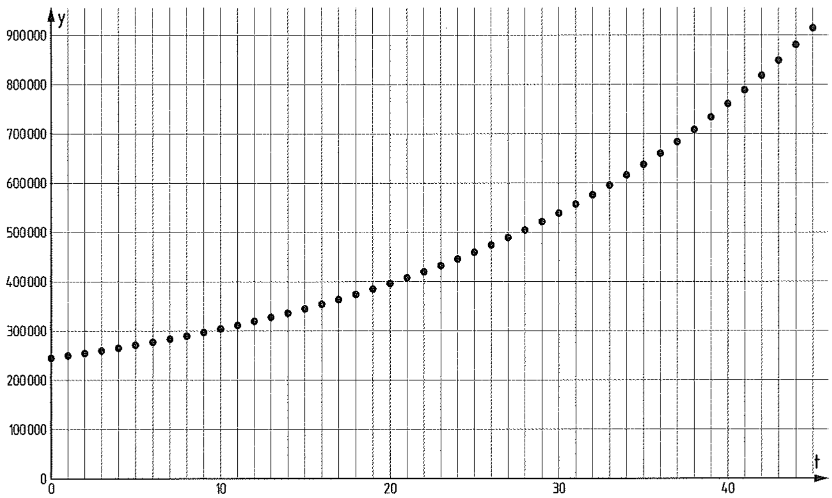
**1.131** **1)** $y(t+1) = 1{,}0375 \cdot y(t)$ mit $y_0 = 1\,000{,}00$ €, $y(t) = 1\,000{,}00\text{ €} \cdot 1{,}0375^t$ für einen Zwilling, $y(t+1) = y(t) + 50{,}00$ € mit $y_0 = 1\,000{,}00$ €, $y(t) = 1\,000{,}00\text{ €} + 50{,}00\text{ €} \cdot t$ für den anderen Zwilling.

**2)** Wird der Betrag auf ein Sparbuch gelegt, ist die Änderung $\Delta y(t)$ proportional zum angesparten Betrag $y(t)$. Es handelt sich um exponentielles Wachstum. Wird der Betrag jährlich um 50,00 € erhöht, ist die Änderung $\Delta y(t)$ konstant. Es handelt sich um lineares Wachstum.

**3)** $y(12) \approx 1\,555{,}45$ € bzw. $y(12) = 1\,600{,}00$ €, $y(18) \approx 1\,939{,}93$ € bzw. $y(18) = 1\,900{,}00$ €
Zum 12. Geburtstag ist das Guthaben bei linearem Wachstum noch etwas größer als das Guthaben bei exponentiellem Wachstum. Zum 18. Geburtstag ist das Guthaben bei exponentiellem Wachstum bereits größer als das Guthaben bei linearem Wachstum.

**1.132** **a)** 118 Schülerinnen und Schüler **b)** 158 Schülerinnen und Schüler

**1.133** **1)**




**2)** 343 828,18 €

**3)** Ja.

**4)** $y(t+1) = (y(t) - 6\,000) \cdot 1{,}045$, $y(t) = 245\,000 \cdot 1{,}045^t - 6\,000 \cdot \frac{1{,}045^t - 1}{1{,}045 - 1} \cdot 1{,}045$

(**1)** bis **4)** unter der Annahme, dass am Beginn des Jahres geerbt wird, und sofort 6 000,00 € behoben werden.)

**1.134** **1)** 2 353 Dosen (2 352,941...) **2)** 2 353 Dosen (2 352,941...)

**1.135** **1)** $y(t+1) = y(t) \cdot 1{,}5$

**2)** Die Entwicklung des Fischbestands hängt davon ab, in welcher Fangsaison erstmals 60 Fische entnommen werden. Werden beginnend mit der Fangsaison 2017 jeweils 60 Fische gefangen, ergibt sich für den Fischbestand 2017 90 Fische, für 2018 75 Fische usw. (jeweils am Ende der Fangsaison). Der Fischbestand nimmt ab. Werden zB beginnend mit Fangsaison 2018 jeweils 60 Fische gefangen, ergibt sich für den Fischbestand 2017 150 Fische, für 2018 165 Fische usw. Der Fischbestand nimmt zu.

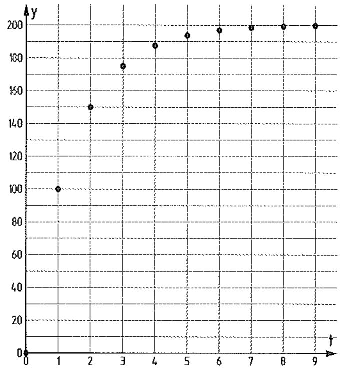
**3)** Die Fische vermehren sich von 2016 auf 2017 um 50 Fische. Es können daher beginnend mit der Fangsaison 2017 jeweils 50 Fische gefangen werden, damit der Bestand gleich bleibt.

**4)** $y(t+1) = 1{,}5 \cdot y(t) - 30$ mit $y_0 = 100$, $y(t) = 100 \cdot 1{,}5^t - 30 \cdot \frac{1{,}5^t - 1}{1{,}5 - 1}$

**1.136** 4 887 Menschen (4 886,780...)
(Unter der Annahme, dass die Abwanderung jeweils am Jahresende berücksichtigt wird.)

**1.137** ***1)*** Beschränktes Wachstum
***2)*** K = 200 Lose, k = 0,5
***4)*** 188 Lose (187,5)

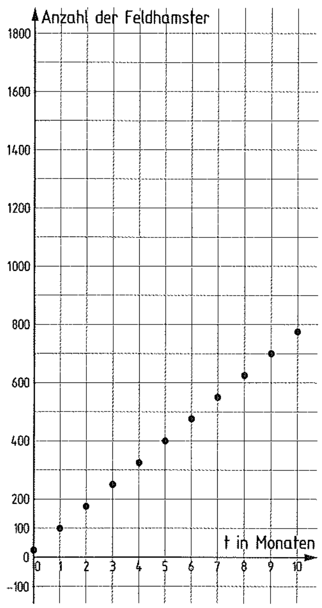
***3)***



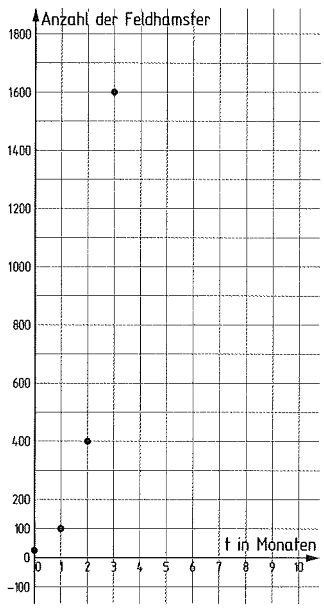

**1.138** ***1)*** Modell 1: y(t + 1) = y(t) + 75
Modell 2: y(t + 1) = 4 · y(t)
Modell 3: $y(t + 1) = y(t) + \frac{3}{775} \cdot y(t) \cdot (800 - y(t))$

***2)***

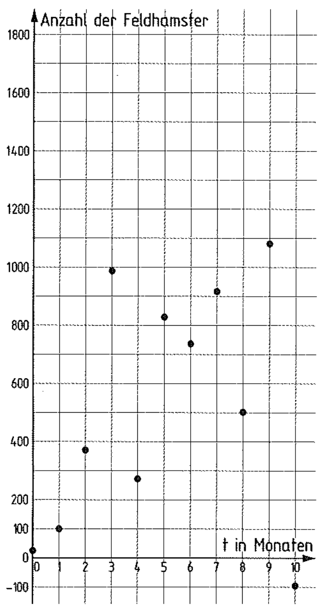
Modell 1




Modell 2




Modell 3




Modell 1: 9 Monate, Modell 2: 3 Monate (2,403...), Modell 3: 3Monate (ca. 2,5)
Bei exponentiellem Wachstum erreicht die Population am raschesten 700 Feldhamster, bei linearem Wachstum dauert es am längsten.

**1.139** 1 181 078 535,795... fm (unter der Annahme, dass die jährliche Ernte jeweils am Jahresende abgezogen wird)

**1.140** ***1)*** Die beiden geometrischen Folgen unterscheiden sich durch den Quotienten q. Für die Folge $\langle a_n \rangle$ ist q = 2, für $\langle b_n \rangle$ ist $q = \frac{1}{2}$.

***2)*** Null ist zB kleiner als jedes Glied von $\langle a_n \rangle$, da das erste Glied der Folge 1 ist und die Folgeglieder immer größer werden. Eine Zahl, die größer ist als jedes Glied von $\langle a_n \rangle$, gibt es aus diesem Grund nicht.

Null ist zB kleiner als jedes Glied von $\langle b_n \rangle$, da ein Folgeglied durch Halbieren des Vorgängers gebildet wird. Durch Halbieren eines noch so kleinen positiven Werts entsteht wieder ein positiver Wert. Zwei ist zB größer als jedes Glied von $\langle b_n \rangle$, da die Folgeglieder immer kleiner werden und das erste Glied eins ist.

**1.143** B
(Hinweis: In der Ausgabe ist ein Fehler aufgetreten. Die richtige Angabe müsste lauten: Kreuze die wahre Aussage an.)

**1.144** ***a)*** $n > -\frac{5}{2}$, w.A. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ***b)*** $0 < 59$, w.A. ***c)*** $0 < n^2 + n - 1$, w.A. $\forall n \in \mathbb{N}^*$

**1.145** ***a)*** $0 < 1$, w.A. ***b)*** $0 < 48n^2 + 28n - 34$, w.A. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ***c)*** $0 < 5$, w.A.

**1.146** ***a)*** $\langle -2, 18, 48, 88, 138, \ldots \rangle$; $0 < n + 1 \Rightarrow$ streng monoton steigend
***b)*** $\langle 0{,}157\ldots, 0{,}153\ldots, 0{,}090\ldots, 0, -0{,}106\ldots, \ldots \rangle$; $0 > 7n^2 + 31n - 36 \Rightarrow$ streng monoton fallend
***c)*** $\langle 1, 3, 4{,}795\ldots, 6{,}557\ldots, 8{,}306\ldots, \ldots \rangle$; $-\frac{1}{3} < n \Rightarrow$ streng monoton steigend
***d)*** $\langle -9, -\frac{9}{4}, -\frac{9}{7}, -\frac{9}{10}, -\frac{9}{13}, \ldots \rangle$; $0 < 3 \Rightarrow$ streng monoton steigend

**1.147** ***a)*** obere Schranken: zB 3, 7, 11; untere Schranken: zB −1, −3, −4
***b)*** obere Schranken: zB 4, 10, 30; untere Schranken: zB 0, −4, −7
***c)*** obere Schranken: zB 1, 2, 3; untere Schranken: zB −1, −3, −9
***d)*** obere Schranken: zB 3, 4, 5; untere Schranken: zB −2, −4, −5

**1.148** ***a)*** a ist keine obere Schranke, b ist eine untere Schranke.
***b)*** a ist eine obere Schranke, b ist eine untere Schranke.

**1.149** ***a)*** $\sup \langle a_n \rangle = a_1 = \frac{1}{3}$; die Folge ist streng monoton fallend.
$\inf \langle a_n \rangle = 0$; $\frac{1}{1 + 2n} > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}^*$
***b)*** $\nexists \sup \langle a_n \rangle$; $\nexists \inf \langle a_n \rangle$; die Folge ist alternierend, die Absolutbeträge der Folgeglieder sind monoton steigend.
***c)*** $\sup \langle a_n \rangle = \ln(3)$; die Folge ist streng monoton fallend.
$\inf \langle a_n \rangle = 0$; Umformen des Terms der Folge mithilfe der Logarithmusgesetze ergibt $a_n = \ln\left(\frac{n^2 + 2}{n^2}\right)$. Für $n \to \infty$ geht $a_n$ gegen $\ln(1) = 0$. Da die Folge streng monoton fallend ist, ist der Grenzwert gleichzeitig der kleinste Wert.
***d)*** $\nexists \sup \langle a_n \rangle$; $\inf \langle a_n \rangle = a_1 = 1$; die Folge ist streng monoton steigend.

**1.150** ***1)*** Ja. ***2)*** Die Differenz wird immer kleiner, je mehr Schülerinnen und Schüler mitmachen.

**1.152** ***1)*** Falsch. Hat eine Folge mehrere Häufungswerte, dann liegen nicht alle bis auf endlich viele Glieder in jeder ε-Umgebung zu jedem Häufungswert, sondern es liegen auch unendlich viele außerhalb.
***2)*** Wahr. Ist g Grenzwert einer Folge, dann liegen unendlich viele Glieder innerhalb der ε-Umgebung von g. g ist somit auch ein Häufungswert der Folge.
***3)*** Falsch. Die Folge $\langle -\frac{1}{n} \rangle$ ist eine Nullfolge und hat nur negative Werte.
***4)*** Wahr. Die Glieder nehmen nur die Werte −1 und 1 an, diese sind daher Häufungswerte.

**1.153** $1 \to C$, $2 \to A$

**1.154** ***a)*** Konvergent, da die Folge streng monoton fallend ist, die Folgeglieder aber nicht negativ werden.
***b)*** Divergent, da die Folge streng monoton wachsend ist.
***c)*** Divergent, da die Folge streng monoton wachsend ist.

**1.155** ***a)*** Häufungswerte ***b)*** keines von beiden ***c)*** Grenzwert ***d)*** Häufungswerte

**1.156** ***a)*** $g = 0{,}5$ ***b)*** $g = 0{,}\dot{3}$

**1.157** Die Behauptung kann nicht stimmen, da sich $\langle a_n \rangle$ dem Wert 2 nähert, $\langle b_n \rangle$ dem Wert $\frac{1}{2}$ und $\langle c_n \rangle$ dem Wert null.

**1.159** ***a)*** 0 ***b)*** 8 ***c)*** $\infty$ ***d)*** 0

**1.160** ***a)*** $g = 1$, 10 Glieder ***b)*** $g = 4{,}5$, 17 Glieder ***c)*** $g = 0$, 4 Glieder

**1.161** ***1)*** $a_n = \frac{5n - 1}{n}$ ***2)*** $a_n = \frac{2n^2 + 7n - 1}{3n^2}$

**1.162** ***1)*** 130 bzw. 200 ***2)*** 70 bzw. 200

**1.163** Die Schlussfolgerung ist falsch, da man eine Strecke nicht in beliebig kleinen Teilintervallen durchlaufen kann.
Der Weg, den die Schildkröte bis zum Einholen durchläuft, ist um 1 Stadion kürzer als der Weg, den Achilles durchläuft. Ist v die Geschwindigkeit der Schildkröte, so beträgt die Geschwindigkeit von Achilles 12v. Achilles und die Schildkröte sind gleich lang unterwegs, also ist die Zeit für beide t. Die Formel für den Weg s lautet $s = v \cdot t$.
Das ergibt die Gleichung $v \cdot t = 12v \cdot t - 1$ bzw. umgeformt auf t: $t = \frac{1}{11v} \cdot t$. Einsetzen in die Formel für die Wegberechnung des Achilles ergibt $s = 12v \cdot \frac{1}{11v} = \frac{12}{11}$ Stadien $= 201{,}\overline{81}$ m.

**1.167** ***1)*** Divergent, da die unendliche Folge arithmetisch (mit $d = 0$) bzw. geometrisch mit $q = 1 \geqslant 1$ ist.
***2)*** Konvergent, da die unendliche Folge geometrisch mit $q = \frac{1}{2} < 1$ ist.
***3)*** Konvergent, da die unendliche Folge geometrisch mit $q = -\frac{1}{2}$ bzw. $|q| = \frac{1}{2} < 1$ ist.
***4)*** Divergent, da die unendliche Folge arithmetisch ist ($d = 2$).
***5)*** Divergent, da die unendliche Folge geometrisch mit $q = 1{,}5 > 1$ ist.
***6)*** Divergent, da die unendliche Folge arithmetisch ist ($d = 3$).

**1.168** ***a)*** 16 ***b)*** $\frac{63}{8}$ ***c)*** Die unendliche Summe existiert nicht, da $q = 1{,}1 \geqslant 1$. ***d)*** 0,476...

**1.169** ***a)*** $\frac{10}{33}$ ***b)*** $\frac{796}{999}$ ***c)*** $\frac{41}{13}$ ***d)*** $\frac{62}{13}$

**1.170** $b_1 = 5$; $q = 0{,}8$

**1.171** ***a)*** ***1)*** $b_1 = 0{,}866...$ m, $b_2 = 0{,}216...$ m, $b_3 = 0{,}054...$ m, $b_4 = 0{,}013...$ m ***2)*** 1,154... m
***b)*** ***1)*** $b_1 = 17{,}677...$ cm, $b_2 = 8{,}838...$ cm, $b_3 = 4{,}419...$ cm, $b_4 = 2{,}209...$ cm ***2)*** 35,355... cm

**1.172** ***1)*** $16{,}320... \cdot a_1$
***2)*** $17 \cdot a_1$
***3)*** Die Seite $a_1$ des ersten Quadrats wird im Verhältnis 5 : 12 geteilt, besteht also aus zwei Abschnitten mit der Länge $\frac{5}{17} \cdot a_1$ bzw. $\frac{12}{17} \cdot a_1$. Die Seitenlänge $a_2$ des zweiten Quadrats berechnet sich mit dem Satz des Pythagoras $a_2 = \sqrt{\left(\frac{5}{17} \cdot a_1\right)^2 + \left(\frac{12}{17} \cdot a_1\right)^2} = \sqrt{\frac{169}{289} a_1^{\,2}} = \frac{13}{17} \cdot a_1$.
Für das Verhältnis der beiden Quadratflächen gilt daher $A_2 : A_1 = \left(\frac{13}{17} \cdot a_1\right)^2 : a_1^{\,2} = \frac{\frac{169}{289} \cdot a_1^{\,2}}{a_1^{\,2}} = \frac{169}{289}$.
$A = 2{,}408... \cdot a_1^{\,2}$

**1.173** ***a)*** ***1)*** 314,082... cm ***2)*** 314,159... cm ***b)*** ***1)*** 374,045... mm ***2)*** 376,991... mm

**1.174** ***1)*** Falsch. Die einzelnen Strecken bilden eine geometrische Folge mit $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} < 1$. Die Folge ist daher konvergent und die Summe endlich.

***2)*** Wahr. Das Verhältnis von $u_2 : u_1$ ist $q = \frac{\frac{a}{2} \cdot \pi \cdot \frac{1}{2}}{a \cdot \pi \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$. Die Gesamtlänge der Umfänge beträgt daher $u = \frac{a}{2} \cdot \pi \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = a \cdot \pi$.

***3)*** Falsch. Das Verhältnis zweier aufeinander folgender Umfänge ist laut ***2)*** $q_u = \frac{1}{2}$. Das Verhältnis zweier aufeinander folgender Flächeninhalte ist $q_A = \frac{A_2}{A_1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{4}\right)^2 \cdot \pi}{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi} = \frac{1}{4}$.

***4)*** Falsch. Der Gesamtflächeninhalt beträgt $A = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{a^2 \cdot \pi}{6}$. Bei geviertelten Strecken beträgt der Gesamtflächeninhalt $A = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{16} \cdot \frac{a^2 \cdot \pi}{6} \neq \frac{1}{4} \cdot \frac{a^2 \cdot \pi}{6}$.

**1.175** ***1)*** 904,778... $cm^2$ ***2)*** 1 152 $cm^2$ ***3)*** Die Summe vervierfacht sich in beiden Fällen.

**1.176** ***a)*** 74,271... % ***b)*** 50,961... %

**1.177** ***1)*** 102,426... cm ***2)*** 10 800 $cm^2$ ***3)*** $\pi : 3$

**1.178** ***a)*** n = 10: 0,645634..., n = 100: 0,688172..., n = 1 000: 0,692647..., TR: 0,693147...
***b)*** n = 10: 0,760459..., n = 100: 0,782898..., n = 1 000: 0,785148..., TR: 0,785398...

**1.179** ***1)*** Ist a die Seitenlänge des ursprünglichen Dreiecks, so gilt für den ersten Umfang $u_1 = 3 \cdot a$.
Für den zweiten Umfang werden die Seiten gedrittelt und es gilt $u_2 = 3 \cdot 4 \cdot \frac{a}{3}$.
Analog gilt für den dritten Umfang $u_3 = 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{a}{3 \cdot 3}$.
Für n Schritte kann der Umfang mit $u_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \cdot a$ berechnet werden.
Daraus folgt für den Umfang der Schneeflocke $u = \lim\limits_{n \to \infty} \left(3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \cdot a\right)$.
Dieser Grenzwert ist unendlich. Für die Flächeninhalte gilt
$A_1 = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$, $A_2 = A_1 + 3 \cdot \frac{A_1}{9} = A_1 \cdot \left(1 + \frac{3}{9}\right)$, $A_3 = A_1 \cdot \left(1 + \frac{3}{9} + \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{9}\right)$ und
$A_n = A_1 \cdot \left(1 + \frac{3}{9} + \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{9} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \ldots + \frac{3}{9} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}\right)$, $n > 1$. Für $n \to \infty$ bildet $\frac{3}{9} + \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{9} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \ldots$ eine unendliche geometrische Reihe mit $b_1 = \frac{3}{9}$ und $q = \frac{4}{9}$ mit der Summe $S = \frac{3}{5}$. Für den Flächeninhalt der Schneeflocke gilt daher $A_n = A_1 \cdot \left(1 + \frac{3}{5}\right) = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{8}{5} = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2$.

***2)*** Es geht um die Präsentation einer individuellen Recherche.

**1.180** Die Hundebesitzerin legt a km zurück. Der Hund rennt dreimal so schnell und legt daher $3 \cdot a$ km zurück. Unter der vereinfachenden Annahme, dass sich die Richtungswechsel auf die Geschwindigkeit nicht auswirken, ist es unerheblich, dass der Hund dabei ständig zwischen Besitzerin und Hütte hin und her rennt.

**1.181** ***a)*** Die Folgeglieder sind die ersten zehn Ziffern der Zahl $\pi$.
***b)*** Die Folgeglieder sind die natürlichen Zahlen von 0 bis 9, alphabetisch geordnet.

**1.182** ***a)*** $\langle 3; 2{,}5; 2{,}25; 2{,}125; 2{,}0625; \ldots \rangle$ ***b)*** $\langle 1, 4, 2, -6, -10, \ldots \rangle$

**1.183** ***a)*** ***1)*** Geometrisch, da der Quotient zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern konstant −1 ist. Nicht arithmetisch, da die Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern nicht konstant ist.
***2)*** $b_n = (-1)^{n+1}$, $b_{10} = -1$

***b) 1)*** Weder arithmetisch noch geometrisch, da sowohl die Differenz als auch der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder nicht konstant ist.

***2)*** $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$ mit $c_1 = \frac{1}{4}$ und $c_2 = \frac{1}{12}$; $c_{10} = \frac{97}{12}$

***c) 1)*** Arithmetisch, da die Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern konstant −2 ist. Nicht geometrisch, da der Quotient zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern nicht konstant ist.

***2)*** $a_n = 3 - 2n$, $a_{10} = -17$

***d) 1)*** Geometrisch, da der Quotient zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern konstant 3 ist. Nicht arithmetisch, da die Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Glieder nicht konstant ist.

***2)*** $b_{n+1} = 3b_n$ mit $b_1 = \frac{1}{12}$, $b_{10} = 1\,640{,}25$

***e) 1)*** Arithmetisch, da die Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern konstant 0 ist. Geometrisch, da der Quotient zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern konstant 1 ist.

***2)*** $b_n = 2$, $b_{10} = 2$

***f) 1)*** Arithmetisch, da die Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern konstant $\frac{1}{3}$ ist. Nicht geometrisch, da der Quotient zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern nicht konstant ist.

***2)*** $a_n = \frac{n}{3} - \frac{1}{12}$, $a_{10} = \frac{13}{4}$

**1.184** ***1)*** Arithmetisch, da die Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern konstant −3 ist.

***2)*** Weder noch, um das darauf folgende Glied zu erhalten, muss ein Folgeglied quadriert werden. Es ist daher weder die Differenz noch der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder konstant.

***3)*** Weder noch, um das darauf folgende Glied zu erhalten, muss ein Folgeglied mit dem Faktor 2 multipliziert und die Zahl 3 addiert werden. Es ist daher weder die Differenz noch der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder konstant.

***4)*** Geometrisch, da der Quotient zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern konstant 2 ist.

**1.185** $n = 18$, $s_{20} = 320$

**1.186** $q = \frac{3}{2}$, $s_8 = 350{,}2\dot{7}$

**1.187** ***1)*** 10,935 m ***2)*** 51,585 m ***3)*** am 11. Tag (10,427...)

**1.188** ***1)*** $a_n = 101\,325\ \text{Pa} - 12{,}5\ \frac{\text{Pa}}{\text{m}} \cdot n$ ***2)*** 96 325 Pa ***3)*** 4 106 m ***4)*** 2 026,5 m

**1.189** Für die Berechnung der Durchmesser eignen sich R5, R10/2, R20/4, R40/8 usw. Die Schläuche haben folgende (gerundete) Durchmesser (in mm): 25, 40, 63, 100, 158, 251, 398

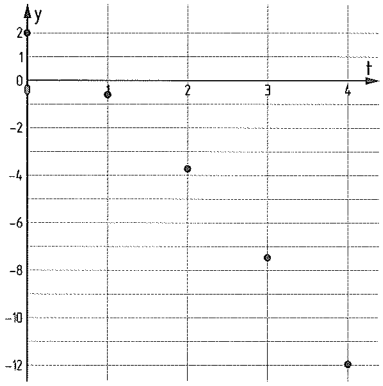
**1.190** ***a)*** 19,416 % ***b)*** 1 832,88 € ***c)*** 403,361... Tage ***d)*** 223 578,95 €

**1.191** 835,24 €

**1.192** Kann der Verpächter die 20 000,00 € des ersten Angebots mit einem jährlichen Zinssatz größer als 6,022... % anlegen, sollte er das erste Angebot annehmen. Der jährlich nachschüssig zur Verfügung stehende Betrag ist unter dieser Voraussetzung höher als bei Annahme des zweiten Angebots.

**1.193** ***a)***

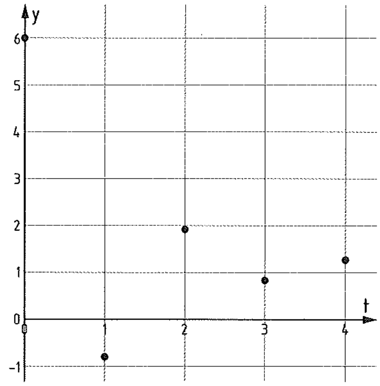
| t | y |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 1 | −0,6 |
| 2 | −3,72 |
| 3 | −7,464 |
| 4 | −11,9568 |




Die Folge divergiert.

***b)***

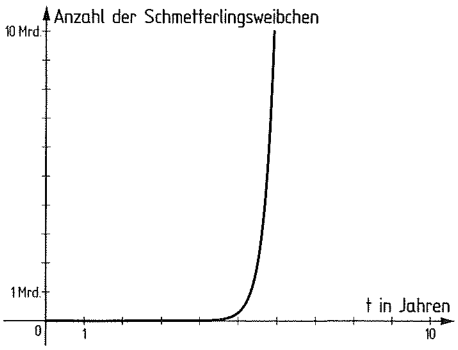
| t | y |
|---|---|
| 0 | 6 |
| 1 | −0,8 |
| 2 | 1,92 |
| 3 | 0,832 |
| 4 | 1,2672 |




Die Folge konvergiert.

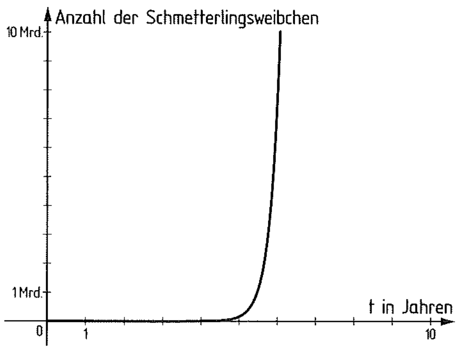
**1.194** ***1)*** $a(t+1) = 51 \cdot a(t)$ mit $a_0 = 1$, $a(t) = 1 \cdot 51^t$

***2)***




***3)*** 10,056... Jahre

***4)*** $a(t+1) = 51 \cdot a(t) - 25$ mit $a_0 = 1$



**1.195** 1. Schritt: $n = 1 \Rightarrow 1^3 = 1^2$

3. Schritt: Für den Nachweis wird die Beziehung $2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k = n \cdot (1 + n)$ benötigt, die sich aus der Summenformel für endliche arithmetische Reihen ergibt.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + (n+1) \cdot [n \cdot (n+1) + 1 \cdot (n+1)] =$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + (n+1) \cdot \left(2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k \cdot (n+1) + (n+1)^2 =$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{n} k + (n+1)\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$$

**1.196** ***a) 1)*** $\langle -\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{9}, \frac{1}{13}, \ldots \rangle$
***2)*** nicht monoton
***3)*** $\inf \langle a_n \rangle = -\frac{1}{3}$, $\sup \langle a_n \rangle = 1$

***b) 1)*** $\langle 2, -4, 8, -16, 32, \ldots \rangle$
***2)*** nicht monoton
***3)*** –

***c) 1)*** $\langle 6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \ldots \rangle$
***2)*** streng monoton fallend
***3)*** $\inf \langle a_n \rangle = 0$, $\sup \langle a_n \rangle = 6$

***d) 1)*** $\langle 0; 0{,}693\ldots; 1{,}098\ldots; 1{,}386\ldots; 1{,}609; \ldots \rangle$
***2)*** streng monoton steigend
***3)*** $\inf \langle a_n \rangle = 0$

**1.197** ***a) 1)*** $\langle 5; 4{,}8; 4{,}6; 4{,}4; 4{,}2; \ldots \rangle$
***2)*** streng monoton fallend
***3)*** $\sup \langle a_n \rangle = 5$

***b) 1)*** $\langle 0, 1, 2, 3, 4, \ldots \rangle$
***2)*** streng monoton steigend
***3)*** $\inf \langle a_n \rangle = 0$

**1.198** ***a)*** – ***b)*** 32 ***c)*** 9

**1.199** ***1)*** $g = \sqrt{4} = 2$ ***2)*** $g = \sqrt{2} = 1{,}414\ldots$
Für $a_1 > 0$ ist der Grenzwert $g = \sqrt{c}$.
Für $a_1 = 0$ ist die Folge nicht definiert.
Für $a_1 < 0$ ist der Grenzwert $g = -\sqrt{c}$.

**1.200** ***a)*** 1,098… ***b)*** $\frac{125}{72}$ ***c)*** $\frac{ab^2 + a}{b^2 - a^2 + 1}$

**1.201** 924,98816

**1.202** ***a)*** 41 724,277… $mm^2$ ***b)*** 41 887,902… $mm^2$

**1.203** ***a)*** 123,878… cm ***b)*** 124 cm

**1.204** ***a)*** $1{,}001\ldots \cdot a^2$ ***b)*** $\sqrt{3} \cdot a^2$

**1.205** Für den Grenzwert der Folge $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = \frac{b_1}{q} \cdot q^n$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{b_1}{q} \cdot q^n\right) = \frac{b_1}{q} \cdot \lim\limits_{n \to \infty} q^n$.

***1)*** Für $|q| > 1$ ist die Folge $\langle |q|^n \rangle$ streng monoton steigend, da $|q|^n < |q|^{n+1} \Rightarrow |q|^n < |q|^n \cdot |q| \Rightarrow 1 < |q|$ eine wahre Aussage ist. Da jedes Folgeglied um den Faktor $|q|$ größer als das vorhergehende Glied ist, hat die Folge keine obere Schranke und es gilt $\lim\limits_{n \to \infty} |q|^n = \infty$.

Für $q < -1$ ist die Folge $\langle q^n \rangle$ zusätzlich alternierend. Die Folge $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ divergiert daher für $|q| > 1$.

***2)*** Für $q = 1$ ist die Folge $\langle q^n \rangle = \langle 1, 1, 1, \ldots \rangle$ konstant. Für den Grenzwert gilt daher $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 1$ bzw. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{b_1}{q} \cdot q^n\right) = \frac{b_1}{1} \cdot 1 = b_1$. Für $q = 0$ lautet die Folge $\langle b_n \rangle = \langle b_1, 0, 0, 0, \ldots \rangle$. Außer $b_1$ sind alle Glieder null und es ist daher $g = 0$.

**3)** Für $|q| < 1$ werden die Beträge der Folgeglieder der Folge $\langle q^n \rangle$ immer kleiner, aber nie negativ. Die Folge $\langle q^n \rangle$ konvergiert daher gegen null und es gilt $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{b_1}{q} \cdot q^n\right) = \frac{b_1}{q} \cdot 0 = 0$ bzw. $g = 0$.

**1.206** $\langle 0, \frac{7}{11}, \frac{18}{31}, \frac{33}{59}, \ldots \rangle$, monotonically decreasing, $\frac{1}{2}$

**1.207** $\frac{9}{2}$

**1.208** £ 10 852,51 (10 852,507...)

# 2 Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen

**2.1** ***1)*** 25 °C

***2)*** Laut dem Funktionsterm wird von 25 der Wert des Terms $18 \cdot e^{-0{,}8 \cdot t} = 18 \cdot \frac{1}{e^{0{,}8 \cdot t}}$ subtrahiert.

Der Zahlenwert für die Zeit t ist größer oder gleich null und es gilt daher $e^{0{,}8 \cdot t} \geqslant 1$.

Daraus folgt für den Kehrwert $0 < \frac{1}{e^{0{,}8 \cdot t}} \leqslant 1$.

Der Wert des Terms $18 \cdot e^{-0{,}8 \cdot t}$ muss daher zwischen 0 und 18 liegen und der Funktionswert kann keine größeren Werte als 25 °C annehmen.

**2.4** ***a)*** Ja. Für größer werdende x-Werte nähert sich der Graph der Funktion immer mehr der Gerade g.

***b)*** Ja. Die Folge der Funktionswerte der Hochpunkte bzw. die Folge der Funktionswerte der Tiefpunkte der Funktion nähert sich immer mehr der Gerade g.

***c)*** Nein. Der „Abstand" zwischen dem Graph der Funktion und der Gerade g wird für kleiner werdende x-Werte ab $x \approx -5$ immer größer.

**2.5** ***a)*** $f(x) = \frac{1}{x}$ ***b)*** $f(x) = e^x$ ***c)*** $f(x) = \frac{1}{x-5}$ ***d)*** $f(x) = e^x - 3$

**2.6** ***a)*** $a_1: y = 0$, $a_2: y = 2$, $a_3: x = -0{,}693...$ ***c)*** $a: y = 3$

***b)*** $a: y = 1$ ***d)*** $a_1: y = -1$, $a_2: y = 1$

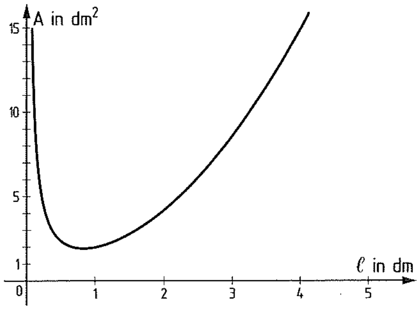
**2.7** $1 \rightarrow D$, $2 \rightarrow C$

**2.8** $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ nähert sich für $x \rightarrow \infty$ dem Wert null. B(x) nähert sich daher dem Grenzwert $\frac{3}{2}$.

**2.9** ***1)*** $k = 0{,}103...$ ***2)*** 17:07 Uhr (6,875... Stunden vor Mitternacht)

***3)*** 17,4 °C (die Umgebungstemperatur)

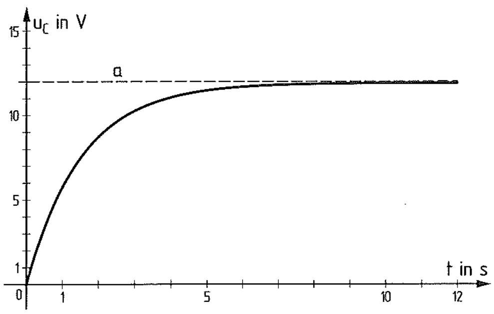
**2.10** ***1)***




***2)*** $\ell > 0$ dm

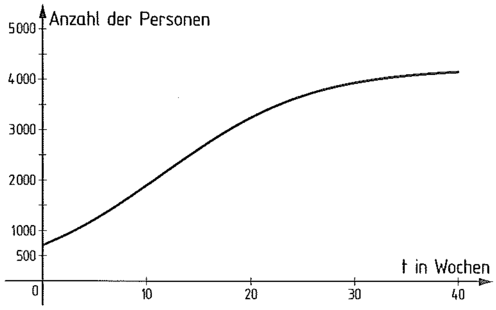
***3)*** Wenn $\ell$ gegen null geht, wird der Funktionswert und daher die Oberfläche unendlich groß.

**2.11** ***1)***




***2)*** Für größer werdendes t wird $e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{e^{\frac{t}{\tau}}}$ immer kleiner. Geht t gegen $\infty$, so nähert sich $\frac{1}{e^{\frac{t}{\tau}}}$ dem Wert null und man erhält $u_C(t) = U_0 \cdot (1 - 0)$ bzw. $u_C(t) = U_0$.

**2.12** **1)**




**2)** Der Graph zeigt den für logistisches Wachstum typischen s-förmigen Verlauf. Die Funktionswerte nähern sich für größer werdende Werte von t dem Wert 4 236, der die Kapazitätsgrenze darstellt.

**3)** Der Wert des Terms $e^{-0,14 \cdot t} = \frac{1}{e^{0,14 \cdot t}}$ nähert sich für sehr große Werte von t dem Wert null.

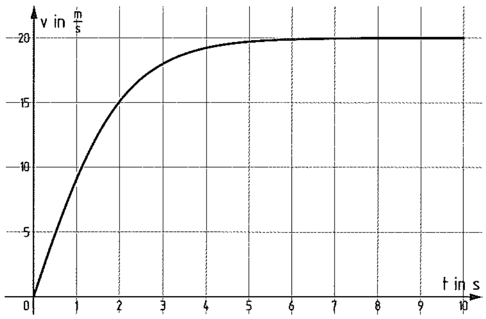
Der Nenner nähert sich daher dem Wert $1 + 5 \cdot 0 = 1$ und der Term insgesamt dem Wert 4 236. Die Anzahl der Personen nähert sich nach langer Zeit dem Wert 4 236.

**2.13** **1)** 500 000 Personen

**2)** Da die Variable t im Term $\frac{250t}{t^2 + 4}$ im Zähler linear und im Nenner quadratisch vorkommt, wächst bei größer werdenden Werten von t der Wert des Nenners rascher als der Wert des Zählers. Der Wert des Terms wird daher mit größer werdendem t kleiner und nähert sich für sehr große Werte von t dem Wert null. B(t) nähert sich daher dem Wert 0 + 500 = 500. Die Bevölkerungsanzahl nähert sich nach sehr langer Zeit dem Wert 500 000 Personen.

**2.14** $1 \to C$, $2 \to D$

**2.15** **1)**



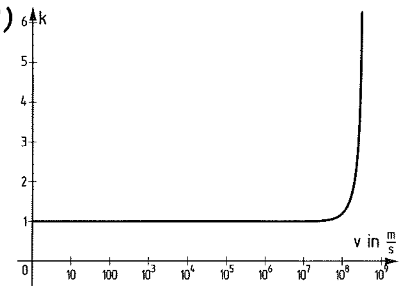

**2)** $20\,\frac{m}{s}$

**3)** Die Geschwindigkeit nimmt vor dem Öffnen des Schirms nicht unbegrenzt zu, der Fallschirmspringer fällt nicht schneller als mit $20\,\frac{m}{s}$.

Hinweis: In der Angabe ist ein Fehler aufgetreten. Richtig müsste die Funktionsgleichung $v(t) = 20 \cdot \frac{e^{0,5t} - e^{-0,5t}}{e^{0,5t} + e^{-0,5t}}$ lauten.

**2.16** **1)** $5,160... \cdot 10^{10}$ Joule **2)** $11,181...\,\frac{km}{s}$

**2.17** **1)**

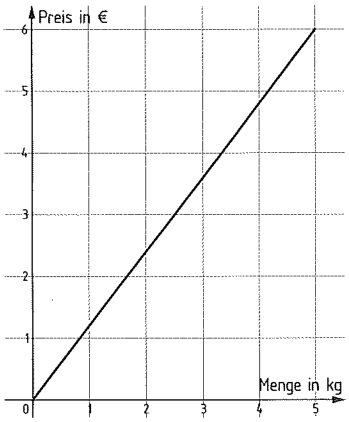



**2)** $\lim\limits_{v \to c} m(v) = m_0 \cdot \lim\limits_{v \to c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0 \cdot \lim\limits_{v \to c} \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}$.

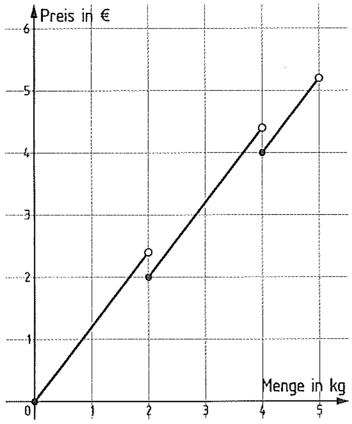
Für $v \to c$ geht $c^2 \to v^2$ gegen null und daher $\frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}$ gegen unendlich.

$m(v) = m_0 \cdot \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}$ wird unendlich groß.

**2.18** ***1)***




***2)***




2,40 € für 2 kg Orangen

***3)*** In ***1)*** kosten „etwas weniger als 2 kg Orangen" weniger als „genau 2 kg Orangen" bzw. „etwas mehr als 2 kg Orangen" mehr als „genau 2 kg Orangen". in ***2)*** kosten „etwas weniger als 2 kg Orangen" mehr als „genau 2 kg Orangen" bzw. „etwas mehr als 2 kg Orangen" mehr als „genau 2 kg Orangen".

**2.19** ***1)*** Für eine Folge von x-Werten, die sich der Stelle $x_0 = 0$ von links nähern, wächst die Folge der Funktionswerte gegen $g_L = +\infty$.
Für eine Folge von x-Werten, die sich der Stelle $x_0 = 0$ von rechts nähern, wächst die Folge der Funktionswerte gegen $g_R = -\infty$ .
Der Grenzwert g existiert daher nicht.

***2)*** Für eine Folge von x-Werten, die sich der Stelle $x_0 = 0$ von links nähern, hat die Folge der Funktionswerte konstant den Wert 0 und daher $g_L = 0$.
Für eine Folge von x-Werten, die sich der Stelle $x_0 = 0$ von rechts nähern, hat die Folge der Funktionswerte konstant den Wert 1 und daher $g_R = 1$.
Der Grenzwert g existiert daher nicht.

***3)*** Für eine Folge von x-Werten, die sich der Stelle $x_0 = 0$ von links nähern, nähert sich die Folge der Funktionswerte dem Wert $g_L = 0$.
Für eine Folge von x-Werten, die sich der Stelle $x_0 = 0$ von rechts nähern, nähert sich die Folge der Funktionswerte dem Wert $g_R = 0$ .
Der Grenzwert existiert daher und hat den Wert $g = 0$.

***4)*** Für eine Folge von x-Werten, die sich der Stelle $x_0 = 0$ von links nähern, wächst die Folge der Funktionswerte gegen $g_L = +\infty$.
Für eine Folge von x-Werten, die sich der Stelle $x_0 = 0$ von rechts nähern, wächst die Folge der Funktionswerte gegen $g_R = +\infty$.
Die Funktion hat den uneigentlichen Grenzwert t $+\infty$.

***5)*** Für eine Folge von x-Werten, die sich der Stelle $x_0 = 0$ von links nähern, hat die Folge der Funktionswerte konstant den Wert 15 und daher $g_L = 15$.
Für eine Folge von x-Werten, die sich der Stelle $x_0 = 0$ von rechts nähern, hat die Folge der Funktionswerte ebenfalls konstant den Wert 15 und daher $g_R = 15$.
Der Grenzwert existiert daher und hat den Wert $g = 15$.

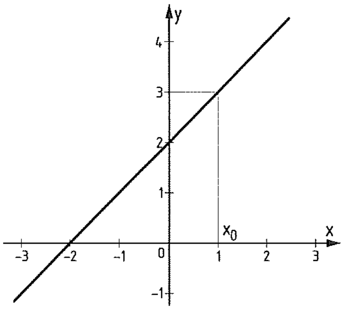
***6)*** Für eine Folge von x-Werten, die sich der Stelle $x_0 = 0$ von links nähern, nähert sich die Folge der Funktionswerte dem Wert $g_L = 0$.
Für eine Folge von x-Werten, die sich der Stelle $x_0 = 0$ von rechts nähern, nähert sich die Folge der Funktionswerte dem Wert $g_R = 0$.
Der Grenzwert existiert daher und hat den Wert $g = 0$.

**2.20** ***a)*** linksseitige Näherung, g = 1,5
***b)*** rechtsseitige Näherung, g = 0
***c)*** rechtsseitige Näherung, g = 0
***d)*** linksseitige Näherung, g = 5

**2.21** Der links- und der rechtsseitige Grenzwert sind zwar gleich, beide haben aber den Wert $g_L = g_R = -\infty$. Die Funktion hat daher an der Stelle $x_0 = 0$ einen uneigentlichen Grenzwert.

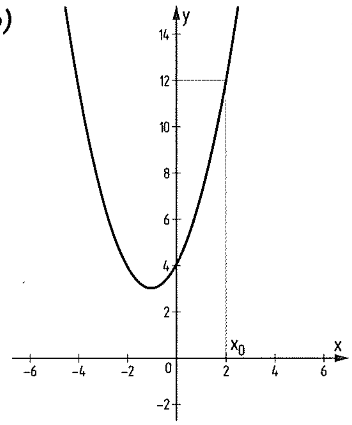
**2.22** Der linksseitige Grenzwert von $y_1 = \frac{\sin(x)}{x^2}$ an der Stelle $x_0 = 0$ ist $g_L = -\infty$ und der rechtsseitige Grenzwert ist $g_R = \infty$. Die Funktion hat daher an der Stelle $x_0 = 0$ keinen Grenzwert.
Der links- bzw. der rechtsseitige Grenzwert von $y_2 = \frac{\cos(x)}{x^2}$ an der Stelle $x_0 = 0$ ist $g_L = g_R = +\infty$. Die Funktion hat daher an der Stelle $x_0 = 0$ den uneigentlichen Grenzwert $g = +\infty$.
Beide Funktionen sind an der Stelle $x_0 = 0$ nicht definiert.

**2.23** ***a)***



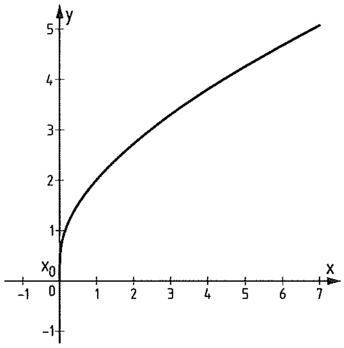

Der linksseitige bzw. der rechtsseitige Grenzwert an der Stelle $x_0 = 1$ ist $g_L = g_R = 3$.

***b)***



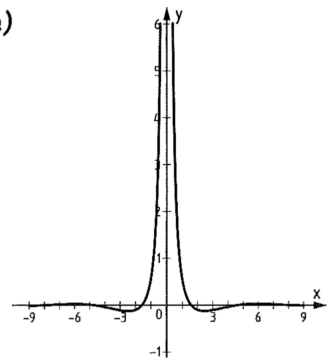

Der linksseitige bzw. der rechtsseitige Grenzwert an der Stelle $x_0 = 2$ ist $g_L = g_R = 12$.

***c)***



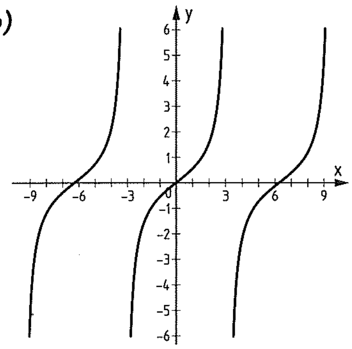

Der rechtsseitige Grenzwert an der Stelle $x_0 = 0$ ist $g_R = 0$.

**2.24** ***a)***



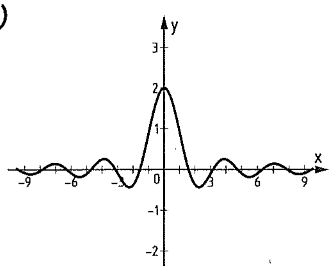

Der linksseitige bzw. der rechtsseitige Grenzwert an der Stelle $x_0 = 0$ ist $g_L = g_R = +\infty$.

***b)***




Der linksseitige bzw. der rechtsseitige Grenzwert an der Stelle $x_0 = 0$ ist $g_L = g_R = 0$.

***c)***




Der linksseitige bzw. der rechtsseitige Grenzwert an der Stelle $x_0 = 0$ ist $g_L = g_R = 2$.

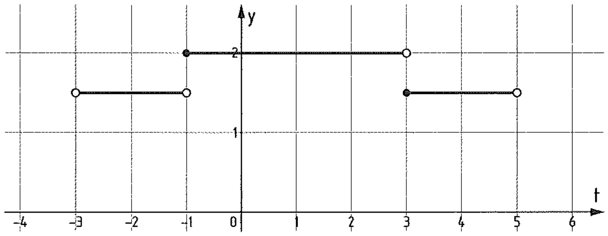
**2.25** **a)** Nähert man sich der Stelle $x_0$ von links, nimmt x immer negative Werte an. Der Exponent $-\frac{1}{x}$ muss daher bei der Berechnung des linksseitigen Grenzwerts immer einen positiven Wert haben und es gilt $g_L = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{2}{1 + e^{-\frac{1}{x}}} =$ „$\frac{2}{\infty}$“ $= 0$.

Nähert man sich der Stelle von rechts, nimmt x immer positive Werte an. Bei der Berechnung des rechtsseitigen Grenzwerts bleibt daher das negative Vorzeichen des Exponenten $-\frac{1}{x}$ erhalten und es gilt $g_R = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{2}{1 + e^{-\frac{1}{x}}} =$ „$\frac{2}{1+0}$“ $= 2$.

**2.28** ***1)*** ]−3; −1], ]−1; 3[, [3; 4[ ***2)*** ]−3; −1[, [−1; 1[, [1; 3[, [3; 4[

**2.29** ***a) 1)*** [0; T[ , ]T; 2T[ , ]2T; 3T[; unstetig an den Stellen t = T, t = 2T und t = 3T.
***2)*** $g_L = 2$, $g_R = 0$
***b) 1)*** [0; T[ , ]T; 2T[ , ]2T; 3T[; unstetig an den Stellen t = T, t = 2T und t = 3T.
***2)*** $g_L = 0$, $g_R = 1{,}5$

**2.30** ***a)***




Stetig in den Intervallen ]−3; −1[, ]−1; 3[ und ]3; 5[. Unstetig an den Stellen $t_1 = -1$ und $t_2 = 3$.

***b) 1)***

$$f(t) = \begin{cases} 1 \text{ für } t < -1 \\ 2 \text{ für } -1 \leq t \leq 1{,}5 \\ 1 \text{ für } 1{,}5 < t < 3 \\ 2 \text{ für } t = 3 \\ 1 \text{ für } t > 3 \end{cases}$$

***2)*** Stetig in den Intervallen ]−∞; −1[, ]−1; 1,5[, ]1,5; 3[ und ]3; ∞[.
Unstetig an den Stellen $t_1 = -1$, $t_2 = 1{,}5$ und $t_3 = 3$.

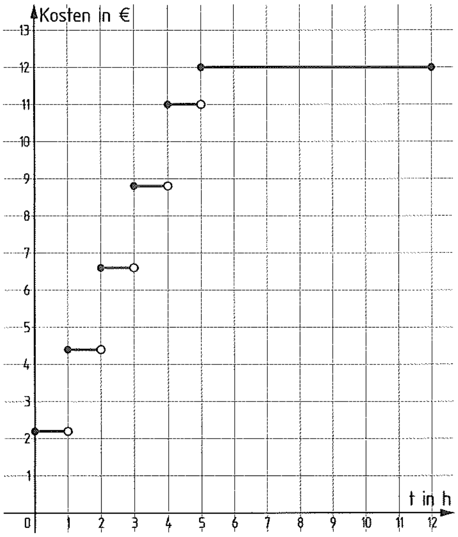
**2.31** ***1)*** $0, \frac{T}{5}, \frac{2T}{5}, \ldots, 2T$

$$u(t) = \begin{cases} 6 & \text{für } 0 \leq t < \frac{T}{5} \\ -6 & \text{für } \frac{T}{5} \leq t < \frac{2T}{5} \\ -3 & \text{für } \frac{2T}{5} \leq t < \frac{3T}{5} \\ 0 & \text{für } \frac{3T}{5} \leq t < \frac{4T}{5} \\ 3 & \text{für } \frac{4T}{5} \leq t < T \end{cases}$$

***2)*** keine Unstetigkeitsstelle

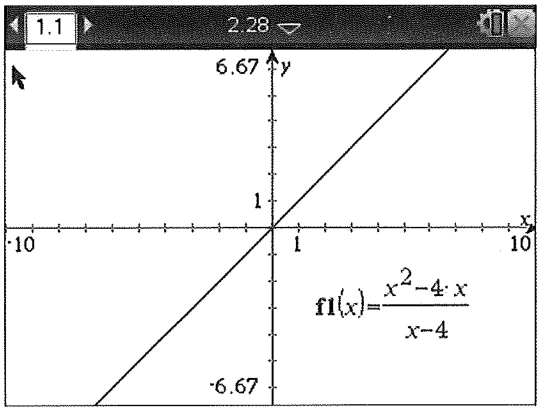
$$u(t) = \begin{cases} 1{,}5 \cdot \sin(t) & \text{für } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{T}{2} \leq t < T \end{cases}$$

**2.32** *1)*




*2)* Der Graph ist stückweise aus konstanten Funktionen zusammengesetzt. Zu Beginn jeder Stunde wird der Funktionswert abrupt um 2,20 größer. Zu Beginn der 5. Stunde springt der Funktionswert von 11,00 € auf den größten Funktionswert 12,00 €.

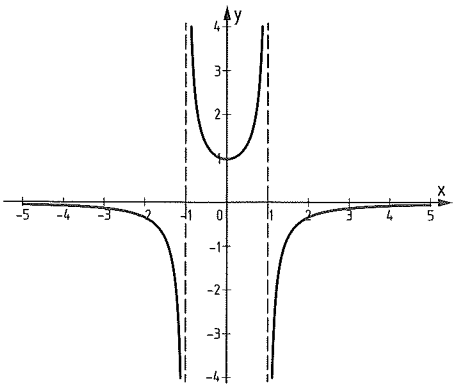
**2.33** $D = \mathbb{R}\backslash\{4\}$




Die Definitionslücke an der Stelle $x = 4$ ist bei der Darstellung der Funktion nicht sichtbar.

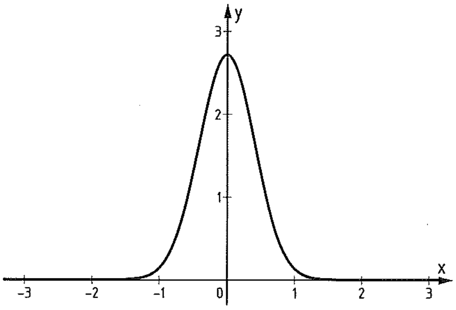
**2.34** Katharina zeichnet die Funktion f mithilfe von Mathcad und berechnet den links- und den rechtsseitigen Grenzwert an der Stelle $x_0 = 0$. Dieser existiert und ist jeweils null. Diese Vorgehensweise ist richtig. Falsch ist allerdings die Schlussfolgerung daraus. $\frac{2}{x^2}$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht definiert. Die Funktion hat an dieser Stelle eine Definitionslücke und ist für $x_0 = 0$ nicht stetig. $\frac{2}{x^2}$ ist das Argument einer Sinusfunktion und nähert sich an der Definitionslücke dem Wert „∞". Die Funktion hat an der Stelle $x_0 = 0$ eine Oszillationsstelle.

**2.39** **a)**



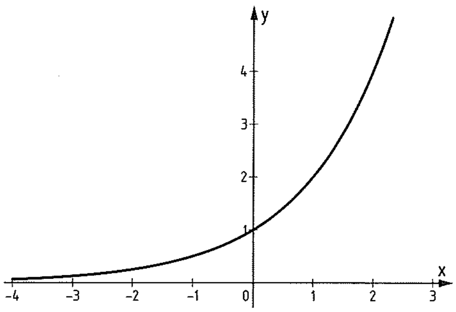

Polstelle bei $x_1 = -1$ bzw. $x_2 = 1$.
$g_L = -\infty$ bzw. $g_R = \infty$ bei $x_1 = -1$ und
$g_L = \infty$ bzw. $g_R = -\infty$ bei $x_1 = 1$.

**b)**



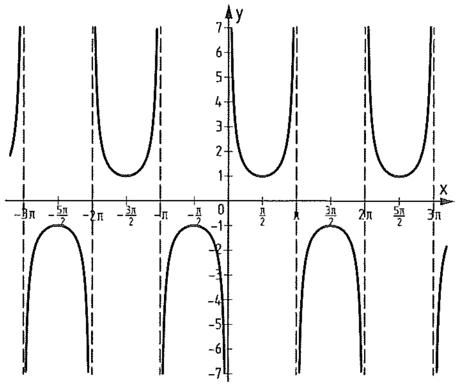

Die Funktion hat keine Unstetigkeitsstellen.
Sie kann ohne abzusetzen gezeichnet werden.

**c)**



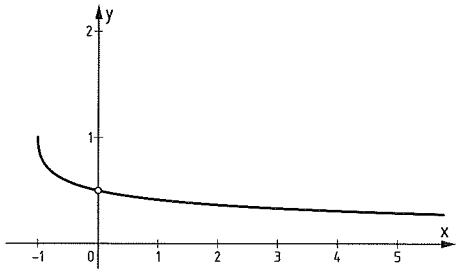

Die Funktion hat keine Unstetigkeitsstellen.
Sie kann ohne abzusetzen gezeichnet werden.

**d)**



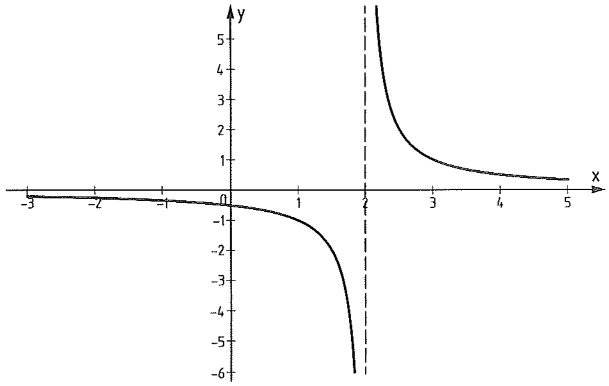

Polstellen bei $x = n \cdot \pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$.
$g_L = \infty$ bzw. $g_R = -\infty$ bei $x_k = (2k + 1) \cdot \pi$
und $g_L = -\infty$ bzw. $g_R = \infty$ bei $x_m = 2m \cdot \pi$
mit $k, m \in \mathbb{Z}$.

**e)**




Die Funktion ist für $x < -1$ nicht definiert.
Bei $x = 0$ hat die Funktion eine Definitionslücke.

**2.40** Der links- und rechtsseitige Grenzwert sind an der Stelle $x_0 = 2$ uneigentliche Grenzwerte mit verschiedenen Vorzeichen. Die Funktion hat daher an der Stelle $x_0 = 2$ eine Polstelle.
Die Gleichung der Asymptote lautet a: $x = 2$.

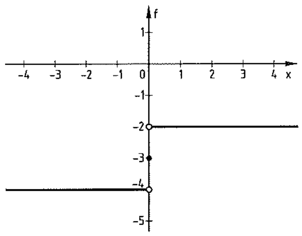


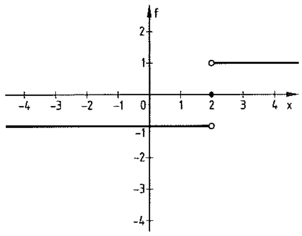
**2.41** ***1)*** eine Unstetigkeitsstelle bei $x = 2$

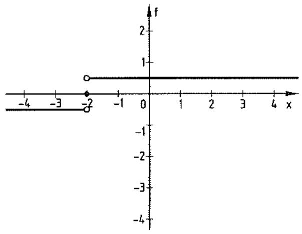
***2)*** Faktorisieren des Zähler- und des Nennerpolynoms ergibt $y = \frac{0{,}5 \cdot (x^2 - 2x + 4) \cdot (x + 2)}{(x + 2) \cdot (x - 2)}$.

Das Zähler- und das Nennerpolynom haben dieselbe einfache Nullstelle bei $x = -2$.
Die Stelle $x = -2$ ist daher eine hebbare Unstetigkeitsstelle und keine Polstelle.

**2.42** ***a)*** Unstetigkeitsstelle: $x = 0$ ***b)*** Unstetigkeitsstelle: $x = 2$ ***c)*** Unstetigkeitsstelle: $x = -2$



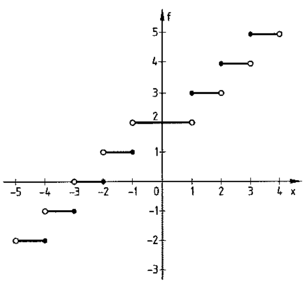


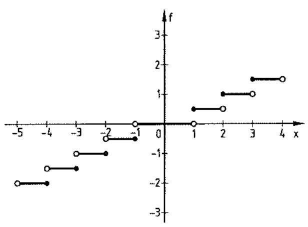


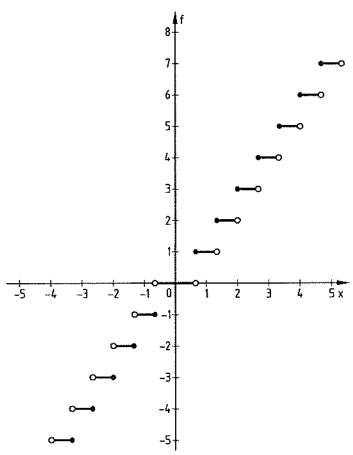
**2.43** ***a)*** Unstetigkeitsstellen:
$-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4$

***b)*** Unstetigkeitsstellen:
$-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4$

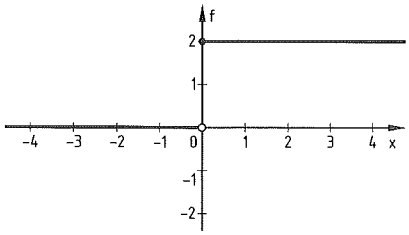
***c)*** Unstetigkeitsstellen:
$-\frac{14}{3}, -4, -\frac{10}{3}, -\frac{8}{3}, -2, -\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}, 4, \frac{14}{3}$



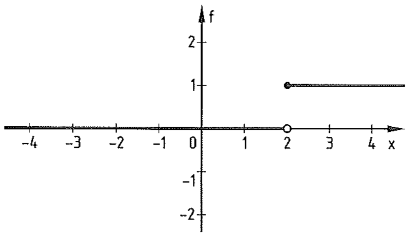




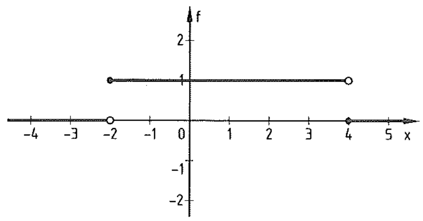
**2.44** ***a)*** Unstetigkeitsstelle: x = 0




***b)*** Unstetigkeitsstelle: x = 2

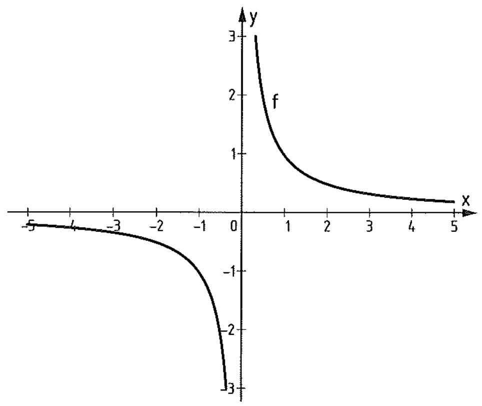


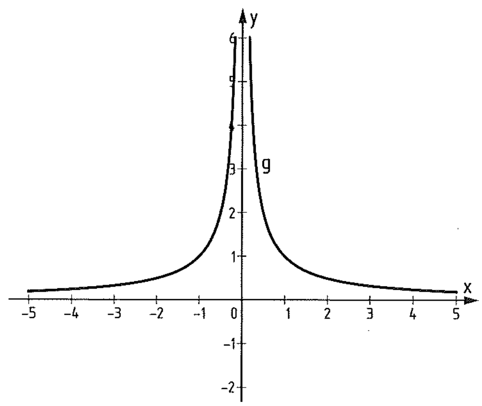

***c)*** Unstetigkeitsstellen: x = −2, x = 4




**2.45** Die Funktion f(x) = |x| ist an der Stelle $x_0 = 0$ stetig, da der Funktionswert mit dem links- und dem rechtsseitigen Grenzwert übereinstimmend null ist.

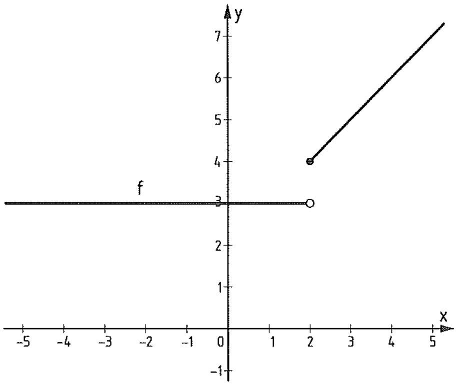
**2.46**



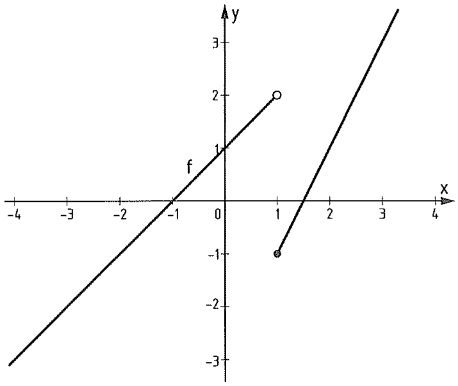

Beide Funktionen nähern sich bei x ⟶ +∞ und bei x ⟶ −∞ dem Wert null.
Die Funktion f hat an der Stelle x = 0 den linksseitigen Grenzwert −∞ und den rechtsseitigen Grenzwert +∞.
Die Funktion g hat an der Stelle x = 0 den links- und rechtsseitigen Grenzwert +∞.

**2.47** **a)**



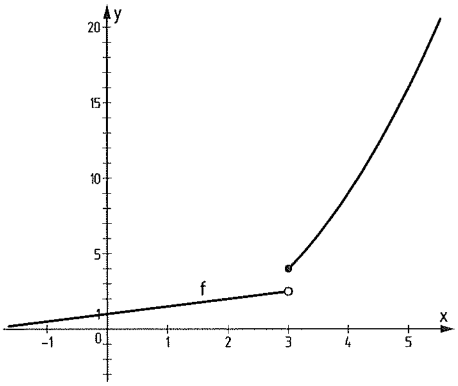
Die Grenzwerte $g_L = 3$ und $g_R = 4$ stimmen nicht überein. Die Funktion hat an der Stelle $x_0 = 2$ eine Sprungstelle.

**c)**



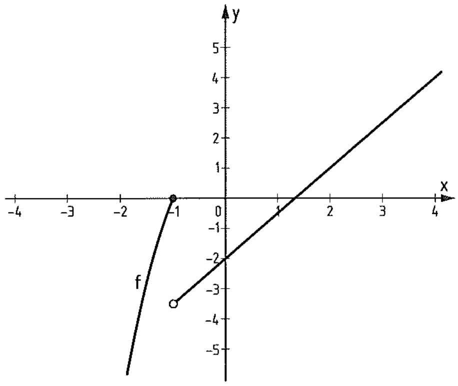
Die Grenzwerte $g_L = 2$ und $g_R = -1$ stimmen nicht überein. Die Funktion hat an der Stelle $x_0 = 1$ eine Sprungstelle.

**b)**



Die Grenzwerte $g_L = 2{,}5$ und $g_R = 4$ stimmen nicht überein. Die Funktion hat an der Stelle $x_0 = 3$ eine Sprungstelle.

**d)**



Die Grenzwerte $g_L = 0$ und $g_R = -3{,}5$ stimmen nicht überein. Die Funktion hat an der Stelle $x_0 = -1$ eine Sprungstelle.

**2.48** ***1)*** Strebt d gegen null, dann strebt R gegen unendlich. Bei $d = 0$ hat die Funktion eine Polstelle.
***2)*** Es sind nur positive Durchmesser sinnvoll. Der Funktionsgraph darf nur für $d > 0$ angegeben werden.

**2.49** **a), *b)*** und ***c)***
Die Funktion hat eine Oszillationsstelle bei $x = 0$. Das Argument der angegebenen Winkelfunktion nähert sich an der Definitionslücke $x_0 = 0$ dem Ausdruck „∞".

**2.50** ***1)*** Unstetigkeitsstelle bei $x = 0$; $g_L = 0$, $g_R = +\infty$
***2)*** Marko hat recht: Es handelt sich um eine Polstelle, da der rechtsseitige Grenzwert ein uneigentlicher Grenzwert ist.

**2.51** **a)** $D_f$: $\mathbb{R}\setminus\{-3; 3\}$
$x_1 = -3$: $g_L = +\infty$, $g_R = -\infty$, $a_1$: $x = -3$
$x_2 = 3$: $g_L = -\infty$, $g_R = +\infty$, $a_2$: $x = 3$
Beide Definitionslücken sind Polstellen.

***b)*** $D_f$: $\mathbb{R}\setminus\{2\}$
$x = 2$: $g_L = g_R = -\infty$, a: $x = 2$
Die Definitionslücke ist eine Polstelle.

*c)* $D_f$: $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right\}$
$t_1 = -\frac{5}{2}$: $g_L = -\infty$, $g_R = +\infty$, $a_1$: $t = -\frac{5}{2}$
$t_2 = \frac{5}{2}$: $g_L = +\infty$, $g_R = -\infty$, $a_2$: $t = \frac{5}{2}$
Beide Definitionslücken sind Polstellen.

*d)* $D_f$: $\mathbb{R}\setminus\{0; 2\}$
$x_1 = 0$: $g_L = +\infty$, $g_R = -\infty$, $a_1$: $x = 0$
$x_2 = 2$: $g_L = -\infty$, $g_R = +\infty$, $a_2$: $x = 2$
Beide Definitionslücken sind Polstellen.

**2.52** *a)* $\bar{f}(x) = 2x$; $\bar{\bar{f}}(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 8x}{x - 4} & \text{für } x \neq 4 \\ 8 & \text{für } x = 4 \end{cases}$

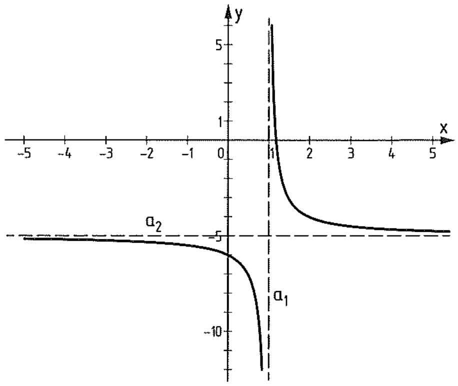
*b)* nicht hebbare Unstetigkeitsstelle bei $x = 1$

*c)* $\bar{f}(x) = (x - 1)^2$; $\bar{\bar{f}}(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3x + 2}{x + 2} & \text{für } x \neq -2 \\ 9 & \text{für } x = -2 \end{cases}$

*d)* $\bar{f}(x) = (x + 3)^2$; $\bar{\bar{f}}(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 18x^2 + 81}{x^2 - 6x + 9} & \text{für } x \neq 3 \\ 36 & \text{für } x = 3 \end{cases}$

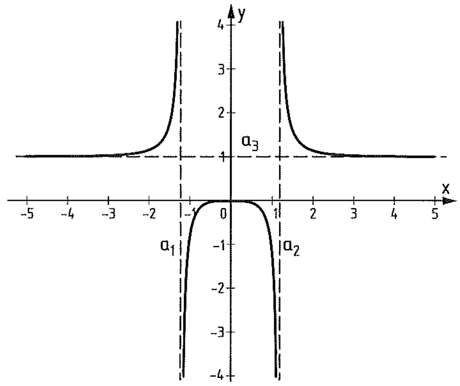
**2.53** Das Zählerpolynom und das Nennerpolynom haben eine gemeinsame einfache Nullstelle bei $x = 1$. Die Stelle $x = 1$ ist eine hebbare Unstetigkeitsstelle.
Durch Kürzen des Terms durch $(x - 1)$ erhält man die stetige Fortsetzung $\bar{y} = \frac{1}{x + 1}$ der Funktion.
Diese hat nur eine senkrechte Asymptote a: $x = -1$.

**2.54** *a)*



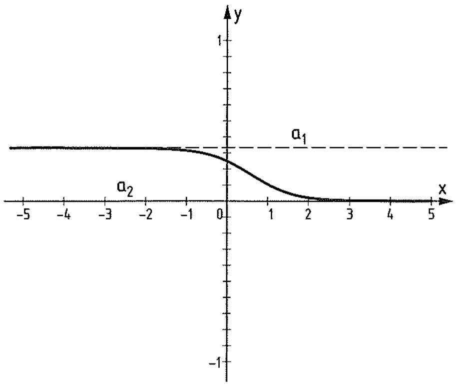

senkrechte Asymptote $a_1$: $x = 1$
waagrechte Asymptote $a_2$: $y = -5$

*c)*



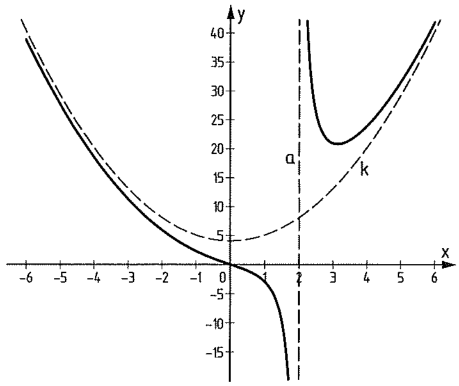

senkrechte Asymptoten $a_1$: $x = -\sqrt[4]{2}$, $a_2$: $x = \sqrt[4]{2}$
waagrechte Asymptote $a_3$: $y = 1$

*b)*




waagrechte Asymptoten $a_1$: $y = \frac{1}{3}$, $a_2$: $y = 0$

*d)*




senkrechte Asymptote a: $x = 2$
Grenzkurve k: $y = x^2 + 4$

**2.55** *a)* $f = 10$: $g_L = +\infty$, $g_R = -\infty$
*b)* $v = -330$: $g_L = -\infty$, $g_R = +\infty$
*c)* $W = -120$: $g_L = +\infty$, $g_R = -\infty$
*d)* $\beta_1 = -1$: $g_L = -\infty$, $g_R = +\infty$
$\beta_2 = 1$: $g_L = +\infty$, $g_R = -\infty$

**2.56** **a)** Die Funktion ist an der Stelle $x_0 = 2$ nicht stetig, da der linksseitige Grenzwert $g_L = 2{,}5$ und der rechtsseitige Grenzwert $g_R = 1$ nicht übereinstimmen.

**b)** Die Funktion ist an der Stelle $x_0 = 2$ nicht stetig, da der Grenzwert $g = 2$ und der Funktionswert $f(2) = 0$ nicht übereinstimmen.

**2.57** **1)**
$$u(t) = \begin{cases} 3 & \text{für } t < 2 \\ 1{,}5t - 3 & \text{für } 2 \leq t \leq 4 \\ 3 & \text{für } 4 \leq t < 6 \\ 1{,}5t - 9 & \text{für } 6 \leq t \leq 8 \\ 3 & \text{für } t \geq 8 \end{cases}$$

**2)** $t = 2$ s: $g_L = 2$, $g_R = 0$

$t = 4$ s: $g_L = g_R = 4$

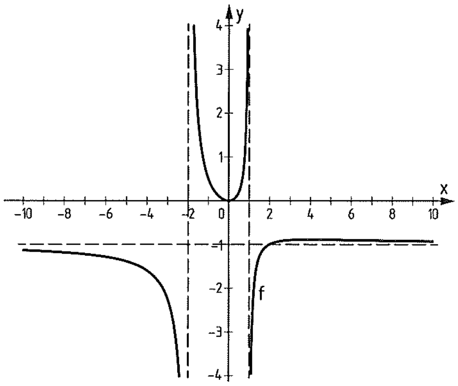
**3)** Sprungstelle bei $t = 2$ s und $t = 6$ s

**2.58** **a)** $f(x) = -\frac{x^2}{x^2 + x - 2}$

senkrechte Asymptote $x = -2$: $g_L = -\infty$, $g_R = +\infty$

senkrechte Asymptote $x = 1$: $g_L = +\infty$, $g_R = -\infty$

waagrechte Asymptote $y = -1$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$

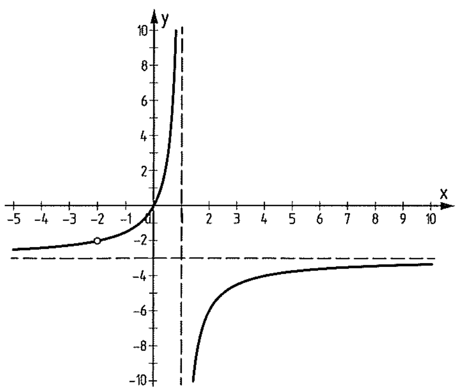



**b)** $f(x) = -\frac{3x^2 + 6x}{x^2 + x - 2}$

senkrechte Asymptote $x = 1$: $g_L = +\infty$, $g_R = -\infty$

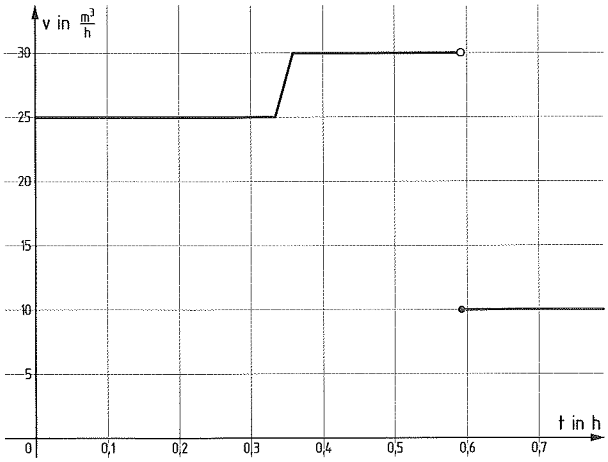
waagrechte Asymptote $y = -3$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -3$

Definitionslücke bei $x = -2$: $-\frac{3x^2 + 6x}{x^2 + x - 2} = -\frac{3x \cdot (x + 2)}{(x - 1) \cdot (x + 2)} \Rightarrow$ Zähler- und Nennerpolynom haben bei $x = -2$ eine einfache Nullstelle $\Rightarrow$ hebbare Definitionslücke bei $x = -2$.




**2.59** B ist falsch.

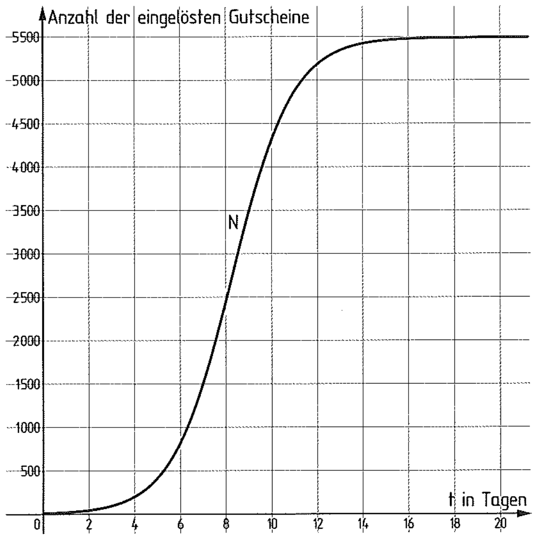
**2.60** **1)**




**2)** $t_0 = 0{,}591...$ h (35,5 min)

**3)** Die Füllgeschwindigkeit ist nicht über längere Zeiträume exakt konstant. Die tatsächliche Änderung der Füllgeschwindigkeit erfolgt nicht linear. Auch während abrupter Änderungen verstreicht Zeit.

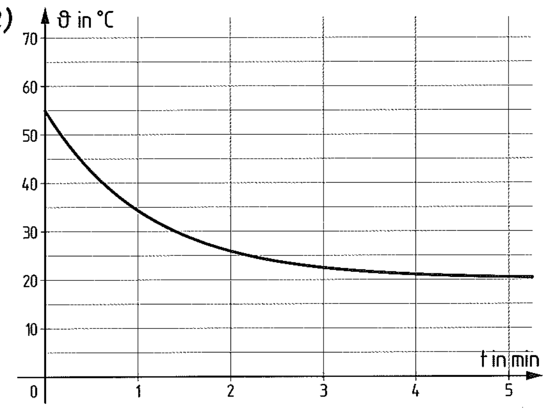
**2.61** **1)**




**2)** Die Funktion nähert sich asymptotisch dem Wert 5 500. Es wird von 5 500 als Höchstanzahl an eingelösten Gutscheinen ausgegangen.

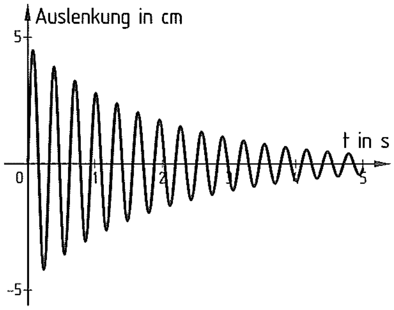
**2.62** **1)** $\vartheta(t) = 20 + 35 \cdot e^{-0{,}9 \cdot t}$

**2)**




**3)** Die Funktion nähert sich asymptotisch dem Wert 20.
Das Werkstück nimmt nach sehr langer Zeit die Umgebungstemperatur $\vartheta_U = 20$ °C an.

**2.63** ***1)***




***2)*** Bei der Berechnung des Grenzwerts der Funktion $y(t) = 5 \cdot e^{-0,5t} \cdot \sin(20t)$ für $t \to \infty$ geht der Faktor $e^{-0,5t}$ gegen null und daher geht y ebenfalls gegen null. Die Amplitude der Schwingung ist null, wenn genügend viel Zeit vergeht.

**2.64** no (jump discontinuity)

**2.65** $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -4{,}5$

**2.66** $a_1$: $x = -8$, $a_2$: $y = -1$

**2.67** The function is discontinuous at $x_0 = \frac{3}{2}$. The left-sided limit as well as the right-sided limit is improper. Therefore it is an essential discontinuity. The graph is split into two parts at the vertical asymptote.

**3.1** Koeffizientenmatrix: $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, erweiterte Matrix: $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 11 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

**3.2** ***a)*** $(2 \times 3)$-Matrix; $m_{23} = 2$, $m_{11} = -1$, $m_{13} = 7$, $m_{21} = 4$
***b)*** $(3 \times 3)$-Matrix, quadratische Matrix; $k_{32} = 0$, $k_{23} = 8$, $k_{12} = 12$, $k_{31} = 0$
***c)*** $(1 \times 4)$-Matrix, einzeilige Matrix; $f_{14} = -2$, $f_{12} = 1$, $f_{13} = 0$, $f_{11} = 3$
***d)*** $(3 \times 4)$-Matrix; $a_{33} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{24} = 0$, $a_{21} = 1$

**3.3** $1 \rightarrow D$, $2 \rightarrow A$

**3.4** ***a)*** $\begin{pmatrix} -9 & 0 & 6 & 21 \\ -13 & -6 & -6 & 35 \\ -5 & 24 & 62 & -7 \end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} 17 & 10 & -4 \\ 10 & 12 & 17 \end{pmatrix}$

**3.5** ***1), 3), 4)*** und ***5)*** Die Spaltenanzahl der linken Matrix entspricht der Zeilenanzahl der rechten Matrix. Die Multiplikation ist daher durchführbar.
***1)*** $F \cdot G = \begin{pmatrix} 32 & -24 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$ ***3)*** $G \cdot H = \begin{pmatrix} 22 & -35 & -1 \\ 52 & 10 & 78 \\ 18 & -15 & 11 \end{pmatrix}$ ***4)*** $H \cdot G = \begin{pmatrix} 41 & -53 \\ 66 & 2 \end{pmatrix}$ ***5)*** $G \cdot F = \begin{pmatrix} 27 & -16 & 1 \\ 2 & 24 & -10 \\ 13 & -4 & -1 \end{pmatrix}$
***2)*** Die Matrix F hat drei Spalten, die Matrix H zwei Zeilen. Die beiden Anzahlen stimmen nicht überein. Die Multiplikation ist nicht durchführbar.
***6)*** Die Matrix H hat drei Spalten, die Matrix F zwei Zeilen. Die beiden Anzahlen stimmen nicht überein. Die Multiplikation ist nicht durchführbar.

**3.6** B, weil $M \cdot B = E$.

**3.7** Wenn $A^{-1}$ die inverse Matrix zu A ist, dann muss $A \cdot A^{-1} = E$ gelten.

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ab \\ cd - cd & -bc + ad \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

**3.10** ***a)*** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$

***b)*** $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

***c)*** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

**3.11** ***a)*** I: $5x - 4y = 3$
II: $2x + y = 5$

***2)*** I: $b = 2$
II: $2a - 4c = 6$
III: $a + 5c = 0$

***3)*** I: $v + 4w = 0$
II: $7u - v + 5w = 0$
III: $u + 2w = 0$

**3.12** ***a)*** $L = \{(3, -2)\}$ ***b)*** $L = \{(-5, 2)\}$ ***c)*** $L = \{(-12, -18)\}$

**3.13** ***a)*** $x = 2$, $y = 0{,}5$, $z = -1$
***b)*** Nicht eindeutig lösbar, da die Determinante der Gleichungsmatrix null ist.
***c)*** $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{11}{6}$, $c = \frac{2}{5}$, $d = \frac{8}{5}$

**3.14** Die Gleichungssysteme unterscheiden sich nur durch die Konstanten.
Die Koeffizientenmatrix ist bei ***1)***, ***2)*** und ***3)*** gleich. Die inverse Matrix muss daher nur einmal berechnet werden.

***1)*** $a = -\frac{3}{7}$, $b = -\frac{38}{7}$, $c = -\frac{15}{7}$ ***2)*** $a = \frac{5}{21}$, $b = \frac{25}{7}$, $c = \frac{4}{21}$ ***3)*** $a = -\frac{1}{7}$, $b = \frac{20}{7}$, $c = \frac{2}{7}$

**3.15** $\begin{pmatrix} 1\,000^3 & 1\,000^2 & 1\,000 & 1 \\ 2\,000^2 & 2\,000^2 & 2\,000 & 1 \\ 5\,000^3 & 5\,000^2 & 5\,000 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\,200 \\ 19\,500 \\ 42\,700 \\ 3\,500 \end{pmatrix}$

**3.16** ***1)*** 
$$\begin{array}{lrcl} \text{I:} & x + y + z & = & 284\,000 \\ \text{II:} & x - y & = & 36\,000 \\ \text{III:} & 2y - z & = & 8\,000 \end{array}$$

***2)*** A: 100 000,00 €, B: 64 000,00 €, C: 120 000,00 €

**3.17** ***A)*** Falsch. Es wird jeweils ein Zeilenvektor der linken Matrix mit einem Spaltenvektor der rechten Matrix skalar multipliziert. Die Durchführbarkeit der Multiplikation ist von der Anzahl der Spalten der linken Matrix und von der Anzahl der Zeilen der rechten Matrix abhängig.
***B)*** Wahr. Die beiden Zeilenvektoren der (2x3)-Matrix werden mit den vier Spaltenvektoren der (3x4)-Matrix multipliziert. Das Ergebnis ist daher eine Matrix mit zwei Zeilen und vier Spalten.
***C)*** Falsch. Sind die Zeilen der Koeffizientenmatrix linear abhängig, so sind auch die Gleichungen, aus deren Koeffizienten die Matrix gebildet wurde, linear abhängig. Ein Gleichungssystem ist nur eindeutig lösbar, wenn die Gleichungen linear unabhängig sind.

**3.18** ***a)*** $L = \{(12, -26)\}$ ***b)*** $L = \{(2, -10, 5)\}$

**3.19** ***a)*** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $x = 10$, $y = 4$, $z = -5$

***b)*** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, nicht eindeutig lösbar

***c)*** $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $a = 0{,}\overline{54}$, $b = 1{,}397\ldots$, $c = 1{,}5$, $d = 1{,}\overline{45}$

**3.20** ***a)*** $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{24} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ ***b)*** –

**3.21** $L = \{(2, 4, -3)\}$

**3.22** $A \cdot I = \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & -2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = A$

$I \cdot A = \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = A$

# 4 Differentialrechnung

**4.1** ***1)*** FM: 340 m, MP: 475 m, PT: 804 m
***2)*** $k_{FM} = 0{,}047\dot{2}$, $k_{MP} = 0{,}098...$, $k_{PT} = 0{,}095...$
***3)*** 98,650... %

**4.3**

| | a) | b) | c) | d) |
|---|---|---|---|---|
| absolute Änderung | −15,75 | −1 | 1,898... | −0,029... |
| relative Änderung | −0,797... | 1 | 0,632... | −0,181... |
| Differenzenquotient | −5,25 | −0,477... | 0,189... | −0,059... |

**4.4** ***1)*** 2005 bis 2010: −20 100, 2010 bis 2015: 48 400
Von 2005 bis 2010 hat die Zahl der Arbeitslosen um rund 20 000 abgenommen. Von 2010 bis 2015 hat die Zahl der Arbeitslosen um fast 50 000 zugenommen.
***2)*** 2005 bis 2006: −0,052..., 2009 bis 2010: −0,087...
Die relative Änderung der Arbeitslosenzahlen war von 2009 bis 2010 größer als von 2005 bis 2006 und die Zahlenwerte waren in beiden Zeiträumen negativ.
***3)*** Die Berechnung der relativen Änderung der Arbeitslosenzahlen ergibt für 2013 auf 2014 den Wert 0,058... und für 2014 auf 2015 den Wert 0,028... . Der zweite Zahlenwert ist kleiner und die Aussage daher wahr.

**4.5** ***A)*** $\frac{64\,263\text{ kt} - 72\,960\text{ kt}}{4\text{ Jahre}} = -2\,174{,}25\,\frac{\text{kt}}{\text{Jahr}}$ Die Aussage ist falsch. Die $CO_2$-Emissionen sind von 2010 bis 2014 im Mittel jährlich um 2 174,25 kt gesunken.

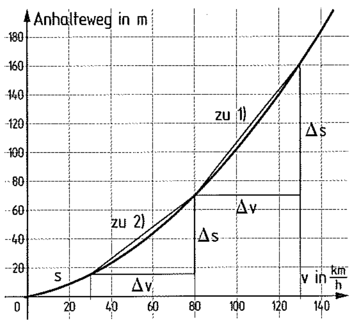
***B)*** $\frac{72\,960\text{ kt} - 62\,060\text{ kt}}{62\,060\text{ kt}} \cdot 100\,\% = 17{,}563...\,\%$ Die Aussage ist falsch. Die $CO_2$-Emissionen haben von 1990 bis 2010 um rund 18 % zugenommen.

***C)*** $65\,980 - 63\,920 = 2\,060 > 67\,780 - 67\,850 = -70$ Die Aussage ist wahr.

***D)*** $\frac{|64\,263\text{ kt} - 79\,600\text{ kt}|}{79\,600\text{ kt}} \cdot 100\,\% = 19{,}267...\,\%$ Die Aussage ist falsch. Der Betrag der absoluten Abnahme der $CO_2$-Emissionen von 2005 bis 2014 entspricht ca. 20 % der $CO_2$-Emissionen im Jahr 2005.

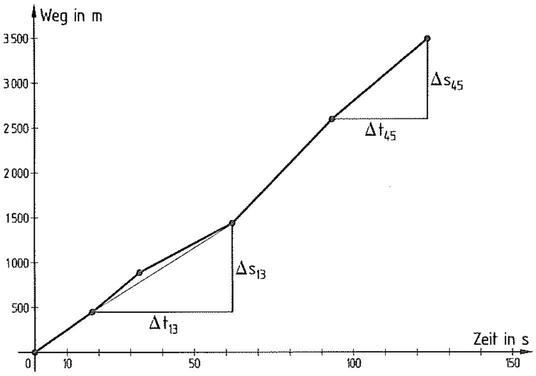
**4.6** ***1)*** 91,791... m
***2)*** $1{,}093...\ \frac{\text{m}}{\frac{\text{km}}{\text{h}}}$

***1)*** und ***2)***




***3) a)*** $s(t_R) = \frac{100}{3{,}6} \cdot t_R + \frac{100^2}{134{,}784}$
***b)*** 23,732... %
Der Anhalteweg ist bei einer Reaktionszeit von 1,5 s um ca. ein Viertel länger als bei einer Reaktionszeit von 0,7 s.

**4.7** ***1)*** und ***3)***

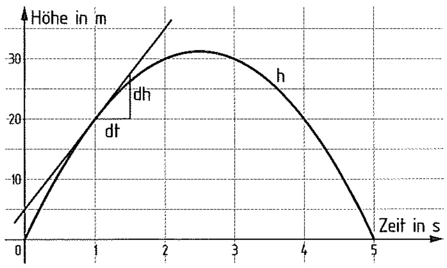



***2)*** $81{,}036... \frac{km}{h}$ bzw. $107{,}101... \frac{km}{h}$

***4)*** Eine Momentangeschwindigkeit wird an einer bestimmten Stelle gemessen. Eine mittlere Geschwindigkeit ergibt sich aus einem Streckenteil.

**4.9** ***1)*** $10 \frac{m}{s}$

***2)***




$v = 15 \frac{m}{s}$

**4.10** 1 ⟶ B, 2 ⟶ B

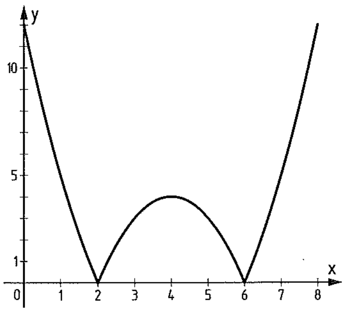
**4.11** **a)** $f'(x) = -3x^2$ ***b)*** $f'(x) = 4x$ ***c)*** $f'(x) = 2x + 1$

**4.12** **a)** $-30{,}963...°$ ***b)*** $-19{,}798...°$ ***c)*** $-56{,}309...°$

**4.13** ***1)*** $v(t) = 3{,}6 \cdot t$ ***2)*** $18 \frac{m}{s}$ ***3)*** 3,858... s, 26,791... m

**4.14** **1)** $39{,}692...°$ **2)** $-45{,}285...°$

**4.15**



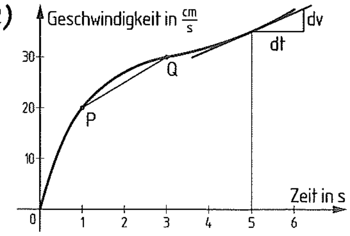

Die 1. Ableitung an einer Stelle $x_0$ ist die Steigung der Tangente an die Kurve an der Stelle $x_0$. An den Stellen $x_1 = 2$ und $x_2 = 6$ hat die Kurve jeweils zwei Tangenten, die Ableitung wäre daher nicht eindeutig.

**4.17** 1 ⟶ B, 2 ⟶ D

**4.18** B

**4.19** ***1)*** $5\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$ Die Steigung gibt die mittlere Beschleunigung in Zeitintervall [1 s; 3 s] an.

***2)***




***3)*** Die Steigung der Sekante ist die mittlere Beschleunigung. Die mittlere Beschleunigung ist daher im Intervall [0 s; 3 s] größer als im Intervall [3 s; 5 s].

**4.20** Marlies Aussage ist richtig, da die dargestellte Gerade eine Tangente an die Kurve an der Stelle $t_1$ ist. Die Steigung der Gerade und die Steigung der Kurve sind gleich groß.
Jakobs Aussage ist richtig, da die dargestellte Gerade eine Sekante der Kurve ist. Die Gerade schneidet die Kurve an den Stellen $t_1$ und $t_2$. Ihre Steigung gibt daher die mittlere Geschwindigkeit im Intervall $[t_1; t_2]$ an.

**4.21** **1)** $-0{,}4\,\frac{\text{mC}}{\text{s}}$ im Intervall [5 s; 15 s] und $-0{,}18\,\frac{\text{mC}}{\text{s}}$ im Intervall [15 s; 20 s] ***2)*** −0,68 mA

**4.22** ***1)*** $\overline{v}_1 = 13{,}\dot{3}\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $\overline{v}_2 = 0\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $\overline{v}_3 = 40\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

***2)*** $10\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

***3)*** Unmittelbar vor dem Zeitpunkt t = 3 h beträgt die Momentangeschwindigkeit $13{,}\dot{3}\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, unmittelbar danach $0\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Zum Zeitpunkt t = 3 h ändert sie sich laut Abbildung „abrupt" von $13{,}\dot{3}\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ auf $0\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ein konkreter Zahlenwert kann daher nicht berechnet werden.

***4)*** Für die Zeitpunkte $t_0 = 0$ h, $t_1 = 3$ h und $t_2 = 7$ h. Bei $t_0$ erhöht sich die Geschwindigkeit von $0\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ auf $13{,}\dot{3}\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, bei $t_1$ verringert sich die Geschwindigkeit von $13{,}\dot{3}\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ auf $0\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, bei $t_2$ erhöht sich die Geschwindigkeit von $0\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ auf $40\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Laut Abbildung erfolgt die Änderung der Geschwindigkeit jeweils so, dass dafür keine Zeit benötigt wird. Das ist nicht realistisch.

**4.23** Herr Mann muss die restlichen 1 650 m im Tunnel mit einer Geschwindigkeit von ca. $75\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ (maximal $75{,}428...\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$) fahren.

**4.24** **1)** $0{,}0225\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

***2)*** zB [400 s; 500 s]

***3)*** Sie gibt die mittlere Verzögerung im Intervall [200 s; 500 s] an.

***4)*** $0\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

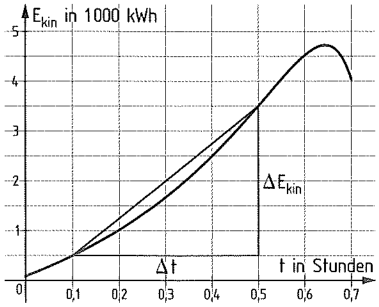
**4.25** ***a) 1)*** $6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ***b) 1)*** $-25\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ***c) 1)*** $-4{,}75\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ***d) 1)*** $17{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

***2)*** $0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ***2)*** $-15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ***3)*** $1{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ***4)*** $15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

**4.26** ***1)*** $\frac{2}{3}\,\frac{\text{GE}}{\text{ME}}$ ***2)*** $K'(x) = 0{,}1x$

***3)*** $0{,}7\,\frac{\text{GE}}{\text{ME}}$ Der geschätzte Wert weicht nur wenig vom berechneten Wert ab.

**4.27** **1)** 

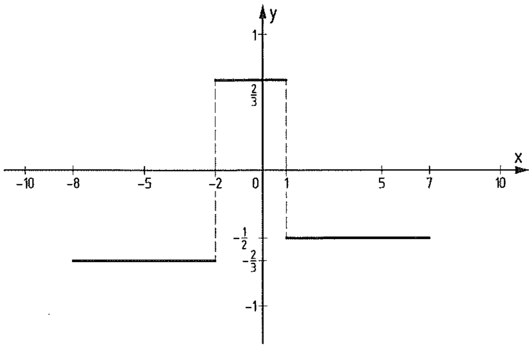



7 125 kW

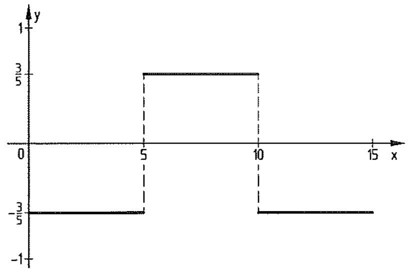
**2)** 4 615,384... kW

**3)** Der Wert aus **1)** bechreibt die mittlere Leistung im Intervall [0,1 h; 0,5 h]. Der Wert aus **2)** beschreibt die momentane Leistung zum Zeitpunkt t = 0,1 s.

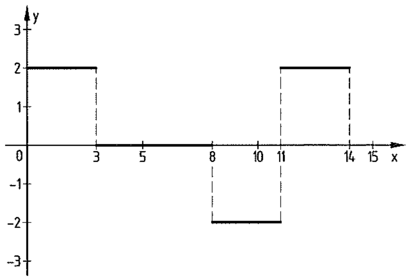
**4.28** **a)**



**b)**



**c)**



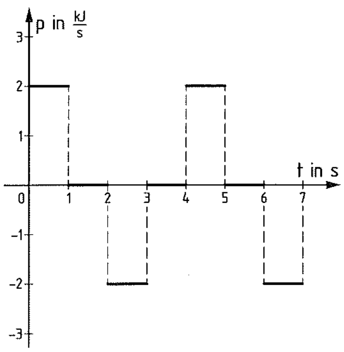
**4.29** **a)** $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -2 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{für } 1 < x \leqslant 6 \end{cases}$

**b)** $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } -7 \leqslant x < -6 \\ \frac{1}{2} & \text{für } -6 < x < 2 \\ 1 & \text{für } 2 < x \leqslant 3 \end{cases}$

Auf die grafische Darstellung wird verzichtet.

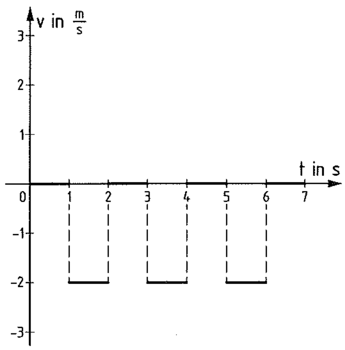
**4.30** $1 \longrightarrow B$, $2 \longrightarrow A$

**4.31** **a)**




Die Ableitung gibt die Leistung an.

**b)**




Die Ableitung gibt die Geschwindigkeit an.

**4.32** Es sind individuell verschiedene Lösungen möglich.

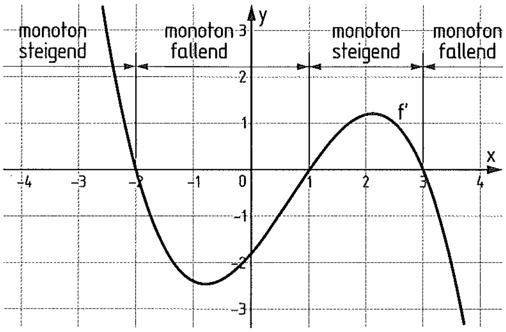
**4.33** ***1)*** → ***D)*** Die Funktion hat an der Stelle x = 1 einen Hochpunkt. Die Ableitung muss daher an der Stelle x = 1 eine Nullstelle haben.

***2)*** → ***C)*** Die Funktion hat an der Stelle x = 0 einen Tiefpunkt. Die Ableitung muss daher an der Stelle x = 0 eine Nullstelle haben. Die Funktion ist für Werte $x < 0$ streng monoton fallend. Die Ableitung muss daher für Werte $x < 0$ kleiner als null sein.

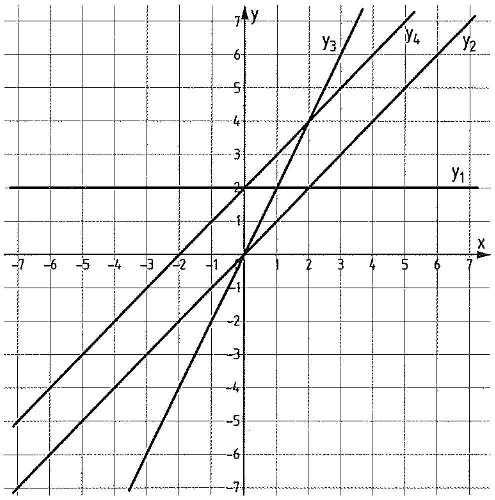
***3)*** → ***A)*** Die Funktion hat an der Stelle x = 0 einen Hochpunkt. Die Ableitung muss daher an der Stelle x = 0 eine Nullstelle haben. Die Funktion ist für Werte $x < 0$ streng monoton steigend. Die Ableitung muss daher für Werte $x < 0$ größer als null sein.

***4)*** → ***B)*** Die Funktion hat an der Stelle x = −1 einen Tiefpunkt. Die Ableitung muss daher an der Stelle x = −1 eine Nullstelle haben.

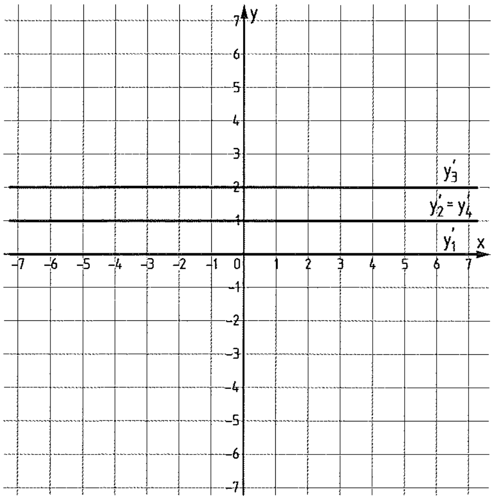
**4.34**




**4.35** ***1)***




***2)***




***3)*** $y_1' = 0$, $y_2' = 1$, $y_3' = 2$, $y_4' = 1$
Die Ableitung der konstanten Funktion ist null. Die Ableitung der linearen Funktion ist die Steigung der linearen Funktion. Die Ableitung eines konstanten Summanden ist null.

**4.43** ***a)*** $y' = 0$ ***b)*** $\dot{s} = 0$ ***c)*** $\frac{dv}{dy} = 0$

**4.44** ***a)*** $f'(x) = 4x^3$ ***b)*** $\frac{dx}{dz} = 3z^2$ ***c)*** $\dot{v} = 2t$

**4.45** ***a)*** $f'(x) = 69x^2$ ***b)*** $g'(x) = \frac{3}{5}x^2$ ***c)*** $y' = 0$

**4.46** ***a)*** $f'(x) = 12x^3$ ***b)*** $f'(x) = x + 1$ ***c)*** $f'(x) = 10x^4$

**4.47** ***a)*** $\frac{da}{dz} = 2z$, $\frac{da}{dx} = 0$ ***b)*** $\frac{dx}{dy} = 11y^{10}$, $\frac{dx}{dt} = 0$ ***c)*** $\frac{de}{dm} = c^2$, $\frac{de}{dc} = 2 \cdot c \cdot m$

**4.48** **a)** $y' = 1$ **b)** $y' = -\frac{7}{x^8}$ **c)** $y' = -\frac{5}{x^6}$ **d)** $y' = -\frac{2}{x^3}$ **e)** $y' = 4x^3$

**4.49** **a)** $y' = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$ **b)** $y' = \frac{2}{5 \cdot \sqrt[5]{x^3}}$ **c)** $y' = -\frac{3}{4 \cdot \sqrt[4]{x^7}}$ **d)** $y' = \frac{3 \cdot \sqrt{x}}{2}$ **e)** $y' = -\frac{1}{8 \cdot \sqrt[8]{x^9}}$

**4.50** $1 \to C$, $2 \to A$

**4.51** **a)** $y' = 12x^2 + 6x - 2$ **c)** $y' = 2x^3 + 0{,}5x$ **e)** $F'(s) = 6s^2 + 8s - 7$
**b)** $y' = 30x^4 + 21x^2 + 5$ **d)** $K'(x) = 0{,}03x^2 + 2$ **f)** $f'(y) = 4y^5 + y^3 - 5y$

**4.52** **a)** $s'(t) = 6t - 5 - \frac{1}{t^2}$, $s''(t) = 6 + \frac{2}{t^3}$
**b)** $v'(t) = \frac{t}{2} - 3 - \frac{2}{t^2}$, $v''(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{t^3}$
**c)** $f'(t) = -\frac{4}{t^3} + 3 + \frac{1}{2t^2}$, $f''(t) = \frac{12}{t^4} - \frac{1}{t^3}$

**4.53** **a)** $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$, $f''(x) = 6ax + 2b$
**b)** $f'(z) = \frac{3z^2}{a} + \frac{bz}{2} - c - \frac{d}{z^2}$, $f''(t) = \frac{6z}{a} + \frac{b}{2} + \frac{2d}{z^3}$
**c)** $f'(t) = -\frac{a}{t^2} - \frac{1}{bt^2} - \frac{2c}{t^3}$, $f''(t) = \frac{2a}{t^3} + \frac{2}{bt^3} + \frac{6c}{t^4}$

**4.54** **a)** $y' = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^3}} - \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x^4}}$, $y'' = \frac{3}{4 \cdot \sqrt{x^5}} + \frac{8}{9 \cdot \sqrt[3]{x^7}}$
**b)** $f'(x) = -\frac{1}{4 \cdot \sqrt{x^3}} - \frac{1}{6 \cdot \sqrt{x}}$, $f''(x) = \frac{3}{8 \cdot \sqrt{x^5}} + \frac{1}{12 \cdot \sqrt{x^3}}$
**c)** $f'(u) = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{u^3}} + \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{3u^2}}$, $f''(u) = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{\frac{3}{u^5}} - \frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{3u^5}}$

**4.55** **a)** $\frac{dr}{da}$ **b)** $\frac{ds}{db}$ **c)** $\frac{dt}{db}$ **d)** $\frac{du}{db}$

**4.56** **a)** $\frac{dh}{dr} = 8r + a + \frac{3r^2}{b}$, $\frac{dh}{da} = r$, $\frac{dh}{db} = -\frac{r^3}{b^2}$ **b)** $\frac{dS}{dg} = -\frac{f \cdot t}{g^2} + \frac{1}{f \cdot t}$, $\frac{dS}{dt} = \frac{f}{g} - \frac{g}{f \cdot t^2}$, $\frac{d^2s}{ds^2} = \frac{2g}{ft^3}$

**4.57** **a)** $\frac{dT}{da} = \frac{1}{b \cdot \sqrt{t}} - \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{a^2}}$, $\frac{dT}{dt} = -\frac{a}{2b \cdot \sqrt{t^3}}$, $\frac{d^2T}{dt^2} = \frac{3a}{4b \cdot \sqrt{t^5}}$
**b)** $\frac{dX}{da} = t^3 + \frac{s}{a^2 \cdot t} + \frac{t}{2s \cdot \sqrt{a}}$, $\frac{dX}{ds} = -\frac{1}{a \cdot t} - \frac{\sqrt{a} \cdot t}{s^2}$, $\frac{dX}{dt} = 3at^2 + \frac{s}{at^2} + \frac{\sqrt{a}}{s}$

**4.58** $1 \to A$, $2 \to C$

**4.59** **a)** Da die Funktion vom Grad 5 ist, gibt es fünf von null verschiedene Ableitungen.
$y' = 5x^4 - 6x$, $y'' = 20x^3 - 6$, $y''' = 60x^2$, $y^{(4)} = 120x$, $y^{(5)} = 120$
**b)** Da die Funktion vom Grad 6 ist, gibt es sechs von null verschiedene Ableitungen.
$f'(x) = 3x^2 - 6x^5$, $f''(x) = 6x - 30x^4$, $f'''(x) = 6 - 120x^3$, $f^{(4)} = -360x^2$, $f^{(5)} = -720x$, $f^{(6)} = -720$
**c)** Da die Funktion vom Grad 4 ist, gibt es vier von null verschiedene Ableitungen.
$f'(t) = 4t^3 + 12t^2 - 6$, $f''(t) = 12t^2 + 24t$, $f'''(t) = 24t + 24$, $f^{(4)}(t) = 24$

**4.60** **a)** Vermutung: $y^{(13)} = 0$

$y' = 9x^2$

$y'' = 18x$

$y''' = 18$

$\Rightarrow$ Ab der vierten Ableitung sind alle Ableitungen gleich null.

**b)** Vermutung: $y^{(13)} \neq 0$

$y' = -5x^{-2}$

$y'' = 10x^{-3}$

$y''' = -30x^{-4}$

$\Rightarrow y^{(13)}$ hat die Form $a \cdot x^{-14}$.

**c)** Vermutung: $y^{(13)} \neq 0$

$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$y'' = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$

$y''' = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$

$\Rightarrow y^{(13)}$ hat die Form $a \cdot x^{-\frac{b}{2}}$.

**d)** Vermutung: $y^{(13)} \neq 0$

$y' = -\frac{3}{2}x^{-3}$

$y'' = \frac{9}{2}x^{-4}$

$y''' = -18x^{-5}$

$\Rightarrow y^{(13)}$ hat die Form $a \cdot x^{-15}$.

**e)** Vermutung: $y^{(13)} \neq 0$

$y' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{3}{2}}$

$y'' = \frac{1}{2}x^{-\frac{5}{2}}$

$y''' = \frac{5}{4}x^{-\frac{7}{2}}$

$\Rightarrow y^{(13)}$ hat die Form $a \cdot x^{-\frac{b}{2}}$.

**4.61** **a)** $-8$ **b)** $\frac{1}{40}$ **c)** $4$

**4.62** **a)** $\frac{136}{9}$ **b)** 266,5

**4.63** **a)** 3,8g **b)** 0

**4.64** **A)** und **C)**
Der Graph der Funktion $y_1$ ist gegenüber dem Graf der Funktion $y_3$ in y-Richtung um drei Einheiten verschoben, sonst aber gleich. Die Steigung ist daher an jeder Stelle $x_0$ gleich.

**4.65** **a)** 26,565...° **b)** 75,963...° **c)** −45°

**4.66** **a)** $P\left(-\frac{7}{2}\middle|-\frac{61}{4}\right)$ **b)** keine waagrechte Tangente **c)** $P_1(-2|16)$, $P_2(2|-16)$

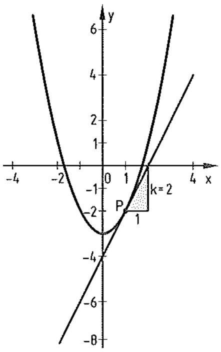
**4.67** **a)** $P\left(-\frac{b}{2a}\middle|-\frac{b^2}{4a}+c\right)$ **b)** $P\left(\frac{\ell}{2}\middle|\frac{\ell^2 q}{8}\right)$ **c)** $P\left(\frac{v_0}{g}\middle|\frac{v_0^2}{2g}\right)$

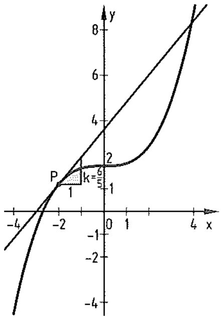
**4.68** **a)** $x = \frac{11}{4}$ **b)** $x = 14$ **c)** $x = 4$

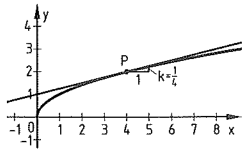
**4.69** **a)** $P(0,5|7,25)$ **b)** $P_1(-1|2,732...)$; $P_2(1|-0,732...)$ **c)** –

**4.70** **a)** $x_1 = -3$, $x_2 = -2$ **b)** $x = 0,669...$ **c)** $x_1 = -2$, $x_2 = 2$

**4.71** **a)** $t: y = 2x - 4$ **b)** $t: y = \frac{6}{5}x + \frac{18}{5}$ **c)** $t: y = \frac{1}{4}x + 1$



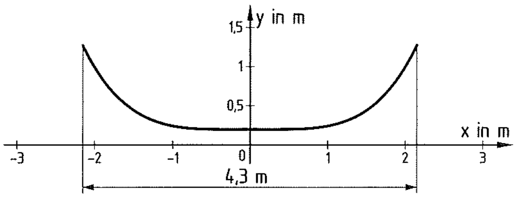




**4.72** Berechnen der Schnittstellen von $f_1$ und $f_2$ durch Gleichsetzen $\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2x^2}$ der Funktionsterme ergibt $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$. Berechnen der ersten Ableitungen von $f_1$ und $f_2$ ergibt $f_1'(x) = x$ und $f_2'(x) = -\frac{1}{x^3}$. Einsetzen der Schnittstellen in die ersten Ableitungen und berechnen der zugehörigen Winkel ergibt $f_1'(-1) = -1$ und $\alpha_1 = -45°$ bzw. $f_1'(1) = 1$ und $\alpha_2 = 45°$ für $f_1$ und $f_2'(-1) = 1$ und $\beta_1 = 45°$ bzw. $f_2'(1) = -1$ und $\beta_2 = -45°$ für $f_2$. Addieren der Beträge der Winkel ergibt die Schnittwinkel $|\alpha_1| + \beta_1 = 90°$ bzw. $\alpha_2 + |\beta_2| = 90°$. $f_1$ und $f_2$ schneiden einander im rechten Winkel.

**4.73** $1{,}811... \frac{m}{s}$

**4.74** **1)** $60{,}518... \frac{km}{h}$ **2)** $42{,}793... \frac{km}{h}$ **3)** $52{,}423...$ m

**4.75** **1)**




Die Halfpipe ist u-förmig, sie hat am linken und am rechten Rand ein starkes Gefälle. Zur Mitte hin wird sie immer flacher, bis sie schließlich in der Mitte waagrecht verläuft.

**2)** $1{,}400...$ m **3)** $-66{,}191...°$

**4.76** **1)** $x = 30$, $\varphi = 35°$ und $v_0 = 20\,\frac{m}{s}$ in die Funktionsgleichung einsetzen ergibt $y(30\text{ m}) = 4{,}559...\text{ m} > 3{,}05\text{ m} = H$. Der Football fliegt über die Torlatte.
**2)** $-21{,}617...°$

**4.82** **a)** $f'(t) = -3 \cdot \sin(t) - \frac{1}{t^2}$ **b)** $y' = 1 + \frac{1}{\cos^2(x)}$ **c)** $f'(x) = 2 \cdot \cos(x) + 5 \cdot \sin(x)$

**4.83** **a)** $y' = 4e^x$ **b)** $f'(x) = 2^x \cdot \ln(2) - 3$ **c)** $y'(t) = 3e^t$

**4.84** **a)** $f'(x) = \frac{5}{x}$ **b)** $y' = 1 + \frac{1}{x \cdot \ln(10)}$ **c)** $y'(t) = \frac{2}{t} - \ln(2)$

**4.85** **a)** $y' = 1 - \sinh(x)$ **b)** $f'(x) = e^x - \cosh(x)$ **c)** $y' = 1 + \frac{2}{\cosh^2(x)}$

**4.86** **a)** $\frac{dv}{da} = b \cdot a^{b-1}$, $\frac{dv}{db} = a^b \cdot \ln(a)$ **b)** $\frac{dz}{d\alpha} = \cos(\alpha)$, $\frac{dz}{dt} = 0$

**4.87** **a)** $\frac{df}{dt} = a + a^t \cdot \ln(a)$, $\frac{df}{da} = t + t \cdot a^{t-1}$ **b)** $\frac{dz}{da} = \frac{2}{a}$, $\frac{dz}{db} = \frac{3}{b}$

**4.88** **a)** $\frac{dY}{d\alpha} = \cos(\alpha) \cdot \sin(t) - \sin(\alpha) \cdot \cos(t)$ **b)** $\frac{dt}{ds} = \frac{y \cdot s^{y-1}}{3}$

$\frac{dY}{dt} = \sin(\alpha) \cdot \cos(t) - \cos(\alpha) \cdot \sin(t)$ $\frac{dt}{dy} = \frac{s^y \cdot \ln(s)}{3} - 5 \cdot y^4$

**4.89** **a)** $\frac{d^2X}{dt^2} = -\sin(t) \cdot \cos(\alpha)$, $\frac{d^2X}{d\alpha^2} = -\sin(t) \cdot \cos(\alpha)$

**b)** $\frac{d^2V}{da^2} = (b^2 - b) \cdot a^{b-2}$, $\frac{d^2V}{dc^2} = 6c$

**4.90** **A)** $x \cdot z^2$ wurde ohne Malpunkt eingegeben, sin(x) wurde ohne Klammern eingegeben. xz bzw. sinx werden als Formvariablen verarbeitet.

**B)** Der Malpunkt bei $z \cdot \sin(x)$ wurde nicht eingegeben. zsin(x) wird als abzuleitende Funktion verarbeitet.

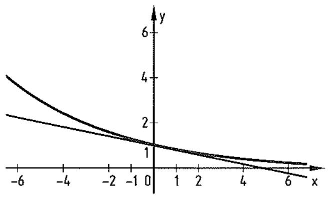
**C)** Die Klammern am Beginn und am Ende des Terms wurden nicht eingegeben. Es wird nur vom Term $3x \cdot z^2$ die Ableitung nach x berechnet.

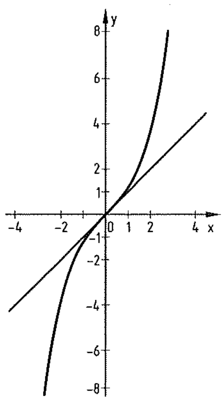
**4.91** **a)** 4 **b)** −0,717...

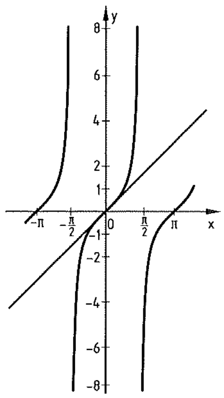
**4.92** **a)** 5,545... **b)** 0,434... **c)** $\frac{1}{e}$ **d)** $\frac{1}{e}$

**4.93** **a)** t: $y = 1{,}5x - 0{,}920...$ **b)** t: $y = -0{,}707... \cdot t + 1{,}262...$ **c)** t: $y = 0{,}043... \cdot x + 0{,}565...$

**4.94** **a)** $P(0|1)$; $\alpha = 77{,}420...°$ **b)** $P(0|0)$; $\alpha = 45°$ **c)** $P(0|0)$; $\alpha = 45°$




**4.95** **a)** $f'(x) = 3 \cdot \cos(x) + 5 \cdot \sin(x)$; $f'(0) = 3$; $\alpha = 71{,}565...°$

**b)** $y'(t) = -\frac{1}{\cos^2(t)}$; $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2$; $\alpha = -63{,}434...°$

**c)** $y' = 2 - \cos(x)$; $y'(0{,}5) = 1{,}122...$; $\alpha = 48{,}301...°$

**d)** $f'(t) = -\sin(t) - 1$; $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1{,}866...$; $\alpha = -61{,}813...°$

**4.96** **a)** $y' = -2e^x$; $y'(0) = -2$; $\alpha = -63{,}434...°$

**b)** $f'(x) = \frac{1}{x}$; $f'(1) = 1$; $\alpha = 45°$

**c)** $y' = 2 \cdot 0{,}5^x \cdot \ln(0{,}5)$; $y'(2) = -0{,}346...$; $\alpha = -19{,}114...°$

**4.97** **a)** t: $y = x$ **b)** t: $y = 0{,}5x + 1{,}5$ **c)** t: $y = -0{,}684...$

**4.98** **a)** $P(0|0{,}5)$ **b)** $P(0{,}531...|-0{,}157...)$ **c)** $P(-1{,}506...|1{,}191...)$

**4.99** **a)** $P_{k_1}(x_{k_1}|0{,}732...)$ mit $x_{k_1} = 1{,}047... + 2k_1\pi$, $k_1 \in \mathbb{Z}$
$P_{k_2}(x_{k_2}|2{,}732...)$ mit $x_{k_2} = 5{,}235... + 2k_2\pi$, $k_2 \in \mathbb{Z}$

**b)** –

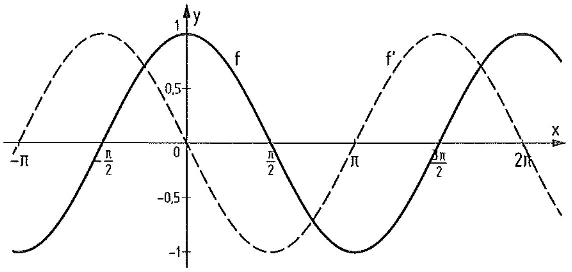
**c)** $P_{k_1}(x_{k_1}|1{,}632...)$ mit $x_{k_1} = 0{,}901... + 2k_1\pi$, $k_1 \in \mathbb{Z}$
$P_{k_2}(x_{k_2}|0{,}642...)$ mit $x_{k_2} = 5{,}663... + 2k_2\pi$, $k_2 \in \mathbb{Z}$

**4.100** **a)** ..., $P_1\left(\frac{\pi}{2}\middle|2{,}5\right)$, $P_2\left(\frac{3\pi}{2}\middle|-0{,}5\right)$, $P_3\left(\frac{5\pi}{2}\middle|2{,}5\right)$, $P_4\left(\frac{7\pi}{2}\middle|-0{,}5\right)$, ...

**b)** ..., $P_1(0|1)$, $P_2(\pi|5)$, $P_3(2\pi|1)$, $P_4(3\pi|5)$, ...

**c)** ..., $P_1\left(\frac{\pi}{4}\middle|\sqrt{2}\right)$, $P_2\left(\frac{5\pi}{4}\middle|-\sqrt{2}\right)$, $P_3\left(\frac{9\pi}{4}\middle|\sqrt{2}\right)$, $P_4\left(\frac{13\pi}{4}\middle|-\sqrt{2}\right)$, ...

**4.101**




Grafisches Differenzieren in einzelnen Punkten der Sinuskurve ergibt die Punkte und Tangenten der Cosinuskurve.

**4.102** **1)** $y_1' = 2x$, $y_2' = 3x^2$, $y_3' = 5x^4$ **2)** $y_1' \cdot y_2' = 2x \cdot 3x^2 = 6x^3 \neq 5x^4 = y_3'$

**4.104** **1)** y hat die Form $a \cdot f(x)$ mit $a = 2$ und $f(x) = \sin(x)$.
Zur Ableitung wird die Faktorregel verwendet. Die Produktregel ist nicht notwendig.
**2)** y hat die Form $f(x) \cdot a$ mit $f(x) = x$ und $a = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
Zur Ableitung wird die Faktorregel verwendet. Die Produktregel ist nicht notwendig.
**3)** y hat die Form $u(x) \cdot v(x)$ mit $u(x) = x$ und $v(x) = \cos(x)$.
Zur Ableitung wird die Produktregel benötigt.
**4)** y hat die Form $f(x) \cdot a$ mit $f(x) = x$ und $a = e^2$.
Zur Ableitung wird die Faktorregel verwendet. Die Produktregel ist nicht notwendig.

**4.105** **1)** f(b) hat die Form $u(b) \cdot v(b)$ mit $u(b) = b$ und $v(b) = \frac{b}{4}$.
Zur Ableitung wird die Produktregel benötigt. Der Term kann auch zusammengefasst werden zu $f(b) = \frac{b^2}{4}$. f(b) hat in diesem Fall die Form $c \cdot g(b)$ mit $c = \frac{1}{4}$ und $g(b) = b^2$. Zur Abteilung wird die Faktorregel verwendet. Die Produktregel ist nicht notwendig.
**2)** f(a) hat die Form $c \cdot g(a)$ mit $c = \ln(2) \cdot 3$ und $g(a) = a^3$.
Zur Ableitung wird die Faktorregel verwendet. Die Produktregel ist nicht notwendig.
**3)** f(t) hat die Form $u(t) \cdot v(t)$ mit $u(t) = t^2$ und $v(t) = \sin(t)$.
Zur Ableitung wird die Produktregel benötigt.
**4)** f(x) hat die Form $u(x) \cdot v(x)$ mit $u(x) = e^x$ und $v(x) = \sin(x)$.
Zur Ableitung wird die Produktregel benötigt.

**4.106** **a)** $y' = 50x^4 - 90x^2$ **b)** $y' = 20x^4 + 12x^2 - 12x$ **c)** $y' = 135x^2 + 36x - 15$

**4.107** **a)** $y' = 2 \cdot \cos(x) - 2x \cdot \sin(x)$ **c)** $y' = 3x^4 \cdot \cos(x) + 12x^3 \cdot \sin(x)$
**b)** $y' = 4x^3 \cdot \cos(x) + 12x^2 \cdot \sin(x)$ **d)** $y' = 2x \cdot \cos(x) - x^2 \cdot \sin(x)$

**4.108** **a)** $y' = -2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$ **c)** $y' = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
**b)** $y' = \frac{2 \cdot \sin(x)}{\cos^3(x)}$ **d)** $y' = 2 \cdot \cos(x)$

**4.109** **a)** $f'(t) = 7t \cdot e^t + 7e^t$ **c)** $f'(t) = t^2 \cdot e^t + 2t \cdot e^t$
**b)** $f'(t) = t^4 \cdot e^t + 4t^3 \cdot e^t$ **d)** $f'(t) = 2 \cdot \ln(2) \cdot t^3 \cdot e^t + 6 \cdot \ln(2) \cdot t^2 \cdot e^t$

**4.110** **a)** $f'(x) = 3x^2 \cdot \ln(x) + x^2$ **c)** $f'(x) = \ln(x) \cdot \cos(x) + \frac{\sin(x)}{x}$
**b)** $f'(x) = \lg(x) + \frac{1}{\ln(10)}$ **d)** $f'(t) = 3e^t \cdot \ln(t) + \frac{3e^t}{t}$

**4.111 a)** Richtig. Anwenden der Produktregel auf $y = \sqrt{x} \cdot (2x^2 - 2)$
ergibt $y' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot (2x^2 - 2) + \sqrt{x} \cdot 4x$.

**b)** Richtig. Auflösen der Klammern ergibt $y = 2x^2 \cdot \sqrt{x} - 2 \cdot \sqrt{x}$.
Ableiten des ersten Summanden mit der Produktregel und des zweiten Summanden mit der Faktorregel ergibt $y' = 2 \cdot 2x \cdot \sqrt{x} + 2x^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} - 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} = 4x \cdot \sqrt{x} + \frac{x^2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

**4.112 a)** $f'(x) = -x \cdot e^x + 2e^x$ **b)** $f'(t) = \frac{R}{L} \cdot (1 - e^t - t \cdot e^t)$ **c)** $y' = \frac{32x^3 + 10x \cdot \sin(x) - 2 \cdot \cos(x)}{5 \cdot \sqrt[5]{x^4}}$

**4.113 a)** $y' = \ln(5) \cdot x^2 \cdot 5^x + 2x \cdot 5^x + 3 \cdot \ln(5) \cdot 5^x$ **c)** $y' = \ln(2) \cdot e^x \cdot 2^x + e^x \cdot 2^x - \ln(2) \cdot 2x + e^x$
**b)** $y' = 5x \cdot 2^x \cdot \ln(2) + 5 \cdot 2^x$

**4.114 a)** $f'(x) = -x^2 \cdot \sin^2(x) + x^2 \cdot \cos^2(x) + 2x \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$ **c)** $f'(t) = 2^t \cdot t \cdot \ln(t) \cdot \ln(2) + 2^t \cdot \ln(t) + 2^t$
**b)** $y' = \sqrt{x^5} \cdot e^x + \frac{5}{2} \cdot \sqrt{x^3} \cdot e^x + 3 \cdot \sqrt{x} \cdot e^x + \frac{3e^x}{2 \cdot \sqrt{x}}$

**4.115 a)** $f'(x) = 2x^3 \cdot e^x + 10x^2 \cdot e^x + 8x \cdot e^x$ **c)** $f'(t) = t \cdot e^t \cdot \ln(t) - t \cdot e^t + e^t \cdot \ln(t) + \ln(t)$
**b)** $y' = 10x^4 \cdot \cos(x) - 6x^2 \cdot \cos(x) - 2x^5 \cdot \sin(x) + 2x^3 \cdot \sin(x)$

**4.118 1)** Wegen $y = 2 \cdot x^{-1}$ hat y die Form $a \cdot f(x)$ mit $a = 2$ und $f(x) = x^{-1}$.
Zur Ableitung wird die Faktorregel verwendet.
Die Anwendung der Quotientenregel ist nicht notwendig, aber möglich ($u(x) = 2$, $v(x) = x$).
**2)** y hat die Form $\frac{u(x)}{v(x)}$ mit $u(x) = x + 1$ und $v(x) = x - 1$.
Zur Ableitung muss die Quotientenregel verwendet werden.
**3)** Lässt man den Bruchterm unverändert, so hat y die Form $\frac{u(x)}{v(x)}$ mit $u(x) = x^2 + 4$ und $v(x) = x$.
Zur Ableitung muss die Quotientenregel verwendet werden.
Formt man den Bruchterm um auf $y = x + \frac{4}{x}$, so wird zur Ableitung die Summen- und die Faktorregel verwendet, und die Quotientenregel ist nicht notwendig.
**4)** Wegen $y = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{2}$ hat y die Form $a \cdot f(x) + c$ mit $a = \frac{1}{2}$, $f(x) = x$ und $c = \frac{3}{2}$.
Zur Ableitung wird die Summenregel und die Faktorregel verwendet. Die Anwendung der Quotientenregel ist nicht notwendig, aber möglich ($u(x) = x + 3$, $v(x) = 2$).
**5)** y hat die Form $\frac{u(x)}{v(x)}$ mit $u(x) = 2$ und $v(x) = x + 2$.
Zur Ableitung muss die Quotientenregel verwendet werden.

**4.119 a)** $f'(x) = \frac{8x^3 + 6x^2}{4x^2 + 4x + 1}$ **b)** $f'(x) = \frac{2x^3 - 15x^2 + 1}{x^6 - 2x^3 + 1}$ **c)** $y' = \frac{-12x^2 - 8x + 3}{16x^4 + 8x^2 + 1}$

**4.120 a)** $f'(x) = \frac{-4x^3 - 14}{x^6 - 14x^3 + 49}$ **b)** $y' = \frac{-2x^4 + 10x^3 - 12x + 15}{x^6 - 6x^3 + 9}$ **c)** $f'(x) = \frac{x^4 - 21x^2 + 70x}{x^4 - 14x^2 + 49}$

**4.121 a)** $y' = \frac{-2x^5 + 10x^4}{e^x}$ **b)** $y' = -\frac{3e^x}{4e^{2x} - 4e^x + 1}$ **c)** $f'(x) = \frac{-x^2 + x^2 \cdot e^x - x \cdot e^x - e^x}{x^4 - 2x^2e^x + e^{2x}}$

**4.122 a)** $y' = \frac{1 - \ln(x)}{2x^2}$ **b)** $y' = \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)}$ **c)** $y' = \frac{6 \cdot \ln(x) - 7}{x^7}$

**4.123 a) 1)** $y' = \frac{x \cdot \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$
**2)** $y' = (x^{-1} \cdot \sin(x))' = -\frac{1}{x^2} \cdot \sin(x) + x^{-1} \cdot \cos(x) = -\frac{\sin(x)}{x^2} + \frac{\cos(x)}{x} = \frac{x \cdot \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$
**b) 1)** $f'(t) = \frac{-\sin(t) \cdot t^2 - 2t \cdot \cos(t)}{t^4} = -\frac{t \cdot \sin(t) + 2 \cdot \cos(t)}{t^3}$
**2)** $f'(t) = (t^{-2} \cdot \cos(t))' = -2t^{-3} \cdot \cos(t) + t^{-2} \cdot (-\sin(t)) = -\frac{2 \cdot \cos(t)}{t^3} - \frac{\sin(t)}{t^2} = -\frac{t \cdot \sin(t) + 2 \cdot \cos(t)}{t^3}$
**c) 1)** $f'(t) = \frac{e^t \cdot t - e^t \cdot 1}{t^2} = \frac{t \cdot e^t - e^t}{t^2}$
**2)** $f'(t) = e^t \cdot \frac{1}{t} + e^t \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) = \frac{e^t}{t} - \frac{e^t}{t^2} = \frac{t \cdot e^t - e^t}{t^2}$

**4.124 a)** Die Ableitung des Nenners ist nicht eins sondern null.
Die Ableitung müsste richtig lauten $y' = \frac{4 - x \cdot 0}{16} = \frac{1}{4}$.

**b)** Im Zähler der Ableitung muss anstelle der Summe eine Differenz stehen, da in der Formel zur Quotientenregel die beiden Produkte im Zähler voneinander subtrahiert werden. Der zweite Faktor des ersten Produkts im Zähler der Ableitung muss $t^3$ lauten und nicht $t^2$, da der Nenner der Funktion $t^3$ ist.

**4.125 a)** $y' = \frac{3x^2 \cdot \cos(x) + x^3 \cdot \sin(x)}{\cos^2(x)}$ **b)** $f'(x) = \frac{2 \cdot \cos(x) + 2x \cdot \sin(x)}{\cos^2(x)}$ **c)** $y'(t) = \frac{-\cos(t) - t \cdot \sin(t) + 1}{\cos^2(t)}$

**4.126 a)** $y' = -\frac{\sin^3(x) + \cos^3(x)}{\sin^2(x) \cdot \cos^2(x)}$ **b)** $f'(t) = \frac{t^4 \cdot \cos(t) - t^2 - 2t \cdot \sin(t) \cdot \cos(t)}{t^4 - 2t^2 \cdot \cos(t) + \cos^2(t)}$ **c)** $y' = \frac{\sin^3(x) + \cos^3(x)}{\sin^2(x) \cdot \cos^2(x)}$

**4.127 1)** 3 ist ein Faktor und $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$ ist eine Potenzfunktion.
Es sind die Faktorregel und die Ableitungsregel für Potenzfunktionen anzuwenden.

**2)** 4 ist ein Faktor und sin(x) ist eine Winkelfunktion.
Es sind die Faktorregel und die Ableitungsregel für Winkelfunktionen anzuwenden.

**3)** $t^2$ ist eine Potenzfunktion und $\frac{1}{\sin(x)}$ ist ein Faktor.
Es sind die Ableitungsregel für Potenzfunktionen und die Faktorregel anzuwenden.

**4)** 2 ist ein Faktor und $\frac{e^x}{\ln(x)}$ ist ein Quotient.
Es sind die Faktorregel, die Quotientenregel und die Ableitungsregeln für Exponential- und Logarithmusfunktionen anzuwenden.

**5)** $e^t \cdot \frac{1}{t^3} = \frac{e^t}{t^3}$ ist ein Quotient.
Es sind die Quotientenregel und die Ableitungsregeln für Exponential- und Potenzfunktionen anzuwenden.

**4.128 a)** $\frac{dz}{da} = \frac{b^2 - r}{a^2 + 2ab + b^2}$, $\frac{dz}{db} = \frac{a^2 - r}{a^2 + 2ab + b^2}$, $\frac{dz}{dr} = \frac{1}{a + b}$ **b)** $\frac{dx}{dr} = s + \frac{r^2 - 2rs - s^2}{r^2 + 2rs + s^2}$, $\frac{dx}{ds} = r + \frac{2r^2}{r^2 - 2rs + s^2}$

**4.135** $e^{2x}$ besteht aus der äußeren Funktion $e^z$ und der inneren Funktion 2x. Es ist daher die Kettenregel anzuwenden und die Ableitung lautet $2e^{2x}$ und nicht wie von Ines angenommen $e^{2x}$.

**4.136**

| | a) | b) | c) |
|---|---|---|---|
| äußere Funktion | sin(z) | $\sqrt{z}$ | ln(z) |
| innere Funktion | 4x | 2y – 1 | 3t – 1 |

**4.137**

| | a) | b) | c) |
|---|---|---|---|
| äußere Funktion | $\frac{1}{z}$ | cos(z) | $e^z$ |
| innere Funktion(en) | $x^2 + 5$ | y – 3 | $-\frac{1}{t}$ |

**4.138 a)** $f'(x) = 6x^2 + 36x + 54$ **b)** $f'(x) = 8x - 4$ **c)** $f'(x) = -96x^2 + 480x - 600$

**4.139 a)** $f'(x) = 4x^3 + 18x^2 + 34x + 24$ **c)** $f'(x) = 2\,268x^{27} - 2\,376x^{21} + 864x^{15} - 120x^9 + 4x^3$
**b)** $f'(x) = 750x^5 - 600x^3 + 120x$

**4.140 a)** $f'(x) = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{1 - x}}$ **b)** $y' = \frac{2 - 24x^7}{3 \cdot \sqrt[3]{(2x - 3x^8)^2}}$ **c)** $f'(x) = \frac{15 - 21x^6}{4 \cdot \sqrt[4]{5x - x^7}}$

**4.141 a)** $f'(x) = -3 \cdot \sin(3x)$ **b)** $y' = 10 \cdot \cos(2x)$ **c)** $f'(t) = -\frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right)$

**4.142 a)** $y' = 4x^3 \cdot \cos(x^4)$ **b)** $f'(x) = -35x^4 \cdot \sin(7x^5 - 1)$ **c)** $y' = \frac{\cos(\sqrt{x})}{2 \cdot \sqrt{x}}$

**4.143** ***a)*** $y' = -3 \cdot \sin(x) \cdot \cos^2(x)$ ***b)*** $f'(x) = 5 \cdot \sin^4(x) \cdot \cos(x)$ ***c)*** $y' = \frac{2 \cdot \tan(x)}{\cos^2(x)}$

**4.144** ***a)*** $f'(x) = -\frac{\sin(x)}{2 \cdot \sqrt{\cos(x)}}$ ***b)*** $y' = \frac{\cos(x)}{4 \cdot \sqrt[4]{\sin^3(x)}}$ ***c)*** $y' = -\frac{4 \cdot \sin(x)}{5 \cdot \sqrt[5]{\cos(x)}}$

**4.145** ***a)*** $y' = 4e^{4x + 2}$ ***b)*** $y' = \frac{1}{8}e^{\frac{x}{8}}$ ***c)*** $f'(x) = -4e^{-4x}$

**4.146** ***a)*** $f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ ***b)*** $y' = \frac{2e^{\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x}}$ ***c)*** $f'(x) = -\frac{4e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$

**4.147** ***a)*** $y' = \frac{2x}{\ln(10) \cdot x^2 + \ln(10)}$ ***b)*** $f'(x) = \frac{2}{2 \cdot \ln(10) \cdot x + 9 \cdot \ln(10)}$ ***c)*** $y' = \frac{7}{\ln(10) \cdot x}$

**4.148** ***a)*** $f'(x) = -\frac{2}{x}$ ***b)*** $y' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x} + 2x}$ ***c)*** $f'(x) = \frac{1}{2x \cdot \sqrt{\ln(x) + 1}}$

**4.149** ***a)*** $f'(x) = -e^x \cdot \sin(e^x)$ ***b)*** $f'(x) = \ln(3) \cdot 3^x \cdot \cos(3^x)$ ***c)*** $y' = -\frac{\sin(\ln(x))}{x}$

**4.150** ***1)*** $y' = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ ***2)*** $y' = \frac{1 - x}{e^x}$ ***3)*** $y' = \frac{1}{e^x}$

**4.151** ***1)*** $y' = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$ ***2)*** $y' = 2x \cdot \cos(x^2)$ ***3)*** $y' = 2 \cdot \sin(x+1) \cdot \cos(x+1)$

**4.152** ***1)*** $y' = -4 \cdot \sin(2x) \cdot \cos(2x)$
***2)*** $y' = -4 \cdot \sin(2x + 4) \cdot \cos(2x + 4)$
***3)*** $y' = -(8x + 16) \cdot \sin((2x + 4)^2)$

**4.153** Die Ableitung der inneren Funktion $g(x) = x^2$ ist $g'(x) = 2x$ und nicht $g'(x) = 2$. Die Angabe muss als $f(x) = e^{(x^2)}$ interpretiert werden und nicht als $f(x) = (e^x)^2$.

**4.154** $1 \rightarrow D$, $2 \rightarrow C$

**4.155** ***a)*** $f'(t) = 2e^{2t}$, $f''(t) = 4e^{2t}$, $f'''(t) = 8e^{2t}$

***b)*** $f'(x) = 4 \cdot \ln(2) \cdot 2^{4x}$, $f''(x) = 16 \cdot \ln^2(2) \cdot 2^{4x}$, $f'''(x) = 64 \cdot \ln^3(2) \cdot 2^{4x}$

***c)*** $f'(z) = \frac{1}{z}$, $f''(z) = -\frac{1}{z^2}$, $f'''(z) = \frac{2}{z^3}$

**4.156** ***a)*** $y^{(4)} = 4e^x + x \cdot e^x$ ***b)*** $y^{(8)} = 256 \cdot \sin(2x)$ ***c)*** $y^{(7)} = -\frac{120}{x^6}$

**4.157** ***a)*** $y' = \frac{x^2 + 4x}{x^2 + 4x + 4}$, $y'' = \frac{8}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}$

***b)*** $y' = 3e^x \cdot \cos(x) - e^x \cdot \sin(x)$, $y'' = 2e^x \cdot \cos(x) - 4e^x \cdot \sin(x)$

***c)*** $y' = \frac{x \cdot e^x - 1}{x^2 + 2x + 1}$, $y'' = \frac{x^2 \cdot e^x + e^x + 2}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$

**4.158** Die erste Ableitung lautet $f'(x) = -\frac{5}{(x - 3) \cdot (x + 2)}$.
Der Definitionsbereich von f ist $D_f = \{x \in \mathbb{R} | (x < -2) \vee (x > 3)\} = \mathbb{R} \setminus [-2; 3]$.
Es ist das Intervall $[-2; 3]$ ausgenommen.
Für den Definitionsbereich von f′ gilt $D_{f'}$: $\mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$. Es sind nur zwei Werte ausgenommen.
Der Definitionsbereich von f′ ist größer als der Definitionsbereich von f.

**4.159** ***a)*** $1 \rightarrow$ A und B $2 \rightarrow$ A, B und C $3 \rightarrow$ A und D $4 \rightarrow$ D
***b)*** $1 \rightarrow$ A und B $2 \rightarrow$ A $3 \rightarrow$ A, B und C $4 \rightarrow$ D
***c)*** $1 \rightarrow$ A, B und C $2 \rightarrow$ A und B $3 \rightarrow$ D $4 \rightarrow$ A

**4.160** ***a)*** Produkt- und Kettenregel, Faktorregel, Ableitungsregeln für Winkelfunktionen und für Potenzfunktionen; $y' = 5x^3 \cdot \cos(5x) + 3x^2 \cdot \sin(5x)$

***b)*** Produkt- und Kettenregel, Faktor- und Summenregel, Ableitungsregeln für Winkelfunktionen und für Potenzfunktionen; $y' = -4x^4 \cdot \sin(2x) + 8x^3 \cdot \cos(2x) + 2x \cdot \sin(2x) - \cos(2x)$

***c)*** Produkt- und Kettenregel, Faktor- und Summenregel, Ableitungsregeln für Winkelfunktionen und für Potenzfunktionen; $y' = 4x^2 \cdot \cos(4x) + 2x \cdot \sin(4x) - 8x \cdot \cos(4x) - 2 \cdot \sin(4x) + 4 \cdot \cos(4x)$

**4.161** ***a)*** Produkt- und Kettenregel, Summenregel, Ableitungsregeln für den natürlichen Logarithmus und für Potenzfunktionen; $y' = 2x \cdot \ln(2 - x) - \frac{x^2}{2 - x}$

***b)*** Produkt- und Kettenregel, Faktor- und Summenregel, Ableitungsregeln für den natürlichen Logarithmus und für Potenzfunktionen; $y' = 2 \cdot \ln(x - 2x^2) + \frac{8x - 2}{2x - 1}$

***c)*** Produkt- und Kettenregel, Faktorregel, Ableitungsregeln für den natürlichen Logarithmus und für Potenzfunktionen; $y' = \frac{5 - \ln\left(\frac{x^5}{9}\right)}{x^2}$

**4.162** ***a)*** Quotienten- und Kettenregel, Faktor und Summenregel, Ableitungsregel für Potenzfunktionen; $y' = \frac{3t^4 + 16t^3 + 27t^2 + 18t}{(t + 1)^2}$

***b)*** Quotienten- und Kettenregel, Faktor- und Summenregel, Ableitungsregel für Potenzfunktionen; $y' = -\frac{3t^2 - 18t}{(t + 3)^4}$

***c)*** Produkt-, Quotienten- und Kettenregel, Summenregel, Ableitungsregel für Potenzfunktionen; $y' = -\frac{3t + 1}{(t - 1)^3}$

**4.163** ***a)*** Quotienten- und Kettenregel, Faktorregel, Ableitungsregel für Winkelfunktionen und für Potenzfunktionen; $y' = -\frac{\cos(x) \cdot \cos(2x) + 2 \cdot \sin(x) \cdot \sin(2x)}{(\cos(2x))^2}$

***b)*** Quotienten- und Kettenregel, Ableitungsregel für Winkelfunktionen und für Potenzfunktionen; $y' = \frac{\cos^2(x) + 2x \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)}{x^2}$

***c)*** Quotienten- und Kettenregel, Faktorregel, Ableitungsregel für Winkelfunktionen, für Potenzfunktionen und für Exponentialfunktionen; $y' = \frac{4 \cdot \sin(2x) \cdot \cos(2x) - \sin^2(2x)}{e^x}$

**4.164** ***1)*** $f_1(6) = f_2(2) = -0{,}279...$, $f_1'(6) = 0{,}960...$, $f_2'(2) = 2{,}880...$
Die Funktionswerte sind gleich, die Steigung von $f_2$ ist 3-mal so groß wie die Steigung von $f_1$.

***2)*** $f_1(4) = f_2(8) = 54{,}598...$, $f_1'(4) = 54{,}598...$, $f_2'(8) = 27{,}299...$
Die Funktionswerte sind gleich, die Steigung von $f_2$ ist halb so groß wie die Steigung von $f_1$.

***3)*** $f_1(3) = f_2(1) = 1{,}098...$, $f_1'(3) = \frac{1}{3}$, $f_2'(1) = 1$
Die Funktionswerte sind gleich, die Steigung von $f_2$ ist 3-mal so groß wie die Steigung von $f_1$.

**4.165** ***a)*** $y = 2 \cdot (\ln(x+1) - \ln(x - 1))$, $y' = \frac{4}{1 - x^2}$
Hinweis: Die Angabe müsste richtig $y = \ln\left(\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)^2\right)$ lauten.

***b)*** $y = \sqrt[3]{x^4 + 2x^3}$, $y' = \frac{4x^3 + 6x^2}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^4 + 2x^3)^2}}$

***c)*** $y = \frac{74}{35} \cdot \ln(x)$, $y' = \frac{74}{35x}$

**4.166** ***a)*** $f'(t) = \frac{3 \cdot \sin(3t)}{\cos^2(3t)}$ ***b)*** $y' = \frac{\cos(2t)}{\sqrt{\sin(2t)}}$ ***c)*** $f'(t) = -\frac{2 \cdot \cos\left(\frac{2}{t}\right)}{t^2}$

**4.167** **a)** $y' = \dfrac{9x \cdot \sqrt{x} - 36x}{2x - 12 \cdot \sqrt{x} + 18}$ **b)** $f'(x) = \dfrac{5}{(x+5)^2} \cdot \sqrt{\dfrac{x+5}{x-5}}$ **c)** $y' = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{4 \cdot \sqrt{x} - 2x - 2}$

**4.168** **a)** $f'(x) = \dfrac{2}{x^2 - 4x + 4} \cdot \sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$ **b)** $y' = -\dfrac{3x^2 \cdot \sqrt{x^3 - 3}}{2x^6 - 12x^3 + 18}$ **c)** $y' = \dfrac{3x^3 - 6x^2 + 6x - 4}{(18x^4 - 24x^2 + 8) \cdot \sqrt{1-x}}$

**4.169** **a)** $y' = -9x^2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sin(3x^3) + \dfrac{\cos(3x^3)}{2 \cdot \sqrt{x}}$ **c)** $y' = \dfrac{\cos(x) \cdot \cos(3x) - 3 \cdot \sin(x) \cdot \sin(3x)}{2 \cdot \sqrt{\sin(x) \cdot \cos(3x)}}$

**b)** $y' = \dfrac{\sin(\sqrt{x})}{2} - \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2 \cdot \sqrt{x}} - \dfrac{\sin(\sqrt{x})}{2x \cdot \sqrt{x}} - \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{x^2}$

**4.170** **a)** $y' = \dfrac{3x^2 - 4x}{x^3 - 2x^2 + 1}$ **b)** $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ **c)** $y' = \dfrac{\ln(2) \cdot 2^x}{2^x - 1}$

**4.171** **a)** $\dfrac{dR}{dw} = -\dfrac{6w^3u^2 - 28wu^2}{\sqrt{(w^4 - 2u)^3}}$, $\dfrac{dR}{du} = -\dfrac{7w^6 - 6w^4u - 7w^2u + 9u^2}{\sqrt{(w^4 - 2u)^3}}$

**b)** $\dfrac{dN}{dq} = -\dfrac{3m^2 \cdot \sqrt{q} - m}{2 \cdot (m^2 - \sqrt{q})^2 \cdot \sqrt{3q^2 - m \cdot q}}$, $\dfrac{dN}{dm} = \dfrac{3m^2 - 12m \cdot q + \sqrt{q}}{2 \cdot (m^2 - \sqrt{q})^2 \cdot \sqrt{3q - m}}$

**4.172** **a)** $\dfrac{dS}{da} = \dfrac{5a^{2f} \cdot (4f - 1) + 6f^a \cdot (1 - 2a \cdot \ln(f))}{2af \cdot \sqrt{2af}}$, $\dfrac{dS}{df} = \dfrac{5a^{2f} \cdot (4f \cdot \ln(a) - 3) + 6f^a \cdot (3 - 2a)}{2f^2 \cdot \sqrt{2af}}$

**b)** $\dfrac{dH}{dr} = \dfrac{5b^3r^b + 5b^2r^b - 3b^{3r+2} \cdot \ln(b) \cdot r - b^{3r+2}}{b^2 - r^3} + \dfrac{15b^2r^{b+3} - 3b^{3r+2}r^3}{b^4 - 2b^2r^3 + r^6}$,

$\dfrac{dH}{db} = \dfrac{10br^{b+1} + 5b^2r^{b+1} \cdot \ln(r) - 3b^{3r+1}r^2 - 2b^{3r+1}r}{b^2 - r^3} + \dfrac{10b^3r^{b+1} - 2b^{3r+3}r}{b^4 - 2b^2r^3 + r^6}$

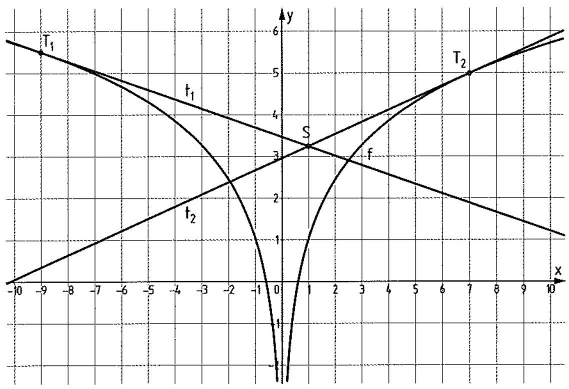
**4.173** **a)** $\dfrac{dT}{da} = \dfrac{-a^2b^2 + 2a^2b - 6ab - 2b}{(a-3)^{b+1}}$, $\dfrac{d^2T}{da^2} = \dfrac{a^2b^3 - 3a^2b^2 + 2a^2b + 12ab^2 - 12ab + 2b^2 + 20b}{(a-3)^{b+2}}$,

$\dfrac{dT}{db} = \dfrac{a^2 - a^2b \cdot \ln(a-3) - 2 \cdot \ln(a-3)}{(a-3)^b}$

**b)** $\dfrac{dU}{dt} = 2 \cdot e^{-\frac{2t}{A}}$, $\dfrac{d^2U}{dt^2} = -\dfrac{4}{A} \cdot e^{-\frac{2t}{A}}$, $\dfrac{dU}{dA} = 1 - e^{-\frac{2t}{A}} \cdot \left(1 + \dfrac{2t}{A}\right)$

**4.174** **1)** $t_1$: $y = -0{,}\dot{2} \cdot x + 3{,}493...$, $t_2$: $y = 0{,}285...x + 2{,}990...$

**2)** S(1|3,3)




**3)** S(0,989...|3,273...)

**4.175** **1)** t: $y = -9{,}824... \cdot x + 141{,}295...$

**2)** und **3)** S(13,052...|13,052...), $\alpha = 50{,}811...°$

**4.176** Anwenden der Rechenregeln für Logarithmen ergibt $f(x) = \ln(x) - \ln(4)$ bzw. $g(x) = \ln(x) - \ln(5)$. Die Ableitung der Summanden $\ln(4)$ bzw. $\ln(5)$ ist null und es gilt daher $f'(x) = g'(x) = (\ln(x))' = \frac{1}{x}$.

**4.177** ***a)*** $y^{(n)}(x) = a^n \cdot e^{a \cdot x}$; 1. Schritt: $n = 1 \Rightarrow y'(1) = a^1 \cdot e^{a \cdot x} = a \cdot e^{a \cdot x}$
3. Schritt: $(y^{(n)})'(x) = a \cdot a^n \cdot e^{a \cdot x} = a^{n+1} \cdot e^{a \cdot x} = y^{(n+1)}(x)$

***b)*** $s^{(n)}(t) = \frac{(-a)^n \cdot n!}{(a \cdot t + 1)^{n+1}}$; 1. Schritt: $n = 1 \Rightarrow s'(t) = \frac{-a}{(a \cdot t + 1)^2}$
3. Schritt: $(s^{(n)}(t))' = (-a)^n \cdot n! \cdot (-n-1) \cdot (a \cdot t + 1)^{-n-2} \cdot a = (-a)^n \cdot n! \cdot (-1) \cdot (n+1) \cdot (a \cdot t + 1)^{-n-2} \cdot a =$
$= (-a)^n \cdot (-a) \cdot n! \cdot (n+1) \cdot (a \cdot t + 1)^{-n-2} = \frac{(-a)^{n+1} \cdot (n+1)!}{(a \cdot t + 1)^{n+2}} = s^{(n+1)}(t)$

***c)*** $f^{(n)}(t) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)!}{(t+1)^n}$; 1. Schritt: $n = 1 \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t+1}$
3. Schritt: $(f^{(n)}(t))' = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot (-n) \cdot (t+1)^{-n-1} = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot (-1) \cdot n \cdot (t+1)^{-n-1} =$
$= (-1)^{n+2} \cdot n! \cdot (t+1)^{-n-1} = \frac{(-1)^{n+2} \cdot n!}{(t+1)^{n+1}} = f^{(n+1)}(t)$

***d)*** $u^{(n)}(c) = (b \cdot \ln(a))^n \cdot a^{b \cdot c}$; 1. Schritt: $n = 1 \Rightarrow u'(c) = b \cdot \ln(a) \cdot a^{b \cdot c}$
3. Schritt: $(u^{(n)}(c))' = (b \cdot \ln(a))^n \cdot b \cdot \ln(a) \cdot a^{b \cdot c} = (b \cdot \ln(a))^{n+1} \cdot a^{b \cdot c} = u^{(n+1)}(c)$

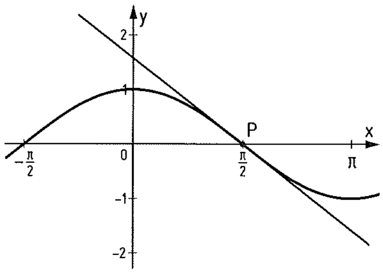
**4.178** $f'(x) = u'(x) \cdot v^{-1}(x) + u(x) \cdot (-1) \cdot (v(x))^{-2} \cdot v'(x) = \frac{u'(x)}{v(x)} - \frac{u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$

**4.179** $f(x) = \left(e^{\ln(a)}\right)^x = e^{x \cdot \ln(a)} \Rightarrow f'(x) = e^{x \cdot \ln(a)} \cdot \ln(a) = \left(e^{\ln(a)}\right)^x \cdot \ln(a) = a^x \cdot \ln(a)$

**4.180** ***a)*** $y = \sinh(x) = \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2} \Rightarrow y' = \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2} \cdot (-1) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$
***b)*** $y = \cosh(x) = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} \Rightarrow y' = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} \cdot (-1) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$
***c)*** $y = \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \Rightarrow y' = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2(x)}$

**4.181** ***1)*** $v_{blau}(2) = v_{rot}(2) = 1{,}2\,\frac{m}{s}$ ***2)*** $s_{rot}(t) = 1{,}2t - 1{,}2$ ***3)*** 7,5 cm

**4.183** ***1)***

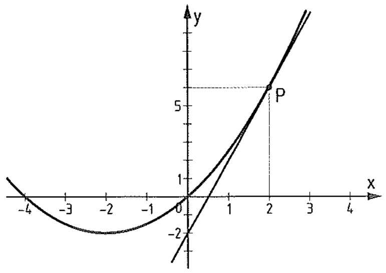



***4)*** Bis zu einer Abweichung des Winkels um 0,35 rad ist der prozentuelle Fehler kleiner als 2,5 %.

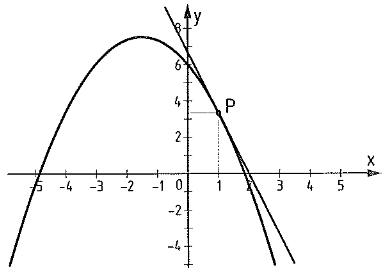
***2)*** und ***3)***

| Δx = dx | Δy | dy | $\frac{dy}{\Delta y}$ | prozentueller Fehler |
|---|---|---|---|---|
| 0,05 | −0,049... | −0,05 | 1,000... | 0,041... |
| 0,1 | −0,099... | −0,1 | 1,001... | 0,166... |
| 0,15 | −0,149... | −0,15 | 1,003... | 0,375... |
| 0,2 | −0,198... | −0,2 | 1,006... | 0,669... |
| 0,25 | −0,247... | −0,25 | 1,010... | 1,049... |
| 0,3 | −0,295... | −0,3 | 1,015... | 1,515... |
| 0,35 | −0,342... | −0,35 | 1,020... | 2,071... |
| 0,4 | −0,389... | −0,4 | 1,027... | 2,717... |
| 0,45 | −0,434... | −0,45 | 1,034... | 3,456... |

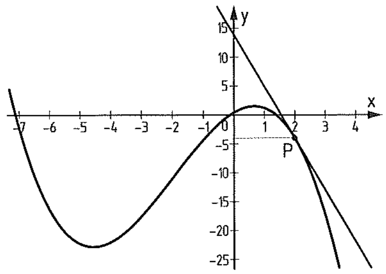
**4.184** ***a)*** t: $y = 4x - 2$; [1,580…; 2,583…]



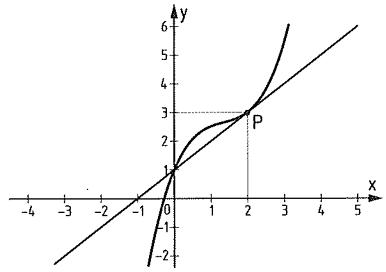

***b)*** t: $y = -\frac{10}{3}x + \frac{20}{3}$; [0,634…; 1,267…]



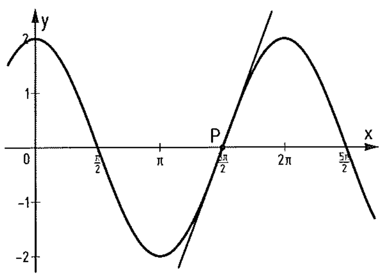

**4.185** ***a)*** t: $y = -9x + 14$; [1,877…; 2,166…]



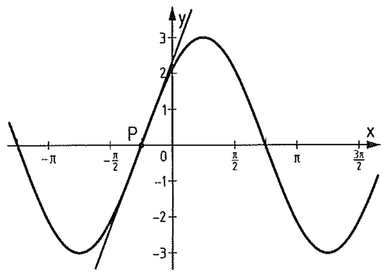

***b)*** t: $y = x + 1$; [1,746…; 2,242…]




**4.186** ***a)*** t: $y = 2x - 3\pi$; [4,368…; 5,056…]




***b)*** t: $y = 3x + \frac{3\pi}{4}$; [−1,129…; −0,441…]




**4.187** ***a)*** t: $y = \frac{1}{4} \cdot x$, $\Delta y = 0{,}024\,6…$, $dy = 0{,}025$, 1,255… % Fehler

***b)*** t: $y = 43{,}301… \cdot x$, $\Delta y = 12{,}5$, $dy = 11{,}336…$, 9,310… % Fehler

**4.188** ***1)*** $y = 3e^3 \cdot x - 2e^3 - 1$

***2)*** 1,064… % bei $x = 1{,}05$

**4.190** $\Delta V$ genau: 4 665,788… $cm^3$; $\Delta V$ näherungsweise: 4 751,658… $cm^3$,
Fehler absolut: 85,870… $cm^3$; Fehler in Prozent: 1,840… %

**4.191** Oberfläche: maximaler Fehler 10 %; Volumen: maximaler Fehler 15 %

**4.196** ***a)*** $y' = \frac{3x^2 + 7}{3y^2}$ ***b)*** $y' = \frac{y \cdot \sin(x) - \sin(y)}{x \cdot \cos(y) + \cos(x)}$ ***c)*** $y' = \frac{e^x - y}{x + e^y}$

**4.197** ***a)*** 0,353… bzw. −0,353… ***b)*** 0 ***c)*** 0

**4.198** ***a)*** $y' = 6x^{3x} \cdot (\ln(x) + 1)$ ***b)*** $y' = \frac{\sqrt[x]{3x}}{x^2} \cdot (1 - \ln(3x))$ ***c)*** $y' = x^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln(x) + 2}{2 \cdot \sqrt{x}}$

**4.199** ***a)*** $y' = (\sin(x))^x \cdot \left(\ln(\sin(x)) + \frac{x \cdot \cos(x)}{\sin(x)}\right)$

***b)*** $y' = x^{\tan(x)} \cdot \left(\frac{\ln(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\tan(x)}{x}\right)$

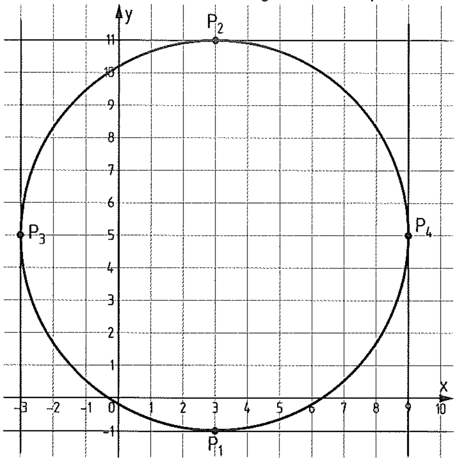
***c)*** $y' = (\sin(x))^{\cos(x)} \cdot \left(\frac{\cos^2(x)}{\sin(x)} - \sin(x) \cdot \ln(\sin(x))\right)$

**4.200** ***a)*** $y' = x^{\ln(x)} \cdot \frac{\ln(x^2)}{x}$ ***b)*** $y' = (\ln(x))^x \cdot \left(\ln(\ln(x)) + \frac{1}{\ln(x)}\right)$ ***c)*** $y' = \frac{(\ln(x))^{\ln(x)}}{x} \cdot (\ln(\ln(x)) + 1)$

**4.201** ***a)*** $y' = \frac{22x + 46}{(x + 5)^3}$ ***b)*** $y' = \frac{x^4 - 4x^2 - 1}{2 \cdot \sqrt{x \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^2 - 1)^3}}$ ***c)*** $y' = \frac{13x^2 + 29x + 12}{12 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{(x + 1)^2} \cdot \sqrt[4]{(x + 2)^3}}$

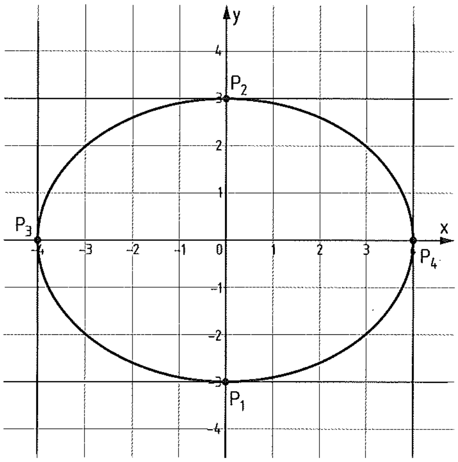
**4.202** ***a) 1)*** waagrechte Tangente: $P_1(3|-1)$, $P_2(3|11)$,
senkrechte Tangente: $P_3(-3|5)$, $P_4(9|5)$

***2)***



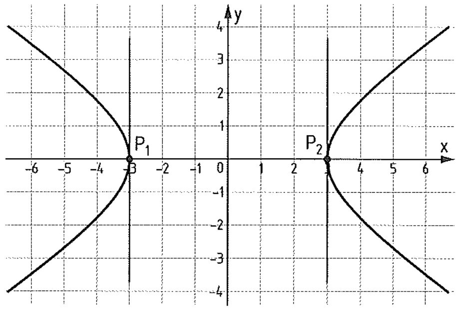

***b) 1)*** waagrechte Tangente: $P_1(0|-3)$, $P_2(0|3)$,
senkrechte Tangente: $P_3(-4|0)$, $P_4(4|0)$

***2)***




***c) 1)*** keine waagrechte Tangente,
senkrechte Tangente: $P_1(-3|0)$, $P_2(3|0)$

***2)***




**4.203** $y'(0) = 0$, $y'(3) = -1$

**4.204** $t: y = \frac{x}{2}$

**4.205** $\frac{dV_m}{dp} = \frac{V_m - b}{\frac{a}{V_m^2} - \frac{2ab}{V_m^3} - p}$

**4.206** $k(t) = \frac{K(t)}{L(t)} \Rightarrow \ln(k(t)) = \ln(K(t)) - \ln(L(t)) \Rightarrow$ implizites Differenzieren ergibt:

$\frac{k'(t)}{k(t)} = \frac{K'(t)}{K(t)} - \frac{L'(t)}{L(t)}$ und das ist in anderer Schreibweise: $\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L}$

**4.207** ***a)*** $\cos(y) = x \Rightarrow$ implizites Differenzieren ergibt: $-\sin(y) \cdot y' = 1 \Rightarrow$ umformen auf:

$y' = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))} \Rightarrow \sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)}$ einsetzen ergibt: $y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

**b)** $\tan(y) = x \Rightarrow$ implizites Differenzieren ergibt: $(1 + \tan^2(y)) \cdot y' = 1 \Rightarrow$ umformen auf:

$y' = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))}$ ergibt: $y' = \frac{1}{1 + x^2}$

**4.208** $y = \log_a(x) \Rightarrow a^y = x \Rightarrow$ implizites Differenzieren ergibt: $a^y \cdot \ln(a) \cdot y' = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow y' = \frac{1}{a^y \cdot \ln(a)} \Rightarrow y' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$

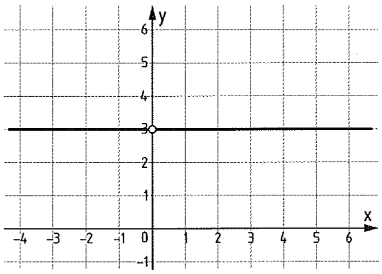
**4.209** $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow \ln(f(x)) = \ln(u(x)) - \ln(v(x)) \Rightarrow$ implizites Differenzieren ergibt:
$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)} - \frac{v'(x)}{v(x)} \Rightarrow$ auf gemeinsamen Nenner bringen und umformen ergibt:
$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{(v(x))^2}$

**4.210** $y = a^x \Rightarrow \ln(y) = x \cdot \ln(a) \Rightarrow$ implizites Differenzieren ergibt: $\frac{y'}{y} = \ln(a) \Rightarrow y' = a^x \cdot \ln(a)$

**4.211** $y = \sqrt[n]{x} \Rightarrow y^n = x \Rightarrow$ implizites Differenzieren ergibt: $n \cdot y^{n-1} \cdot y' = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow y' = \frac{1}{n \cdot y^{n-1}} \Rightarrow y' = \frac{1}{n \cdot x^{\frac{1}{n} \cdot (n-1)}} \Rightarrow y' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n} - 1}$

**4.212** ***1)*** „$\frac{0}{0}$“ ***2)*** $0 \cdot 1 = 0$ ***3)*** „$\frac{0}{0}$“
Die Ergebnisse von ***1)*** und ***3)*** sind unbestimmte Ausdrücke.

**4.215** ***1)***



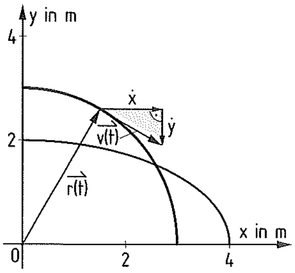

Die Funktionen f und g unterscheiden sich nur an der Stelle x = 0. f(0) ist nicht definiert. g(0) = 3.

***2)*** $g_L = g_R = 3$
Der links- und der rechtsseitige Grenzwert stimmen an der Stelle x = 0 überein. Da die Funktion an dieser Stelle nicht definiert ist, liegt eine hebbare Unstetigkeitsstelle (Definitionslücke) vor.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **4.216** | **a)** 4 | **b)** 6 | **c)** 0 |
| **4.217** | **a)** 12 | **b)** −1 | **c)** 0 |
| **4.218** | **a)** 2 | **b)** $-\infty$ | **c)** $\frac{7}{3}$ |
| **4.219** | **a)** 0 | **b)** 0 | **c)** $\infty$ |
| **4.220** | **a)** 2 | **b)** 0 | **c)** 0 |
| **4.221** | **a)** 0 | **b)** $\infty$ | **c)** 0 |
| **4.222** | **a)** $\infty$ | **b)** $\infty$ | **c)** $\infty$ |
| **4.223** | **a)** 0 | **b)** $\infty$ | **c)** $\frac{1}{\ln(a)}$ |

**4.224** ***1)*** $\frac{r_1}{n-1}$
***2)*** Die Brennweite einer Planlinse ist von der Scheiteldicke d unabhängig.

**4.225** ***1)*** und ***2)***




Der Geschwindigkeitsvektor kann tangential zur Bahnkurve gezeichnet werden. Die „Abrutschgeschwindigkeit" ist der Betrag des Geschwindigkeitsvektors.

**4.229** ***a)*** $\dot{x} = 1, \dot{y} = 2t, t: y = 2x - 3$
***b)*** $\dot{x} = 2t, \dot{y} = 2, t: y = x + 2$
***c)*** $\dot{x} = 4t, \dot{y} = 3t^2, t: y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$
***d)*** $\dot{x} = 1, \dot{y} = t, t: y = x - 1{,}5$

**4.230** ***a)*** $\dot{x} = -\frac{1}{(t+3)^2}, \dot{y} = 1, t: y = -16x + 4$
***b)*** $\dot{x} = 2t, \dot{y} = -\frac{2}{t^3}, t: y = -x + 4$
***c)*** $\dot{x} = 4, \dot{y} = -\frac{3t^2}{(t^3+4)^2}, t: y = -0{,}03x + 0{,}32$
***d)*** $\dot{x} = \frac{4+t^2}{(4-t^2)^2}, \dot{y} = 2, t: y = 3{,}6x + 0{,}8$

**4.231** ***a)*** $t: y = -\frac{1}{4}x + \sqrt{2}, \alpha = -14{,}036...°$
***b)*** $t: x = \frac{\pi}{4}, \alpha = 90°$
***c)*** $t: x = \frac{\pi}{4}, \alpha = 90°$
***d)*** $y = -\sqrt{2} \cdot x + 6, \alpha = -54{,}735...°$

**4.232** ***a)*** $t: y = -2{,}185... \cdot x + 7{,}208...$
***b)*** $P(1{,}893...\ m | 0{,}227...\ m)$

**4.233** ***1)*** 90°
***2)*** $P_1(0{,}628...\ m|0{,}4\ m), P_2(1{,}884...\ m|0{,}4\ m), P_3(3{,}141...\ m|0{,}4\ m)$

**4.234** ***1)*** 0,979... m ***2)*** $5{,}291...\ \frac{m}{s}$ ***3)*** 67,792...°

**4.235** 60°

Aufgaben 4.236 – 4.238: Auf die grafische Darstellung wird verzichtet.

**4.236** ***1)*** $x(t) = 0{,}772... \cdot t, y(t) = 39{,}866... - 0{,}207... \cdot t - 5t^2$
***2)*** 2,166... m
***3)*** $28{,}248...\ \frac{m}{s}$, 88,432...°

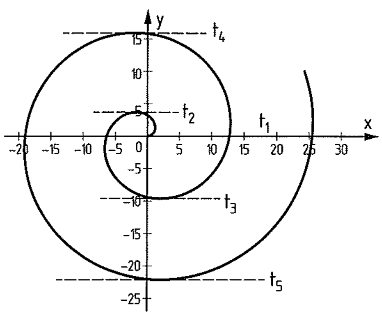
**4.237** ***1)*** –
***2)*** $t: y = 0{,}314... \cdot x + 2{,}671...$, 17,466...°

**4.238** ***a)*** $S_1(1{,}664...|1{,}664...), S_2(-1{,}664...|1{,}664...), S_3(-1{,}664...|-1{,}664...), S_4(1{,}664...|-1{,}664...)$; 42,075...°
***b)*** $S_1(4{,}607...|1{,}165...), S_2(-4{,}607...|1{,}165...), S_3(-4{,}607...|-1{,}165...), S_4(4{,}607...|-1{,}165...)$; 78,614...°

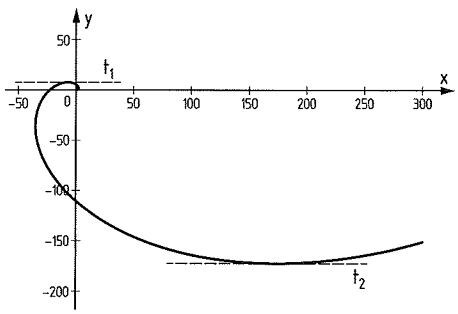
**4.240** ***a)*** $\tan(\delta) = \frac{\varphi}{2}, \tan(\alpha) = \frac{2 \cdot \tan(\varphi) + \varphi}{2 - \varphi \cdot \tan(\varphi)}$
***b)*** $\tan(\delta) = \varphi, \tan(\alpha) = \frac{\tan(\varphi) + \varphi}{1 - \varphi \cdot \tan(\varphi)}$
***c)*** $\tan(\delta) = -\frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}, \tan(\alpha) = -\frac{\cos(\varphi) - \sin(\varphi) \cdot \tan(\varphi)}{\sin(\varphi) + \cos(\varphi) \cdot \tan(\varphi)}$
***d)*** $\tan(\delta) = 2\varphi, \tan(\alpha) = \frac{\tan(\varphi) + 2⊠}{1 - 2⊠ \cdot \tan(\varphi)}$

**4.241** ***a)*** $\tan(\delta) = -\frac{\cos(\varphi)}{2 \cdot \sin(\varphi)}, \tan(\alpha) = \frac{2 \cdot \sin^2(\varphi) - \cos^2(\varphi)}{3 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi)}$
***b)*** $\tan(\delta) = -\frac{2}{\tan(\varphi)}, \tan(\alpha) = \frac{\sin^2(\varphi) - 2 \cdot \cos^2(\varphi)}{3 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi)}$
***c)*** $\tan(\delta) = -\tan(\varphi), \tan(\alpha) = 0$
***d)*** $\tan(\delta) = -\varphi, \tan(\alpha) = \frac{\tan(\varphi) - \varphi}{1 + \varphi \cdot \tan(\varphi)}$

**4.242** ***a)*** $t_1: y = 0, t_2: y = 3{,}639..., t_3: y = -9{,}628...,$
$t_4: y = 15{,}833...$, usw.



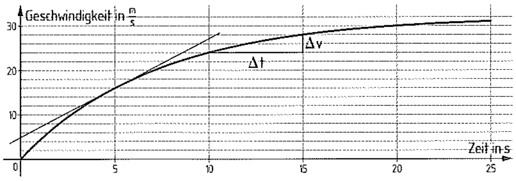

***b)*** $t_n: y = e^{(4n-1) \cdot \frac{\pi}{4}} \cdot \sin\left((4n - 1) \cdot \frac{\pi}{4}\right), n \in \mathbb{N}^*$



**4.243** ***1)*** $8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

***2)*** Der Term gibt die relative Änderung der Geschwindigkeit im Zeitintervall [15 s; 20 s] an.

***3)*** und ***4)***




Die Steigung der Tangente gibt die Beschleunigung des Sportwagens zum Zeitpunkt t = 5 s an.

**4.244**

| | ***1)*** | ***2)*** | ***3)*** | ***4)*** |
|---|---|---|---|---|
| ***a)*** | $-3$ | $-\frac{3}{10}$ | $-1$ | $11$ |
| ***b)*** | $-\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{6}$ | $-\frac{2}{9}$ |
| ***c)*** | $\frac{3}{4}$ | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $1$ |

**4.245** ***a)*** $1 \rightarrow C, 2 \rightarrow A$   ***b)*** $1 \rightarrow D, 2 \rightarrow C$

**4.246** ***A)*** Wahr. Die Tangente ist an der Stelle m waagrecht, ihre Steigung daher null.

***B)*** Falsch. f′(m) gibt die Steigung der Tangente an der Stelle m an. Diese ist null.

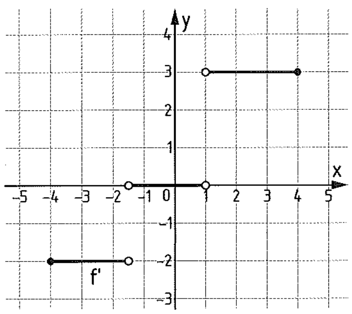
***C)*** Falsch. Die Funktion ist an der Stelle n streng monoton steigend. Die Steigung der Tangente ist daher größer null.

***D)*** Wahr. Begründung wie in ***C)***.

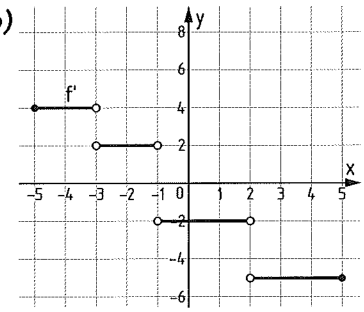
**4.247** $f'(2) = -4$

**4.248** D

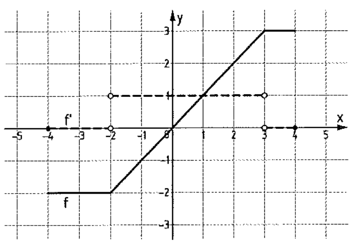
**4.249** ***a)***



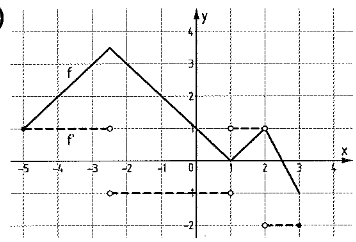

***b)***




**4.250** ***a)***




***b)***




**4.251** ***a)*** $y'(x) = 23x^{22}$   ***b)*** $y'(x) = \frac{1}{5 \cdot \sqrt[5]{x^4}}$   ***c)*** $y'(x) = \frac{3}{4 \cdot \sqrt[4]{x}}$   ***d)*** $y'(x) = -\frac{4}{x^5}$

**4.252** **1)** $y'(x) = a$ **2)** $y'(x) = \frac{1}{a}$ **3)** $y'(x) = \frac{1}{b}$ **4)** $y'(x) = -\frac{1}{b}$ **5)** $y'(x) = a \cdot b$ **6)** $y'(x) = -\frac{a}{b}$

**4.253** **a)** $y'(x) = \frac{2}{\cos^2(x)}$ **b)** $y'(x) = \frac{3}{x}$ **c)** $y'(x) = 4 \cdot e^x$ **d)** $y'(x) = 2 \cdot \ln(3) \cdot 3^x$

**4.254** **a)** $y'(x) = -\frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x^5}}$ **b)** $y'(x) = \frac{1}{6 \cdot \sqrt[6]{x^5}}$ **c)** $y'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$ **d)** $y'(x) = -\frac{17}{6 \cdot \sqrt[6]{x^{23}}}$

**4.255** **1)** Beim Ableiten nach a ist c eine Konstante. c nach a abgeleitet ergibt daher 0 und nicht 1. $\frac{dz}{da} = b^c$

**2)** Beim Ableiten der Potenzfunktion $b^c$ wird von der Hochzahl 1 subtrahiert und zusätzlich muss die Hochzahl c als Faktor vor die Potenz geschrieben werden. $\frac{dz}{db} = a \cdot c \cdot b^{c-1}$

**4.256** **a)** $f'(x) = 6x + 2$, $f''(x) = 6$
**b)** $\dot{s} = 15t^2 - 14t - 4$, $\ddot{s} = 30t - 14$
**c)** $f'(x) = -6x^2 + 6x - 4$, $f''(x) = -12x + 6$
**d)** $f'(x) = -\frac{3}{x}$, $f''(x) = \frac{3}{x^2}$
**e)** $f'(t) = 3 \cdot \cos(t) - 4$, $f''(t) = -3 \cdot \sin(t)$
**f)** $f'(x) = f''(x) = 3 \cdot e^x$

**4.257** **a)** $y' = 3 \cdot \cos(x)$, $y'' = -3 \cdot \sin(x)$
**b)** $y' = \frac{2}{x}$, $y'' = -\frac{2}{x^2}$
**c)** $f'(x) = 3 \cdot \ln(2) \cdot 2^x$, $f''(x) = 3 \cdot (\ln(2))^2 \cdot 2^x$

**4.258** $\frac{df}{dC} = \frac{1}{H}$ $\frac{df}{dH} = -\frac{A \cdot e^B + C}{H^2}$ $\frac{df}{dt} = 0$ $\frac{d^2f}{dA^2} = 0$ $\frac{d^2f}{dB^2} = \frac{A \cdot e^B}{H}$

**4.259** **a)** 17 **b)** $-0{,}75$ **c)** $9{,}\dot{3}$

**4.260** **a)** $y = -2x + 0{,}5$ **b)** $y = 0{,}5x - 0{,}5$ **c)** $y = 2x - 1$

**4.261** **a)** $x_1 = -0{,}5$, $x_2 = 0{,}5$ **b)** $x = 5$ **c)** $x = -0{,}6$

**4.262** **a)** $t = 0{,}125$ **b)** $t_1 = -0{,}438...$, $t_2 = 0{,}438...$ **c)** $t = 0{,}288...$

**4.263** **A)** Faktorregel und Ableitung der Potenzfunktion
**B)** Faktorregel, Ableitung der Potenzfunktion und Kettenregel

**4.264** **a)** A) ist falsch. Die Funktion y ist ein Produkt aus zwei Funktionen. Daher muss die Produktregel angewendet werden.
**b)** A) ist falsch. Beim Anwenden der Produktregel auf $(-x \cdot \sin(x))$ muss das Minus vor eine Klammer gesetzt werden. Auflösen der Klammern ergibt $(-x \cdot \cos(x))$.

**4.265** **a)** $y' = 3 \cdot \sin(x) + 3x \cdot \cos(x)$
**b)** $f'(t) = 2 \cdot \cos^2(t) - 2 \cdot \sin^2(t)$
**c)** $y' = \sin(x) \cdot \tan^2(x) + 2 \cdot \sin(x)$

**4.266** **a)** $y' = 3x \cdot e^x + 3e^x$
**b)** $y' = x^3 \cdot e^x + 3x^2 \cdot e^x + 2x \cdot e^x + 2e^x$
**c)** $f'(x) = -x \cdot e^x - 2e^{2x} + 1$

**4.267** **a)** $f'(x) = 2 \cdot \cos(x) \cdot e^x$ **b)** $f'(x) = e^x \cdot 3^x \cdot (1 + \ln(3))$ **c)** $y' = \frac{2 - 2 \cdot \ln(x)}{x^2}$

**4.268** **a)** $f'(x) = 12x \cdot (x^2 + 5)^5$ **b)** $f'(x) = \frac{8}{3 \cdot \sqrt[3]{(8x-1)^2}}$ **c)** $f'(x) = 6x \cdot e^{3x^2}$

**4.269** **a)** $f'(x) = \frac{6x}{3x^2 + 1}$ **b)** $f'(x) = -4x \cdot \sin(2x^2)$ **c)** $f'(x) = 3 \cdot \sin^2(x) \cdot \cos(x)$

**4.270** **a)** $f'(t) = a \cdot e^{-t}$ **b)** $f'(t) = a \cdot \left(\frac{t}{2} \cdot e^{-\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}} + 1\right)$ **c)** $f'(t) = \frac{e^{-\frac{t}{2a}}}{2a} + a$

**4.271** **a)** $f'(x) = -\frac{\sin(x)}{2 \cdot \cos(x) \cdot \sqrt{\ln(\cos(x))}}$ **b)** $f'(x) = -\frac{\sin(x)}{2 \cdot \cos(x)}$ **c)** $f'(x) = -\frac{\sin(\sqrt{x})}{2 \cdot \sqrt{x} \cdot \cos(\sqrt{x})}$

**4.272** **a)** $f'(x) = \frac{3x^2 - 10x}{(3x-5)^2}$ **b)** $f'(x) = \frac{-12x^4 - 12x^3 - 40x - 10}{(3x^3 - 5)^2}$ **c)** $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x} \cdot (2x-1)}$

**4.273** **a)** $f'(x) = \frac{3x^2 - x^3}{e^x}$ **b)** $f'(x) = \frac{3 \cdot \ln(x) - 6}{2 \cdot \sqrt{x} \cdot (\ln(x))^2}$ **c)** $f'(x) = \frac{1}{1 + 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)}$

**4.274** **a)** $f'(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{\sqrt{(2x+1)^3}}$ **b)** $f'(x) = \frac{2}{\cos(x)}$ **c)** $f'(x) = x^x \cdot (\ln(x) + 1)$

**4.275** **a)** $y' = x \cdot e^{-x} - 2 \cdot e^{-x} + 2$

**b)** $f'(x) = -\frac{26}{(\sin(x) - 5 \cdot \cos(x))^2}$

**c)** $f'(x) = -\frac{2^{x-1} \cdot \cos(\sqrt{x} \cdot 2^x) \cdot (1 + 2 \cdot \ln(2) \cdot x)}{\sqrt{x} \cdot \left(\sin\left(\sqrt{x} \cdot 2^x\right)\right)^2}$ Hinweis: Die Angabe müsste richtig $f(x) = \frac{1}{\sin\left(\sqrt{x} \cdot 2^x\right)}$ lauten.

**4.276** **a)** $f'(x) = -\frac{e^{\cos(\sqrt{x})} \cdot \sin\left(\sqrt{x}\right)}{2 \cdot \sqrt{x}}$

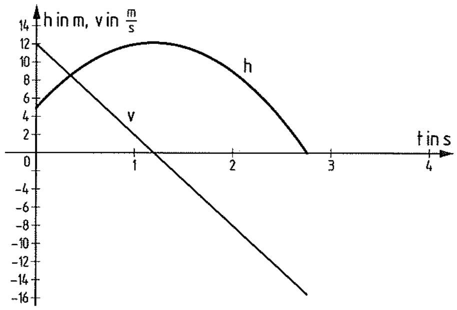
**b)** $f'(x) = \frac{x \cdot e^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}$

**c)** $y' = -2x \cdot \sin(x^2 + 1) \cdot e^{\cos(x^2+1)}$

**4.277** Die Opposition hat Recht, da die Arbeitslosenrate von 7,2 % auf ca. 8,85 % gestiegen ist. Der Politiker der Regierungspartei hat Recht, da die Steigung der Kurve ca. ab dem 6. Monat kleiner wird.

**4.278** **1)** $v(t) = -10t + 12$

**2)**




**3)** Solange sich der Ball aufwärts bewegt, ist der Wert von v positiv. Hat der Ball seine maximale Höhe erreicht, ist der Wert von v null. Während sich der Ball abwärts bewegt, ist der Wert der Geschwindigkeit negativ.

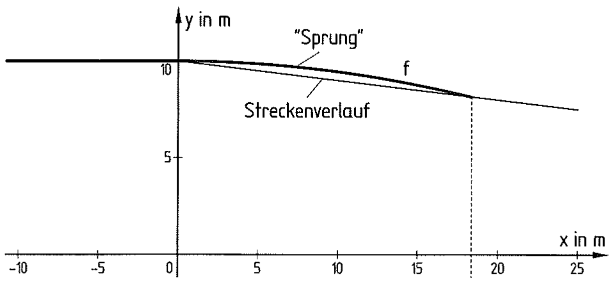
**4.279** **1)** $v = 11{,}11\, t$ **2)** $8{,}\overline{0008}$ s **3)** 355,591... m

**4.280** **1)** $0 \frac{m}{s}$ **2)** $-12 \frac{m}{s^2}$

**4.281** **1)** Endpunkt (1,313... m|1,761... m) **2)** q: $y = -1{,}6x + 3$

**4.282** **1)** g: $y = -0{,}1x + 10$

**2)**




**3)** 18,348... m
**4)** 18,440... m
**5)** –5,599...°

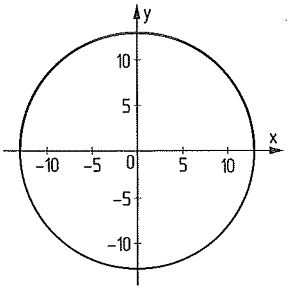
**4.283** **a)** $y' = -\frac{y+2}{x+2}$ **b)** $y' = \frac{y \cdot \cos(xy) + \cos(x) \cdot \cos(y)}{\sin(x) \cdot \sin(y) - x \cdot \cos(xy)}$ **c)** $y' = \frac{y - y \cdot e^x + e^y}{e^x - x \cdot e^y - x}$

**4.284** **a)** $\infty$ **b)** $\infty$ **c)** $\infty$

**4.285** **a)** 1 **b)** $\nexists$ g **c)** 1

**4.286** **a)** 0 **b)** $1{,}\dot{6}$ **c)** 0

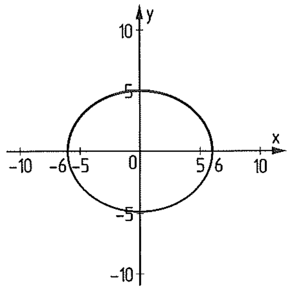
**4.287** **a)** **1)**




**2)** t: $y = -2{,}4x + 33{,}8$

**3)** Die Kurve hat an den Stellen mit $y'(x) = 0$ waagrechte Tangenten und an den Stellen mit $x'(y) = 0$ senkrechte Tangenten. Durch Umformen der Gleichung auf y bzw. x, Ableiten und Nullsetzen erhält man die gesuchten Stellen.

**b)** **1)**




**2)** t: $y = -0{,}481...x + 5{,}773...$

**3)** siehe **a)**

**4.288** **1)** t: $y = \frac{3}{5}x$

**2)**

| $\Delta x = dx$ | $\Delta y = 3 \cdot \left(1 - e^{-\frac{\Delta x}{5}}\right)$ | $dy = \frac{3}{5} \cdot \Delta x$ | $\frac{dy}{\Delta y}$ | Fehler in % |
|---|---|---|---|---|
| 0,1 | 0,0594... | 0,06 | $1{,}0100\dot{3}$ | $1{,}00\dot{3}$ |
| 0,5 | 0,285... | 0,3 | 1,0508... | 5,083... |

**4.289** **a)** $\dot{x} = 1$, $\dot{y} = 3t^2$, t: $y = 3x - 2$

**b)** $\dot{x} = 2t$, $\dot{y} = -\frac{2}{t^3}$, t: $y = -x + 2$

**c)** $\dot{x} = 4t$, $\dot{y} = 2t$, t: $y = \frac{x}{2} - 2$

**d)** $\dot{x} = -\frac{1}{(t+3)^2}$, $\dot{y} = 2t$, t: $y = -32x + 9$

**4.290** $y'(0{,}3) = -0{,}309...$ Es gibt keine Punkte mit waagrechten Tangenten.

**4.291** **a)** $\tan(\delta) = \frac{\varphi}{2}$, $\tan(\alpha) = \frac{2 \cdot \tan(\varphi) + \varphi}{2 - \boxtimes \cdot \tan(\varphi)}$

**b)** $\tan(\delta) = \varphi$, $\tan(\alpha) = \frac{\tan(\varphi) + \varphi}{1 - \boxtimes \cdot \tan(\varphi)}$

**c)** $\tan(\delta) = \tan(\varphi)$, $\tan(\alpha) = \frac{2 \cdot \sin(\varphi)}{\cos(\varphi) - \sin(\varphi) \cdot \tan(\varphi)}$

**d)** $\tan(\delta) = \frac{\tan(\varphi)}{2}$, $\tan(\alpha) = \frac{1{,}5 \cdot \sin(\varphi)}{\cos(\varphi) - 0{,}5 \cdot \sin(\varphi) \cdot \tan(\varphi)}$

**4.292** **a)** $y'(1) = 7$ **b)** $y'(-2) = 23$

**4.293** **a)** $y' = 3 \cdot e^{3x}$, $y'' = 9 \cdot e^{3x}$

**b)** $y' = \frac{3}{3x-2}$, $y'' = -\frac{9}{9x^2 - 12x + 4}$

**c)** $y' = 10 \cdot \sin(5x) \cdot \cos(5x)$, $y'' = 50 \cdot \cos^2(5x) - 50 \cdot \sin^2(5x)$

**d)** $y' = 6 \cdot e^{-2x}$, $y'' = -12 \cdot e^{-2x}$

**4.294** **a)** $x = 2$ **b)** $x = 3$ **c)** $x_1 = -2$, $x_2 = 2$

**4.295** **a)** $f'(x) = \frac{x^2}{\cos^2(x)} + 2x \cdot \tan(x)$

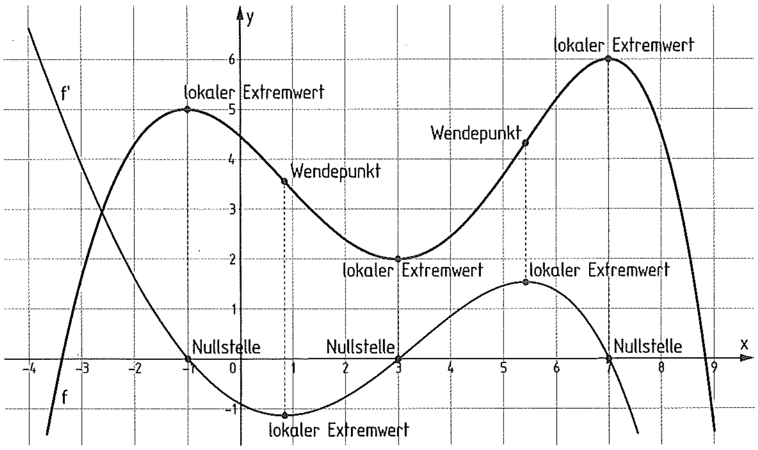
**4.296** $A'(t) = 2\pi\,\frac{cm^2}{s^2} \cdot t + 12\pi\,\frac{cm^2}{s}$

**4.297** $t_1$: $y = 3x - 9$, $t_2$: $y = -3x - 9$

**4.298** ***1)*** 4,890... m or 2,309... m ***2)*** 3,6 m

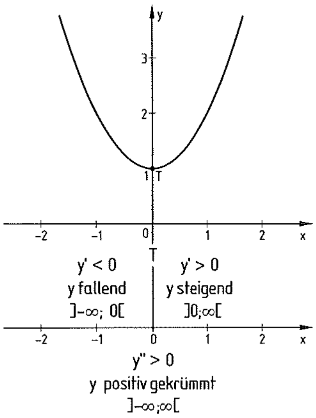
**4.299** ***1)*** $1{,}5\ \frac{m}{s}$ ***2)*** $-11\ \frac{m}{s}$ ***3)*** 86,185...°

**5.1**

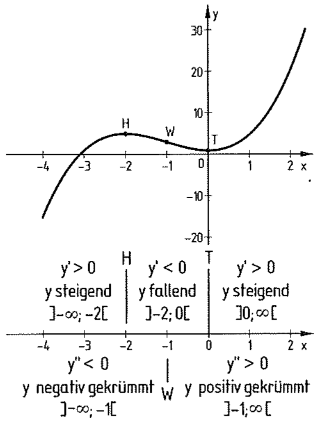



Lokale Extremwerte der Funktion f sind Nullstellen der Funktion f'. Wendepunkte der Funktion f sind lokale Extremwerte der Funktion f'.

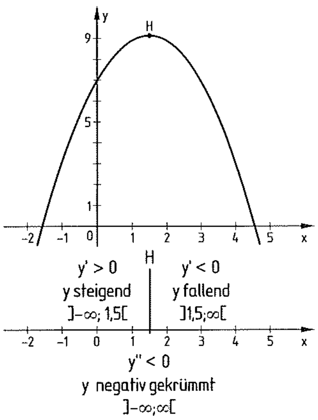
**5.3** ***a)***



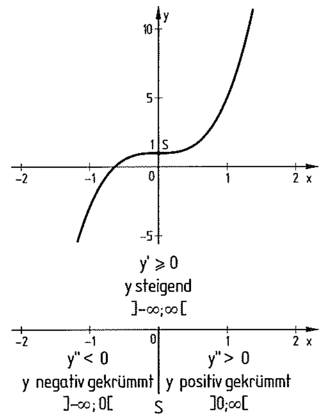

***c)***



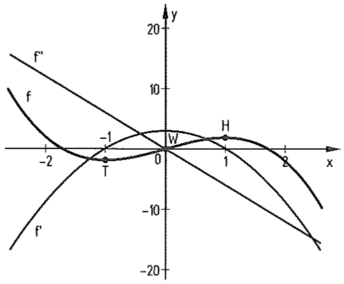

***b)***




***d)***

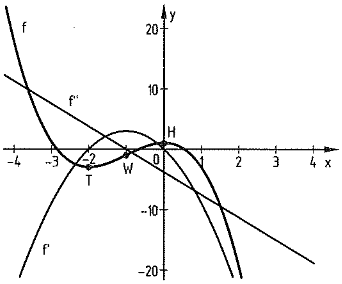


**5.4** **a) 1)**



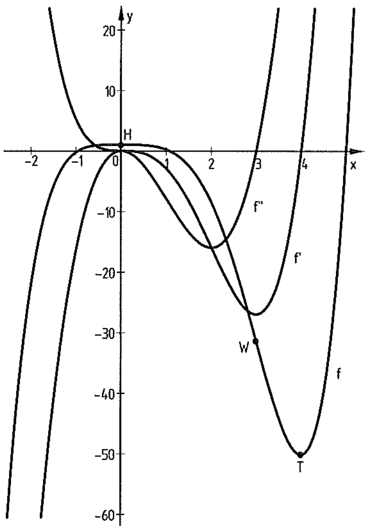

**2)** $T(-1|-2)$, im Tiefpunkt ist die erste Ableitung null und die zweite Ableitung ist größer null.
$W(0|0)$, im Wendepunkt ist die zweite Ableitung null.
$H(1|2)$, im Hochpunkt ist die erste Ableitung null und die zweite Ableitung ist kleiner null.

**b) 1)**



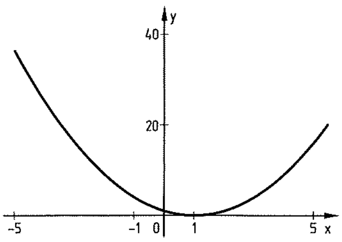

**2)** $T(-2|-3)$, im Tiefpunkt ist die erste Ableitung null und die zweite Ableitung ist größer null.
$W(-1|-1)$, im Wendepunkt ist die zweite Ableitung null.
$H(0|1)$, im Hochpunkt ist die erste Ableitung null und die zweite Ableitung ist kleiner null.

**c) 1)**




**2)** $H(0|1)$, im Hochpunkt sind die erste und die zweite Ableitung null, aber das Monotonieverhalten ändert sich.
$W(3|-31{,}4)$, im Wendepunkt ist die zweite Ableitung null.
$T(4|-50{,}2)$, im Tiefpunkt ist die erste Ableitung null und die zweite Ableitung ist größer null.

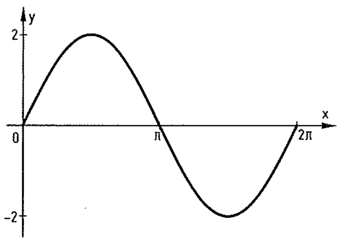
**5.5** **a)**




$T(1|0)$

$f'(x) = 2x - 2$, $f'(1) = 2 \cdot 1 - 2 = 0$

**b)**

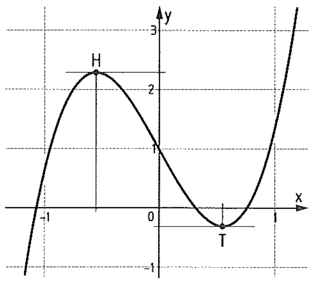



$H\left(\frac{\pi}{2}\middle|2\right)$, $T\left(\frac{3\pi}{2}\middle|-2\right)$

$f'(x) = 2 \cdot \cos(x)$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot 0 = 0$

$f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 \cdot 0 = 0$

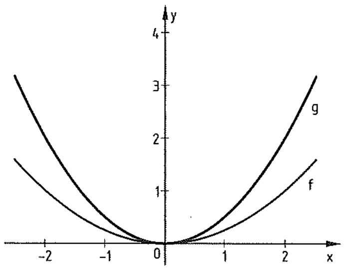
**5.6** ***1)*** **und** ***2)***




$x_H = -0{,}547\ldots,\ x_T = 0{,}547\ldots$

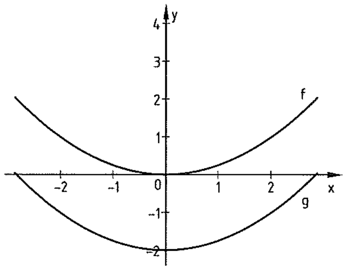
***3)*** Die Funktion ist streng monoton wachsend im Intervall $]-\infty; -0{,}547\ldots[$ und im Intervall $]0{,}547\ldots; \infty[$.
Sie ist streng monoton fallend im Intervall $]-0{,}547\ldots; 0{,}547\ldots[$.
Im Punkt $H(-0{,}547\ldots|2{,}314\ldots)$ hat die Funktion ein lokales Maximum und im Punkt $T(0{,}547\ldots|-0{,}314\ldots)$ ein lokales Minimum.

**5.7** ***1)***



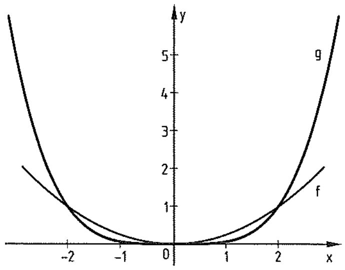

$T_f = T_g(0|0)$
Die Multiplikation einer Funktion mit einer Konstante verändert die Extrempunkte nicht.

***2)***



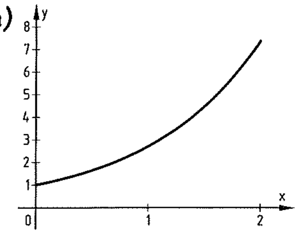

$T_f(0|0),\ T_g(0|-2)$
Die Addition einer Funktion mit einer Konstante verändert nur die y-Werte der Extrempunkte.

***3)***



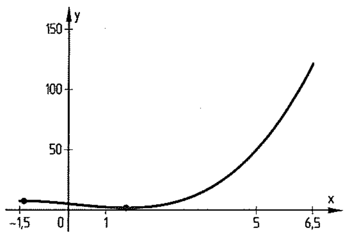

$T_f = T_g(0|0)$
Das Potenzieren einer Funktion verändert die Extrempunkte nicht.

**5.8** ***a)***



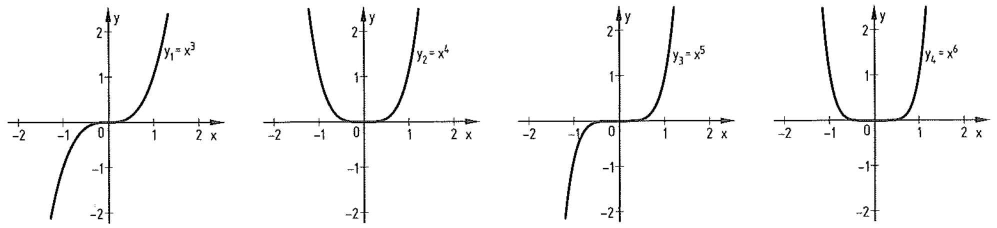

$R_1(0|1),\ R_2(2|e^2)$

***b)***




$H(-\sqrt{2}\,|6{,}828\ldots),\ T(\sqrt{2}\,|1{,}171\ldots),\ R(6{,}5|121{,}812\ldots)$

**5.9**




| | | | |
|---|---|---|---|
| $y_1'(0) = 0$, $y_1''(0) = 0$ | $y_2'(0) = 0$, $y_2''(0) = 0$ | $y_3'(0) = 0$, $y_3''(0) = 0$ | $y_4'(0) = 0$, $y_4''(0) = 0$ |
| Sattelpunkt $S(0\|0)$ | Extrempunkt $E(0\|0)$ | Sattelpunkt $S(0\|0)$ | Extrempunkt $E(0\|0)$ |

$y_1$ und $y_3$: Das Monotonieverhalten ändert sich an der Stelle $x_0 = 0$ nicht.
Der Punkt ist ein Sattelpunkt.

$y_2$ und $y_4$: Das Monotonieverhalten ändert sich an der Stelle $x_0 = 0$.
Der Punkt ist ein Extrempunkt.

**5.10** $f \rightarrow B$ f ist eine Polynomfunktion 3. Grads, ihre Ableitung daher eine Polynomfunktion 2. Grads. Die Steigung von f ist an den Stellen −2 und 2 gleich null, die Ableitung hat an den Stellen −2 und 2 Nullstellen. f ist im Bereich $]-\infty; 0[$ negativ gekrümmt und im Bereich $]0, \infty[$ positiv gekrümmt, die Ableitung ist im Bereich $]-\infty; 0[$ streng monoton fallend und im Bereich $]0, \infty[$ streng monoton steigend. Dieser Beschreibung entspricht die Grafik B.

$g \rightarrow C$ g ist eine Polynomfunktion 2. Grads, ihre Ableitung daher eine lineare Funktion. Die Steigung von g ist an der Stelle 2 gleich null, die Ableitung hat an der Stelle 2 eine Nullstelle. g ist im gesamten Definitionsbereich positiv gekrümmt, die Ableitung ist im gesamten Definitionsbereich streng monoton steigend. Dieser Beschreibung entspricht die Grafik C.

$h \rightarrow A$ h ist eine Polynomfunktion 3. Grads, ihre Ableitung daher eine Polynomfunktion 2. Grads. Die Steigung von h ist an der Stelle 1 gleich null, die Ableitung hat an der Stelle 1 eine Nullstelle. h ist im Bereich $]-\infty; 1[$ positiv gekrümmt und im Bereich $]1, \infty[$ negativ gekrümmt, die Ableitung ist im Bereich $]-\infty; 1[$ streng monoton steigend und im Bereich $]1, \infty[$ streng monoton fallend. Dieser Beschreibung entspricht die Grafik A.

**5.11** f: $E \rightarrow f'$, $D \rightarrow f''$

f ist eine Polynomfunktion 2. Grads, ihre erste Ableitung f′ ist daher eine lineare Funktion. Die Steigung von f an der Stelle $x = 0{,}5$ ist null. f′ muss daher an der Stelle $x = 0{,}5$ eine Nullstelle aufweisen. Dieser Beschreibung entspricht die Grafik E.

Die Ableitung der linearen Funktion f′ ist eine konstante Funktion. f′ hat die Steigung $k = 4$.

Die zweite Ableitung f″ ist daher $y = 4$. Dieser Beschreibung entspricht die Grafik D.

g: $C \rightarrow g'$, $H \rightarrow g''$

g ist eine Polynomfunktion dritten Grads, ihre erste Ableitung g′ ist daher eine Polynomfunktion 2. Grads. g hat bei $x_1 \approx -1{,}5$ und $x_2 \approx 0{,}2$ eine Extremstelle. g′ muss daher an diesen Stellen jeweils eine Nullstelle aufweisen. Dieser Beschreibung entspricht die Grafik C.

Die Ableitung der Polynomfunktion g′ ist eine lineare Funktion. Die Extremstelle von g′ und die Nullstelle von g″ müssen übereinstimmen. g′ ist positiv gekrümmt. Daher ist g″ eine lineare Funktion mit $k > 0$. Dieser Beschreibung entspricht die Grafik H.

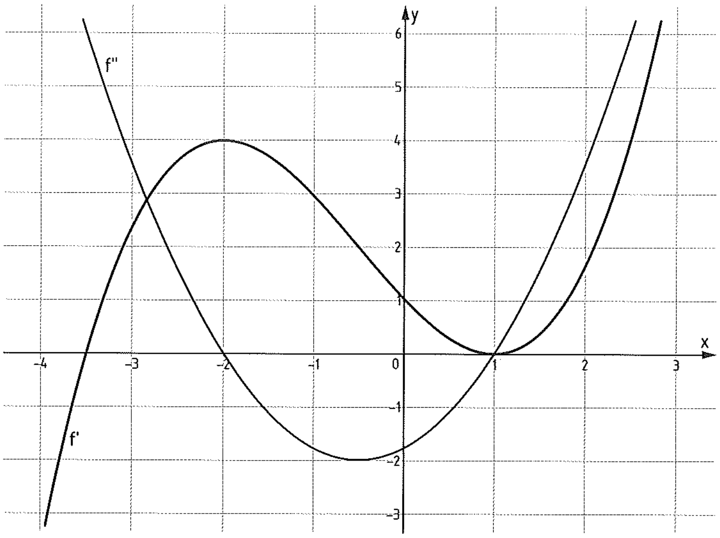
h: $G \rightarrow h'$, $B \rightarrow h''$

h ist eine Polynomfunktion dritten Grads, ihre erste Ableitung h′ ist daher eine Polynomfunktion 2. Grads. h hat bei $x_1 = 0$ und $x_2 \approx 2{,}7$ eine Extremstelle. h′ muss daher an diesen Stellen jeweils eine Nullstelle aufweisen. Die Steigung von h ist im Bereich $]-\infty; 0[$ negativ. Dieser Beschreibung entspricht die Grafik G.

Die Ableitung der Polynomfunktion h′ ist eine lineare Funktion. Die Extremstelle von h′ und die Nullstelle von h″ müssen übereinstimmen. h′ ist negativ gekrümmt. Daher ist h″ eine lineare Funktion mit $k < 0$. Dieser Beschreibung entspricht die Grafik B.

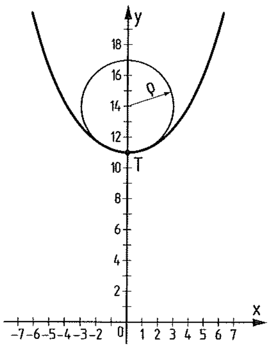
**5.12** ***B)*** Die Nullstellen der Geschwindigkeitsfunktion sind die Extremstellen der Wegfunktion.

**5.13** ***1)***




***2)*** Die Funktion f hat im Intervall [−4; 3] an der Stelle der Nullstelle von f′ eine Extremstelle. An der zweiten Nullstelle der Ableitungsfunktion f′ an der Stelle x = 1 hat auch die zweite Ableitung f″ eine Nullstelle. Die Funktion f hat daher an der Stelle x = 1 einen Sattelpunkt, aber keinen Extrempunkt.

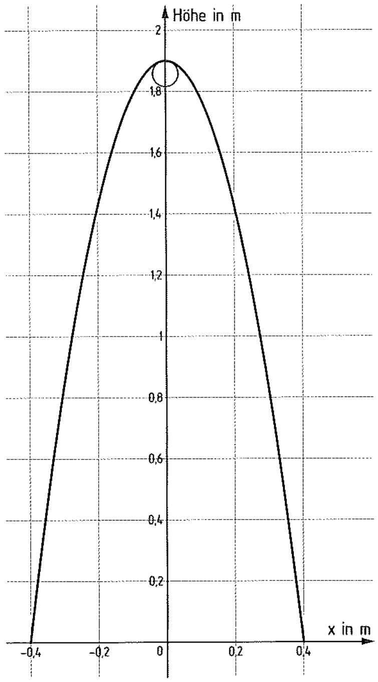
**5.16** ***1)*** und ***3)***




***2)*** $\kappa(0) = \frac{1}{3}$, $\rho(0) = 3$

**5.17** **1)** $h(x) = -11{,}875x^2 + 1{,}9$ mit $-0{,}4 \leq x \leq 0{,}4$
**2)** $r = 4{,}210...$ cm

**3)**




**5.18** Perlen mit kleinem Durchmesser berühren das Glas in genau einem Punkt, dem Scheitelpunkt des Glases. Die größte Perle mit dieser Eigenschaft hat einen Durchmesser von d = 1 cm. Ist der Perlendurchmesser größer als 1 cm, dann berührt die Perle das Glas längs eines horizontalen Kreises.

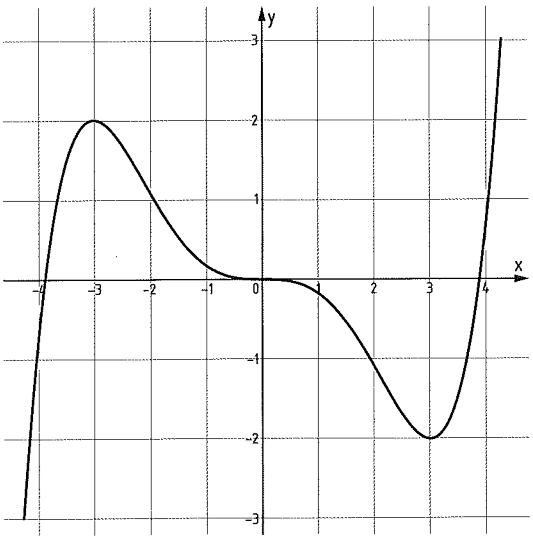
**5.19** vor Kurve 3

**5.20** Es gilt: $y = -a \cdot x^2 + c$, $y' = -2a \cdot x$, $y'' = -2a$
Der Scheitel dieser Parabel, ermittelt durch Lösen der Gleichung $y' = 0$, liegt an der Stelle $x = 0$.

Für die Krümmung gilt $\kappa(x) = \dfrac{y''}{\sqrt{(1+(y')^2)^3}} = \dfrac{-2a}{\sqrt{(1+(-2a \cdot x)^2)^3}}$.

Einsetzen von $x = 0$ ergibt $\kappa(0) = \dfrac{-2a}{\sqrt{(1+0^2)^3}} = \dfrac{-2a}{\sqrt{(1)^3}} = \dfrac{-2a}{1} = -2a = y''$.

**5.22**




Die Definitionsmenge ist die Menge der reellen Zahlen. Die Funktion ist eine ungerade Funktion. Sie hat drei Nullstellen $N_1(-3{,}9|0)$, $N_2(0|0)$, $N_3(3{,}9|0)$, zwei Extremwerte $H(-3|2)$ und $T(3|-2)$ und einen Wendepunkt $W(0|0)$, der zugleich Nullstelle ist. Die Wendetangente ist die x-Achse.

**5.23** ***a)*** H(1|2), T(3|−2), W(2|0) ***b)*** T(0|−8), H(4|0), W(2|−4) ***c)*** H(−2|5),T(2|−3),W(0|1)

Aufgaben 5.24 – 5.27: Auf die grafische Darstellung wird verzichtet.

**5.24** ***1)***

| | Nullstellen | Extrempunkte | Wendepunkte |
|---|---|---|---|
| a) bis *d)* | Mindestens eine Nullstelle, da der Grad der Funktion ungerade ist, und maximal drei Nullstellen, da eine Gleichung dritten Grads bis zu drei Lösungen hat. | Maximal zwei Extrempunkte, da der Grad der ersten Ableitung zwei ist und eine Gleichung zweiten Grads bis zu zwei Lösungen hat. | Ein Wendepunkt, da der Grad der zweiten Ableitung eins ist und eine lineare Gleichung ax + b = 0 mit a ≠ 0 eine Lösung hat. |
| *e), f)* | Maximal vier Nullstellen, da der Grad der Funktion gerade ist und eine Gleichung vierten Grads bis zu vier Lösungen hat. | Maximal drei Extrempunkte, da der Grad der ersten Ableitung drei ist und eine Gleichung dritten Grads bis zu drei Lösungen hat. | Maximal zwei Wendepunkte, da der Grad der zweiten Ableitung zwei ist und eine quadratische Gleichung bis zu zwei Lösungen hat. |

***2) a)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) nicht symmetrisch III) $N_1(0|0)$, $N_2(3|0)$
IV) H(1|4), T(3|0) V) W(2|2), t: y = −3x + 8

***b)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) ungerade Funktion III) $N_1(-3|0)$, $N_2(0|0)$, $N_3(3|0)$
IV) T(−1,732...|−1,039...), H(1,732...|1,039...) V) W(0|0), t: y = 0,9x

***c)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) nicht symmetrisch III) $N_1(-6{,}623...|0)$, $N_2(0|0)$, $N_3(3{,}623...|0)$
IV) H(−4|4), T(2|−1,4) V) W(−1|1,3), t: y = −1,35x − 0,05

***d)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) nicht symmetrisch III) $N_1(-3{,}708...|0)$, $N_2(0|0)$, $N_3(9{,}708...|0)$
IV) T(−2|−10), H(6|54) V) W(2|22), t: y = 12x − 2

***e)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) gerade Funktion III) $N_1(-2{,}891...|0)$, $N_2(2{,}891...|0)$
IV) $H_1(-2|6{,}\dot{3})$, T(0|1), $H_2(2|6{,}\dot{3})$ V) $W_1(-1{,}154...|3{,}962...)$, $W_2(1{,}154...|3{,}962...)$,
$t_1$: y = −4,105...x − 0,777..., $t_2$: y = 4,105...x − 0,777...

***f)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) gerade Funktion III) $N_1(-1|0)$, $N_2(1|0)$
IV) $T_1(-1|0)$, H(0|1), $T_2(1|0)$ V) $W_1(-0{,}577...|0{,}\dot{4})$, $W_2(0{,}577...|0{,}\dot{4})$,
$t_1$: y = 1,539...x + 1,333..., $t_2$: y = −1,539...x + 1,333...

**5.25** ***1)***

| | Nullstellen | Extrempunkte | Wendepunkte |
|---|---|---|---|
| a), *c)* | Mindestens eine Nullstelle, da der Grad der Funktion ungerade ist, und maximal drei Nullstellen, da eine Gleichung dritten Grads bis zu drei Lösungen hat. | Maximal zwei Extrempunkte, da der Grad der ersten Ableitung zwei ist und eine Gleichung zweiten Grads bis zu zwei Lösungen hat. | Ein Wendepunkt, da der Grad der zweiten Ableitung eins ist und eine lineare Gleichung ax + b = 0 mit a ≠ 0 eine Lösung hat. |
| *d), e)* | Bis zu vier Nullstellen, da der Grad der Funktion gerade ist und eine Gleichung vierten Grads bis zu vier Lösungen hat. | Maximal drei Extrempunkte, da der Grad der ersten Ableitung drei ist und eine Gleichung dritten Grads bis zu drei Lösungen hat. | Maximal zwei Wendepunkte, da der Grad der zweiten Ableitung zwei ist und eine quadratische Gleichung bis zu zwei Lösungen hat. |
| *b)* | Mindestens eine Nullstelle, da der Grad der Funktion ungerade ist, und maximal fünf Nullstellen, da eine Gleichung fünften Grads bis zu fünf Lösungen hat. | Maximal vier Extrempunkte, da der Grad der ersten Ableitung vier ist und eine Gleichung vierten Grads bis zu vier Lösungen hat. | Maximal drei Wendepunkte, da der Grad der zweiten Ableitung drei ist und eine Gleichung dritten Grads bis zu drei Lösungen hat. |

| | Nullstellen | Extrempunkte | Wendepunkte |
|---|---|---|---|
| *f)* | Bis zu sechs Nullstellen, da der Grad der Funktion gerade ist und eine Gleichung sechsten Grads bis zu sechs Lösungen hat. | Maximal fünf Extrempunkte, da der Grad der ersten Ableitung fünf ist und eine Gleichung fünften Grads bis zu fünf Lösungen hat. | Maximal vier Wendepunkte, da der Grad der zweiten Ableitung vier ist und eine Gleichung vierten Grads bis zu vier Lösungen hat. |

***2) a)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) nicht symmetrisch III) $N_1(0|0)$, $N_2(1|0)$
IV) $T(0|0)$, $H(0{,}\dot{6}|0{,}148...)$ V) $W(0{,}\dot{3}|0{,}074...)$, t: $y = 0{,}\dot{3}x - 0{,}\overline{037}$

***b)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) ungerade Funktion III) $N_1(-3{,}872...|0)$, $N_2(0|0)$, $N_3(3{,}872...|0)$
IV) $H(-3|5{,}4)$, $T(3|-5{,}4)$ V) $W_1(-2{,}121...|3{,}341...)$, $S(0|0)$, $W_2(2{,}121...|-3{,}341...)$,
$t_1$: $y = -3{,}375x - 3{,}818...$, $t_s$: $y = 0$, $t_2$: $y = -3{,}375x + 3{,}818...$

***c)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) nicht symmetrisch III) $N_1(-1{,}854...|0)$, $N_2(0|0)$, $N_3(4{,}854...|0)$
IV) $H(-1|1{,}25)$, $T(3|-6{,}75)$ V) $W(1|-2{,}75)$, t: $y = -3x + 0{,}25$

***d)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) nicht symmetrisch III) $N_1(-2{,}951...|0)$, $N_2(0|0)$
IV) $T(-2|-6)$ V) $W(-1|-3{,}25)$, $S(1|0{,}75)$, $t_1$: $y = 4x + 0{,}75$, $t_2$: $y = 0{,}75$

***e)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) nicht symmetrisch III) $N_1(0|0)$, $N_2(4|0)$
IV) $H(3|6{,}75)$ V) $S(0|0)$, $W(2|4)$, $t_1$: $y = 0$, $t_2$: $y = 4x - 4$

***f)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) nicht symmetrisch III) $N_1(-1{,}259...|0)$, $N_2(0|0)$
III) $T(-1|-1)$ V) $W(-0{,}736...|-0{,}64)$, $S(0|0)$, $t_1$: $y = 1{,}954...x + 0{,}8$, $t_2$: $y = 0$

**5.26** ***a)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) nicht symmetrisch III) $N_1(2|0)$, $N_2(8|0)$
IV) $H(4|6)$, $T(8|0)$ V) $W(6|3)$, t: $y = -\frac{9}{4}x + \frac{33}{2}$

***b)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) nicht symmetrisch III) $N_1(-0{,}143...|0)$
IV) $T(2|-6{,}925...)$, $H(6|-1)$ V) $W(4|-3{,}962...)$, t: $y = 2{,}\dot{2}x - 12{,}851...$

***c)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) nicht symmetrisch III) $N_1(-0{,}215...|0)$, $N_2(2{,}752...|0)$, $N_3(4{,}962...|0)$
IV) $H(1|5)$, $T(4|-3)$ V) $W\left(\frac{5}{2}\middle|1\right)$, $t_w$: $y = -4x + 11$

***d)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) nicht symmetrisch
III) $N_1(-1{,}732...|0)$, $N_2(0{,}267...|0)$, $N_3(1{,}732...|0)$, $N_4(3{,}732...|0)$
IV) $H_1(-1|3)$, $T(1|-1)$, $H_2(3|3)$ V) $W_1(-0{,}154...|1{,}\dot{2})$, $W_2(2{,}154...|1{,}\dot{2})$,
$t_1$: $y = -3{,}079...x + 0{,}745...$, $t_2$: $y = 3{,}079...x - 5{,}412...$

**5.27** ***a)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) nicht symmetrisch III) $N(9{,}561...|0)$
IV) $T(2{,}245...|1{,}971...)$, $H(6{,}754...|5{,}028...)$ V) $W(4{,}5|3{,}5)$, t: $y = 1{,}01\dot{6}t - 1{,}075...$

***b)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) nicht symmetrisch III) keine Nullstellen IV) $T(0{,}609...|1{,}987...)$
V) $W_1(-0{,}9375|4{,}632...)$, $W_2(0|3)$, $t_1$: $y = -1{,}081...t + 3{,}617...$ $t_2$: $y = -2{,}4t + 3$

***c)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) nicht symmetrisch III) $N(-2|0)$
IV) $H(-1{,}182...|1{,}648...)$, $T(-0{,}084...|0{,}987...)$ V) $W(-0{,}6\dot{3}|1{,}318...)$, t: $y = -0{,}903...t + 0{,}745...$

***d)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) nicht symmetrisch III) keine Nullstellen
IV) $T_1(-0{,}871...|1{,}814...)$, $H(0{,}715...|8{,}432)$, $T_2(2{,}406|0{,}585...)$
V) $W_1(-0{,}196...|4{,}768...)$, $W_2(1{,}696...|4{,}058...)$, $t_1$: $y = 6{,}408...t + 6{,}027...$,
$t_2$: $y = -7{,}158...t + 16{,}201...$

**5.28** ***1)*** –

***2)*** Die Koordinaten von T und H ergeben für das Symmetriezentrum die Koordinaten

$x_w = \frac{x_T + x_H}{2} = \frac{1 + (-2)}{2} = 0{,}5$ bzw. $y_w = \frac{y_T + y_H}{2} = \frac{0 + 3}{2} = 1{,}5$.

Das sind genau die Koordinaten des Wendepunkts $W(-0{,}5|1{,}5)$.

***3)*** Nullsetzen der ersten Ableitung ergibt $E_1\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} \middle| \frac{2b^3 + 27a^2d - 9abc - (2b^2 - 6ac) \cdot \sqrt{b^2 - 3ac}}{27a^2}\right)$

und $E_2\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} \middle| \frac{2b^3 + 27a^2d - 9abc + (2b^2 - 6ac) \cdot \sqrt{b^2 - 3ac}}{27a^2}\right)$ für die Extrempunkte und

Nullsetzen der zweiten Ableitung ergibt $W\left(-\frac{b}{3a} \middle| \frac{2b^3 + 27a^2d - 9abc}{27a^2}\right)$ für den Wendepunkt der

Funktion $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

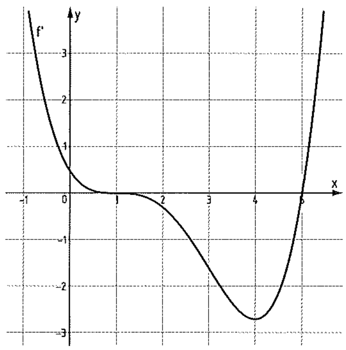
Die Koordinaten von $E_1$ und $E_2$ ergeben für das Symmetriezentrum die Koordinaten

$x_W = \frac{x_{E_1} + x_{E_2}}{2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac} + \left(-b - \sqrt{b^2 - 3ac}\right)}{2 \cdot 3a} = -\frac{b}{3a}$ bzw. $y_W = \frac{y_{E_1} + y_{E_2}}{2} =$

$$\frac{2b^3 + 27a^2d - 9abc - (2b^2 - 6ac) \cdot \sqrt{b^2 - 3ac} + 2b^3 + 27a^2d - 9abc + (2b^2 - 6ac) \cdot \sqrt{b^2 - 3ac}}{2 \cdot 27a^2} = \frac{2b^3 + 27a^2d - 9abc}{27a^2}.$$

Das sind genau die Koordinaten des Wendepunkts W.

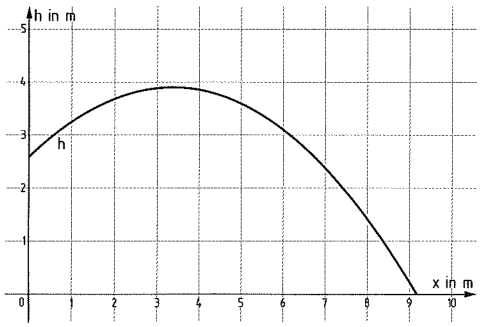
**5.29** ***1)*** Für die Ableitungen gilt $f'(x) = 0{,}1x^4 - 0{,}8x^3 + 1{,}8x^2 - 1{,}6x + 0{,}5$ und $f''(x) = 0{,}4x^3 - 2{,}4x^2 + 3{,}6x - 1{,}6$. An der Stelle $x = 1$ gilt $f'(1) = 0{,}1 - 0{,}8 + 1{,}8 - 1{,}6 + 0{,}5 = 0$ und $f''(1) = 0{,}4 - 2{,}4 + 3{,}6 - 1{,}6 = 0$ und daher $f'(1) = f''(1)$




***2)*** f hat an der Stelle $x = 1$ einen Wendepunkt, wenn sich an dieser Stelle das Krümmungsverhalten ändert. Daraus folgt für die Ableitung f', dass sich an der Stelle $x = 1$ ihr Monotonieverhalten ändert. Die dargestellte Funktion f' ist aber im Bereich um $x = 1$ monoton fallend und f kann daher an dieser Stelle keinen Wendepunkt haben.

**5.30** 1 ⟶ D, 2 ⟶ B

**5.31** ***1)***

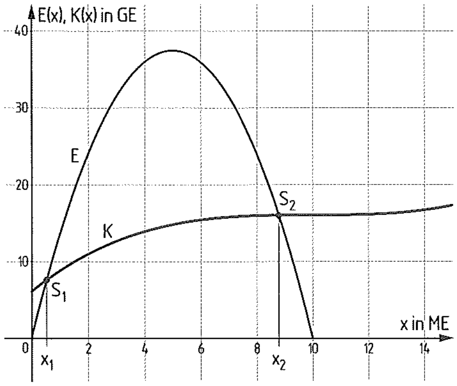



***2)*** 9,175... m Sprungweite, 3,914... m maximale Sprunghöhe

***3)*** 53,424...°

***4)*** h ist eine Polynomfunktion zweiten Grads. Sie kann daher maximal 2 – 2 = 0 Wendepunkte haben.

**5.32** ***1)***

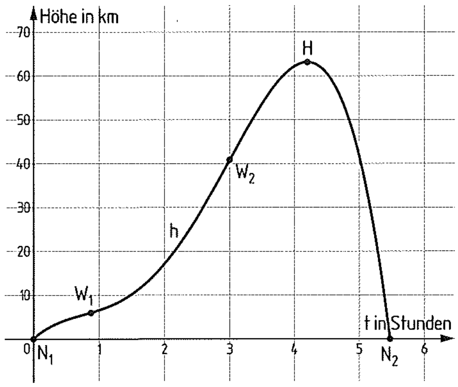



***2)*** Im Bereich zwischen den x-Koordinaten der Schnittpunkte $S_1$ und $S_2$ der Funktionen E und K ist der Erlös größer als die Kosten. Daher erzielt die Firma in diesem Bereich Gewinn.

***3)*** 22,854... GE maximaler Gewinn bei 4,721... ME

**5.33** ***1)*** I) $t \in [0; 5{,}488...]$ II) nicht symmetrisch III) $N_1(0|0)$, $N_2(5{,}488...|0)$,
IV) $H(4{,}212...|63{,}054...)$ V) $W_1(0{,}75|5{,}378...)$, $W_2(3|40{,}5)$

VI)




***2)*** 5,488... h ***3)*** 63,054... km

**5.34** ***1)*** 3 505 Besucher

***2)*** Von Beginn der Veranstaltung bis ca. 1 Stunde (0,989...) nach Beginn nimmt die Zahl der Besucher ab. Danach nimmt die Zahl der Besucher zu. Ab ca. 4,8 Stunden (4,844...) nach Beginn der Veranstaltung nimmt die Zahl der Besucher wieder ab bis sie ca. 7,3 Stunden (7,318...) nach Beginn null erreicht. Nach diesem Zeitpunkt nimmt bis zum Ende der Veranstaltung kein Besucher mehr an der Messe teil. (Die laut Graph auftretenden negativen Besucherzahlen sind nicht möglich.)

***3)*** um 14:51 Uhr, 8 088 Besucher

***4)*** Die Lösung gibt den Zeitpunkt an, zu dem sich die Besucheranzahl am stärksten ändert.

***5)*** um ca. 12:28 Uhr ($t = 2{,}461...$)

**5.35** ***1)*** 24 cm am Beginn der Messung bzw. 78 cm drei Tage nach Beginn der Messung

***2)*** am 6. Tag, 120 cm hoch

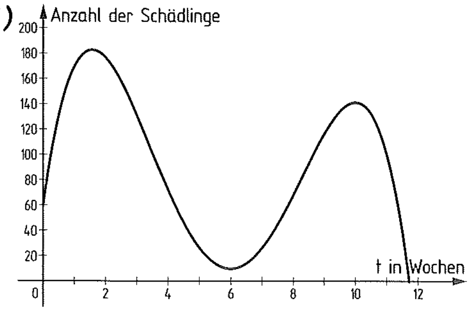
***3)*** Das Ergebnis gibt die mittlere Änderung der Wasserstandshöhe pro Tag vom zweiten bis zum vierten Tag an.

***4)*** ca. 2,5 Tage (2,535...) nach Beginn der Messung

***5)*** nach ca. 3 Tagen (3,083...) bzw. nach ca. 9 Tagen (8,916...)

***6)*** am 12. Tag (11,196...)

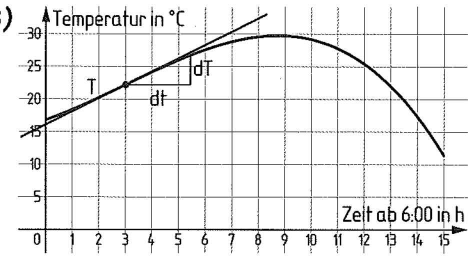
**5.36** ***1)***




Nach dem erstmaligen Einsatz steigt die Anzahl weiterhin an. Nach ca. 2 Wochen nimmt die Anzahl ab, um nach ca. 6 Wochen erneut anzusteigen. Nach ca. 10 Wochen nimmt die Anzahl erneut ab, bis nach ca. 12 Wochen keine Schädlinge mehr vorhanden sind.

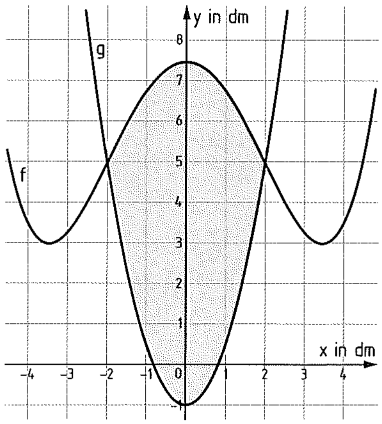
***2)*** nach 6 Wochen, 10 Schädlinge
***4)*** nach 11,727... Wochen

**5.37** ***1)*** 29,822... °C
***2)*** t: $y = 1{,}98t + 16{,}3$
Die Steigung der Wendetangente gibt die größte momentane Änderung der Temperatur an diesem Tag an.
***3)***




Die größte momentane Änderungsrate der Temperatur beträgt 1,98 $\frac{°C}{h}$.

**5.38** ***1)***




***2)*** Berechnung der Schnittstellen durch Lösen der Gleichung $f(x) = g(x)$ ergibt $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ und zwei weitere Werte. Berechnung der Wendestellen der Funktion f durch Lösen der Gleichung $f''(x) = 0$ ergibt auch $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$.
***3)*** 4 dm Breite und 8,5 dm Höhe

**5.41** Polstellen bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$, eine weitere Asymptote mit $k > 0$ und $d = 0$
$D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$
ungerade
N(0|0)
Hochpunkt bei $x_H \approx -1{,}5$, $y_H \approx -0{,}7$, Tiefpunkt bei $x_T \approx 1{,}5$, $y_T \approx 0{,}7$
W(0|0)
$]-\infty; x_H[$ streng monoton steigend, $]x_H; -1[$ streng monoton fallend, $]-1; 1[$ streng monoton fallend,

$]1; x_T[$ streng monoton fallend, $]x_H; \infty[$ streng monoton steigend
$]-\infty; -1[$ negativ gekrümmt, $]-1; 0[$ positiv gekrümmt, $]0; 1[$ negativ gekrümmt, $]1; \infty[$ positiv gekrümmt

**5.42** $1 \to f'$: D, $f''$: A $\quad 2 \to g'$: C, $g''$: B

Aufgaben 5.43 – 5.45: Auf die grafische Darstellung wird verzichtet.

**5.43** ***a)*** I) $a_1$: $x = -2$, $a_2$: $x = 2$, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2; 2\}$ II) gerade Funktion III) keine Nullstellen
IV) $H(0|-0{,}25)$ V) keine Wendepunkte VI) $a_3$: $y = 0$

***b)*** I) $a_1$: $x = -3$, $a_2$: $x = 3$, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-3; 3\}$ II) gerade Funktion III) keine Nullstellen
IV) $T(0|0{,}\dot{2})$ V) keine Wendepunkte VI) $a_3$: $y = 0$

***c)*** I) $a_1$: $x = 1$, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ II) nicht symmetrisch III) keine Nullstellen
IV) keine Extrempunkte V) keine Wendepunkte VI) $a_2$: $y = 0$

***d)*** I) $a_1$: $x = 4$, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{4\}$ II) nicht symmetrisch III) keine Nullstellen
IV) keine Extrempunkte V) keine Wendepunkte VI) $a_2$: $y = 0$

**5.44** ***a)*** I) $a_1$: $x = -2$, $a_2$: $x = 2$, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2; 2\}$ II) ungerade Funktion III) $N(0|0)$
IV) keine Extrempunkte V) $W(0|0)$ VI) $a_3$: $y = 0$

***b)*** I) $a_1$: $x = -1$, $a_2$: $x = 1$, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$ II) gerade Funktion III) $N(0|0)$
IV) $H(0|0)$ V) keine Wendepunkte VI) $a_3$ : $y = 1$

***c)*** I) $a_1$: $x = -2$, $a_2$: $x = 2$, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2; 2\}$ II) nicht symmetrisch III) $N(1|0)$
IV) keine Extrempunkte V) $W(0{,}362...|0{,}164...)$ VI) $a_3$: $y = 0$

***d)*** I) $a_1$: $x = -1$, $a_2$: $x = 1$, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$ II) gerade Funktion III) keine Nullstellen
IV) $H(0|-1)$ V) keine Wendepunkte VI) $a_3$: $y = 1$

**5.45** ***a)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) gerade Funktion III) keine Nullstellen
IV) $H(0|1)$ V) $W_1(-0{,}577...|0{,}75)$, $W_2(0{,}577...|0{,}75)$ VI) a: $y = 0$

***b)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) ungerade Funktion III) $N(0|0)$
IV) $T(-1|-0{,}5)$, $H(1|0{,}5)$ V) $W_1(-1{,}732...|-0{,}433...)$, $W_2(0|0)$, $W_3(1{,}732...|0{,}433...)$
VI) a : $y = 0$

***c)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) nicht symmetrisch III) $N(1|0)$
IV) $H(-1|2)$, $T(1|0)$ V) $W_1(-1{,}732...|1{,}866...)$, $W_2(0|1)$, $W_3(1{,}732...|0{,}133...)$
VI) a : $y = 1$

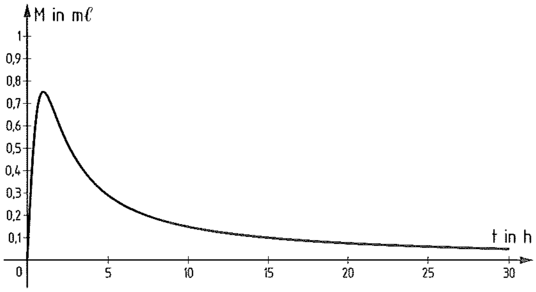
***d)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) ungerade Funktion III) $N(0|0)$
IV) keine Extrempunkte V) $W_1(-1{,}732...|-1{,}299...)$, $S(0|0)$, $W_2(1{,}732...|1{,}299...)$
VI) a : $y = x$

**5.46** f: $H(0|2)$, $W_1\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\middle|\frac{3}{2}\right)$, $W_2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\middle|\frac{3}{2}\right)$, $t_1$: $y = \frac{\sqrt{27}}{8} \cdot x + \frac{9}{4}$, $t_2$: $y = -\frac{\sqrt{27}}{8} \cdot x + \frac{9}{4}$
g: $H(0|2)$, $W_1\left(-2\middle|\frac{3}{2}\right)$, $W_2\left(2\middle|\frac{3}{2}\right)$, $t_1$: $y = \frac{3}{8} \cdot x + \frac{9}{4}$, $t_2$: $y = -\frac{3}{8} \cdot x + \frac{9}{4}$
Die Koordinaten der Extrempunkte sind gleich. Die y-Koordinaten der Wendepunkte sind gleich. Die y-Achsenabstände der Wendetangenten sind gleich.

**5.47** ***1)*** nach 1 Stunde

***2)*** zum Zeitpunkt $t = 1{,}732...$ h

***3)***




**5.48** ***1)*** I) $a_1$: $x = -a$, $a_2$: $x = a$, $D_E$: $|x| \neq a$, $\ell \neq 0$

II) gerade Funktion

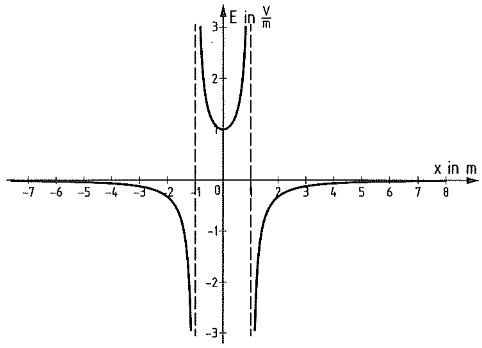
III) keine Nullstellen

IV) $T\left(0\middle|\frac{Q}{\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \ell \cdot a}\right)$

V) keine Wendepunkte

VI) $a_3$: $y = 0$

VII)




***2)*** Die gegebene Funktion E(x) ist eine gebrochen rationale Funktion. Der Grad des Zählerpolynoms ist null, der Grad des Nennerpolynoms ist 2.
Wegen Grad des Zählerpolynoms < Grad des Nennerpolynoms ist die x-Achse Asymptote der Funktion.
Die elektrische Feldstärke E geht für $x \to \pm\infty$ gegen null und es gilt $\lim\limits_{x \to \pm\infty} E(x) = 0$.

**5.51** ***a)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) ungerade Funktion III) $N_k(k \cdot \pi|0)$, $k \in \mathbb{Z}$

IV) $H_k\left(\frac{4k+1}{2} \cdot \pi\middle|1\right)$, $T_k\left(\frac{4k+3}{2} \cdot \pi\middle|-1\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ V) $W_k(k \cdot \pi|0)$, $k \in \mathbb{Z}$

***b)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) gerade Funktion III) $N_k\left(\frac{2k+1}{4} \cdot \pi\middle|0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

IV) $H_k(k \cdot \pi|1)$, $T_k\left(\frac{2k+1}{2} \cdot \pi\middle|-1\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ V) $W_k\left(\frac{2k+1}{4} \cdot \pi\middle|0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

***c)*** I) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ II) ungerade Funktion III) $N_k\left(\frac{2k+1}{2} \cdot \pi|0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

IV) ..., $H_k(-9{,}317...|0{,}161...)$, $T_k(-6{,}121...|-0{,}161...)$, $H_{k+1}(-2{,}798...|0{,}336...)$, $T_{k+1}(2{,}798...|-0{,}336...)$, $H_{k+2}(6{,}121...|0{,}161...)$, $T_{k+2}(9{,}317...|-0{,}161...)$, ...

V) ..., $W_k(-10{,}809...|0)$, $W_{k+1}(-7{,}587...|0)$, $W_{k+2}(-4{,}222...|0)$, $W_{k+3}(4{,}222...|0)$, $W_{k+4}(7{,}587...|0)$, ...

**5.52** ***a)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) nicht symmetrisch III) $N_k\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\middle|0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

IV) $T_k\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\middle|-1{,}414...\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; $H_k\left(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi\middle|1{,}414...\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ V) $W_k\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\middle|0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

***b)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) gerade Funktion III) $N_k(k\pi|0)$, $k \in \mathbb{Z}$

IV) $T_k(k\pi|0)$, $k \in \mathbb{Z}$; $H_k\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\middle|1\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ V) $W_k\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\middle|1\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

***c)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) ungerade Funktion

III) $N_{k_1}(k_1\pi|0)$, $k_1 \in \mathbb{Z}$; $N_{k_2}\left(\frac{2\pi}{3} + 2k_2\pi\middle|0\right)$, $k_2 \in \mathbb{Z}$; $N_{k_3}\left(\frac{4\pi}{3} + 2k_3\pi\middle|0\right)$, $k_3 \in \mathbb{Z}$

IV) $H_{k_1}(0{,}935... + 2k_1\pi|1{,}760...)$, $k_1 \in \mathbb{Z}$; $H_{k_2}(3{,}709... + 2k_2\pi|0{,}369...)$, $k_2 \in \mathbb{Z}$;
$T_{k_1}(2{,}573... + 2k_1\pi|-0{,}369...)$, $k_1 \in \mathbb{Z}$; $T_{k_2}(5{,}347... + 2k_2\pi|-1{,}760...)$, $k_2 \in \mathbb{Z}$

V) $W_{k_1}(k_1\pi|0)$, $k_1 \in \mathbb{Z}$; $W_{k_2}(1{,}696... + 2k_2\pi|0{,}744...)$, $k_2 \in \mathbb{Z}$;
$W_{k_3}(4{,}587... + 2k_3\pi|-0{,}744...)$, $k_3 \in \mathbb{Z}$

**5.53** ***a)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) ungerade Funktion III) $N(0|0)$
IV) keine Extrempunkte V) $W_k(2k\pi|y(2k\pi))$, $k \in \mathbb{Z}$; $S_k(\pi + 2k\pi|y(\pi + 2k\pi))$, $k \in \mathbb{Z}$

***b)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) nicht symmetrisch III) $N(0{,}739...|0)$
IV) keine Extrempunkte
V) $W_k\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\middle|y\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; $S_k\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\middle|y\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

***c)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) nicht symmetrisch III) $N(-1{,}934...|0)$
IV) keine Extrempunkte V) $S_k(2k\pi|y(2k\pi))$, $k \in \mathbb{Z}$; $W_k(\pi + 2k\pi|y(\pi + 2k\pi))$, $k \in \mathbb{Z}$

**5.54** ***a)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) gerade Funktion III) keine Nullstellen
IV) $T(0|1)$ V) keine Wendepunkte

***b)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) nicht symmetrisch III) $N(0|0)$
IV) $T(-1|-0{,}367...)$ V) $W(-2|-0{,}270...)$ VI) $a: y = 0$

***c)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) nicht symmetrisch III) $N(0|0)$
IV) $H(-2|0{,}541...)$, $T(0|0)$ V) $W_1(-3{,}414...|0{,}383...)$, $W_2(-0{,}585...|0{,}191...)$ VI) $a: y = 0$

**5.55** ***a)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) nicht symmetrisch III) $N(0|0)$
IV) $H(1|0{,}367...)$ V) $W(2|0{,}270...)$ VI) $a: y = 0$

***b)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) nicht symmetrisch III) $N(0|0)$
IV) $T(0|0)$, $H(1|0{,}135....)$ V) $W_1(0{,}292...|0{,}047...)$, $W_2(1{,}707...|0{,}095...)$ VI) $a: y = 0$

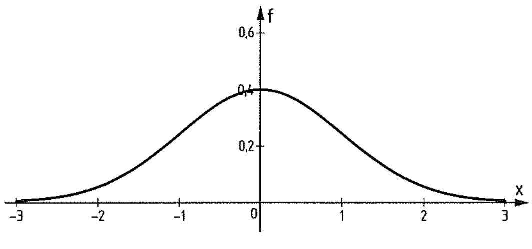
***c)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) nicht symmetrisch III) $N(-2|0)$
IV) $T(-4|-0{,}270...)$ V) $W(-6|-0{,}199...)$ VI) $a: y = 0$

**5.56** ***a)*** I) $D_f = \mathbb{R}^+$ II) nicht symmetrisch III) $N(1|0)$
IV) $T\left(\frac{1}{e}\middle|-\frac{1}{e}\right)$ V) keine Wendepunkte

***b)*** I) $D_f = \mathbb{R}^+$ II) nicht symmetrisch III) $N(1|0)$
IV) $T(0{,}606...|-0{,}183...)$ V) $W(0{,}223...|-0{,}074...)$

***c)*** I) $D_f = \mathbb{R}^+$ II) nicht symmetrisch III) $N(e|0)$
IV) $H(1|1)$ V) keine Wendepunkte

**5.57** I) $D_f = \mathbb{R}$
II) gerade Funktion
III) keine Nullstellen
IV) $H\left(0\middle|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$
V) $W_1\left(-1\middle|\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$, $W_2\left(1\middle|\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$




**5.58** ***1)*** Die mittlere Höhe des Wasserstands innerhalb von 24 Stunden beträgt 1,5 m.
Die maximale Abweichung des Wasserstands von der mittleren Höhe beträgt 0,7 m.
Wegen $\frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow T = 12$ wiederholt sich der Vorgang alle 12 Stunden.
***2)*** von ca. 1:30 Uhr bis ca. 4:30 Uhr und von ca. 13:30 Uhr bis ca. 16:30 Uhr
($1{,}519...\text{ h} \leq t \leq 4{,}480...\text{ h}$ und $13{,}519...\text{ h} \leq t \leq 16{,}480...\text{ h}$)
***3)*** um 3:00 Uhr und um 15:00 Uhr; 2,2 m
***4)*** um 9:00 Uhr und um 21:00 Uhr
***5)*** $-0{,}303...$ m
***6)*** um 0:00 Uhr, um 6:00 Uhr, um 12:00 Uhr und um 18:00 Uhr; 1,5 m

Hinweis: Die Abbildung im Buch veranschaulicht die berechneten Ergebnisse nur näherungsweise.

**5.59** ***1)*** 3,882... Stunden nach der Injektion; 3,053... $\frac{\text{mg}}{\text{L}}$
***2)*** 7,764... Stunden nach der Injektion
***3)*** 17,074... Stunden nach der Injektion
***4)*** Die Funktion nähert sich asymptotisch der t-Achse. Die Konzentration des Medikaments wird mit der Zeit immer kleiner, erreicht aber (theoretisch) nie den Wert null.

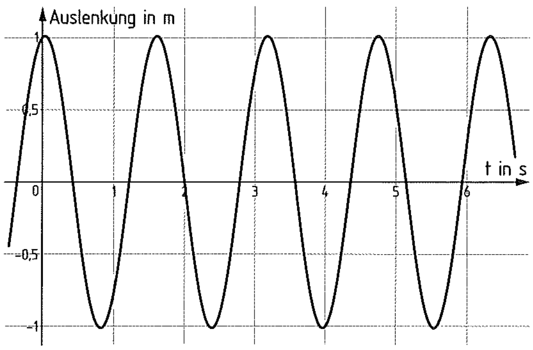
**5.60** ***1)*** I) $D_f = \mathbb{R}$
II) nicht symmetrisch
III) $N(0|0)$
IV) $H(0{,}173...|0{,}015)$
V) $W(0{,}346...|0{,}01125)$
***2)*** Momentangeschwindigkeit
***3)*** Die t-Koordinate gibt an, nach wie viel Sekunden die maximale Auslenkung erreicht ist. Die y-Koordinate gibt den maximalen Abstand von der Ruhelage in Meter an.

**5.61** $N_1(0|0)$, $N_2\left(\frac{5\pi}{7}\middle|0\right)$, $N_3\left(\frac{10\pi}{7}\middle|0\right)$
$H_1(1{,}020...|1{,}729...)$, $H_2(5{,}508...|0{,}704...)$
$T(3{,}264...|-1{,}104...)$
$W_1(2{,}041...|0{,}398...)$, $W_2(4{,}285...|-0{,}254...)$

**5.62** ***1)*** $a = 0{,}03$ m, $b = \frac{\pi}{2}\,\text{s}^{-1}$
***2)*** I) $D_f = [0; 8]$
II) ungerade Funktion
III) $N_1(0|0)$, $N_2(2|0)$, $N_3(4|0)$, $N_4(6|0)$, $N_5(8|0)$
IV) $H_1(1|0{,}03)$, $T_1(3|-0{,}03)$, $H_2(5|0{,}03)$, $T_2(7|-0{,}03)$
V) $W_1(0|0)$, $W_2(2|0)$, $W_3(4|0)$, $W_4(6|0)$, $W_5(8|0)$

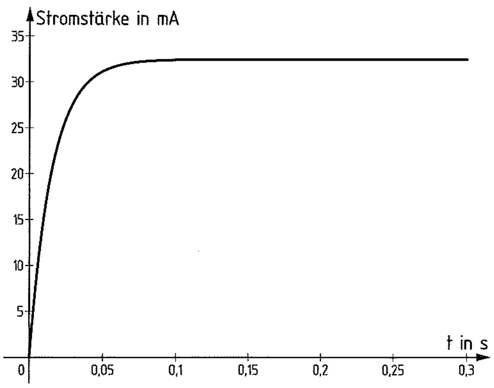
**5.63** ***1)*** I) $D_f = \mathbb{R}$
II) nicht symmetrisch
III) $N_k(0{,}429... + k \cdot \frac{\pi}{4}|0)$, $k \in \mathbb{Z}$
IV) $H_k(0{,}037... + k \cdot \frac{\pi}{2}|1{,}011...)$, $k \in \mathbb{Z}$
$T_k(0{,}822... + k \cdot \frac{\pi}{2}|-1{,}011...)$, $k \in \mathbb{Z}$
V) $W_k(0{,}429... + k \cdot \frac{\pi}{4}|0)$, $k \in \mathbb{Z}$

***2)***




**5.64** ***1)*** I) $D_f = \mathbb{R}$
II) nicht symmetrisch
III) $N(0|0)$
IV) keine Extrempunkte
V) keine Wendepunkte
VI) a: $y = I$
***2)*** $\overline{i(t)} = k \cdot I \cdot t$

***3)*** 64,685... $\text{s}^{-1}$



**5.66** $1 \rightarrow D$
Der Funktionswert des Extrempunkts E ist 4, A müsste daher $y(2) = 4$ lauten, um richtig zu sein.
Der x-Wert des Extrempunkts E ist 2, die Gleichungen B und C betreffen aber die Stelle $x = 4$.
Im Extrempunkt E ist die erste Ableitung null, D ist daher richtig.
$2 \rightarrow B$
Der x-Wert des Wendepunkts W ist 4, die Gleichungen A und D betreffen aber die Stelle $x = 2$.
Im Wendepunkt W ist die zweite Ableitung null, B ist daher richtig.
Die Richtigkeit der Aussage C kann nicht entschieden werden. Nur wenn der Wendepunkt W ein Sattelpunkt ist, ist C richtig, sonst ist C falsch.

**5.67** ***1)*** $y(0) = 0 \Rightarrow$ Nullstelle der Funktion
An der Stelle $x = 0$ ist der Funktionswert $y = 0$.
$y(2) = 4 \Rightarrow P(2|4)$
An der Stelle $x = 2$ ist der Funktionswert $y = 4$.
$y'(2) = 0 \Rightarrow$ Extrempunkt an der Stelle $x = 2$
Die Tangente ist waagrecht, die erste Ableitung daher null.
$y''(4) = 0 \Rightarrow$ Wendepunkt an der Stelle $x = 4$
Im Wendepunkt ändert sich das Krümmungsverhalten, die zweite Ableitung ist daher null.
***2)*** $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x$

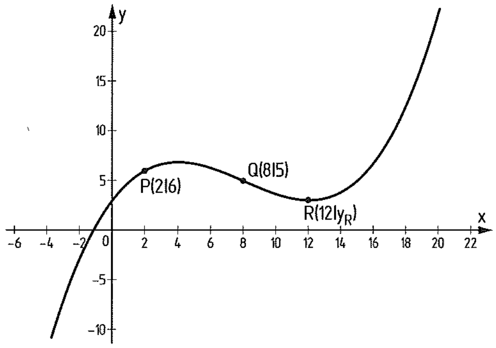
**5.68** ***1)*** und ***2)*** $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{1}{3}$

**5.69** ***1)*** $f(x) = ax^2 + bx + c$ und $f'(x) = 2ax + b$

$$\begin{array}{ll} \text{I: } f(3) = 0 & \text{I: } 9a + 3b + c = 0 \\ \text{II: } f'(3) = 0 & \text{II: } 6a + b = 0 \\ \underline{\text{III: } f'(-2) = -2} & \underline{\text{III: } -4a + b = -2} \end{array}$$

***2)*** $f(x) = \frac{1}{5}x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{9}{5}$

**5.70** ***1)*** $f(x) = \frac{1}{72}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 2x + \frac{29}{9}$
***2)*** $y_R = \frac{29}{9}$




***3)*** Die Polynomfunktion dritten Grads ist symmetrisch zum Wendepunkt. Das Maximum muss daher symmetrisch zum Tiefpunkt $R\left(12\middle|\frac{29}{9}\right)$ mit Symmetriezentrum $Q(8|5)$ sein.
$x_H = 8 - (12 - 8) = 4,\ y_H = 5 + \left(5 - \frac{29}{9}\right) = \frac{61}{9} \Rightarrow H\left(4\middle|\frac{61}{9}\right)$

**5.71** $f(x) = \frac{3}{200}x^3 - \frac{99}{200}x^2 + \frac{81}{25}x$

**5.72** ***a)*** $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2$
***b)*** $f(x) = -\frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2$
***c)*** $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 3$
***d)*** $f(x) = -2x^3 - x^2 + 5x - 6$

**5.73** ***1)*** Wegen der angegebenen Symmetrie muss die Funktionsgleichung in Form $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ haben. Um die Koeffizienten a, b, c zu bestimmen, sind drei Bedingungen notwendig. Berühren der x-Achse an der Stelle $x = 0$ ergibt $f(0) = 0$ und $f'(0) = 0$, der Wendepunkt $W_1(-1|5)$ ergibt

$f(-1) = 5$ und $f''(-1) = 0$. Beliebige drei dieser vier Bedingungen ergeben ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem mit a, b und c als Lösung.

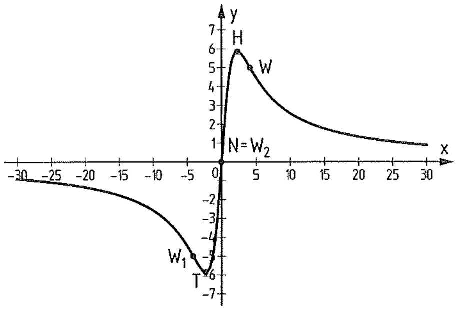
**2)** $f(x) = -x^4 + 6x^2$

**5.74** $f(x) = 0{,}020...x^4 + 0{,}074...x^3 - 0{,}558...x^2 - 0{,}883...x + 4$

**5.75** $g_{OP}$: $y = \frac{4}{5}x$, par: $f(x) = -\frac{8}{225}x^2 + \frac{20}{9}x - \frac{128}{9}$, $g_Q$: $x = 50$

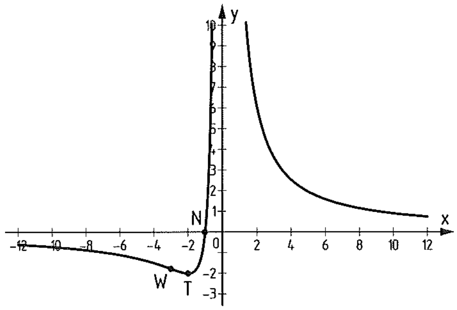
**5.76** **a)** $a = \frac{80}{3}$, $b = \frac{16}{3}$

I) $D_f = \mathbb{R}$
II) ungerade Funktion
III) $N(0|0)$
IV) $T(-2{,}309...|-5{,}773...)$, $H(2{,}309...|5{,}773...)$
V) $W_1(-4|-5)$, $W_2(0|0)$, $W(4|5)$
VI) a: $y = 0$
Die Berechnungen stimmen mit der Grafik überein.




**b)** $a = 8$, $b = 8$

I) $a_1$: $x = 0$, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
II) nicht symmetrisch
III) $N(-1|0)$
IV) $T(-2|-2)$
V) $W(-3|-1{,}\dot{7})$
VI) $a_2$: $y = 0$
Die Berechnungen stimmen mit der Grafik überein.




**5.77** **1)** zB $f(x) = -0{,}025x^3 + 0{,}3x$ für $-2 \leq x \leq 2$; 16,699... °
**2)** 6,805... m

**5.78** **a)** $f(x) = -0{,}000774...x^3 + 0{,}00327...x^2 + 0{,}363...x + 1{,}3$
**b)** **1)** 2,7488 m **2)** 4,779... m **3)** 24,742... m **4)** 23,745... m

**5.79** **1)** $h(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$ **2)** 2,571... m **3)** 15,647... m **4)** 2,352... m; 48,366...°

**5.81** $K'(x) = 3x^2 - 16x + 37$; bei ca. 3 Stück $(2{,}\dot{6})$

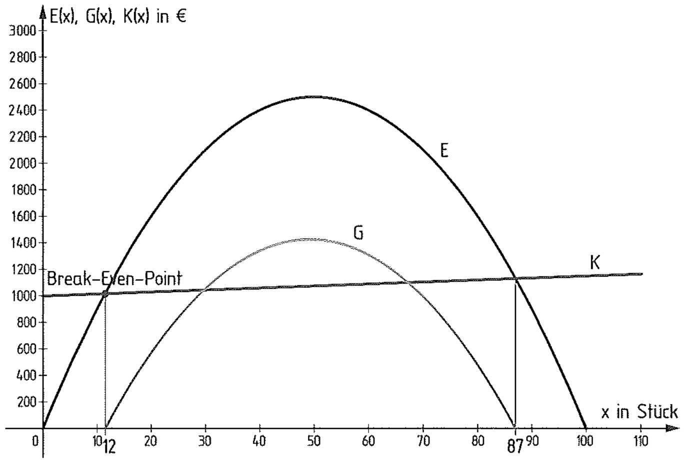
**5.82** **1)** $K'(x) = 0{,}75x^2 - 165x + 9\,000$ **2)** 110 ME; $K'''(x) = 1{,}5 > 0 \Rightarrow$ Minimum

**5.83** **1)** Gewinnschwelle bei ca. 1 270 Stück (1 270,166...),
Gewinngrenze bei ca. 78 730 Stück (78 729,833...)
**2)** 40 000 Stück

**5.84** bei ca. 8 333 Stück $(8\,333{,}\dot{3})$

**5.85** **1)** $K(x) = 0{,}4x + 1\,200$
**2)** $S_1$(16,391... ME|1 206,56 €), $S_2$(73,208... ME|1 229,28 €)
**3)** Der x-Wert von $S_1$ ist die Gewinnschwelle, der x-Wert von $S_2$ ist die Gewinngrenze.
**4)** 807,04 €

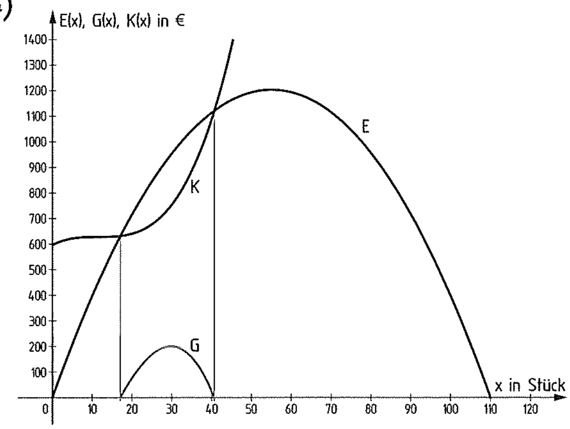
**5.86** ***1)*** $K(x) = 1{,}5x + 1\,000$
***2)*** $E(x) = -x^2 + 100x$,
$G(x) = -x^2 + 98{,}5x - 1\,000$
***3)*** 49 Stück (49,25)
***4)***




Gewinnbereich von 12 Stück (11,493...) bis 87 Stück (87,006...)

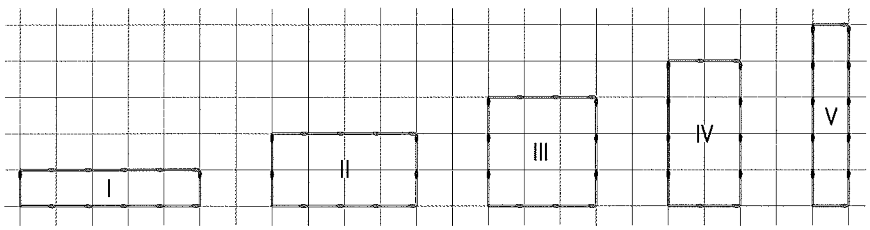
**5.87** ***1)*** $K(x) = 0{,}04x^3 - 1{,}1x^2 + 10x + 1\,604$ ***2)*** $9{,}1\dot{6}$ Mengeneinheiten

**5.88** ***1)*** $p(x) = -0{,}4x + 44$, $x \in ]0$ Stück; 110 Stück$[$
***2)*** 55 Stück
***3)*** $K(x) = 0{,}02x^3 - 0{,}69x^2 + 8x + 600$
***4)***




Die Gewinnfunktion ist die Differenz von Erlösfunktion minus Kostenfunktion.

**5.89** ***1)***



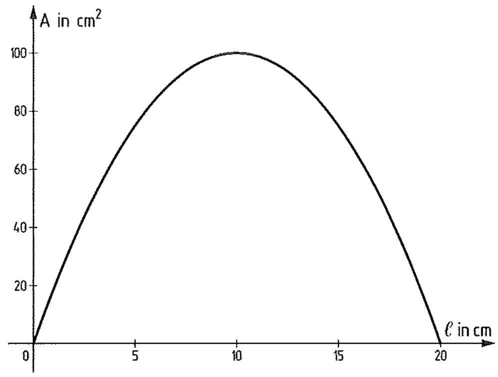

***2)*** III

**5.90** 52 ME

**5.91** ***1)*** 60 min
***2)*** Die Beschleunigungsfunktion ist die Ableitung der Geschwindigkeitsfunktion. Bei maximaler Geschwindigkeit hat die Geschwindigkeitsfunktion einen Hochpunkt und daher die Steigung null. Die Ableitung ist an dieser Stelle null.

**5.92** ***1)*** 28 und 28
***2)*** 28 und 28
***3)*** $x + y = a \Rightarrow y = a - x$
zu ***1)*** $x, y \rightarrow$ Maximum, $(x \cdot (a - x))' = (ax - x^2)' = a - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2}$, $(x \cdot y)'' = -2 < 0$
zu ***2)*** $x^2 + y^2 \rightarrow$ Minimum, $(x^2 + (a - x)^2)' = (2x^2 - 2ax + a^2)' = 4x - 2a = 0 \Rightarrow$
$x = \frac{a}{2}$, $(x^2 + y^2)'' = 4 > 0$

**5.93** ***1)*** $b_1 = 18$ cm, $A_1 = 36$ cm$^2$;
$b_2 = 16$ cm, $A_2 = 64$ cm$^2$;
$b_3 = 14$ cm, $A_3 = 84$ cm$^2$
***2)*** $A(\ell) = 20\ell - \ell^2$,
$\ell \in ]0$ cm; $20$ cm$[$, $\ell_{max} = 10$ cm




**5.94** ***a)*** $\ell = b = 30$ m ***b)*** $\ell = 30$ m, $b = 15$ m

**5.95** ***a)*** $a = b = 1{,}414...$ m ***b)*** $a = b = 1{,}414...$ m

**5.96** ***1)*** $r = 5{,}030...$ cm, $h = 10{,}061...$ cm
***2)*** $r : h = 1 : 2$
Der Durchmesser und die Höhe der Dose sind gleich. Die Form der Dose ist ein gleichseitiger Zylinder.

**5.97** ***1)*** A4: $x = 40{,}423...$ mm, A3: $x = 57{,}168...$ mm
***2)*** $V_{A4} : V_{A3} = 1 : 2{,}828...$

**5.98** $r : h = 1 : 1$

**5.101** 57,735... %

**5.102** $b = 37{,}527...$ cm, $h = 53{,}072...$ cm

**5.103** 78,690... %

**5.104** ***1)*** $x = 4{,}285...$ km
***2)*** $\alpha_1 = \alpha_2 = 34{,}992...°$
$x = 4{,}285... = \frac{30}{7} \Rightarrow \alpha_1 = \arctan\left(\frac{4}{10 - \frac{30}{7}}\right) = \arctan\left(\frac{28}{40}\right) = \arctan(0{,}7)$ bzw.

$\alpha_2 = \arctan\left(\frac{3}{\frac{30}{7}}\right) = \arctan\left(\frac{21}{30}\right) = \arctan(0{,}7)$. Die beiden Werte stimmen überein.

**5.105** $x = 0{,}353...$ km

**5.106** $x = 1{,}2$ m, $y = 2$ m

**5.107** $R_1 = R_2 = 135\ \Omega$

**5.108** ***1)*** 156 cm hoch, 104 cm breit

***2)***

| | $A_{MIN}$ | $A_1$ | $A_2$ |
|---|---|---|---|
| **Höhe** | 156 cm | 306 cm | 506 cm |
| **Breite** | 104 cm | 54 cm | 34 cm |
| **Papierverbrauch** | 1,6224 $m^2$ | 1,6524 $m^2$ | 1,7204 $m^2$ |

Der Papierverbrauch von $A_1$ und der Papierverbrauch von $A_2$ ist jeweils größer als der Papierverbrauch von $A_{MIN}$.

**5.109** $x(\alpha) = \frac{v_0^2}{2g} \cdot \sin(2\alpha) \rightarrow$ Maximum, ableiten ergibt $x'(\alpha) = \frac{v_0^2}{g} \cdot \cos(2\alpha)$. Nullsetzen des Funktionsterms der Ableitungsfunktion und Vereinfachen der Gleichung ergibt $\cos(2\alpha) = 0$. Lösen der Gleichung ergibt $\alpha = 45°$. Überprüfen der Maximumseigenschaft durch Einsetzen des Ergebnisses in die 2. Ableitung ergibt $x''(45°) = -\frac{2v_0^2}{g} \cdot \sin(2 \cdot 45°) = -\frac{2v_0^2}{g} < 0$.

**5.110** D

**5.111** ***1)*** 0 kWh

***2)*** um 12 Uhr

***3)*** Die momentane Änderung des Energieverbrauchs wird durch die Steigung der Tangente an die dargestellte Kurve angegeben. Da die Kurve an der Stelle 12:00 Uhr einen Knick hat, ist die Tangente nicht eindeutig. Die momentane Änderung des Energieverbrauchs um 12:00 Uhr kann daher nicht angegeben werden.
Die momentane Änderung des Energieverbrauchs beschreibt die elektrische Leistung in Kilowatt.

**5.112** ***a)*** bis ***i)*** Auf die grafische Darstellung wird verzichtet.

***a)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) nicht symmetrisch III) $N(-3{,}780...|0)$
IV) $H(-1{,}732...|3{,}039...)$, $T(1{,}732...|0{,}960...)$ V) $W(0|2)$, t: $y = -0{,}9x + 2$

***b)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) nicht symmetrisch III) $N(-2{,}542...|0)$
IV) $T(-1{,}224...|-1{,}734...)$, $H(1{,}224...|-0{,}265...)$ V) $W(0|-1)$, t: $y = 0{,}9x - 1$

***c)*** I) $a_1$: $x = -1$, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ II) nicht symmetrisch III) $N(0|0)$
IV) $H(-2|-4)$, $T(0|0)$ V) keine Wendepunkte VI) $a_2$: $y = x - 1$

***d)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) nicht symmetrisch III) $N_1(-3|0)$, $N_2(0|0)$
IV) $T(-2{,}25|-4{,}271...)$ V) $W(-1{,}5|-2{,}531...)$, $S(0|0)$, $t_W$: $y = 3{,}375x + 2{,}531...$, $t_S$: $y = 0$

***e)*** I) $a_1$: $x = -\sqrt{3}$, $a_2$: $x = \sqrt{3}$, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$ II) ungerade Funktion III) $N(0|0)$
IV) keine Extrempunkte V) $W(0|0)$ VI) $a_3$: $y = 0$

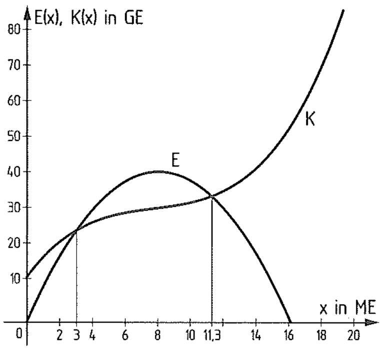
***f)*** I) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ II) gerade Funktion III) $N_k(k\pi|0)$, $k \in \mathbb{Z}$
IV) $T_1(4{,}493...|-0{,}217...)$, $T_2(-4{,}493...|-0{,}217...)$, $T_3(10{,}904...|-0{,}091...)$, $T_4(-10{,}904...|-0{,}091...)$, ..., $H_1(7{,}725...|0{,}128...)$, $H_2(-7{,}725...|0{,}128...)$, $H_3(14{,}066...|0{,}070...)$, $H_4(-14{,}066...|0{,}070...)$, ...
V) $W_1(2{,}081...|0{,}419...)$, $W_2(-2{,}081...|0{,}419...)$, $W_3(5{,}940...|-0{,}056...)$, $W_4(-5{,}940...|-0{,}056...)$, $W_5(9{,}250...|0{,}023...)$, ...

***g)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) nicht symmetrisch III) $N_1(-1{,}287...|0)$, $N_2(1{,}450...|0)$, $N_3(3{,}655...|0)$
IV) $H(0|3)$, $T(2{,}917...|-6{,}960...)$ V) $W(2{,}059...|-3{,}356...)$, t: $y = -6{,}018...x + 9{,}036...$

***h)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) nicht symmetrisch III) $N_k\left(\frac{3k-2}{6} \cdot \pi\middle|0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$
IV) $H_k\left(\frac{12k-1}{12} \cdot \pi\middle|2\right)$, $T_k\left(\frac{12k+5}{12} \cdot \pi\middle|-2\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ V) $W_k\left(\frac{3k-2}{6} \cdot \pi\middle|0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

***i)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) gerade Funktion III) keine Nullstellen
IV) $H(0|3)$ 5) $W_1(-1|1{,}819...)$, $W_2(1|1{,}819...)$ VI) a: $y = 0$

**5.113** ***1)*** und ***2)***




***2)*** Gewinnbereich von 3 ME (3,024...) bis 11,3 ME (11,322...)
***3)*** 9,851... GE maximaler Gewinn bei 7,614... ME; C(7,614... ME|5,278... $\frac{GE}{ME}$)

**5.114** ***1)*** 60° Der Abschlag- und der Aufprallwinkel sind gleich groß. ***2)*** 17,320... m

**5.115** ***a)*** $f(x) = \frac{3}{128}x^3 - \frac{9}{32}x^2 + 6$ ***b)*** $f(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{3}{5}x^2 - \frac{9}{5}x + \frac{11}{5}$ ***c)*** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{10}{3}x^2 + \frac{25}{3}x$

**5.116** $f(x) = 0{,}25x^4 - 0{,}75x^3 + x$

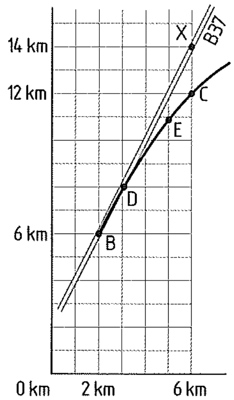
**5.117** ***1)*** $g: y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ ***2)*** par: $y = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{46}{9}x - \frac{103}{9}$ ***3)*** maximal 4,75 m

**5.118** ***1)*** Die Polynomfunktion 2. Grads allgemein ansetzen ergibt $f(x) = ax^2 + bx + c$. Um die Koeffizienten a, b, c zu bestimmen, sind drei voneinander unabhängige Gleichungen notwendig. B und C liegen auf dem Graph der Funktion und die Steigung des geradlinigen Stücks von B nach X ist gleich der Steigung der Polynomfunktion im Punkt B.

***2)*** I: $f(2) = 6$
II: $f(6) = 12$
III: $\underline{f'(2) = 2}$

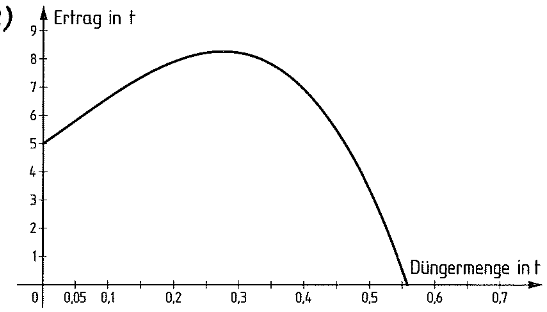
$f(x) = -0{,}125x^2 + 2{,}5x + 1{,}5$

***3)*** zB D(3|7,875), E(5|10,875)




**5.119** ***1)*** $E(d) = -100d^3 + 15d^2 + 15d + 5$

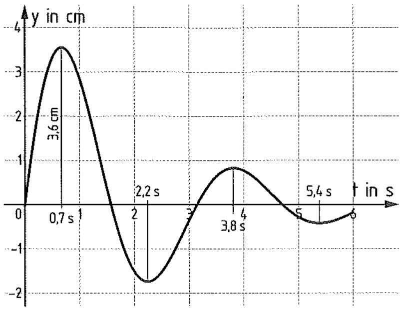
***2)***




***3)*** 0,279... t

**5.120** ***1)*** 2,310... h ***2)*** 8,006... h

**5.121** ***1)***



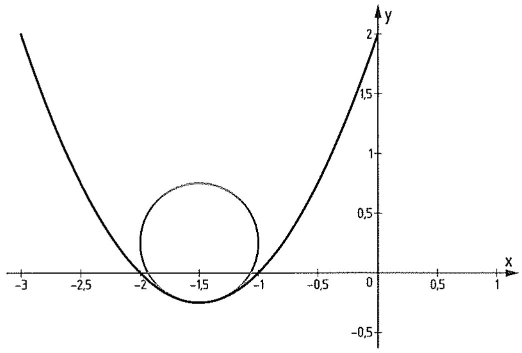

***2)*** lokale Maxima bei $t_1 = 0{,}7$ s (0,672...) und $t_3 = 3{,}8$ s (3,813...)
lokale Minima bei $t_2 = 2{,}2$ s (2,243...) und $t_4 = 5{,}4$ s (5,384...)
globales Maximum (0,7 s|3,6 cm)
(0,672...|3,576...)

***3)*** $0\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$

**5.122** ***1)*** an der Stelle $x = -\frac{3}{2}$; Scheitelpunkt der Parabel, das ist der Extrempunkt der Funktion

***2)*** 0,5

***3)***




**5.123** a = 1,259... cm, b = 3,779... cm und c = 1,889... cm

**5.124** ***1)*** 400 m

***2)*** Spiegelt man R und W am geradlinigen Ufer, an dem x liegt, so entsteht ein gleichschenkliges Trapez mit den Eckpunkten W′, W, R und R′. Die kürzeste Verbindung zwischen den Eckpunkten R′ und W ist die Diagonale R′W. X ist der Schnittpunkt der beiden Diagonalen. Die Diagonalen im gleichschenkligen Trapez sind gleich lang, daher ist auch der Abstand von X nach R′ gleich dem Abstand von X nach R.

**5.125** ***1)*** 86,602... m ***2)*** 644,89 €

**5.126** $E_1(-3|88)$ maximum point, $E_2(5|-168)$ minimum point

**5.127** $N_1(0|0)$, $N_2(2|0)$
$T_1(0|0)$, $T_2(2|0)$, $H(1|1)$
$W_1(0{,}422...|0{,}\dot{4})$, $W_2(1{,}577...|0{,}\dot{4})$, $t_1$: $y = 1{,}539...x - 0{,}206...$, $t_2$: $y = -1{,}539...x + 2{,}872...$

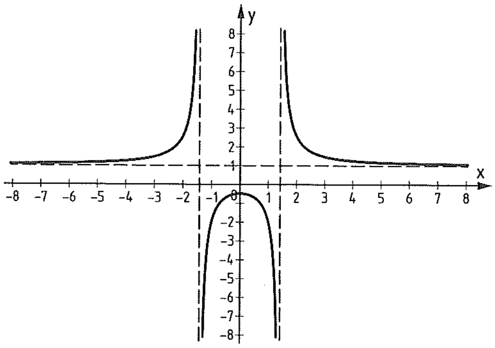
**5.128** $E_1(0|3)$, $E_2(2|-1)$

**5.129** The equation $x^3 + x = 0$ has only one real solution $x = 0$. This leads to the only interception of the function $y = x^3 + x$ with the x-axis at $x = 0$.
$y' = 3x^2 + 1$, $y'' = 6x$
bending upwards for $x \in \,]0; \infty[$

**5.130** $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = 6$
Calculating the second derivative $f''(x) = 12x^2 - 60x + 48$ of f(x). Solving the equation $12x^2 - 60x + 48 = 0$ with the solutions $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. The intersection $W_1(4|0)$ is a point of inflection.
$W_2(1|15)$, $t_1$: $y = -32x + 128$, $t_2$: $y = 22x - 7$

**5.131** ***a)*** I) $a_1$: $x = 0$, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ II) not symmetric III) $N(3|0)$
IV) $H\left(4\middle|\frac{1}{256}\right)$ V) $W\left(5\middle|\frac{2}{625}\right)$ VI) $a_2$: $y = 0$
***b)*** I) $a_1$: $x = 2$, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$ II) not symmetric III) $N(-1|0)$
IV) $H(-1|0)$, $T(5|12)$ V) no points of inflection VI) $a_2$: $y = x + 4$
***c)*** I) $a_1$: $x = 0$, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ II) not symmetric III) $N(1{,}259...|0)$
IV) $T\left(2\middle|-\frac{3}{8}\right)$ V) $W(2{,}714...|-0{,}331...)$ VI) $a_2$: $y = 0$

**5.132**




***1)*** no x intercept, $y = -\frac{1}{2}$
***2)*** vertical asymptotes: $a_1$: $x = -\sqrt{2}$, $a_2$: $x = \sqrt{2}$;
horizontal asymptotes: $a_3$: $y = 1$
***3)*** concave up: $]-\infty; -\sqrt{2}\,[$, $]\sqrt{2}\,; \infty[$,
concave down: $]-\sqrt{2}\,; \sqrt{2}\,[$

**5.133** ***1)*** $a = -0{,}25$, $b = 0$, $c = 3$, $d = 0$
***2)*** I) $D_f = \mathbb{R}$ II) uneven function III) $N_1(-3{,}464...|0)$, $N_2(0|0)$, $N_3(3{,}464...|0)$
IV) $T(-2|-4)$, $H(2|4)$ V) $W(0|0)$, t: $y = 3x$

**5.134** $a = 4{,}834...$ ft, $h = 1{,}395...$ ft
Hint: The surface of the base must be an equilateral triangle.

# 6 Integralrechnung

**6.1** 50 km

**6.2** 1 → C: Die Geschwindigkeit ist konstant $v = 5\ \frac{m}{s}$. Der zurückgelegte Weg hat daher die Funktionsgleichung $s(t) = 5t + C$. Dieser Beschreibung entspricht die Abbildung C.

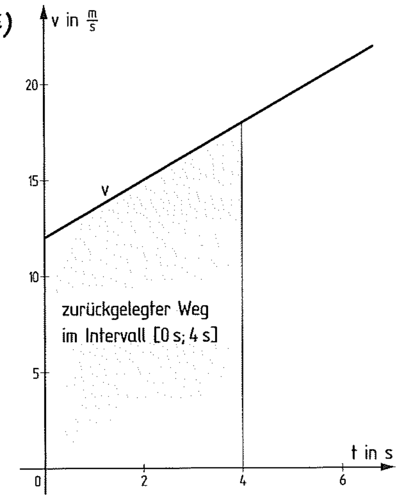
2 → B: Die Geschwindigkeit nimmt linear ab und es gilt $v(t) = -5t + 5$. Der zurückgelegte Weg hat daher die Funktionsgleichung $s(t) = -\frac{5t^2}{2} + 5t + C$. Die Nullstelle von v stimmt mit der Extremstelle von s überein. Dieser Beschreibung entspricht die Abbildung B.

**6.3** ***1)*** $s(t) = 30 \cdot t$ ***2)*** $s(t) = 30 \cdot t + 50$ ***3)*** $s(t) = 30 \cdot t + 110$

**6.4** ***1)*** $32{,}4\ \frac{km}{h}$
***2)*** 25 min
***3)*** Die Funktion v ist die Ableitung der beschriebenen Funktion s.
***4)*** C ist null.
***5)*** t = 25 min = 1 500 s und C = 0 in $s(t) = -0{,}003t^2 + 9t + C$ einsetzen ergibt einen Anhalteweg von 6 750 m. Das ist mehr als der erlaubte Anhalteweg von 20 · 300 m = 6 000 m. Die Vorschrift wird nicht erfüllt.

**6.5** ***a)*** 7,5 m ***b)*** 12 m ***c)*** 10 m

**6.6** ***1)*** $v(t) = 1{,}5t + 12$
t … Zeit in Sekunden
v(t) … Geschwindigkeit zur Zeit t in $\frac{m}{s}$
***2)*** $s(t) = 0{,}75t^2 + 12t + 70$
t … Zeit in Sekunden
s(t) … zurückgelegter Weg zur Zeit t Sekunden in m
***3)*** 130 m
***4)***




**6.7** ***1)*** Der größte Funktionswert im gegebenen Zeitintervall gibt die maximale Anzahl an Fahrzeugen pro Minute an. Um diesen zu bestimmen, werden die Funktionswerte der im Intervall $[t_1; t_2]$ auftretenden Hochpunkte und die Funktionswerte an den Stellen $t_1$ bzw. $t_2$ miteinander verglichen.
***2)*** $A = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt$

**6.8** ***1)*** Die markierte Fläche gibt die während der zweiten Minute durchgeflossene Wassermenge in Liter an.
***2)*** $-2{,}479...\ \frac{L}{min^2}$

**6.9** ***1)*** 6 GBits ***2)*** 5,91 GBits

**6.10** 3 C

**6.11** ***1)*** $a(t) = \begin{cases} 0{,}6t & \text{für } 0 \leq t \leq 5 \\ 3 & \text{für } 5 < t \leq 8 \\ -0{,}6t + 7{,}8 & \text{für } 8 < t \leq 13 \end{cases}$

***2)*** $32\,\frac{m}{s}$

***3)*** $v(t) = \begin{cases} 0{,}3t^2 + 8 & \text{für } 0 \leq t \leq 5 \\ 3t + 0{,}5 & \text{für } 5 < t \leq 8 \\ -0{,}3t^2 + 7{,}8t - 18{,}7 & \text{für } 8 < t \leq 13 \end{cases}$

**6.12** ***1)*** 5 kJ ***2)*** 3,75 kJ

**6.13** $Q = I_0 \cdot \int_{t_a}^{t_b} e^{-\frac{t}{RC}}\,dt$

**6.14** ***1)*** $f_1'(x) = f_2'(x) = f_3'(x) = f_4'(x) = 3x^2$ ***2)*** $f_1(x) = x^4 - 3$, $f_2(x) = x^4$, $f_3(x) = x^4 + 2$

**6.16** Man legt ein Koordinatensystem fest (x-Achse am Boden, y-Achse in der Mitte des Tors) und ermittelt mit den Punkten $P_1(0{,}25|1{,}5)$, $P_2(1{,}25|1)$ und $P_3(-1{,}25|1)$ die Funktion $f(x) = -0{,}\dot{3}x^2 + 1{,}520...$, die den parabelförmigen Abschluss beschreibt. f(0,5), f(0,75) bzw. f(1) ergibt die Länge der weiteren Bretter. Addition der Längen und Multiplikation mit der Breite ergibt $3{,}08\dot{3}\ m^2$ von den breiten bzw. $3{,}229...\ m^2$ von den schmalen Brettern.

**6.18** $1 \rightarrow F$, $2 \rightarrow E$, $3 \rightarrow C$, $4 \rightarrow A$, $5 \rightarrow D$

**6.19** ***a)*** bis ***f)*** Die Stammfunktionen unterscheiden sich jeweils nur durch eine Konstante, da diese beim Ableiten wegfällt.

***a)*** $F_1(x) = 4x$ und $F_2(x) = 4x - 3$ sind Stammfunktionen, da $F_1'(x) = F_2'(x) = 4$ gilt.
***b)*** $F_1(x) = x^3 - 2$ und $F_2(x) = x^3 + 2{,}5$ sind Stammfunktionen, da $F_1'(x) = F_2'(x) = 3x^2$ gilt.
***c)*** $F_1(x) = 4$ und $F_2(x) = -7$ sind Stammfunktionen, da $F_1'(x) = F_2'(x) = 0$ gilt.
***d)*** $F_1(x) = x^4$ und $F_2(x) = x^4 + 5$ sind Stammfunktionen, da $F_1'(x) = F_2'(x) = 4x^3$ gilt.
***e)*** $F_1(x) = \frac{1}{x} + 7$ und $F_2(x) = \frac{1}{x} + 2$ sind Stammfunktionen, da $F_1'(x) = F_2'(x) = -\frac{1}{x^2}$ gilt.
***f)*** $F_1(x) = 0{,}5x^2 + 2x$ und $F_2(x) = 0{,}5x^2 + 2x - 1$ sind Stammfunktionen, da $F_1'(x) = F_2'(x) = x + 2$ gilt.

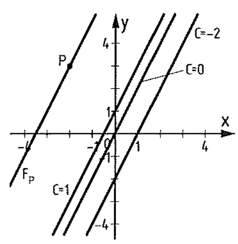
**6.20** ***a)*** bis ***c)*** Das unbestimmte Integral, die Menge aller Funktionen F(x) + C, erhält man als Umkehrung zum Differenzieren. Man folgt dabei der Überlegung „Welche Funktion wurde abgeleitet, dass f(x) entsteht?"

***a)*** $(e^x)' = e^x$, daher gilt $\int e^x\,dx = e^x + C$
***b)*** $(-\cos(x))' = \sin(x)$, daher gilt $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$
***c)*** $(\sin(x))' = \cos(x)$, daher gilt $\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$

**6.21** A

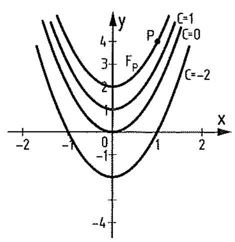
**6.22** ***a)*** $\int 2\,dx = 2x + C$

$F_P(x) = 2x + 7$



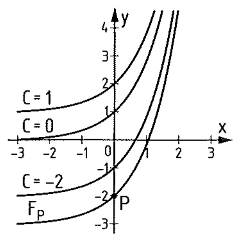

***b)*** $\int 4x\,dx = 2x^2 + C$

$F_P(x) = 2x^2 + 2$




***c)*** $\int e^x\,dx = e^x + C$

$F_P = e^x - 3$



**6.23** ***a)*** **A** bzw. **C** ***b)*** **B** bzw. **C** ***c)*** **A**

**6.24** ***1)***

| | $U_4$ | $O_4$ | $O_4 - U_4$ |
|---|---|---|---|
| **a)** | $6{,}75\ E^2$ | $10{,}75\ E^2$ | $4\ E^2$ |
| **b)** | $6{,}375\ E^2$ | $8{,}625\ E^2$ | $2{,}25\ E^2$ |
| **c)** | $28{,}125\ E^2$ | $34{,}875\ E^2$ | $6{,}75\ E^2$ |

***2)***

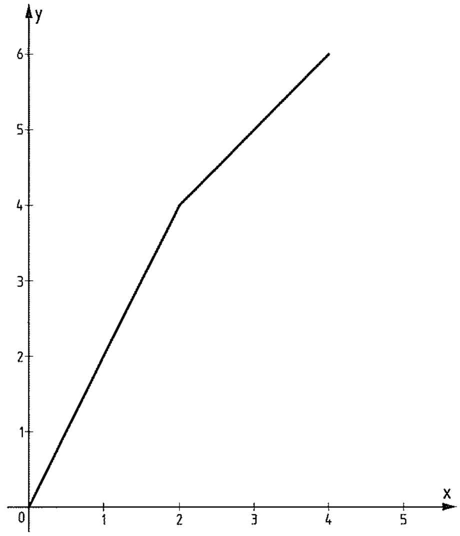
| | $U_6$ | $O_6$ | $O_6 - U_6$ |
|---|---|---|---|
| **a)** | $7{,}\dot{3}7\dot{0}\ E^2$ | $10{,}\dot{0}3\dot{7}\ E^2$ | $2{,}\dot{6}\ E^2$ |
| **b)** | $6{,}75\ E^2$ | $8{,}25\ E^2$ | $1{,}5\ E^2$ |
| **c)** | $29{,}25\ E^2$ | $33{,}75\ E^2$ | $4{,}5\ E^2$ |

Die Differenz zwischen Ober- und Untersumme wird mit größer werdendem n kleiner.

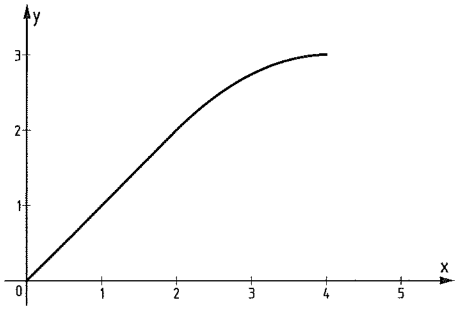
**6.25** ***a)*** 3 ***b)*** 16 ***c)*** $\frac{26}{3}$ ***d)*** 3

**6.26** ***a)*** $A_{Rechteck} = 6\ E^2$ ***b)*** $A_{Trapez} = 12\ E^2$ ***c)*** $A_{Dreieck} = 2\ E^2$ ***d)*** $A_{Trapez} = 20\ E^2$

**6.27** ***a)***




***b)***




**6.28** ***A)*** Wahr. f hat an der Stelle x = 2 eine Nullstelle, F hat daher an der Stelle x = 2 eine Extremstelle. Die Steigung von f an der Stelle x = 2 ist kleiner null. Daher liegt an der Stelle x = 2 ein Maximum vor.

***B)*** Falsch. F muss eine Polynomfunktion 4. Grads sein, da f eine Polynomfunktion 3. Grads ist.

***C)*** Falsch. Die y-Werte von f sind im Intervall [1; 2] größer oder gleich null. Daher ist F steigend.

***D)*** Wahr. Die Extremwerte von f markieren die Wendepunkte von F.

**6.29** ***1) A)*** $f_1(x) = x^2$ ***B)*** $f_2(x) = x^4$ ***C)*** $f_3(x) = x^5$

***2)*** $F(x) = \frac{x^9}{9}$

**6.31** ***a)*** $\frac{x^2}{2} + C$ ***b)*** $\frac{t^8}{8} + C$ ***c)*** $\frac{u^5}{5} + C$

**6.32** ***a)*** C ***b)*** $x + C$ ***c)*** $\ln|(x)| + C$

**6.33** ***a)*** $\sin(t) + C$ ***b)*** $-\cos(t) + C$ ***c)*** $\tan(x) + C$

**6.34** ***a)*** $e^u + C$ ***b)*** $\arctan(x) + C$ ***c)*** $\sinh(x) + C$

**6.35** **a)** $-\frac{1}{x} + C$ **b)** $-\frac{1}{2t^2} + C$ **c)** $-\frac{1}{5x^5} + C$ **d)** $-\frac{1}{4u^4} + C$

**6.36** **a)** $\frac{4x \cdot \sqrt[4]{x^3}}{7} + C$ **c)** $\frac{3t^3 \cdot \sqrt[3]{t}}{10} + C$ **e)** $\frac{x}{\sqrt[3]{t}} + C$ **g)** $3 \cdot \sqrt[3]{x} + C$

**b)** $\frac{2u^3 \cdot \sqrt{u}}{7} + C$ **d)** $\frac{5x \cdot \sqrt[5]{x^2}}{7} + C$ **f)** $-\frac{3}{\sqrt[3]{t}} + C$ **d)** $-\frac{5}{2 \cdot \sqrt[5]{x^2}} + C$

**6.37** **a)** $\frac{3t \cdot \sqrt[3]{t}}{7} + C$ **b)** $\frac{7x \cdot \sqrt[7]{x^5}}{12} + C$ **c)** $2 \cdot \sqrt{x} + C$ **d)** $\frac{5 \cdot \sqrt[5]{t^2}}{2} + C$

**6.38** **a)** $\frac{3x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}}{7} + C$ **b)** $\frac{12t^3 \cdot \sqrt[12]{t}}{37} + C$ **c)** $\frac{2x^2 \cdot \sqrt{x}}{5} + C$ **d)** $\frac{10 \cdot \sqrt[10]{t^9}}{9} + C$

**6.39** **a)** $\frac{3^x}{\ln(3)} + C$ **b)** $-\frac{1}{3^x \cdot \ln(3)} + C$ **c)** $-\frac{1}{5^x \cdot \ln(5)} + C$ **d)** $\frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^x \cdot \ln\left(\frac{5}{2}\right)} + C$

**6.41** **a)** **1)** $3 \cdot \int x\,dx = \frac{3x^2}{2} + C$ **3)** $\frac{1}{3} \cdot \int x\,dx = \frac{x^2}{6} + C$

**2)** $3 \cdot \int x^0\,dx = 3x + C$ **4)** $3 \cdot \int x^{-1}\,dx = 3 \cdot \ln(|x|) + C$

**b)** **1)** $\sqrt{3} \cdot \int x\,dx = \frac{\sqrt{3}\,x^2}{2} + C$ **3)** $\sqrt{3} \cdot \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2 \cdot \sqrt{3x} + C$

**2)** $\sqrt{3} \cdot \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = 2 \cdot \sqrt{\frac{x^3}{3}} + C$ **4)** $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \int x\,dx = \frac{x^2}{2 \cdot \sqrt{3}} + C$

**6.42** **a)** $-\frac{2}{3t^3} + C$ **b)** $\frac{3}{4} \cdot \ln(|x|) + C$ **c)** $-\frac{2}{3r} + C$ **d)** $-\frac{2}{7x^2} + C$ **e)** $-\frac{1}{10x^2} + C$

**6.43** **a)** $\frac{2 \cdot \sqrt{2x^3}}{3} + C$ **b)** $\frac{6t \cdot \sqrt[3]{t^2}}{5} + C$ **c)** $2 \cdot \sqrt{5u} + C$ **d)** $\sqrt[4]{x} + C$ **e)** $\frac{4 \cdot \sqrt{x}}{5} + C$

**6.44** **a)** $e^2 \cdot x + C$ **b)** $a \cdot e^x + C$ **c)** $-y_0 \cdot \cos(t) + C$ **d)** $b \cdot \tan(x) + C$ **e)** $A \cdot \sin(t) + C$

**6.45** **a)** $x^3 + x + C$ **b)** $t^5 + \frac{t^3}{6} - t^2 + C$ **c)** $-\frac{3}{x} - 4x + C$

**6.46** **a)** $a \cdot r + \frac{4r^4 \cdot \sqrt[4]{r}}{17} - r^3 + C$ **b)** $-2 \cdot \cos(x) - 5x + \frac{x \cdot \sqrt[3]{x}}{2} + C$ **c)** $2e^t + \frac{\ln(|t|)}{2} + \frac{1}{t^4} + C$

**6.47** **a)** $2 \cdot \ln(|x|) - \frac{x}{2} + C$ **b)** $\frac{3x^2}{10} + \ln(|x|) - \frac{3}{5x} + C$ **c)** $-\frac{a}{2x^2} + b \cdot \ln(|x|) - c \cdot x + C$

**6.48** **a)** $\frac{3}{2} \cdot \arcsin(x) + C$ **b)** $\frac{1}{6} \cdot \ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + C$ **c)** $\operatorname{arsinh}(t) + C$ **d)** $\frac{5}{2} \cdot \arctan(u) + C$

**6.49** **a)** $v \cdot t + C$ **b)** $k \cdot \ln(|V|) + C$ **c)** $-\frac{\rho}{2\pi r \cdot (1 - \cos(\alpha))} + C$ **d)** $\frac{F}{E \cdot I} \cdot \left(\ell \cdot x - \frac{x^2}{2}\right) + C$

**6.50** **1)** $\frac{a \cdot x^2}{2} + b \cdot x + C$ **3)** $a \cdot b \cdot x + \frac{b^2}{2} + C$

**2)** $\frac{a^2 \cdot x}{2} + a \cdot b + C$ **4)** $(a \cdot x + b) \cdot t + C$

**6.51** **1)** $\frac{t^2}{2} + \frac{s \cdot t}{r} + C$ **3)** $s \cdot t + \frac{s^2}{2r} + C$

**2)** $r \cdot t + s \cdot \ln(|r|) + C$ **4)** $\frac{r \cdot t + s}{r} \cdot x + C$

**6.52** Tina hat die Konstante mit C bezeichnet, bei Manuel hat die Konstante den Wert $\frac{1}{3} + C$.
Das C in Tinas Lösung hat einen anderen Wert als das C in Manuels Lösung.
Umbenennung ergibt:
Tinas Lösung: $\frac{x^3}{3} + x^2 + x + C$, Manuels Lösung: $\frac{x^3}{3} + x^2 + x + \frac{1}{3} + D$, dann gilt $C = \frac{1}{3} + D$.
Die beiden Lösungen stimmen überein.

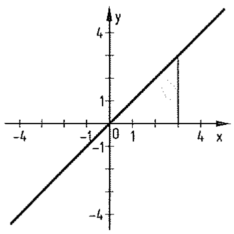
**6.53** ***1)*** Es wurde abgeleitet anstatt zu integrieren. $\int(5x^3 + 3x^2)dx = \frac{5x^4}{4} + x^3 + C$

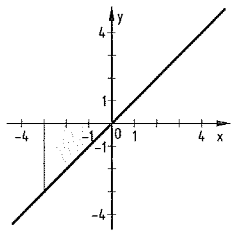
***2)*** Beim zweiten Summanden wurde nach der Formvariablen a anstatt nach der Integrationsvariablen x integriert. $\int(a \cdot x^b + b \cdot a^x)dx = \frac{a \cdot x^{b+1}}{b+1} + \frac{b \cdot a^x}{\ln(a)} + C$

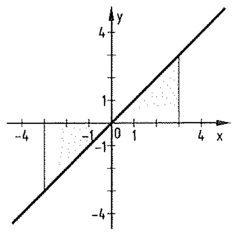
**6.54** ***a)*** $F(x) = x^2 + x + 2$ ***b)*** $F(t) = \frac{t^3}{3}$

**6.55** ***a)*** $y(t) = -\cos(t)$ ***b)*** $h(t) = -\frac{g \cdot t^2}{2} + h_0$

**6.56** $\int\limits_0^3 x\,dx = \frac{9}{2}$ $\int\limits_{-3}^0 x\,dx = -\frac{9}{2}$ $\int\limits_{-3}^3 x\,dx = 0$




Liegt der Graph von f im Integrationsbereich unterhalb der x-Achse, dann ist das bestimmte Integral negativ, liegt der Graph von f oberhalb, dann ist das bestimmte Integral positiv.

**6.60** ***A)*** Falsch. f liegt im definierten Intervall oberhalb der x-Achse, somit kann das Integral nicht null sein.

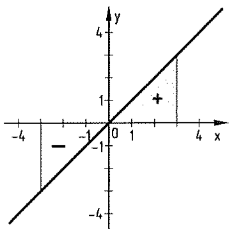
***B)*** Wahr. Werden die Grenzen vertauscht, dann ändert sich das Vorzeichen des bestimmten Integrals.

***C)*** Ist nur dann wahr, wenn f eine zum Koordinatenursprung symmetrische Funktion ist.

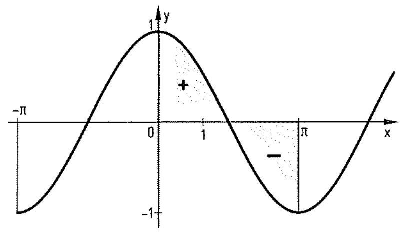
***D)*** Falsch. Die Grenzen des zweiten Integrals sind vertauscht.

**6.61** C

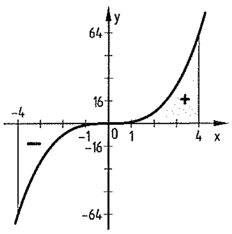
**6.62** ***1)*** 0



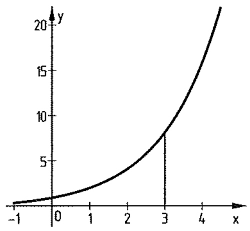

***3)*** 0




***2)*** 0




***4)*** 0




**6.63** ***a)*** Die Fläche oberhalb der x-Achse ist kleiner als die Fläche unterhalb der x-Achse. Das bestimmte Integral ist daher negativ. Die Berechnung ergibt (–1,5).

***b)*** Die Fläche liegt unterhalb der x-Achse. Das bestimmte Integral ist daher negativ. Die Berechnung ergibt (–1).

***c)*** Die Fläche liegt unterhalb der x-Achse und die Grenzen sind vertauscht. Das bestimmte Integral ist daher positiv. Die Berechnung ergibt $5{,}\dot{3}$.

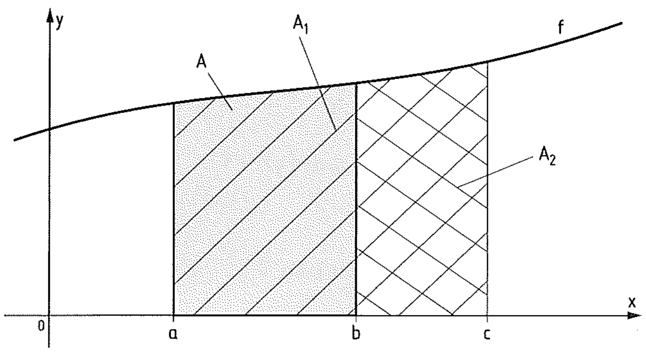
***d)*** Die Fläche liegt unterhalb der x-Achse. Das bestimmte Integral ist daher negativ. Die Berechnung ergibt $(-1)$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **6.64** | ***a)*** $-\frac{81}{4}$ | ***b)*** $-6$ | ***c)*** $\frac{1}{4}$ | ***d)*** $-\frac{15}{64}$ | ***e)*** $\ln(3)$ |
| **6.65** | ***a)*** 1,885... | ***b)*** $\frac{62}{5}$ | ***c)*** 12,413... | ***d)*** $\frac{4}{5}$ | |
| **6.66** | ***a)*** 2 | ***b)*** 12 | ***c)*** 3 | ***d)*** 0,798... | |
| **6.67** | ***a)*** 6,389... | ***b)*** 7,253... | ***c)*** 6,475.... | ***d)*** −0,896... | |
| **6.68** | ***a)*** 1 | ***b)*** 0 | ***c)*** 1 | ***d)*** 1 | |
| **6.69** | ***a)*** 80 | ***b)*** 13,5 | ***c)*** −1,68 | | |
| **6.70** | ***a)*** 3,943... | ***b)*** $31{,}41\dot{6}$ | ***c)*** 34,063... | | |
| **6.71** | ***a)*** $\pi$ | ***b)*** $2-\pi$ | ***c)*** 0 | | |
| **6.72** | ***a)*** $\frac{32}{3}$ | ***b)*** $\frac{9}{2}$ | ***c)*** $\frac{28}{3}$ | | |
| **6.74** | ***a)*** $b = 2$ | ***b)*** $a = 1$ bzw. $a = -4$ | ***c)*** $b = \frac{\pi}{3}$ | | |

**6.75** ***1)*** LS: $F(b) - F(a)$

RS: $F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) \Rightarrow$ LS = RS

***2)***




$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = A_1 - A_2 = A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Die Summe der beiden Integrale berechnet die Differenz der Flächen $A_1 - A_2$.

Das Ergebnis ist die Fläche A, das entspricht dem Integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

**6.76** ***1)*** $f'(x) = 18x + 30$ ***2)*** $y'(t) = \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ ***3)*** $f'(t) = -a \cdot e^{-a \cdot t}$

Kettenregel

**6.78** B, D und E

**6.79** ***a)*** $\frac{(3x-2)^4}{12} + C$ ***b)*** $\frac{(2u+1)^3}{6} + C$ ***c)*** $\frac{(6x-b)^5}{30} + C$ ***d)*** $\frac{(4t-5)^{\frac{5}{2}}}{10} + C$

**6.80** ***a)*** $\frac{3}{5 \cdot (2-5t)} + C$ ***b)*** $-\frac{1}{40 \cdot (5x-2)^2} + C$ ***c)*** $-\frac{5}{6 \cdot (x+1)^3} + C$ ***d)*** $-\frac{1}{7 \cdot (7s+3)^4} + C$

**6.81** ***a)*** $2a \cdot \sqrt{x+2} + C$ ***b*** $\frac{3}{16} \cdot \sqrt{(4s-3)^3} + C$ ***c)*** $2 \cdot \sqrt{2x-5} + C$ ***d)*** $\frac{1}{9} \cdot \sqrt{(3t+4)^3} + C$

# 6.82 – 6.99

**6.82** **a)** $\ln(|x-3|)+C$ **b)** $2\cdot\ln(|2x+1|)+C$ **c)** $\ln(|s+3t|)+C$ **d)** $3\cdot\ln(|s+3t|)+C$

**6.83** **a)** $e^{x+1}+C$ **b)** $-\frac{1}{3e^{3t}}+C$ **c)** $\frac{1}{2}\cdot e^{2s-t}+C$ **d)** $-e^{2s-t}+C$

**6.84** **a)** $-\frac{1}{5}\cdot\cos(5t)+C$ **b)** $2\cdot\sin(t+1)+C$ **c)** $\frac{1}{3}\cdot\sin(3x+2)+C$ **d)** $-\frac{A}{\omega}\cdot\cos(\omega t+\varphi)+C$

**6.85** **a)** $\frac{2^{t-2}}{\ln(2)}+C$ **b)** $-\frac{3\cdot 10^{-x}}{\ln(10)}+C$ **c)** $\frac{5^{2x-1}}{6\cdot\ln(5)}+C$ **d)** $\frac{a^{2t+3}}{2\cdot\ln(a)}+C$

**6.86** **1)** $\frac{du}{dt}\neq 1$
Mit den bisher kennen gelernten Methoden nicht lösbar.
**2)** $dt=\frac{du}{\omega}\Rightarrow\int\sin(\omega t+\varphi)\,dt=\int\sin(u)\frac{du}{\omega}=-\frac{1}{\omega}\cdot\cos(\omega t+\varphi)+C$

**6.87** **a)** 68 **b)** 2 182,4 **c)** 90 **d)** $\frac{8}{3}$

**6.88** **a)** 25,556... **b)** 4 **c)** –0,942... **d)** 30,450...

**6.89** **a)** $\frac{1}{3}\cdot\tan(3x)+C$ **b)** $3\cdot\tan(x-1)+C$ **c)** $\frac{1}{5}\cdot\tan(2x+1)+C$ **d)** $\frac{1}{2}\cdot\arctan(2x)+C$

**6.90** **a)** $\cosh(x+4)+C$ **b)** $\frac{1}{5}\cdot\sinh(5t)+C$ **c)** $\frac{1}{3}\cdot\cosh(3x-2)+C$ **d)** $\frac{1}{4}\cdot\tanh(4x)+C$

**6.93** B $\int\frac{t}{1+t^2}\,dt$ A $\int t\cdot(1+e^{t^2})\,dt$ B $\int\frac{t}{2}\cdot e^{t^2+1}\,dt$
C $\int\sqrt{2+2t}\,dt$ C $\int\frac{1}{1+t}\,dt$ B $\int\frac{2t}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$

**6.94** **a)** $\frac{(x^2-3)^4}{8}+C$ **b)** $-\sqrt{(4-r^2)^3}+C$ **c)** $\frac{(4x^3+5)^5}{60}+C$ **d)** $-\frac{1}{4\cdot(x^2-4x+5)^2}+C$

**6.95** **a)** $-\ln(|1-x^2|)+C$ **b)** $\frac{1}{2}\cdot\ln(|x^2+4x-3|)+C$ **c)** $\ln(|s^3+s-1|)+C$ **d)** $\frac{1}{6}\cdot\ln(|2t^3+1|)+C$

**6.96** **a)** $\frac{1}{2}\cdot e^{x^2}+C$ **b)** $-\frac{1}{2}\cdot\cos^2(t)+C$ **c)** $\frac{1}{3}\cdot e^{x^3+1}+C$ **d)** $-\sin\left(\frac{1}{x}\right)+C$

**6.97** **a)** $\frac{1}{2}\cdot\ln^2(|x|)+C$ **b)** $\ln(|\ln(|x|)|)+C$ **c)** $\ln(1-\cos(x))+C$ **d)** $-\ln(|2-e^x|)+C$

**6.98** **a)** $\frac{e-1}{2}$ **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** $e-1$ **d)** $\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{5}{2}\right)$

**6.99** **1)** Substitution von x durch $a\cdot\sin(t)$ ergibt $dx=a\cdot\cos(t)\,dt$ und $\sqrt{a^2-x^2}=a\cdot\cos(t)$.

Einsetzen in $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ ergibt $a^2\cdot\int\cos^2(t)\,dt$.

Umformen von $\cos(2t)=\cos^2(t)-\sin^2(t)=\cos^2(t)-(1-\cos^2(t))=2\cdot\cos^2(t)-1$ auf $\cos^2(t)=\frac{1+\cos(2t)}{2}$ ergibt $\frac{a^2}{2}\cdot\int(1+\cos(2t))\,dt$.

Lösen des Integrals ergibt $\frac{a^2}{2}\cdot\left(t+\frac{\sin(2t)}{2}+C_1\right)$ und wegen $\sin(2t)=2\cdot\sin(t)\cdot\cos(t)$ und nach Auflösen der Klammern $\frac{a^2}{2}\cdot t+\frac{a^2}{2}\cdot\sin(t)\cdot\cos(t)+C$.

Umformen von $x=a\cdot\sin(t)$ ergibt $\sin(t)=\frac{x}{a}$ bzw. $t=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$.

Ersetzen von t, sin(t) und $\cos(t)=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$ ergibt $\frac{a^2}{2}\cdot\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}+C$.

Kürzen von $a^2$ liefert das angegebene Ergebnis.

**2)** $\frac{9\pi}{4}$

**3)** Der Graph von $y=\sqrt{9-x^2}$ ist ein Halbkreis mit Radius $r=3$.

$\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx$ ist daher der Flächeninhalt eines Viertelkreises mit $r=3$ und hat den Wert $\frac{3^2\pi}{4}=\frac{9\pi}{4}$.

**6.102** 1) A $\int a \cdot \sin(t)\,dt$ 3) C $\int a \cdot t \cdot \sin(t^2)\,dt$ 5) B $\int e^{3x}\,dx$ 7) D $\int 3x \cdot e^x\,dx$

2) C $\int 3x \cdot e^{3x^2+1}\,dx$ 4) D $\int t \cdot \sin(t)\,dt$ 6) A $\int 3e^x\,dx$ 8) B $\int a \cdot \sin(\omega t + \varphi)\,dt$

1) Anwenden der Faktorregel ergibt $a \cdot \int \sin(x)\,dx$. $\int \sin(x)\,dx$ ist ein Grundintegral.
2) Substitution mit $u = 3x^2 + 1$, $dx = \frac{du}{6x}$ und kürzen von $\frac{3x}{6x}$ ergibt $\frac{1}{2} \cdot \int e^u\,du$. $\int e^u\,du$ ist ein Grundintegral.
3) Substitution mit $u = t^2$, $dt = \frac{du}{2t}$ und kürzen von $\frac{a \cdot t}{2 \cdot t}$ ergibt $\frac{a}{2} \cdot \int \sin(u)\,du$. $\int \sin(u)\,du$ ist ein Grundintegral.
4) Partielle Integration mit $u = t$, $u' = 1$ bzw. $v' = \sin(t)$, $v = -\cos(t)$ ergibt das Grundintegral $\int 1 \cdot (-\cos(t))\,dt = -\int \cos(t)\,dt$.
5) Wegen $e^{3x} = f(3x + 0)$ hat die Funktion die Form $f(ax + b)$. Lineare Substitution mit $u = 3x$, $dx = \frac{du}{3}$ ergibt $\frac{1}{3} \cdot \int e^u\,du$. $\int e^u\,du$ ist ein Grundintegral.
6) Anwenden der Faktorregel ergibt $3 \cdot \int e^x\,dx$. $\int e^x\,dx$ ist ein Grundintegral.
7) Partielle Integration mit $u = 3x$, $u' = 3$ bzw. $v' = e^x$, $v = e^x$ ergibt das Grundintegral $\int 3 \cdot e^x\,dx = 3 \cdot \int e^x\,dx$.
8) Anwenden der Faktorregel ergibt $a \cdot \int \sin(\omega t + \varphi)\,dt$. Wegen $\sin(\omega t + \varphi) = f(\omega t + \varphi)$ hat die Funktion die Form $f(ax + b)$. Lineare Substitution mit $u = \omega t + \varphi$, $dt = \frac{du}{\omega}$ ergibt $a \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \int \sin(u)\,du$. $\int \sin(u)\,du$ ist ein Grundintegral.

**6.103** ***a)*** $t \cdot \sin(t) + \cos(t) + C$ ***b)*** $x \cdot e^x - e^x + C$ ***c)*** $\frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4} + C$ ***d)*** $\frac{3^t \cdot (2t-1)}{2 \cdot \ln(3)} + C$

**6.104** ***a)*** $2 \cdot \cos(x) + 2x \cdot \sin(x) - x^2 \cdot \cos(x) + C$ ***c)*** $\frac{t^3}{3} \cdot \ln(t) - \frac{t^3}{9} + C$

***b)*** $t^2 \cdot \sin(t) + 2t \cdot \cos(t) - 2 \cdot \sin(t) + C$ ***d)*** $x^2 \cdot \sinh(x) - 2x \cdot \cosh(x) + 2 \cdot \sinh(x) + C$

**6.105** ***a)*** $\frac{\ln^2(x)}{2} + C$ ***b)*** $-\frac{1 + \ln(x)}{x} + C$ ***c)*** $\frac{x^4 \cdot \ln(x)}{4} - \frac{x^4}{16} + C$ ***d)*** $x^2 \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{2} + C$

**6.106** ***a)*** $\frac{\sin^2(t)}{2} + C$ ***b)*** $\frac{x - \sin(x) \cdot \cos(x)}{2} + C$ ***c)*** $\frac{e^x \cdot \sin(x) - e^x \cdot \cos(x)}{2} + C$ ***d)*** $-\frac{\sin(t) + \cos(t)}{2e^t} + C$

**6.107** ***a)*** $-\frac{t}{3} \cdot \cos(3t) + \frac{1}{9} \cdot \sin(3t) + C$ ***c)*** $x^2 \cdot \ln(3x) - \frac{x^2}{2} + C$

***b)*** $-t \cdot e^{-t} - e^{-t} + C$ ***d)*** $\frac{x \cdot \sin(2x)}{2} + \frac{\cos(2x)}{4} + C$

**6.108** ***a)*** $\frac{1}{4} \cdot e^{2x} \cdot \sin^2(x) - \frac{1}{8} \cdot e^{2x} \cdot \sin(2x) + \frac{1}{8} \cdot e^{2x} + C$ ***c)*** $\frac{r \cdot \sin(\varphi) \cdot e^{k\varphi} + k \cdot r \cdot \cos(\varphi) \cdot e^{k\varphi}}{1 + k^2} + C$

***b)*** $\frac{e^{-st} - 2t \cdot e^{-st}}{s} - \frac{2e^{-st}}{s^2} + C$ ***d)*** $\frac{(6x^2 + 2x - 4) \cdot \sqrt{x+1}}{15} + C$

**6.109** ***a)*** $\frac{x^3 \cdot \ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9} + x \cdot \ln(x) - x + C$ ***c)*** $(2t - 1) \cdot \sin(t - 1) + 2 \cdot \cos(t - 1) + C$

***b)*** $\frac{\omega t + \varphi - \sin(\omega t + \varphi) \cdot \cos(\omega t + \varphi)}{2\omega} + C$

**6.110** ***a)*** $x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1 - x^2} + C$ ***c)*** $x \cdot \ln(x^2) - 2x + C$

***b)*** $x \cdot \operatorname{arsinh}(x) - \sqrt{1 + x^2} + C$

**6.112** ***a)*** 2,097... ***b)*** 0,636... ***c)*** 7,642... ***d)*** 12,059...

**6.113** ***a)*** −2 ***b)*** −0,848... ***c)*** 9,456... ***d)*** 5,297...

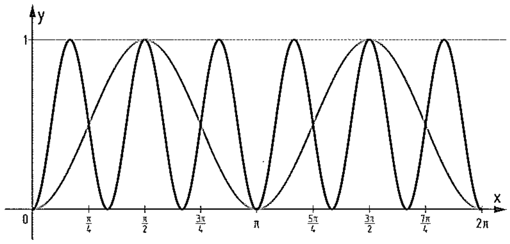
**6.114** $u = e^{3t}$ ergibt $u' = 3 \cdot e^{3t}$ und $v' = 3t + 1$ ergibt $v = \frac{3t^2}{2} + t$. Der nach dem ersten Integrationsschritt auftretende Integrand $u' \cdot v$ ist aufwändiger als der ursprüngliche Integrand $u \cdot v'$.

**6.115** ***1)*** Es sind individuell verschiedene Lösungen möglich.

***2)*** Partielles Integrieren von $\int \sin(a \cdot x) \cdot \sin(b \cdot x)\,dx$ mit $u = \sin(a \cdot x)$ bzw. $v' = \sin(b \cdot x)$ ergibt

$-\frac{1}{b} \cdot \sin(a \cdot x) \cdot \cos(b \cdot x) + \frac{a}{b} \cdot \int \cos(a \cdot x) \cdot \cos(b \cdot x)\, dx.$
Nochmaliges partielles Integrieren mit $u = \cos(a \cdot x)$ bzw. $v' = \cos(b \cdot x)$ ergibt
$-\frac{1}{b} \cdot \sin(a \cdot x) \cdot \cos(b \cdot x) + \frac{a}{b^2} \cdot \cos(a \cdot x) \cdot \sin(b \cdot x) + \frac{a^2}{b^2} \cdot \int \sin(a \cdot x) \cdot \sin(b \cdot x)\, dx.$
Umformen der Gleichung $\int \sin(a \cdot x) \cdot \sin(b \cdot x)\, dx =$
$= -\frac{1}{b} \cdot \sin(a \cdot x) \cdot \cos(b \cdot x) + \frac{a}{b^2} \cdot \cos(a \cdot x) \cdot \sin(b \cdot x) + \frac{a^2}{b^2} \cdot \int \sin(a \cdot x) \cdot \sin(b \cdot x)\, dx$
ergibt die Lösung des unbestimmten Integrals.
$\int \sin(a \cdot x) \cdot \sin(b \cdot x)\, dx = \dfrac{\frac{a}{b^2} \cdot \cos(a \cdot x) \cdot \sin(b \cdot x) - \frac{1}{b} \cdot \sin(a \cdot x) \cdot \cos(b \cdot x)}{1 - \frac{a^2}{b^2}} + C.$ Lösen des bestimmten Integrals durch Einsetzen der Grenzen $2\pi$ bzw. 0 ergibt das angegebene Ergebnis null.

**3)** Bei **1)** ist im Intervall $[0; 2\pi]$ die Summe der Flächeninhalte der positiv orientierten Flächen zwischen der Kurve und der x-Achse gleich der Summe der Flächeninhalte der negativ orientierten Flächen zwischen der Kurve und der x-Achse. Bei **3)** sind im Intervall $[0; 2\pi]$ alle Flächen zwischen der Kurve und der x-Achse positiv orientiert.




**4)** Wegen $a = b$ gilt $\int \sin(a \cdot x) \cdot \sin(b \cdot x)\, dx = \int \sin(a \cdot x) \cdot \sin(a \cdot x)\, dx$. Partielles Integrieren ergibt
$-\frac{1}{a} \cdot \sin(a \cdot x) \cdot \cos(a \cdot x) + \int \cos(a \cdot x) \cdot \cos(a \cdot x)\, dx$ bzw. wegen
$\int \cos^2(a \cdot x)\, dx = \int (1 - \sin^2(a \cdot x))\, dx = x - \int \sin^2(a \cdot x)\, dx$ erhält man
$-\frac{1}{a} \cdot \sin(a \cdot x) \cdot \cos(a \cdot x) + x - \int \sin(a \cdot x) \cdot \sin(a \cdot x)\, dx$. Umformen der Gleichung
$\int \sin(a \cdot x) \cdot \sin(a \cdot x)\, dx = -\frac{1}{a} \cdot \sin(a \cdot x) \cdot \cos(a \cdot x) + x - \int \sin(a \cdot x) \cdot \sin(a \cdot x)\, dx$ ergibt die Lösung des unbestimmten Integrals $\int \sin(a \cdot x) \cdot \sin(a \cdot x)\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2a} \cdot \sin(a \cdot x) \cdot \cos(a \cdot x) + C.$
Berechnung des bestimmten Integrals ergibt
$\int_0^{2\pi} \sin(a \cdot x) \cdot \sin(a \cdot x)\, dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2a} \cdot \sin(a \cdot x) \cdot \cos(a \cdot x)\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{2} - \frac{1}{2a} \cdot 0 \cdot 1 - \left(\frac{0}{2} - \frac{1}{2a} \cdot 0 \cdot 1\right) = \pi.$
Wegen $\sin(a \cdot 2\pi) = \sin(a \cdot 0) = 0$ für alle $a \in \mathbb{Z}$ ist das Ergebnis von a nicht abhängig.

**6.116** Partielle Integration (für $n \neq -1$ beliebig) ergibt $\int x^n \cdot \ln(x)\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}\, dx =$
$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \ln(x) - \frac{1}{n+1} \cdot \int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \ln(x) - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + C = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot ((n+1) \cdot \ln(x) - 1) + C$

**6.117** **1)**

| u | v' | ±1 |
|---|---|---|
| x | cos(x) | +1 |
| 1 | sin(x) | −1 |
| 0 | −cos(x) | +1 |
| | | −1 |

Die Tabellenmethode ergibt
$\int x \cdot \cos(x)\, dx = x \cdot \sin(x) \cdot 1 + 1 \cdot (-\cos(x)) \cdot (-1) + C = x \cdot \sin(x) + \cos(x) + C.$
Die partielle Integration führt auf dasselbe Ergebnis.

**2)** Für die partielle Integration gilt:
$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int \overline{u}(x) \cdot \overline{v}'(x)\, dx =$
$= u(x) \cdot v(x) - (\overline{u}(x) \cdot \overline{v}(x) - \int \overline{u}'(x) \cdot \overline{v}(x)\, dx) = u(x) \cdot v(x) - \overline{u}(x) \cdot \overline{v}(x) + \int \overline{\overline{u}}(x) \cdot \overline{\overline{v}}'(x)\, dx =$

$= u(x) \cdot v(x) - \bar{u}(x) \cdot \bar{v}(x) + \bar{\bar{u}}(x) \cdot \bar{\bar{v}}(x) - \int \bar{\bar{u}}'(x) \cdot \bar{\bar{v}}(x)\,dx = \ldots$ usw.

Für die Tabellenmethode gilt:

| u | v' | ±1 |
|---|---|---|
| $u(x)$ | $v'(x)$ | +1 |
| $u'(x) = \bar{u}(x)$ | $v(x) = \bar{v}'(x)$ | −1 |
| $\bar{u}'(x) = \bar{\bar{u}}(x)$ | $\bar{v}(x) = \bar{\bar{v}}'(x)$ | +1 |
| ... | $\bar{\bar{v}}(x) = \bar{\bar{\bar{v}}}'(x)$ | −1 |
| | ... | +1 |
| | | ... |

Multipliziert man in den Diagonalen, so erhält man
$u(x) \cdot v(x) \cdot (+1) + \bar{u}(x) \cdot \bar{v}(x) \cdot (-1) + \bar{\bar{u}}(x) \cdot \bar{\bar{v}}(x) \cdot (+1) + \ldots$.
Das ist das oben angegebene Ergebnis der partiellen Integration.
Die Methode ist zielführend, wenn die Ableitung eines der beiden Faktoren des Integranden nach endlich vielen Schritten null wird.

**6.118** ***A)*** Die Ableitungen von $f(x) = \cos(x)$ und die Ableitungen von $g(x) = \sin(x)$ sind zyklisch und werden daher nicht null. Aus diesem Grund versagt die Tabellenmethode aus **6.117**.

***B)*** Die dritte Ableitung von $f(x) = x^2$ ist null, die Tabellenmethode ergibt
$\int x^2 \cdot e^x\,dx = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2 \cdot e^x + C$

**6.119** ***1)*** $\frac{8x-7}{x^2-3x-4}$ ***2)*** $\frac{x-2}{x^2+4x+4}$ ***3)*** $\frac{3x^2-12x+17}{x^3-5x^2+7x-3}$

Der Grad des Zählerpolynoms ist jeweils um eins kleiner als der Grad des Nennerpolynoms.

**6.120** $x^3 + 2x^2 - 15x = x \cdot (x-3) \cdot (x+5)$

Das Polynom 3. Grads hat drei reelle Nullstellen mit ganzzahligen x-Koordinaten. Daher kann der Nenner in ein Produkt aus drei Linearfaktoren mit nur ganzzahligen Summanden zerlegt werden.

$x^3 + 2x^2 + 5x = x \cdot (x - 1{,}449\ldots) \cdot (x + 3{,}449\ldots)$

Das Polynom 3. Grads hat drei reelle Nullstellen, wovon nur eine eine ganzzahlige x-Koordinate hat. Der Nenner kann daher zwar in ein Produkt aus drei Linearfaktoren zerlegt werden, zwei der Faktoren enthalten aber irrationale Zahlen als Summanden.

**6.124** ***a)*** zwei einfache
***b)*** zwei einfache komplexe
***c)*** eine einfache und zwei einfache komplexe
***d)*** eine einfache und eine zweifache
***e)*** zwei einfache und eine zweifache
***f)*** vier einfache komplexe

**6.125** ***C)*** ist richtig.

***A)*** $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-5}$ ***B)*** $\frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x+3}$

**6.126** ***a)*** $\frac{2}{x} - \frac{4}{x-3}$ ***b)*** $-\frac{3}{x} + \frac{7}{x-5}$ ***c)*** $\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x+2}$ ***d)*** $\frac{2}{x-3} - \frac{1}{x+3}$

**6.127** ***a)*** $-\frac{2}{x+1} + \frac{4}{x+2}$ ***b)*** $\frac{1}{5 \cdot (x+2)} + \frac{9}{5 \cdot (x-3)}$ ***c)*** $\frac{2}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}$ ***d)*** $\frac{4}{x+3} + \frac{2}{(x+3)^2}$

**6.128** ***a)*** $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x-4}$ ***b)*** $\frac{1}{x} - \frac{3}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}$ ***c)*** $\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x-4}$ ***d)*** $\frac{2}{5 \cdot (x-1)} - \frac{1}{x} + \frac{1}{5 \cdot (x+2)}$

**6.129** ***a)*** $x - 5 - \frac{1}{x+1} + \frac{3}{x-4}$ ***b)*** $x - 1 - \frac{2}{x-3} + \frac{2}{x+3}$ ***c)*** $2 + \frac{3}{x-3} - \frac{1}{(x-3)^2}$ ***d)*** $1 + \frac{2}{x+2} - \frac{4}{x}$

**6.130** **a)** $2 \cdot \ln(|x+1|) - 3 \cdot \ln(|x-1|) + C$ **c)** $3 \cdot \ln(|x-2|) - \ln(|x+4|) + C$

**b)** $7 \cdot \ln(|x+4|) + 5 \cdot \ln(|x|) + C$ **d)** $-\frac{3}{x+1} + 2 \cdot \ln(|x+1|) + C$

**6.131** **a)** $\frac{7}{4} \cdot \ln(|x-2|) + \frac{1}{4} \cdot \ln(|x+2|) + \ln(|x|) + C$ **c)** $-\frac{4}{x-2} + \ln(|x|) + C$

**b)** $\frac{6}{x} + 7 \cdot \ln(|x+5|) + \ln(|x|) + C$ **d)** $3 \cdot \ln(|x-1|) + 5 \cdot \ln(|x+2|) - 2 \cdot \ln(|x|) + C$

**6.132** **a)** $2x + 3 \cdot \ln(|x-1|) - \ln(|x+5|) + C$

**b)** $\frac{3x^2}{2} - 4x + 3 \cdot \ln(|x-2|) - 2 \cdot \ln(|x+4|) + C$

**c)** $\frac{x^3}{3} - \frac{4}{3} \cdot \ln(|x-3|) + \frac{4}{3} \cdot \ln(|x|) + C$

**d)** $\frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{49x^2}{2} - 267x + \frac{32\,769}{13} \cdot \ln(|x+8|) + \frac{3\,124}{13} \cdot \ln(|x-5|) + C$

**6.133** **A) 1)** $\ln\left(\sqrt{|x^2-4|}\right) + C$ **2)** Substitution mit $u = x^2 - 4$ ergibt $\frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{u}\,du$

**B) 1)** $\ln(|x+4|) + C$ **2)** Kürzen mit $(x-4)$ ergibt $\int \frac{1}{x+4}\,dx$

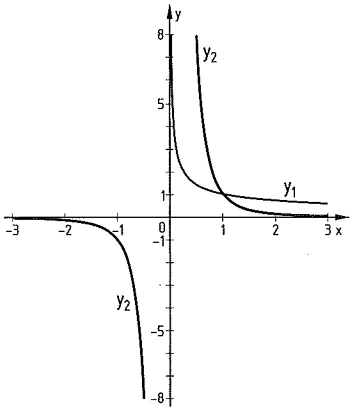
**C) 1)** $\ln(|x+11|) + C$ **2)** Kürzen mit $(x+5)$ ergibt $\int \frac{1}{x+11}\,dx$

**6.134** **a)** $\frac{2x+3}{x^2+4} - \frac{5}{x}$ **b)** $\frac{5}{x^2+x+1} + \frac{3}{x}$ **c)** $\frac{x}{x^2+4x+6} - \frac{1}{x}$ **d)** $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+3}$

**6.135** **a)** $3 \cdot \arctan(x) - \ln(|x|) + C$ **c)** $\arctan(x) + \frac{2x^2+2}{x} + C$

**b)** $\frac{1}{2} \cdot \ln(x^2+3) + 2 \cdot \ln(|x-1|) + C$ **d)** $\frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{x}{2}\right) - \ln(x^2+4) + 3 \cdot \ln(|x|) + C$

**6.136** **1)**



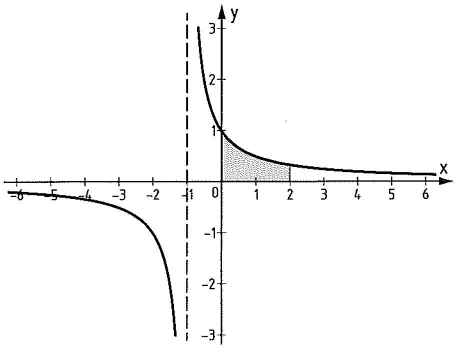

**2)** A : $y_1$ und $y_2$ beschränkt
B : $y_1$ und $y_2$ unbeschränkt
C : $y_1$ und $y_2$ unbeschränkt
D : $y_1$ und $y_2$ beschränkt

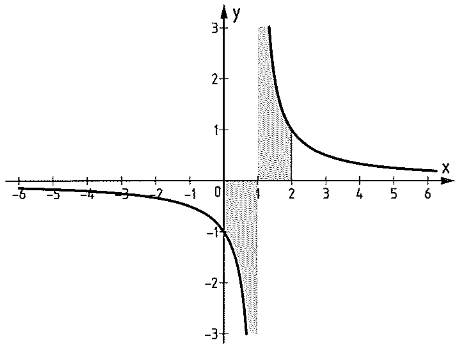
**3)** Division durch 0 und durch $\infty^2$ treten auf.

**6.138** **1)** $\int_1^{\infty} e^{-x}\,dx$ **2)** $\int_0^3 \frac{1}{x}\,dx$ **3)** $\int_0^2 \frac{1}{x^2}\,dx$

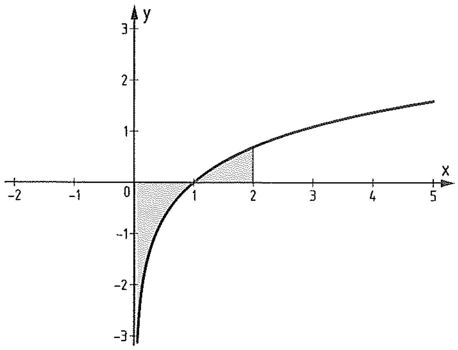
**6.139** **1)** kein uneigentliches Integral
Beide Grenzen sind endlich, der Integrand wird im Integrationsbereich nicht unendlich.

**2)** uneigentliches Integral
Die Funktion hat an der Stelle $x = 1$ eine Polstelle.

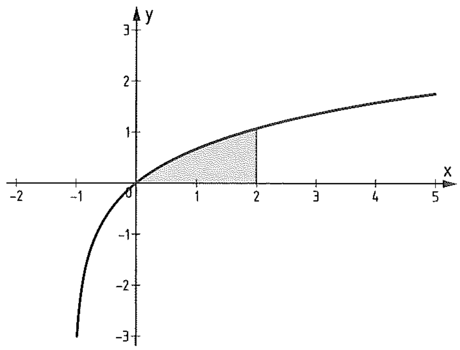


**3)** uneigentliches Integral
Für $x \longrightarrow 0$ gilt $f(x) \longrightarrow -\infty$.



**4)** kein uneigentliches Integral
Beide Grenzen sind endlich, der Integrand wird im Integrationsbereich nicht unendlich.



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **6.140** | **a)** $\frac{1}{2}$ | **b)** $\frac{1}{64}$ | **c)** $+\infty$ | **d)** $+\infty$ |
| **6.141** | **a)** $+\infty$ | **b)** $\frac{1}{2}$ | **c)** $\frac{1}{3e^3}$ | **d)** $+\infty$ |
| **6.142** | **a)** $+\infty$ | **b)** 2 | **c)** 7,559... | **d)** 2,828... |
| **6.143** | **a)** $\pi$ | **b)** – | **c)** $+\infty$ | **d)** – |
| **6.144** | **a)** 1 | **b)** 2 | **c)** $-1$ | **d)** $-\frac{1}{4}$ |

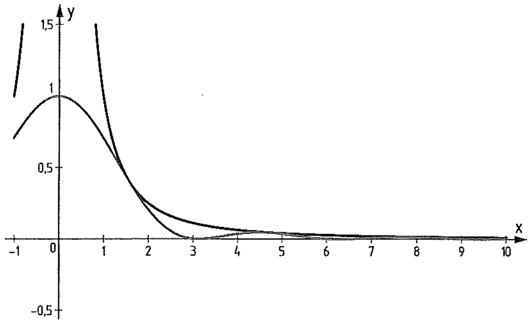
**6.145** $\Gamma(3) = 2$; $\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2! = 1 \cdot 2 = 2$

**6.146** **1)** 0,000433... $\frac{1}{\text{Jahre}}$ **2)** 2 308,312... Jahre

**6.147** $n > 1$: $\int_1^\infty \frac{1}{x^n}\,dx = \lim\limits_{b \to \infty}\left(\int_1^b x^{-n}\,dx\right) = \lim\limits_{b \to \infty}\left(\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\Big|_1^b\right) = \frac{1}{1-n} \cdot \left(\lim\limits_{b \to \infty}\left(\frac{1}{b^{n-1}}\right) - \frac{1}{1^{n-1}}\right) = \frac{1}{1-n} \cdot (0-1) =$

$= \frac{1}{n-1} \Rightarrow$ konvergent

**6.148**



Im Intervall $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ gilt für die Sinusfunktion $\sin(x) < x$. Für $x \in ]0; 1]$ folgt daraus $\sin^2(x) < x^2$ bzw. $\frac{\sin^2(x)}{x^2} < 1$. Für $x = 0$ gilt $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{\sin^2(x)}{x^2}\right) = 1$. Dies folgt unmittelbar aus $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = 1$. $\int_0^1 \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx$ hat daher einen endlichen Wert. Die Grafik bestätigt diese Eigenschaft der zu untersuchenden Funktion. Für Zahlen $x \in \mathbb{R}_0^+$ nimmt der Term $\sin^2(x)$ nur Werte von 0 bis 1 an. Für $x \in [1; \infty[$ gilt daher $0 \leq \frac{\sin^2(x)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$. Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{\sin^2(x)}{x^2}$ verläuft in dem in Aufgabe **6.147** untersuchten Bereich $[1; \infty[$ zwischen dem Graph der Funktion $g(x) = \frac{1}{x^2}$ und der x-Achse. Wegen der Konvergenz von $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konvergiert in diesem Bereich auch das zu untersuchende Integral. Insgesamt folgt daraus die Konvergenz von $\int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx$.

**6.149** **a)** $\frac{1}{s}$ **b)** $\frac{1}{s^2}$

**6.150** **1)** Falsch. Das bestimmte Integral gibt nur dann den Flächeninhalt an, wenn der Graph der erzeugenden Funktion innerhalb der Integrationsgrenzen oberhalb der x-Achse liegt.
**2)** Wahr. Da F(x) + C eine Stammfunktion von f(x) ist, muss auch F(x) eine Stammfunktion von f(x) sein. Ist F(x) eine Stammfunktion von f(x), so sind auch alle Funktionen der Form $F(x) + C$ ($C \in \mathbb{R}$), also auch $F(x) + D$ ($D \in \mathbb{R}$), Stammfunktionen von f(x).
**3)** Falsch. Das Ergebnis ist eine Zahl bzw. eine Maßzahl mit einer Einheit.

**6.151** **a)** A, C **b)** C **c)** B

**6.152** C

**6.153** **a)** $F(x) = \frac{x^3}{3} - x + C$, $y = \frac{x^3}{3} - x + \frac{11}{3}$ **c)** $F(x) = -\cos(x) + C$, $y = 2 - \cos(x)$
**b)** $F(x) = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} + C$, $y = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} + 2$

**6.154** **a)** **1)** 0 **2)** 8 $E^2$ **c)** **1)** –6 **2)** $15{,}\dot{3}\ E^2$
**b)** **1)** 0 **2)** 8 $E^2$ **d)** **1)** 0 **2)** 0,693... $E^2$

**6.155** **a)** $\frac{x^4}{2} - 4 \cdot e^x + C$ **b)** $4 \cdot \sin(t) + \frac{t^2}{2} + C$ **c)** $\frac{1}{2} \cdot \ln(|u|) - \cos(u) + C$

**6.156** **a)** $\frac{2^x}{\ln(2)} + 3 \cdot \ln(|x|) - 2 \cdot e^x + C$ **b)** $2 \cdot \tan(t) - 2t^2 + C$ **c)** $a \cdot \arctan(s) + \frac{b}{3} \cdot s^3 + c \cdot s + C$

**6.157** **a)** $x^4 + C$ **b)** $-\frac{1}{9x^3} + C$ **c)** $\frac{4t^2 \cdot \sqrt[4]{t^3}}{11} + C$ **d)** $9 \cdot \sqrt[3]{r} + C$

**6.158** **a)** –0,079... **b)** $10{,}\dot{2}$ **c)** $-\frac{8}{7}$

**6.159** **a)** 4 **b)** $-\frac{\pi}{2}$ **c)** 31,556...

**6.160** **a)** $\frac{q\ell^2}{9 \cdot \sqrt{3}}$ **c)** $\frac{m}{2} \cdot (v_2{}^2 - v_1{}^2)$ **e)** $\frac{aT^2}{2}$
**b)** mgh **d)** $\frac{a^\pi - 1}{\ln(a)}$ **f)** $t_2 - t_1 + \frac{1}{\lambda \cdot e^{\lambda t_2}} - \frac{1}{\lambda \cdot e^{\lambda t_1}}$

**6.161** **1)** $h(t) = -4{,}905 \cdot t^2 + h_0$
Die Integrationskonstante entspricht dem Wert $h_0$, das ist die Höhe zum Zeitpunkt t = 0.
**2)** 1,106... s; 10,849... $\frac{m}{s}$

**6.162** 1 → C, 2 → B

**6.163** **a)** $\frac{1}{3} \cdot e^{3t+1} + C$ **b)** $t^2 - \frac{1}{3} \cdot \cos(3t + 1) + C$ **c)** $6 \cdot e^{\frac{t}{3}} - t + C$

**6.164** **a)** $\frac{3}{8} \cdot \sqrt[3]{(x^2 + 2)^4} + C$ **c)** $\frac{s^2 \cdot x}{\sqrt{a + s^3}} + C$ **e)** $\frac{2}{3} \cdot \ln(|t^3 - 1|) + C$
**b)** $e^{\sqrt{x}} + C$ **d)** $\frac{1}{4} \cdot \sin(2\varphi^2) + C$ **f)** $2 \cdot \ln(|s + 1|) - \frac{1}{2} \cdot \ln(|s^2 + 3|) + C$

**6.165** **a)** $\frac{3u - 1}{21} \cdot (u + 2)^6 + C$ **b)** $x^2 \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{2} + C$ **c)** $t \cdot e^t + C$

**6.166** **a)** $\ln(|x - 3|) + 4 \cdot \ln(|x + 5|) + C$ **c)** $2 \cdot \ln(|x - 2|) - 3 \cdot \ln(|x + 3|) + \ln(|x|) + C$
**b)** $3 \cdot \ln(|x + 4|) - 3 \cdot \ln(|x - 1|) + C$

**6.167** **a)** **1)** $\ln(|x - a|) + C$ **2)** $-\ln(|x - a|) + C$ **3)** $x + a \cdot \ln(|x - a|) + C$
**b)** **1)** $\frac{1}{a} \cdot \arctan(\frac{x}{a}) + C$ **2)** $\frac{1}{2a} \cdot \ln(|\frac{x - a}{x + a}|) + C$ **3)** $\frac{1}{2} \cdot \ln(|x^2 - a^2|) + C$

**6.168** **a)** $\frac{\pi}{4}$ **b)** $\frac{7}{3}$ **c)** 1

**6.169** ***a)*** 5 216,926… ***b)*** 0 ***c)*** $\frac{1}{2}$

**6.170** ***a)*** Die Funktion ist integrierbar und die obere Grenze ist unendlich. Das Integral ist konvergent. Die Berechnung ergibt 3.

***b)*** Die Funktion ist integrierbar und sie hat im Integrationsbereich an der Stelle $x = 0$ eine Polstelle. Das Integral ist divergent. Die Berechnung ergibt $+\infty$.

***c)*** Die Funktion ist integrierbar und die untere Grenze ist minus unendlich. Das Integral ist konvergent. Die Berechnung ergibt $\frac{1}{3}$.

***d)*** Die Funktion ist integrierbar und sie hat im Integrationsbereich an der Stelle $x = 2$ eine Polstelle. Das Integral ist konvergent. Die Berechnung ergibt $4 \cdot \sqrt{2}$.

***e)*** Die Funktion ist integrierbar und die obere Grenze ist unendlich. Das Integral ist divergent. Die Berechnung ergibt $+\infty$.

**6.171** ***1)*** $\int x \cdot e^x\,dx = x \cdot e^x - e^x + C$ und $\int x^2 \cdot e^x\,dx = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2 \cdot e^x + C$

***2)*** $\int x^3 \cdot e^x\,dx = x^3 \cdot e^x - 3x^2 \cdot e^x + 6x \cdot e^x - 6 \cdot e^x + C$

$\int x^4 \cdot e^x\,dx = x^4 \cdot e^x - 4x^3 \cdot e^x + 12x^2 \cdot e^x - 24x \cdot e^x + 24 \cdot e^x + C$

$\int x^5 \cdot e^x\,dx = x^5 \cdot e^x - 5x^4 \cdot e^x + 20x^3 \cdot e^x - 60x^2 \cdot e^x + 120x \cdot e^x - 120 \cdot e^x + C$

***3)*** $\int x^n \cdot e^x\,dx = x^n \cdot e^x - n \cdot x^{n-1} \cdot e^x + n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} \cdot e^x - \ldots + (-1)^{n+1} \cdot n! \cdot x^1 \cdot e^x + (-1)^n \cdot n! \cdot x^0 \cdot$
$\cdot e^x + C$

1. Schritt: $n = 1 \Rightarrow \int x^1 \cdot e^x\,dx = x^1 \cdot e^x - 1 \cdot x^0 \cdot e^x + C = x \cdot e^x - e^x + C$

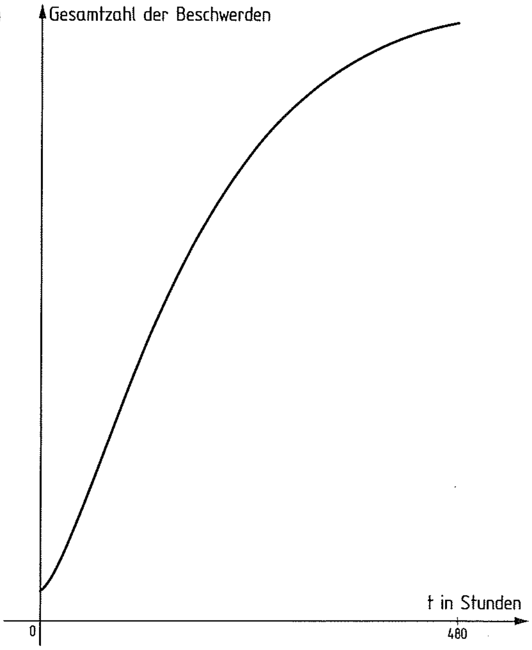
3. Schritt: Partielle Integration von $\int x^{n+1} \cdot e^x\,dx$ mit $u = x^{n+1}$ und $v' = e^x$ ergibt

$\int x^{n+1} \cdot e^x\,dx = x^{n+1} \cdot e^x - (n+1) \cdot \int x^n \cdot e^x\,dx$

Anwenden der Induktionsannahme auf $\int x^{n+1} \cdot e^x\,dx$ ergibt $\int x^{n+1} \cdot e^x\,dx =$
$= x^{n+1} \cdot e^x - (n+1) \cdot x^n \cdot e^x + (n+1) \cdot n \cdot x^{n-1} \cdot e^x - \ldots + (-1)^{n+2} \cdot (n+1)! \cdot x \cdot e^x +$
$+ (-1)^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot e^x + C = x^{n+1} \cdot e^x - (n+1) \cdot (x^n \cdot e^x - n \cdot x^{n-1} \cdot e^x + \ldots +$
$+ (-1)^{n+1} \cdot n! \cdot x \cdot e^x + (-1)^n \cdot n! \cdot e^x) + C = x^{n+1} \cdot e^x - (n+1) \cdot \int x^n \cdot e^x\,dx$

**6.172** ***1)*** $A = \int_a^b f(t)\,dt$

***2)***



**6.173** $\lim\limits_{t \to \infty} f(t) \cdot e^{-st} = 0$ und partielle Integration ergibt

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \int_0^\infty f'(t) \cdot e^{-st}\,dt = f(t) \cdot e^{-st}\Big|_{t=0}^{t=\infty} + s \cdot \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st}\,dt =$$

$$\lim_{t \to \infty} f(t) \cdot e^{-st} - f(0) + s \cdot \mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(f(t)) + f(0)$$

**6.174** $51{,}603... \cdot 10^9$ J

**6.175** $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi} = 1$

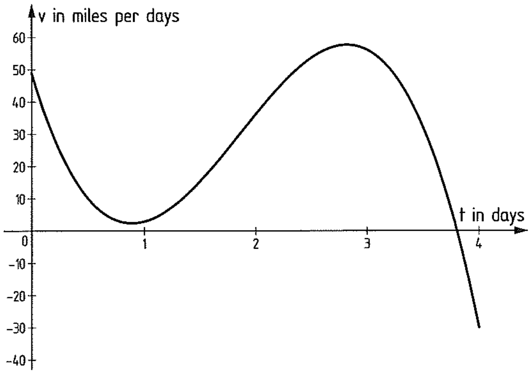
$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\right.$, siehe Buch Seite 230$\left.\right)$

**6.176** The primitive of a given function f(x) is a function F(x) which has f(x) as its derivative. If F(x) is a primitive of f(x) then F(x) + C is also a primitive of f(x), where C is any constant. The entire family of primitives of the form F(x) + C is called the primitive integral of f(x).
To calculate the primitive integral of f(x) it is needed to ask the question: Which function F(x) has as its derivative f(x)? To answer the question we think in terms of the differentiation rules and formulas and work backward to find F(x).

**6.177** ***1)*** 15.65625 $E^2$ ***2)*** 8.90625 $E^2$

**6.178** $\frac{1}{2}$

**6.179** ***1)***




The direction of Frodo´s movement has changed at the end of the fourth day.

***2)*** 105 miles

***3)*** 111.595... miles

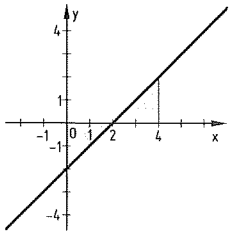
**6.180** $-t^2 \cdot e^{-t} - e^{-t} + C$

**6.181** $4.347... \cdot 10^{-18}$ J

# 7 Anwendungen der Integralrechnung

**7.1** $A = 4\ E^2$

**1)**




**2)** Die unterschiedliche Orientierung der beiden Teilflächen muss bei der Berechnung berücksichtigt werden.

**7.5** **a)** $\int_a^b f(x)\,dx + \left|\int_b^c f(x)\,dx\right|$ **b)** $\int_{t_1}^{t_2} g(t)\,dt + \left|\int_{t_2}^{t_3} g(t)\,dt\right|$ **c)** $\left|\int_a^b h(x)\,dx\right|$

**7.6** **a)** $\int_{x_1}^{x_3} [g(x) - f(x)]\,dx$ **c)** $\int_a^b [f(x) - h(x)]\,dx + \int_b^c [g(x) - h(x)]\,dx$

**b)** $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx + \int_b^c [g(x) - f(x)]\,dx$

**7.7** **a)** **1)** $\int_0^a (c - 2x)\,dx$ **2)** $\int_0^c \frac{y}{2}\,dy$ **c)** **1)** $\int_0^2 (4 - 0{,}5x^3)\,dx$ **2)** $\sqrt[3]{2} \cdot \int_0^4 \sqrt[3]{y}\,dy$

**b)** **1)** $\int_0^3 (-x^2 + 9)\,dx$ **2)** $\int_0^9 \sqrt{9 - y}\,dy$

**7.8** **a)** $4{,}5\ E^2$ **b)** $7{,}5\ E^2$ **c)** $18\ E^2$

Die elementare Berechnung ist jeweils weniger aufwändig.

**7.9** **a)** $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{2}{3}$

**7.10** **a)** $5{,}1\dot{6}\ E^2$ **c)** $11{,}\dot{3}\ E^2$
**b)** $4{,}75\ E^2$ **d)** $0{,}\dot{6}\ E^2$

**7.11** **a)** $0{,}5\ E^2$ **b)** $0{,}5\ E^2$ **c)** $4\ E^2$ **d)** $2{,}172...\ E^2$

**7.12** **a)** $4\ E^2$ **b)** $2\ E^2$

**7.13** **a)** $\frac{\pi}{2}\ E^2$ **b)** $\frac{\pi}{3}\ E^2$

**7.14** **a)** $9\ E^2$ **c)** $2{,}314...\ E^2$
**b)** $9\ E^2$ **d)** $16\ E^2$

**7.15** **a)** $32{,}75\ E^2$ **b)** $8\ E^2$

**7.16** **a)** $8\ E^2$ **b)** $11{,}8\dot{3}\ E^2$

**7.17** **a)** $0{,}\dot{3}\ E^2$ **b)** $1{,}\dot{3}\ E^2$

**7.18** **a)** $0{,}094...\ E^2$ **b)** $0{,}1875\ E^2$

**7.19** **a)** $5{,}656...\ E^2$ **b)** $2{,}255...\ E^2$

**7.20** **a)** $2{,}\dot{6}\ E^2$ **b)** $1\ E^2$ **c)** $4\ E^2$

**7.21** $b = 1{,}609...$

**7.22** $1{,}125\ E^2$

**7.23** **a)** $12{,}375\ E^2$ **b)** $54\ E^2$

**7.24** **1)** $x_1 = 0,\ x_2 = 3,\ t\colon y = x - \frac{1}{3}$ **2)** $1{,}41\dot{6}\ E^2$

**7.25** $f(x) = \frac{8}{3}x^2 - \frac{32}{3}x + \frac{44}{3}$

**7.26** $f_1(x) = \frac{x^4}{5} - x^3, f_2(x) = -\frac{x^4}{5} + x^3$

**7.27** $x = 1{,}427...$

**7.28** ***A)*** Richtig. Das Integral ergibt den Flächeninhalt zwischen der roten Kurve und der x-Achse im Intervall $[0; \pi]$. Das ist ein Viertel der Gesamtfläche. Multiplikation mit vier führt daher auf ein richtiges Ergebnis.

***B)*** Falsch. Das Integral berechnet die „orientierten" Flächeninhalte zwischen der roten Kurve und der x-Achse im Intervall $[0; 2\pi]$. Da der Flächeninhalt im Intervall $[0; \pi]$ gleich groß wie im Intervall $[\pi; 2\pi]$ ist und die Vorzeichen der beiden Flächeninhalte verschieden sind, ist das Ergebnis des Integrals null.

***C)*** Richtig. Das erste Integral ergibt den Flächeninhalt zwischen der roten Kurve und der x-Achse im Intervall $[0; \pi]$. Multiplikation mit zwei ergibt den Flächeninhalt zwischen den beiden Kurven im Intervall $[0; \pi]$. Das zweite Integral ergibt den Flächeninhalt zwischen der roten Kurve und der x-Achse mit negativem Vorzeichen. Multiplikation mit zwei ergibt den Flächeninhalt zwischen den beiden Kurven im Intervall $[\pi; 2\pi]$ mit negativem Vorzeichen. Subtraktion des negativen Teilergebnisses führt daher auf das richtige Ergebnis.

**7.29** ***1)*** $f(x) = \frac{1}{8}x^2$

***2)*** $17\,066{,}\dot{6}$ m$^3$

***3)*** Eine waagrechte Gerade auf der halben Höhe des 2 Meter hohen Kanals hat die Gleichung $g(x) = 1$. Berechnen der Schnittstellen der Parabel und der Geraden durch Lösen der Gleichung $f(x) = g(x)$ ergibt $x_1 = -\sqrt{8}$ und $x_2 = \sqrt{8}$. Berechnung der Querschnittsfläche

$A_1 = 2 \cdot \sqrt{8} - \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \frac{1}{8}x^2\,dx$ des halb gefüllten Kanals ergibt $A_1 = 3{,}771...$ m$^2$.

Das sind $\frac{A_1}{A} = \frac{3{,}771...}{10{,}\dot{6}} \cdot 100\,\% = 35{,}355...\,\% \approx 35\,\%$ des, in ***2)*** berechneten, gesamten Querschnitts.

Die in der Zeitung angegebene Behauptung ist richtig.

***4)*** 1,206... m

**7.30** ***1)*** 0,07 m$^2$

***2)*** 151,9 kg

**7.31** ***1)*** $A = 4 + \int_0^5 y_1(x)\,dx - \int_1^6 y_2(x)\,dx$

***2)*** $a = 2{,}5$, $b = -3{,}6$

***3)*** 12 L grüne Farbe (11,770...) bzw. 13 L blaue Farbe (12,229...)

**7.32** $40{,}\dot{6}$ m$^2$

**7.33** ***1)*** Die beiden Windungen des angegebenen Flussverlaufs entsprechen dem Tiefpunkt bzw. dem Hochpunkt einer Polynomfunktion dritten Grads.

***2)*** Wegen des in der Abbildung angegebenen Koordinatensystems beschreibt die gesuchte Polynomfunktion dritten Grads den Verlauf des unteren Flussufers, wenn sie an der Stelle $x_1 = 0$ eine zweifache Nullstelle bzw. $x_2 = 360$ eine einfache Nullstelle hat. Einsetzen der Nullstellen in die Linearfaktorzerlegung $ax^3 + bx^2 + cx + d = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$ ergibt $f(x) = a \cdot (x - 0) \cdot (x - 0) \cdot (x - 360) = a \cdot x^2 \cdot (x - 360)$.

$a = -\frac{1}{145\,800}$

***3)*** 14 908 200,00 €

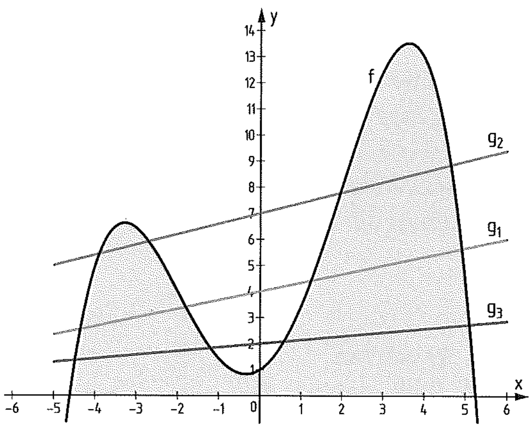
**7.34** ***1)*** 41,652... %

***2)*** 3 561,29 € (3 561,288...)

***3)*** Durch das Strecken in x-Richtung vergrößern sich beide Flächen um den Faktor 1,1 und durch das Strecken in y-Richtung nochmals um den Faktor 1,1. Insgesamt werden beide Flächen daher um den Faktor $1{,}1 \cdot 1{,}1 = 1{,}21$ vergrößert. Das Verhältnis der beiden Flächen verändert sich daher nicht und der Prozentsatz aus ***1)*** bleibt gleich.
Die Berechnung ergibt für den gestreckten Flächeninhalt der Gesamtfläche $A_1 = 36{,}505...\ \text{cm}^2$ und für den gestreckten Flächeninhalt der Zirkonfläche $A_2 = 15{,}205...\ \text{cm}^2$. Daraus ergibt sich für das Verhältnis der beiden gestreckten Flächeninhalte $\frac{A_2}{A_1} = 0{,}416...$ . Es werden daher auch nach der Streckung 41,652... % der Gesamtfläche des Stirnteils durch den Zirkon verdeckt.

**7.35** ***1)*** 2,507...

***2)***




$g_1$ erfüllt die Bedingung.

***3)*** Für den Flächeninhalt der kleineren Fläche ergeben sich folgende Prozentsätze:
***A)*** 43,168... %, ***B)*** 16,496... %, ***C)*** 31,785... %.
Das Ergebnis aus ***2)*** ist daher richtig.

**7.36** ***a)*** $3{,}436...\ E^2$ ***b)*** $4{,}158...\ E^2$ ***c)*** $4{,}002...\ E^2$ ***d)*** $1{,}138...\ E^2$

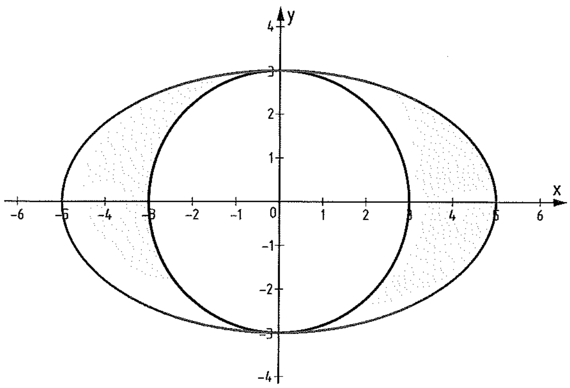
**7.37** ***a)*** $1{,}247...\ E^2$ ***b)*** $3{,}718...\ E^2$ ***c)*** $1{,}272...\ E^2$ ***d)*** $6{,}809...\ E^2$

**7.38** ***a)*** $\frac{\pi}{2}\ E^2$ ***b)*** $1\ E^2$ ***c)*** $\frac{24}{\pi}\ E^2$

**7.39** ***a)*** $x = 0{,}412...$ ***b)*** $y = 1$

**7.40** ***a)*** $4{,}566...\ \text{cm}^2$ ***b)*** $\frac{\pi - 2}{4} \cdot r^2 = 0{,}285... \cdot r^2$

**7.41**




Der gesuchte Flächeninhalt ist die Differenz des Flächeninhalts der Ellipse und des Flächeninhalts des Kreises mit dem Radius r = 3 E. Die Ellipse besteht aus vier gleich großen Teilen. Es genügt daher, den Flächeninhalt zwischen der Ellipse und der x-Achse im Intervall [0; 5] zu berechnen und mit vier zu multiplizieren.
Für den gesamten Flächeninhalt gilt daher
$$A = 4 \cdot \int_0^5 \sqrt{\frac{225 - 9x^2}{25}}\,dx - 3^2 \cdot \pi = 18{,}849...\ E^2.$$

**7.42** Aus hyp: $x^2 - y^2 = 1$ folgt für die Kurve im 1. Quadranten $y = \sqrt{x^2 - 1}$ und sei $P(x_0|y(x_0))$ der den Hyperbelsektor im 1. Quadranten begrenzende Hyperbelpunkt.

Für den Flächeninhalt des Dreiecks $0x_0P$ gilt $A_\Delta = \frac{x_0 \cdot y(x_0)}{2} = \frac{x_0 \cdot \sqrt{x^2 - 1}}{2}$.

Für die von der Hyperbel, der x-Achse und der senkrechten Gerade an der Stelle $x_0$ eingeschlossene Fläche gilt

$$A_{hyp} = \int_1^{x_0} \sqrt{x^2 - 1}\; dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x \cdot \sqrt{x^2 - 1} - \operatorname{arcosh}(|x_0|)\right)\Big|_1^{x_0} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_0 \cdot \sqrt{x_0^{\,2} - 1} - \operatorname{arcosh}(x_0)\right).$$

Für den Hyperbelsektor gilt daher

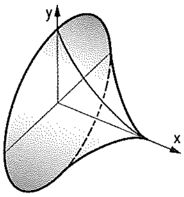
$$A_{Sektor} = 2 \cdot \left(\frac{x_0 \cdot \sqrt{x^2 - 1}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(x_0 \cdot \sqrt{x^2 - 1} - \operatorname{arcosh}(x_0)\right)\right) = \operatorname{arcosh}(x_0).$$

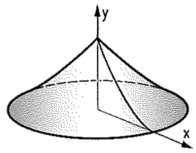
**7.43** ***1)*** Das Volumen ist das Produkt aus Grundfläche und Höhe.
***2)*** Das Volumen ist ein Drittel des Produkts aus Grundfläche und Höhe.

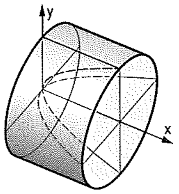
**7.44** ***1)*** Das Rad setzt sich aus drei Drehzylindern zusammen, deren Radien in y-Richtung und deren Höhen in x-Richtung aus der Schnittdarstellung abgelesen werden können. Der Radius des linken Zylinders beträgt 10 cm, die Höhe 5 cm. Der Radius des mittleren Zylinders beträgt 30 cm, die Höhe 10 cm. Der Radius des rechten Zylinders beträgt 20 cm, die Höhe 5 cm. Das Volumen des Rads ist die Summe der Volumina der drei Drehzylinder.
***2)*** 36 128,315... $cm^3$

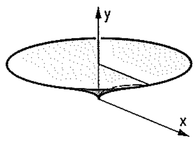
**7.47** ***1)*** Drehkegel ***2)*** Kegelstumpf

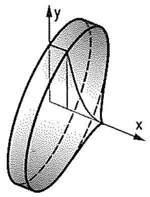
**7.48** ***1)*** y-Achse ***2)*** x-Achse ***3)*** y-Achse

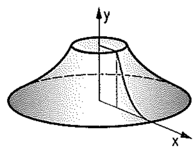
**7.49** ***a) 1)***


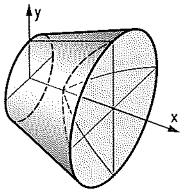
***2)***


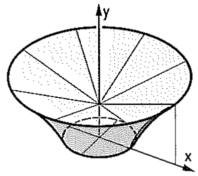
***c) 1)***


***2)***



***b) 1)***


***2)***


***d) 1)***


***2)***



**7.50** ***a)*** 16,493... $E^3$ ***b)*** 45,238... $E^3$ ***c)*** 67,020... $E^3$ ***d)*** 190,851... $E^3$

**7.51** ***a)*** 25,132... $E^3$ ***b)*** 78,749... $E^3$

**7.52** ***a)*** 23,370... $E^3$ ***b)*** 2,467... $E^3$ ***c)*** 40,143... $E^3$

**7.53** ***a)*** 50,265... $E^3$ ***b)*** 11,394... $E^3$ ***c)*** 53,197... $E^3$

**7.54** Berechnung des Integrals $\pi \cdot \int_{r-h}^{r} \left(\sqrt{r^2 - y^2}\right)^2 dy$ ergibt $V = \pi \cdot \left(rh^2 - \frac{h^3}{3}\right)$.

**7.55** ***a)*** Umformen der angegebenen Gleichung ergibt $y = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2}$. Berechnen des Volumens bei Drehung um die x-Achse ergibt $V = 2\pi \cdot \int_0^a \left(\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2}\right)^2 dx = 2\pi \cdot \left(b^2x - \frac{b^2x^3}{3a^2}\right)\Big|_0^a = \frac{4\pi}{3}ab^2$.

***b)*** Umformen der angegebenen Gleichung ergibt $x = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{b^2} \cdot y^2}$. Berechnen des Volumens bei Drehung um die y-Achse ergibt $V = 2\pi \cdot \int_0^b \left(\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{b^2} \cdot y^2}\right)^2 dy = 2\pi \cdot \left(a^2y - \frac{a^2y^3}{3b^2}\right)\Big|_0^b = \frac{4\pi}{3}a^2b$.

**7.56** $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 4x - 6$, $V_x = 21{,}258\ldots$ E$^3$

**7.57** ***1)*** 188,126... mℓ
***2)*** Nein. Die Füllhöhe beträgt bei 0,5 L Inhalt 10,257... cm, das ist mehr als 10 cm.

**7.58** Beim Umformen der Gleichung $y = (x - 4)^2$ auf x gibt es zwei Lösungen. Die von Erik verwendete Lösung beschreibt den in der Abbildung schwarz dargestellten rechten Teil des Graphs. Um den rot dargestellten Teil des Graphs zu erhalten, hätte Erik für die Integration die Gleichung $x = 4 - \sqrt{y}$ verwenden müssen.
Ein weiterer Fehler ist Erik bei der Berechnung mittels Technologieeinsatz passiert. Bei der Eingabe hat Erik vergessen, den Term $4 + \sqrt{y}$ zu quadrieren.
Für das Volumen hätte Erik richtig $V = \pi \cdot \int_0^4 (4 - \sqrt{y})^2\, dy \approx 92$ E$^3$ erhalten.

**7.59** ***1)*** $f_1(x) = 6$, $f_2(x) = -\frac{7}{338}x^2 + \frac{28}{169}x + \frac{958}{169}$, $f_3(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{20}{3}x - \frac{188}{3}$
***2)*** 1 188,499... g ≈ 1,20 kg
***3)*** 50,872... %

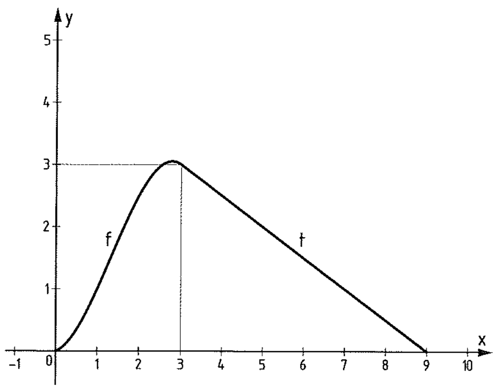
**7.60** ***1)*** 1,488... L ***2)*** 20,202... cm

**7.61** $f_1(x) = \frac{2}{3}x^2 - 2x + 3$, $0 \leqslant x \leqslant 2$; $f_2(x) = -\frac{22}{27}x^2 + \frac{14}{3}x - \frac{9}{2}$, $2 \leqslant x \leqslant 4$; $m = 32{,}702\ldots$ g

**7.62** 43,872... g

**7.63** ***1)*** $f_1(x) = 3x$, $0 \leqslant x \leqslant 10$; $f_2(x) = \frac{1}{1\,800}x^3 - \frac{1}{15}x^2 + 2x + \frac{145}{9}$, $10 \leqslant x \leqslant 80$
***2)*** $32{,}\dot{2}$ mm ***3)*** 1 338,795... g

**7.64** ***1)*** t: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$, $b = 9$ ***2)*** 94,214... m$^3$



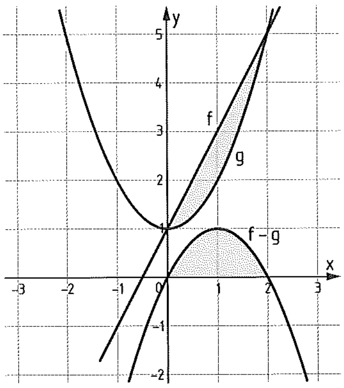

**7.65** ***1)*** 16,004... cm
***2)*** Adnan erwirtschaftet um ca. 60 ct (60,430...) mehr Gewinn.

**7.66** ***a) 1)*** $A(h) = \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{256}$ ***2)*** 10,392... $cm^3$

***b) 1)*** $A(h) = \frac{5}{16} \cdot h^2$ ***2)*** $53,\dot{3}\,cm^3$

***3)*** Die Berechnung mit elementaren Formeln liefert jeweils dasselbe Ergebnis.

**7.68**




Mit Daniels Ansatz wird das Volumen berechnet, das entsteht, wenn die von der Funktion f – g und der x-Achse eingeschlossene Fläche um die x-Achse rotiert.

Um das richtige Ergebnis zu erhalten, muss der Ansatz $V = \pi \cdot \int_0^2 (f^2(x) - g^2(x))\,dx$ verwendet werden. Damit wird das Volumen $V_g$ vom Volumen $V_f$ subtrahiert. $V_f$ ist das Volumen, das ensteht, wenn das im Intervall [0; 2] zwischen der Funktion f und der x-Achse liegende Flächenstück um die x-Achse rotiert. $V_g$ ist das Volumen, das ensteht, wenn das im Intervall [0; 2] zwischen der Funktion g und der x-Achse liegende Flächenstück um die x-Achse rotiert.

**7.69** ***a) 1)*** 16,755... $E^3$ ***2)*** 38,536... $E^3$

***b) 1)*** 13,404... $E^3$ ***2)*** 46,076... $E^3$

***c) 1)*** 40,212... $E^3$ ***2)*** 67,020... $E^3$

**7.70** ***a)*** 0,942... $E^3$ ***b)*** 67,858... $E^3$ ***c)*** 537,212... $E^3$

**7.71** 0,420... kg

**7.72** 5,841... m

**7.74** ***a)*** 11,531... E ***b)*** 9,073... E ***c)*** 7,253... E

**7.75** ***a)*** 3,620... E ***b)*** 5,915... E ***c)*** 29,205... E

**7.76** ***a)*** 1,910... E ***b)*** 2,555... E ***c)*** 2,290... E

**7.77** ***1)*** $f(x) = 0{,}2304x^3 - 0{,}864x^2 + 2$

***2)*** Die Rutsche ist im Wendepunkt am stärksten geneigt. Berechnen der zweiten Ableitung ergibt $f''(x) = 1{,}3824x - 1{,}728$. Nullsetzen ergibt $x = 1{,}25$. Berechnen des Neigungswinkels ergibt $\alpha = \arctan(f'(1{,}25)) = -47{,}202...°$. Wegen $\alpha = 47{,}202...° < 60°$ überschreitet die Neigung der Rutsche 60° nicht.

***3)*** 2,526... $m^2$

**7.78** 11,709... cm

**7.79** **1)** $y = \frac{3}{8\,192} \cdot x^2$ **2)** 1 325,439... m **3)** 2 051,997... m

**4)**

| | Golden Gate Bridge | Akashi-Kaikyo-Brücke |
|---|---|---|
| Gleichung der Kurve | $y = 1\,389{,}637... \cdot \cosh\left(\frac{x}{1\,389{,}637...}\right)$ | $y = 2\,326{,}028... \cdot \cosh\left(\frac{x}{2\,326{,}028...}\right)$ |
| Bogenlänge | 1 325,731... m | 2 052,340... m |
| absolute Differenz | 0,292... m | 0,343... m |
| relative Differenz | 0,0220... % | 0,0167... % |

**7.80** **1)** b = 230,921... m; s = 455,235... m **2)** 13 657,071... $m^2$
(Unter Verwendung des exakten Werts −38,92159... und unter der Annahme der horizontalen Achse auf der Höhe des Bodens und der vertikalen Achse in der Mitte des Bogens.)

**7.82** $y = \frac{r}{h} \cdot x \Rightarrow M_x = 2\pi \cdot \int_0^h \frac{r}{h} \cdot x \cdot \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}}\, dx = \frac{2\pi r}{h} \cdot \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}} \cdot \int_0^h x\, dx = \frac{2\pi r}{h} \cdot \sqrt{\frac{h^2 + r^2}{h^2}} \cdot \frac{h^2}{2} =$

$= \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} = \pi \cdot r \cdot s$

Hinweis: Die Formel für s müsste richtig $s = \sqrt{r^2 + h^2}$ lauten.

**7.83** $x = \sqrt{r^2 - y^2} \Rightarrow M_y = 2\pi \cdot \int_{r-h}^{r} \sqrt{r^2 - y^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - y^2}}\, dy = 2\pi \cdot \int_{r-h}^{r} r\, dy = 2\pi \cdot r \cdot (r - (r - h)) = 2\pi \cdot r \cdot h$

**7.84** 15,317... $m^2$

**7.85** 186,517... L

**7.86** **1) A)** einschaliges Drehhyperboloid **B)** zweischaliges Drehhyperboloid
**2) a)** 248,967... $E^2$ **b)** 198,797... $E^2$

**7.87** Minimalfläche: 17,677... $E^2$, Mantelfläche des Zylinders: 19,390... $E^2$

**7.88** **1)** $2{,}\dot{6}\,\frac{mm}{h}$ **2)** $22{,}\dot{6}\,\frac{mm}{h}$ **3)** $8{,}538...\,\frac{mm}{h}$

**7.92** **a) 1)** 3 **2)** 3,193... **b) 1)** $\frac{2}{\pi}$ **2)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **c) 1)** 19,085... **2)** 24,569...

**7.93** **1)** $m = 0$, $m_{abs} = \frac{2}{\pi}$

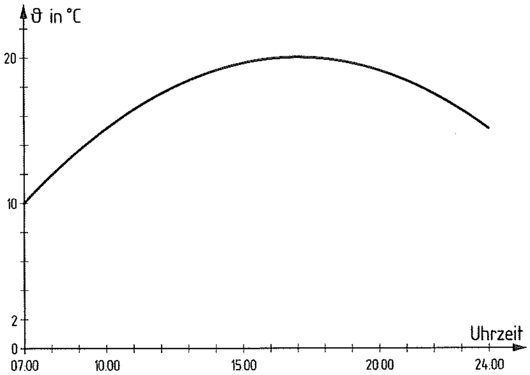
Die Summe der mit $\int_0^{\pi} \cos(x)\, dx$ berechneten orientierten Flächeninhalte ist null, m ist daher null. Mit $\int_0^{\pi} |\cos(x)|\, dx$ werden zwei Teilflächen berechnet, die wegen $|\cos(x)| \geq 0$ beide positiv orientiert sind. Die Summe der beiden Teilflächen, und daher auch $m_{abs}$, ist von null verschieden.

**2)** $m = 0$, $m_{abs} = \frac{2}{\pi}$

Die Summe der mit $\int_0^{2\pi} \sin(x)\, dx$ berechneten orientierten Flächeninhalte ist null, m ist daher null. Mit $\int_0^{2\pi} |\sin(x)|\, dx$ werden zwei Teilflächen berechnet, die wegen $|\sin(x)| \geq 0$ beide positiv orientiert sind. Die Summe der beiden Teilflächen, und daher auch $m_{abs}$, ist von null verschieden.

**7.94** 1,25 m

**7.95** ***1)***




***2)*** $17{,}3\dot{6}$ °C (Mittelwert von 7:00 Uhr bis 24:00 Uhr)

***3)*** Der Mittelwert wird um 5 °C größer.

$$\frac{1}{17-0} \cdot \int_0^{17} (-0{,}1t^2 + 2t + 15)\,dt = 22{,}3\dot{6}$$

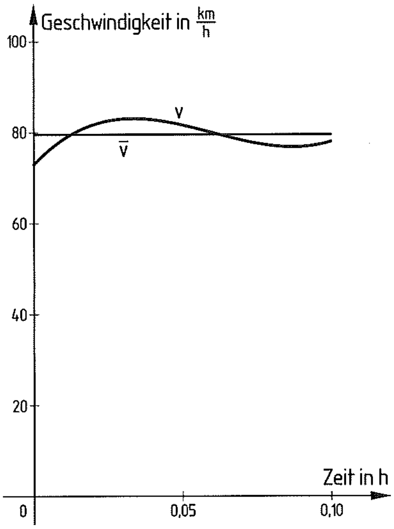
$22{,}3\dot{6}$ °C = $17{,}3\dot{6}$ °C + 5 °C

**7.96** ***1)*** Fahrtstrecken werden zurückgefahren. ***2)*** $41{,}25\ \frac{km}{h}$

***3)*** Das Auto hat 5,5 km zurückgelegt und ist 4,5 km vom Ausgangspunkt entfernt.

**7.97** ***1)*** $\overline{v} = 10 \cdot \int_0^{0{,}1} v(t)\,dt$

***2)*** $79{,}5625\ \frac{km}{h}$




***3)*** Die mittlere Geschwindigkeit von $79{,}5625\ \frac{km}{h}$ während der Fahrt ist niedriger als die mittels „Section Control" überwachte erlaubte mittlere Geschwindigkeit von $80\ \frac{km}{h}$. Es muss keine Strafe gezahlt werden.

**7.98** $m = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b (k \cdot x + d)\,dx = \frac{1}{b-a} \cdot \left(\frac{k \cdot x^2}{2} + d \cdot x\right)\Big|_a^b = \frac{1}{b-a} \cdot \left(\frac{k \cdot b^2}{2} + d \cdot b - \left(\frac{k \cdot a^2}{2} + d \cdot a\right)\right) =$

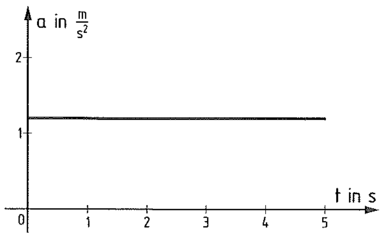
$= \frac{1}{b-a} \cdot \left(\frac{k}{2} \cdot (b^2 - a^2) + d \cdot (b-a)\right) = \frac{k}{2} \cdot (b+a) + d$

***a)*** $\frac{k}{2} \cdot (b+a) + d = k \cdot \frac{a+b}{2} + d = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

***b)*** $\frac{k}{2} \cdot (b+a) + d = \frac{1}{2} \cdot (k \cdot a + k \cdot b) + d = \frac{1}{2} \cdot (k \cdot a + k \cdot b + 2d) = \frac{1}{2} \cdot (k \cdot a + d + k \cdot b + d) =$

$= \frac{1}{2} \cdot (f(a) + f(b))$

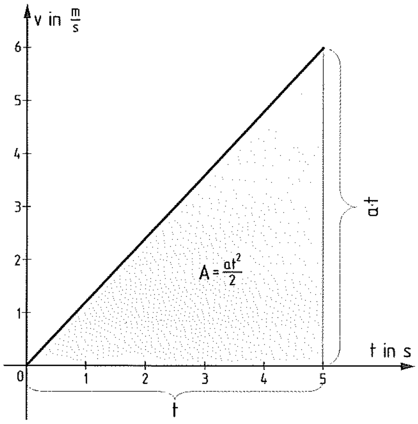
**7.99** ***1)***




***2)*** $A = v = 6\,\frac{m}{s}$

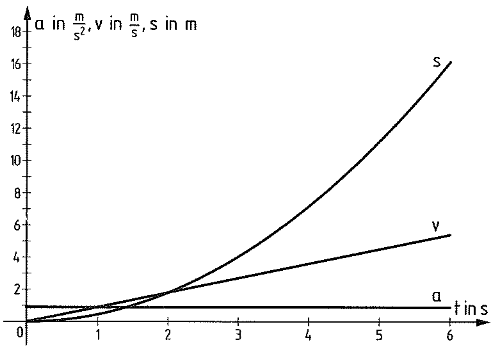
Der Flächeninhalt unter der Kurve von t = 0 s bis t = 5 s entspricht der Geschwindigkeit nach 5 s, berechnet mit der angegebenen Formel $v = a \cdot t$.

***3)***




Der zurückgelegte Weg s entspricht dem Flächeninhalt A zwischen der Funktion $v = a \cdot t$ und der waagrechten Achse. Die Fläche hat die Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen t und $a \cdot t$. Für s bzw. für A gilt daher $s = A = \frac{t \cdot a \cdot t}{2} = \frac{a}{2} \cdot t^2$.

**7.101** ***1)***



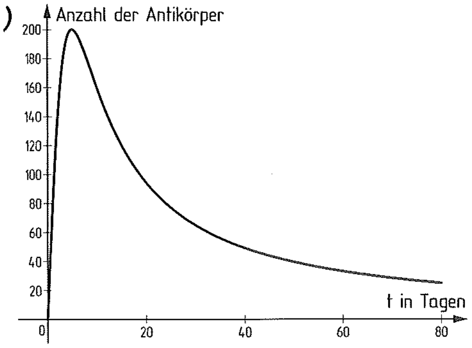

***2)*** Der Inhalt der rechteckigen Fläche zwischen dem Graph der Beschleunigungsfunktion a und der waagrechten Achse entspricht der Geschwindigkeit v. Der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks zwischen dem Graph der Geschwindigkeitsfunktion v und der waagrechten Achse entspricht dem zurückgelegten Weg s.

**7.102** ***1)*** Grafik ***B)***

Der Beginn des Bremsvorgangs wird nicht plötzlich eingeleitet, dh der Druck aufs Bremspedal wird gleichmäßig erhöht.
Die Verzögerung wird, beginnend mit $0\,\frac{m}{s^2}$, größer, die Geschwindigkeit verringert sich daher langsam beginnend immer stärker.
Danach wird das Fahrzeug einige Zeit mit konstanter Verzögerung abgebremst, daraus ergibt sich der lineare Verlauf im mittleren Teil der dargestellten Geschwindigkeitskurve.
Um das Fahrzeug nicht abrupt zum Stillstand zu bringen, wird der Druck aufs Bremspedal gegen Ende des Bremsvorgangs gleichmäßig verringert und die Verzögerung wird kleiner.
Die Geschwindigkeit verringert sich daher immer langsamer, bis sie schließlich null ist.

***2)*** Nein, das Auto benötigt beim angegebenen Bremsverlauf 40 m bis zum Stillstand.

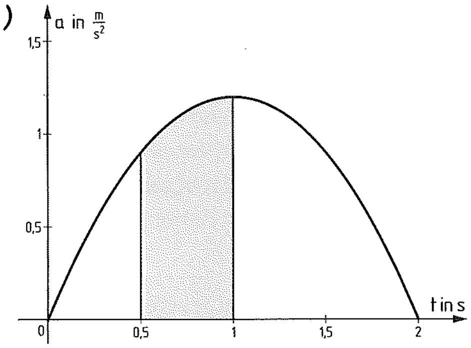
**7.103** ***1)***




Der Graph der Funktion ist von t = 0 bis t = 5 Tage stark ansteigend, hat bei t = 5 Tage einen Hochpunkt und nähert sich dann zuerst rasch und danach immer langsamer der waagrechten Achse. (Die waagrechte Achse ist eine Asymptote der Kurve.)

***2)*** 1 609 (1 609,437...) bzw. 3 477 Antikörper (3 476,923...)

**7.104** ***1)***




Der Flächeninhalt gibt die Geschwindigkeitszunahme vom Zeitpunkt t = 0,5 s bis zum Zeitpunkt t = 1 s an.

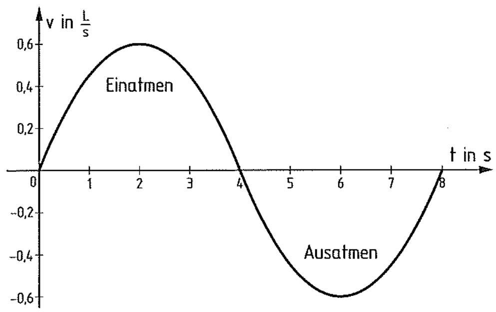
***2)*** $t = 2$ s, $v = 1{,}6\,\frac{m}{s}$

***3)*** Integrieren der Beschleunigungsfunktion a(t) ergibt die Geschwindigkeitsfunktion v(t).
Berechnung der Nullstellen von v(t).
Der zurückgelegte Weg eines Wägelchens entspricht dem Flächeninhalt zwischen dem Graph der Geschwindigkeitsfunktion und der waagrechten Achse zwischen den Nullstellen von v(t).
s = 2,7 m

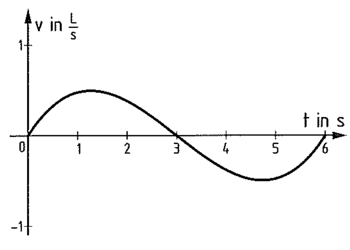
**7.105** ***1)*** In diesem Bereich fährt das Schienenfahrzeug in die entgegengesetzte Richtung.
***2)*** Gesamtweg: 6 243,957... m, Entfernung zum Startpunkt: 5 028,829... m

**7.106** ***1)*** Der Ausdruck $\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$ gibt die Wassermenge an, die vom Zeitpunkt $t_1$ bis zum Zeitpunkt $t_2$ aus dem Spülkasten fließt. Die Einheit ist Liter.
***2)*** t = 0,555... s, 1,223... L
***3)*** nach 1,228... s

**7.107** ***1)*** Die Luft strömt von t = 0 bis t = 2 s mit steigender Geschwindigkeit in die Lunge. Die Geschwindigkeit erreicht bei t = 2 s ihr Maximum. Von t = 2 s bis t = 4 s sinkt die Geschwindigkeit auf null.
***2)*** $v(t) = -0{,}15t^2 + 0{,}6t$
***3)*** $L(t) = -0{,}05t^3 + 0{,}3t^2$




***4)*** $v(t) = \frac{4}{81} \cdot t^3 - \frac{4}{9} \cdot t^2 + \frac{8}{9} \cdot t$
***5)*** 0,691... L bzw. 0,419... L



**7.108** ***1)*** 1 146,203... m **2)** $s(t) = \int_0^{20} v(t)\,dt + 5 \cdot (t_1 - 20)$

**7.109** $8{,}71\dot{6}$ km

**7.111** 3 J

**7.112** ***1)*** $W = m \cdot g \cdot (h_2 - h_1)$ **2)** $W = m \cdot g \cdot h$ **3)** 147,15 J

**7.113** ***1)*** Die Leistung P ist die Ableitung der Energie E nach der Zeit t.
Umgekehrt ist daher die Energie E das Integral der Leistung P im Intervall $[t_1; t_2]$.

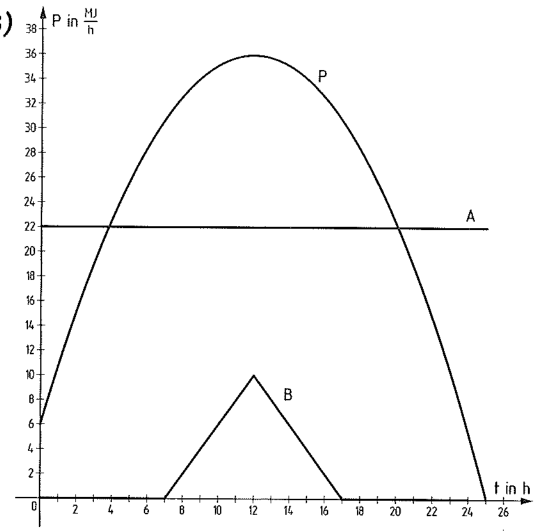
**2)** A: $P(t) = 22$

$$B: P(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leqslant t < 7 \\ 2t - 14 & \text{für } 7 \leqslant t < 12 \\ -2t + 34 & \text{für } 12 \leqslant t < 17 \\ 0 & \text{für } 17 \leqslant t \leqslant 24 \end{cases}$$

P ... Leistung in $\frac{MJ}{h}$

t ... Zeit in h

**3)**




***4)*** Es müssen 28,702... MJ zugekauft werden.

**7.114** $W = 4{,}352... \cdot 10^{-18}\,\text{Ws} - 2{,}306... \cdot 10^{-28}\,\text{Wms} \cdot \frac{1}{r_1}$

**7.115** $2{,}216... \cdot 10^{10}$ J

**7.116** ***1)*** $W = \frac{m}{2} \cdot (v_2^2 - v_1^2)$ **2)** $W = \frac{m \cdot v^2}{2}$ **3)** 93,75 kJ

**7.117** ***1)*** $W = n \cdot R \cdot T \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$ **2)** $W = n \cdot R \cdot T \cdot \ln(2)$

**7.118** ***1)*** $W = n \cdot R \cdot (T_a - T_b) \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$ **2)** 102,170... kJ

**7.120** **a)** ***1)*** Gleichanteil: $\overline{u} = 1$ V,
Wechselanteil: Die angegebene Kurve wird um 1 V nach unten verschoben.
***2)*** $U_{eff} = 2$ V
**b)** ***1)*** Gleichanteil: $\overline{u} = 9$ V,
Wechselanteil: Die angegebene Kurve wird um 9 V nach unten verschoben.
***2)*** $U_{eff} = 11{,}180...$ V

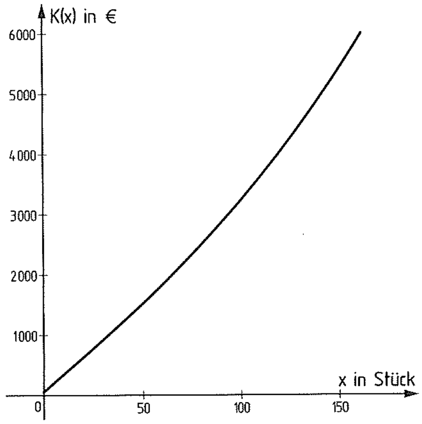
**7.121** **a)** ***1)*** Gleichanteil: $\overline{i} = 0{,}5$ mA,
Wechselanteil: Die angegebene Kurve wird um 0,5 mA nach unten verschoben.
***2)*** $I_{eff} = 1{,}658...$ mA
**b)** ***1)*** Gleichanteil: $\overline{i} = 1$ mA,
Wechselanteil: Die angegebene Kurve wird um 1 mA nach unten verschoben.
***2)*** $I_{eff} = 1{,}732...$ mA

**7.122** **a)** 0,0384... C **b)** 0,0358... C

**7.123** 59,622... V

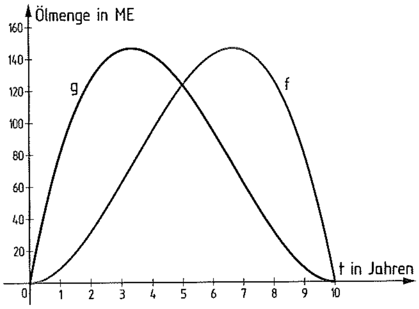
# 7.124 – 7.133

**7.124** ***1)*** $K(x) = \frac{\sqrt{(x^2 + 1\,600)^3}}{3\,000} + 30x + \frac{175}{3}$




***2)*** 47 Stück (47,078...), $32{,}91\,\frac{€}{\text{Stück}}$ (32,908...)

**7.125** ***1)***




Beide Modelle prognostizieren dieselbe geförderte Ölmenge für die nächsten 10 Jahre.
Die Berechnung ergibt für beide Modelle $833{,}\dot{3}$ Mengeneinheiten.

***2)*** Der Erlös ist bei Modell f mit 1 036,52 € (1 036,521...) höher als bei Modell g mit 966,38 € (966,376...).

**7.126** ***1)*** $77{,}83\,\frac{€}{\text{ME}}$ (77,825...)

***2)*** orange Fläche: 1 907,27 € (1 907,269...), rote Fläche: 1 441,20 € (1 441,200...)
Die orange Fläche gibt den Betrag an, den sich der Konsument erspart, da der Marktpreis niedriger ist als jener Preis, den der Konsument zu bezahlen bereit gewesen wäre.
Die rote Fläche gibt den Betrag an, den der Produzent mehr erhält, da der Marktpreis höher ist als jener Preis, ab dem der Produzent bereit gewesen wäre das Produkt anzubieten.

**7.127** ***1)*** Die ärmeren 80 % der Bevölkerung erhalten 54 % des Gesamteinkommens.

***2)*** ***A)*** ca. 1 % ***B)*** ca. 10 % ***C)*** ca. 25 %

***3)*** g = 0,452...

***4)*** 27,2 % (Stand 2016, EU-SILC 2016)
Bei einer totalen Gleichverteilung ist g gleich 0 %, bei einer totalen Konzentration auf eine Person ist g gleich 100 %. Ein Wert von 27,6 % entspricht daher einer eher geringen Ungleichverteilung zugunsten der reicheren Einkommensschicht.

**7.128** 19 299 478,00 € (19 299 477,995...)

**7.133** $S\left(\frac{a}{2}\middle|\frac{b}{2}\right)$

**7.134** $S(2{,}285...|1{,}285...)$
Auf die Darstellung der Überprüfung durch elementare Berechnungen wird verzichtet.

**7.135** ***a)*** $S(2{,}4|0{,}75)$ ***b)*** $S(1{,}75|1{,}7)$ ***c)*** $S(3{,}020...|4{,}520...)$ ***d)*** $S\left(\frac{8}{9}\middle|\frac{14}{9}\right)$

**7.136** $S(0{,}3d^2|0{,}75d)$

**7.137** $S(0|0{,}6c)$

**7.138** ***a)*** $S(0|2)$ ***b)*** $S(-1|2{,}6)$

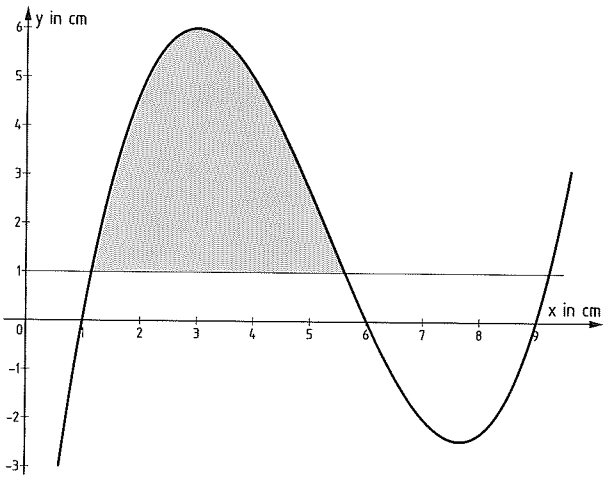
**7.139** ***a)*** $S(2{,}\dot{4}|1{,}\dot{3})$ ***b)*** $S(0{,}827...|0{,}958...)$ ***c)*** $S(0|1{,}342...)$

**7.140** ***a)*** $S(2{,}\dot{4}|1{,}\dot{6})$ ***b)*** $S(2|1{,}294...)$ ***c)*** $S(2{,}7\dot{3}|1{,}3\dot{1})$

**7.141** ***a)*** $S(2{,}071...|2{,}561...)$ ***b)*** $S(0|1{,}921...)$

**7.142** ***a)*** $S(0{,}371...|0{,}454...)$ ***b)*** $S(1{,}570...|0{,}392...)$ ***c)*** $S(0{,}157...|0{,}713...)$

**7.143**




Benötigte Teigmasse:
290,424... mℓ

**7.144** Für den Halbkreis gilt $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.
Wegen der Symmetrie des Halbkreises bezüglich der y-Achse muss $x_S = 0$ gelten.
Berechnung von $y_S$ mit Hilfe der 1. Guldin'schen Regel ergibt

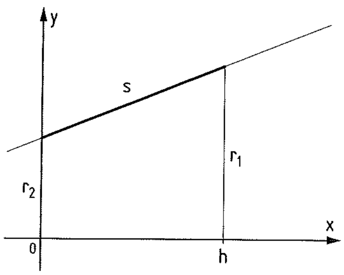
$$y_s = \frac{V_x}{2\pi \cdot A} = \frac{1}{r^2 \cdot \pi} \cdot \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = \frac{1}{r^2 \cdot \pi} \cdot \left(r^2 \cdot x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-r}^{r} = \frac{4r}{3\pi}$$

$S\left(0\middle|\frac{4}{3\pi} \cdot r\right)$

**7.145** 248,814... g

**7.146** $V = \frac{1}{4}\pi^2 E^3 = 2{,}467...\,E^3$

**7.149**




Ein Kegelstumpf mit den Radien $r_1$, $r_2$ und der Höhe h wird von der Funktion $y = \frac{r_1 - r_2}{h} \cdot x + r_2$ bei der Rotation um die x-Achse erzeugt.

Für die Länge der Mantellinie gilt $s = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$.

Laut der 2. Guldin'schen Regel gilt für die Mantelfläche

$M = 2 \cdot \pi \cdot y_s \cdot s$ mit $y_s = \frac{M_x}{s}$ und $M_x = \int_{x_1}^{x_2} y \cdot \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$.

$$M_x = \int_0^h \left(\frac{r_1 - r_2}{h} \cdot x + r_2\right) \cdot \frac{\sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}}{h}\,dx = \frac{\sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}}{h} \cdot \left(\frac{r_1 - r_2}{2h} \cdot x^2 + r_2 \cdot x\right)\Big|_0^h =$$

$$= \frac{\sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}}{h} \cdot \left(\frac{r_1 - r_2}{2h} \cdot h^2 + r_2 \cdot h\right) = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2} \cdot \frac{r_1 + r_2}{2} \Rightarrow y_s = \frac{r_1 + r_2}{2} \Rightarrow$$

$$M = 2\pi \cdot \frac{r_1 + r_2}{2} \cdot s = \pi \cdot (r_1 + r_2) \cdot s$$

Die Formel ist richtig.

**7.150** $S\left(\frac{h}{2}\middle|\frac{r}{2}\right)$

**7.151** ***a)*** $S(0|1{,}823...)$ ***b)*** $S(1{,}570...|0{,}600...)$ ***c)*** $S(0|2{,}156...)$

**7.152** ***a)*** $S\left(\frac{3}{8} \cdot r|0|0\right)$ ***b)*** $S\left(\frac{3}{4} \cdot h|0|0\right)$

**7.153** $S\left(\frac{9}{8}|0|0\right)$

**7.154** $S(2{,}4|0|0)$

**7.155** Für das Volumen einer Zylinderscheibe gilt $dV = \pi y^2 dx$, für deren Masse $dm = \rho \cdot dV$.
Einsetzen in die Formel für den Schwerpunkt ergibt

$$x_s = \frac{1}{m} \cdot \int_m x\,dm = \frac{1}{\rho \cdot V} \cdot \int_a^b x \cdot \rho \cdot \pi \cdot y^2\,dx = \frac{\pi \cdot \int_a^b xy^2\,dx}{V}.$$

Der Zähler ist das statische Moment $M_{yz}$. Daraus ergibt sich: $x_S = \frac{M_{yz}}{V}$

**7.160** ***a)*** $\frac{4\pi^3}{3} \cdot a^2 = 41{,}341... \cdot a^2$ ***b)*** $\frac{3}{4\pi} \cdot a^2 = 0{,}238... \cdot a^2$

**7.161** ***a)*** $125{,}663...\ cm^2$ ***b)*** $a \cdot b \cdot \pi$

**7.162** $4{,}2\dot{6}\ E^2$

**7.163** $18{,}849...\ E^2$

**7.164** $596{,}254...\ mm^2$

**7.165** 24 E

**7.166** 8r E

**7.167** $21{,}256... \cdot a$

**7.168** ***1)*** A → I, B → III
***2)*** Zu empfehlen wäre Form I), da die Bogenlänge von Form I) mit 379,613... m etwas kleiner ist als die Bogenlänge von Form III) mit 384,189... m.

**7.169** ***a)*** $11{,}\dot{3}\ E^2$ ***b)*** $28{,}58\dot{3}\ E^2$

**7.170** ***a)*** $5{,}\dot{3}\ E^2$ ***b)*** $6{,}\dot{6}\ E^2$ ***c)*** $0{,}303...\ E^2$ ***d)*** $3{,}151...\ E^2$

**7.171** ***a)*** ***1)*** $19{,}687...\ E^3$ ***2)*** $12{,}566...\ E^3$ ***b)*** ***1)*** $5{,}497...\ E^3$ ***2)*** $10{,}995...\ E^3$

**7.172** $13{,}522...\ dm^3$

**7.173** ***1)*** 119,256... mℓ ***2)*** 8,169... m

**7.174** ***1)*** $A = 1{,}565...\ m^2$, $u = 4{,}689...\ m$ ***2)*** 37,571... kg

**7.175** ***1)*** $v(t) = 15 \cdot e^{-0{,}04 \cdot t} - 2{,}5$ ***2)*** 33,748... s ***3)*** 193,407... m

**7.176** $63{,}505...\ \frac{°C}{min}$

**7.177** $30{,}846\ldots\ E^2$

**7.178** $S(1{,}820\ldots|0{,}606\ldots)$

**7.179** $V = 2\pi^2Rr^2$, $M = 4\pi^2Rr$
Gleiches Volumen hat ein Zylinder mit Radius r und einer Höhe von $h = 2\pi \cdot R$.

**7.180** **a)** $4{,}2\dot{6}\ E^2$ *b)* $90{,}461\ldots\ E^2$

**7.181** **a)** $1{,}405\ldots\ E$ *b)* $10{,}614\ldots\ E$

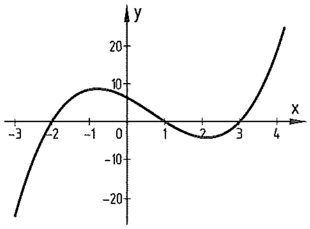
**7.182** $V = 45{,}574\ldots\ E^3$, $O = 48{,}197\ldots\ E^2$, $S(0{,}882\ldots|0)$

**7.183** *1)* $v(t) = 13{,}\dot{8}\ \frac{m}{s} - 0{,}6\ \frac{m}{s^2} \cdot t$ **2)** $10{,}\dot{8}\ \frac{m}{s}$ **3)** $61{,}9\dot{4}$ m

# 8 Näherungsverfahren

**8.1** ***1)*** 3

***2)*** $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$




**8.3** ***a)*** $x = -1{,}327...$ ***b)*** $x = -1{,}050...$ ***c)*** $x = 2{,}396...$ ***d)*** $x_1 = -0{,}920...$, $x_2 = 1{,}209...$

**8.4** ***a)*** $x = 2{,}094...$ ***b)*** $x = 2{,}465...$ ***c)*** $x_1 = -0{,}575...$, $x_2 = 1{,}187...$, $x_3 = 4{,}388...$ ***d)*** $x = -1{,}650...$

**8.5** ***1)*** Die Funktionswerte $f(5) = 1{,}5 > 0$ und $f(10) = 4 > 0$ haben dasselbe Vorzeichen. Die gesuchte Nullstelle liegt außerhalb des durch $a = 5$ und $b = 10$ festgelegten Intervalls.
Das Intervall [5; 10] ist daher zur Ermittlung der Nullstelle mittels Intervallhalbierung oder Regula falsi nicht geeignet.

***2)*** $x = 4{,}57...$, zB mit den Startwerten $a = 4$ und $b = 5$

**8.6** ***a)*** $x = 2{,}501...$

Verwendet man zB die Startwerte $a = 2$ und $b = 3$, hat bei der Berechnung mit der Methode der Intervallhalbierung die vierzehnte Näherung drei gesicherte Nachkommastellen. Bei der Berechnung mit Regula falsi hat bereits die fünfte Näherung drei gesicherte Dezimalstellen. Die Intervallhalbierung hat aber den Vorteil, dass die Näherungen sehr einfach zu berechnen sind.

***b)*** $x = 1{,}371...$

Verwendet man zB die Startwerte $a = 1$ und $b = 2$, hat bei der Berechnung mit der Methode der Intervallhalbierung die zwölfte Näherung drei gesicherte Nachkommastellen. Bei der Berechnung mit Regula falsi hat bereits die vierte Näherung drei gesicherte Dezimalstellen. Die Intervallhalbierung hat aber den Vorteil, dass die Näherungen sehr einfach zu berechnen sind.

**8.8** ***a)*** 1,194... ***b)*** −2,186... ***c)*** 4,807... ***d)*** 3,129...

**8.9** ***a)*** −0,486... ***b)*** 1,562... ***c)*** 0,712... ***d)*** −2,048...

**8.10** ***a)*** 4,536... ***b)*** −0,515... ***c)*** 0,703... ***d)*** 1,380...

**8.11** ***a)*** $x = 3{,}327...$

Der Wert 5 ist als Startwert geeignet. Die Folge der Nullstellen der Tangenten konvergiert gegen die gesuchte Nullstelle.

***b)*** $x = 1{,}629...$

Der Wert 3 ist als Startwert nicht geeignet. Die Folge der Nullstellen der Tangenten konvergiert gegen die nächstgrößere Nullstelle außerhalb des angegebenen Intervalls. Ein geeigneter Startwert ist zB $x_0 = 2$.

***c)*** $x = -2{,}340...$

Der Wert −2 ist als Startwert nicht geeignet. Die Folge der Nullstellen der Tangenten oszilliert zwischen den Werten −2 und +2. Ein geeigneter Startwert ist zB $x_0 = -2{,}5$.

***d)*** $x = 0{,}357...$

Der Wert 2 ist als Startwert nicht geeignet. Die Folge der Nullstellen der Tangenten konvergiert gegen die nächstgrößere Nullstelle außerhalb des angegebenen Intervalls. Ein geeigneter Startwert ist zB $x_0 = 1$.

**e)** $x = -3{,}141...$
Der Wert −2 ist als Startwert nicht geeignet. Die Folge der Nullstellen der Tangenten konvergiert gegen eine Nullstelle außerhalb des angegebenen Intervalls. Ein geeigneter Startwert ist zB $x_0 = -3$.

**f)** $x = -0{,}247...$
Der Wert null ist als Startwert geeignet. Die Folge der Nullstellen der Tangenten konvergiert gegen die gesuchte Nullstelle.

**8.12** $S_1(-1{,}964...|0{,}140...)$, $S_2(1{,}058...|2{,}880...)$

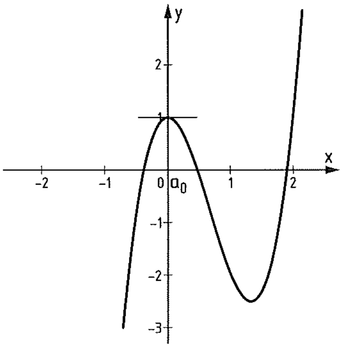
**8.13** **a)** $\sqrt{2} = 1{,}414...$
Quadrieren und Umformen der Gleichung $x = \sqrt{2}$ ergibt die Gleichung $0 = x^2 - 2$.

**b)** $\sqrt{7} = 2{,}645...$
Quadrieren und Umformen der Gleichung $x = \sqrt{7}$ ergibt die Gleichung $0 = x^2 - 7$.

**c)** $\sqrt[3]{11} = 2{,}223...$
Kubieren und Umformen der Gleichung $x = \sqrt[3]{11}$ ergibt die Gleichung $0 = x^3 - 11$.

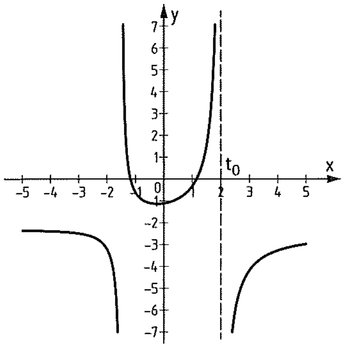
**d)** $\sqrt[5]{91} = 2{,}464...$
Potenzieren mit fünf und Umformen der Gleichung $x = \sqrt[5]{91}$ ergibt die Gleichung $0 = x^5 - 91$.

**8.14** **1)**



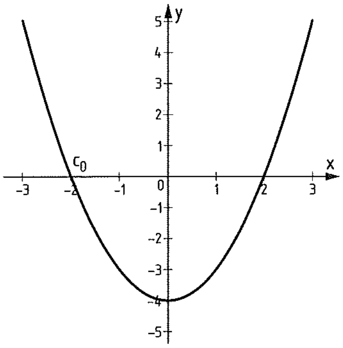

Die Funktion hat an der Stelle des Startwerts eine waagrechte Tangente.

**3)**



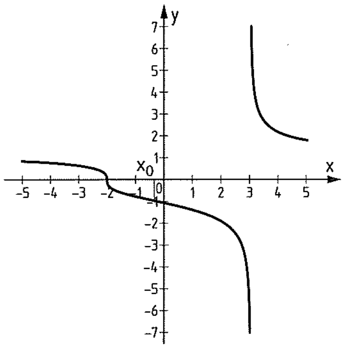

Die Funktion ist an der Stelle des Startwerts nicht definiert.

**2)**




Die Funktion hat an der Stelle des Startwerts bereits eine Nullstelle.

**4)**




Die Folge der Nullstellen der Tangenten divergiert.

**8.15** **1)** $N_2$

**2)** Die Funktion hat an der Stelle $x_0 = 0$ eine waagrechte Tangente. Diese schneidet die x-Achse nicht. Der Vorgang kann nicht fortgesetzt werden.

**3)** $x_0 = -0{,}3$ ist nicht geeignet, da damit die Nullstelle $N_1$ berechnet wird.
$x_0 = 5$ ist als Startwert geeignet, da an dieser Stelle der Schnittpunkt der Tangente an die Kurve mit der x-Achse zwischen $x_{N_2}$ und 5 liegt.

**8.16** 11, 12 und 13

**8.17** ***1)*** 25 Bewohner bis 78 Bewohner
***2)*** 56 Bewohner (56,327...)
***3)*** 34 272,00 €
***4)*** mindestens 3 Bewohner (2,354...) zusätzlich bzw. höchstens 24 Bewohner (24,713...) zusätzlich

**8.18** 6,731... m

**8.19** 75 und 12 bzw. 3 und −60 bzw. 48 und −15

**8.20** ***1)*** Grundkantenlänge: 13,682... cm bzw. 7,924... cm ***2)*** Dochtlänge: 10,157... cm bzw. 28,301... cm

**8.23** ***a) 1)*** 3,512... ***2)*** 3,482...
***b) 1)*** 0,305... ***2)*** 0,309...
***c) 1)*** 0,847... ***2)*** 0,873... (obere Grenze 1,2)
***d) 1)*** 19,351... ***2)*** 19,453...

**8.24** ***a) 1)*** 1,242... ***2)*** 1,282... ***c) 1)*** $0{,}58\dot{3}$ ***2)*** 0,558...
***b) 1)*** 0,869... ***2)*** 0,895... ***d) 1)*** 2,127... ***2)*** 2,095...

**8.25** ***1)*** 35,2 $dm^2$
***2)***

| | absoluter Fehler | relativer Fehler |
|---|---|---|
| Querschnittsfläche | 2,3 $dm^2$ | $6{,}1\dot{3}$ % |
| Volumen | 18,212... L | 12,347... % |

**8.29**

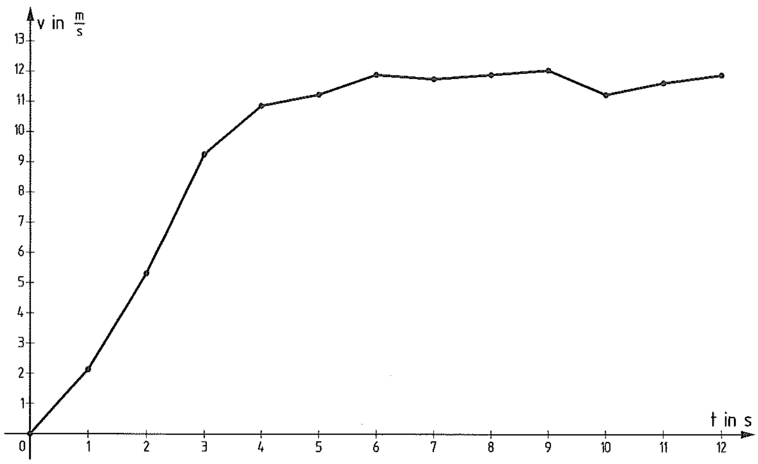
| | 1) | 2) | relativer Fehler |
|---|---|---|---|
| a) | 2 | 2,094... | 4,719... % |
| b) | 3,126... | 2,691... | 13,907... % |
| c) | 1,098... | $1{,}\dot{1}$ | 1,137... % |
| d) | 57 | 57 | 0 % |

**8.30** ***a) 1)*** 16,538... ***2)*** 16,471...
Die Ergebnisse unterscheiden sich ab der ersten Nachkommastelle.
***b) 1)*** 0,4811740... ***2)*** 0,4811747...
Die Ergebnisse unterscheiden sich ab der siebenten Nachkommastelle.
***c) 1)*** 1,92253... ***2)*** 1,92244...
Die Ergebnisse unterscheiden sich ab der vierten Nachkommastelle.
***d) 1)*** 3,82028... ***2)*** 3,82019...
Die Ergebnisse unterscheiden sich ab der vierten Nachkommastelle.

**8.31** ***1)*** 368,089... L ***2)*** 95,603... cm

**8.32** $368{,}5\dot{3}$

**8.33** ***1)***




***2)*** $115{,}54\dot{3}$ m

**8.34** W ≈ 2,05 Nm (Simpsonformel, n = 2)

**8.35** ***1)*** 14,12 $m^2$ ***2)*** 448,907... g

**8.36** ***1)*** $9{,}7\dot{3}$ $m^2$ ***2)*** 3 080,6 g ***3)*** 18 483 600 m

**8.37** ***1)*** Mit einer ungeraden Anzahl von Intervallen lässt sich die Simpson-Regel nicht anwenden. Da sich der Durchmesser des Glaskolbens ab der Höhe von 16 cm nicht mehr ändert, berechnet man von h = 0 cm bis h = 16 cm den Inhalt der Längsschnittfläche mit der Simpson-Regel und addiert dazu den Flächeninhalt eines Quadrats mit 4 cm Seitenlänge.
$131{,}7\dot{3}$ $cm^2$
***2)*** 755,657... $cm^3$

**8.38** ***1)*** 0,632... ***2)*** ca. 1 500

**8.39** $a = R - h$ und $b = R \Rightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{2R-h}{2}$ und $b - a = h$, $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$

Einsetzen in die Volumsformel der Kepler'schen Fassregel ergibt

$$V \approx \frac{\pi \cdot h}{6} \cdot \left(\left(\sqrt{R^2 - (R-h)^2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\sqrt{R^2 - \left(\frac{2R-h}{2}\right)^2}\right)^2 + 0\right).$$

Ausrechnen der Klammern und Vereinfachen ergibt $V \approx \frac{\pi \cdot h}{6} \cdot (6Rh - 2h^2)$.
Herausheben von 2h und Kürzen mit 2 ergibt die angegebene Formel.

**8.40** Berechnung des Integrals ergibt

$$\int_a^b (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)\,dx = a_3 \cdot \frac{b^4 - a^4}{4} + a_2 \cdot \frac{b^3 - a^3}{3} + a_1 \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} + a_0 \cdot (b - a)$$

Berechnung mit der Kepler'schen Fassregel ergibt

$$\frac{b-a}{6} \cdot \left(a_3a^3 + a_2a^2 + a_1a + a_0 + 4 \cdot \left(a_3 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + a_2 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + a_1 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right) + a_0\right) + a_3b^3 + a_2b^2 + a_1b + a_0\right) =$$
$$= \frac{b-a}{6} \cdot \left(a_3 \cdot \left(a^3 + b^3 + \frac{(a+b)^3}{2}\right) + a_2 \cdot (a^2 + b^2 + (a+b)^2) + a_1 \cdot (a + b + 2 \cdot (a+b)) + 6a_0\right) =$$
$$= a_3 \cdot \frac{3a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3b^3}{2} \cdot \frac{b-a}{6} + a_2 \cdot (2a^2 + 2ab + 2b^2) \cdot \frac{b-a}{6} + a_1 \cdot (3a + 3b) \cdot \frac{b-a}{6} + a_0 \cdot (b - a) =$$
$$= a_3 \cdot \frac{b^4 - a^4}{4} + a_2 \cdot \frac{b^3 - a^3}{3} + a_1 \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} + a_0 \cdot (b - a)$$

**8.41** ***a)*** $t_1 = -0{,}405...$, $t_2 = 7{,}541...$ ***b)*** $x = -1{,}423...$ ***c)*** $t_1 = -1{,}515...$, $t_2 = 1{,}082...$ ***d)*** $x_1 = -1{,}097...$, $x_2 = 2{,}430...$ ***e)*** $t_1 = 0{,}661...$, $t_2 = 3{,}338...$ ***f)*** $x = -0{,}329...$

**8.42** **a)** $x = 1{,}246...$ **b)** $b = -2{,}363...$ **c)** $x = 1{,}873...$ **d)** $x = 2{,}618...$ **e)** $t = 1{,}479...$ **f)** $x = 0{,}876...$

**8.43** ***1)*** unendlich viele
**2)** Die Nullstellen und die Extremstellen der Funktion $h(x) = \tan(x) - e^x$
**3)** zB $x_0 = 1{,}4$; $x = 1{,}306...$

**8.44** $\ell = 29$ cm, $b = 17$ cm, $h = 13$ cm

**8.45** **a)** $\frac{1}{3}$ ***b)*** 3,141... ***c)*** 9,374... ***d)*** 3,024...

**8.46** **a)** 2,139... ***b)*** 0,916... ***c)*** 1,557... ***d)*** 0,335...

**8.47** $a_1 = 6$ ft and $h_1 = 2$ ft or $a_2 = 3$ ft and $h_2 = 8$ ft

**8.48** ***1)*** $n = 4$: $A \approx \frac{ab}{3} \cdot (1 + \sqrt{3} + \sqrt{7} + \sqrt{15})$

$n = 10$: $A \approx \frac{2ab}{75} \cdot \left(19 + 2 \cdot (\sqrt{19} + \sqrt{21} + \sqrt{24} + \sqrt{51} + \sqrt{75} + \sqrt{91} + \sqrt{99})\right)$

| | **2)** | **3) absolute error** | **3) relative error** |
|---|---|---|---|
| **n = 4** | $A \approx 30{,}835...$ cm² | $0{,}579...$ cm² | 1,846... % |
| **n = 10** | $A \approx 31{,}270...$ cm² | $0{,}145...$ cm² | 0,464... % |
| **exact result** | $A = 31{,}415...$ cm² | – | – |

***4)*** The precision of Simpson's rule is quite good, even if the n you use is as small as 4. If n is increased, the error decreases fast.

**8.49** **a)** 19,311... ***b)*** 0,499... ***c)*** 51 ***d)*** 6