VORBEREITUNG AUF DIE
REIFE- UND DIPLOMPRÜFUNG
FÜR CLUSTER HTL 2

MATHE-
MATIK

SIDLO
PUHM
STEINMAIR
CAMILO
DRS
POLLACK-DRS
WYMLATIL

2

MIT TECHNISCHEN
ANWENDUNGEN

hpt

Eva-Maria Sidlo – Ursula Puhm – Cornelia Steinmair – Christina Camilo
Wolfgang Drs – Susanne Pollack-Drs – Georg Wymlatil

Mathematik mit technischen Anwendungen

Vorbereitung auf die Reife- und Diplomprüfung für Cluster HTL 2

Dieses Heft enthält – als Ergänzung zu den im Lehrbuch enthaltenen Aufgaben und Problemstellungen – für die im Cluster HTL 2 zusammengefassten HTL-Schulformen (siehe Seite 4) Aufgaben zur Vorbereitung auf Teil B der Reife- und Diplomprüfung. Die Lösungen zu diesen Aufgaben finden sich auf den Seiten 35 bis 49.

Bei den Aufgaben bzw. Aufgabenteilen wird jeweils angeführt, welche **Handlungsdimensionen** gemäß dem **Kompetenzmodell (Bildungsstandards Angewandte Mathematik BHS)** jeweils angesprochen werden:

A … Modellieren und Transferieren
B … Operieren und Technologieeinsatz
C … Interpretieren und Dokumentieren
D … Argumentieren und Kommunizieren

Zusätzlich finden sich Hinweise auf die Deskriptoren, die in den vom Bundesministerium für Bildung veröffentlichen Kompetenzlisten ausgewiesen sind.

Mit Schreiben des Bundesministeriums für Bildung und Frauen vom 18. Februar 2016, GZ 5.034/0061-B/8/2015, zur Aufnahme in den Anhang zu den Schulbuchlisten für den IV. – V. Jahrgang an Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten im Unterrichtsgegenstand Angewandte Mathematik empfohlen.

Dieses Schulbuch wurde auf der Grundlage eines zielorientierten Lehrplans verfasst. Konkretisierung, Gewichtung und Umsetzung der Inhalte erfolgen durch die Lehrerinnen und Lehrer.

Schulbuchnummer: 180006

1. Auflage, Nachdruck 2023 (1,06)

Technische Zeichnungen: Herbert Löffler
Satz: Barbara Fischer, Laxenburg
Druck und Bindung: Brüder Glöckler GmbH, Wöllersdorf

ISBN 978-3-230-04276-7

Bestellschein

Liebe Schülerin, lieber Schüler!

Das vorliegende Heft ist eine Ergänzung zum Lehrbuch „Mathematik mit technischen Anwendungen, Band 4“, zu dem es ein Lösungsheft gibt, das die Lösungen zu den Aufgaben des Lehrbuchs enthält.

Es gibt insgesamt 2 Hefte, die – als Ergänzung zu den im Lehrbuch enthaltenen Aufgaben und Problemstellungen – für die im jeweiligen Cluster zusammengefassten HTL-Schulformen Aufgaben zur Vorbereitung auf Teil B der Reife- und Diplomprüfung enthalten. Bei diesen Zusatzheften sind die Lösungen der dort enthaltenen Aufgaben integriert.

Bitte gib den ausgefüllten und unterschriebenen Bestellabschnitt in deiner Buchhandlung ab oder bestelle direkt beim Verlag:

Adresse: Verlag Hölder-Pichler-Tempsky GmbH, Frankgasse 4, 1090 Wien
Tel.: 01/403 77 77
E-mail: service@hpt.at

Fax: 01/403 77 77 DW 77

Hiermit bestelle ich mit Rechnung:

Lehrbuch und Lösungen

_____ Expl. Mathematik mit technischen Anwendungen, Band 4 (SBNR 185005)
€ 29,97 inkl. Porto und Verpackung

_____ Expl. Lösungen zu Band 4 (ISBN 978-3-230-04144-9)
€ 9,90 inkl. Porto und Verpackung

Weiteres Zusatzheft zur Vorbereitung auf die Reife- und Diplomprüfung

_____ Expl. Vorbereitung auf die Reife- und Diplomprüfung für Cluster HTL 1 (SBNR 180005)
€ 13,90 inkl. Porto und Verpackung

Für alle Angebote gilt: Preisänderungen vorbehalten

Bitte gib deinen Namen und deine Adresse an:

Name:

____

____

Adresse:

____

____

____

Datum und Unterschrift:

____
(bei Minderjährigen des Erziehungsberechtigten)

Inhaltsverzeichnis

Clusterübersicht

Cluster	HTL-Schulform	Ausbildungsschwerpunkt
HTL 2	Biomedizin- und Gesundheitstechnik	Medizininformatik Technik und Sport
	Chemie	Biochemie, Bio- und Gentechnologie Chemie – Betriebsmanagement und Marketing Chemie – Informatik Leder- und Naturstofftechnologie Oberflächentechnik Technische Chemie – Umwelttechnik
	Chemieingenieure	Angewandte Technologien und Umweltschutzmanagement Biochemie und Molekulare Biotechnologien Chemiebetriebsmanagement Chemische Betriebstechnik Chemische Betriebs- und Umwelttechnik Textilchemie
	Chemieingenieurwesen	Chemische Betriebstechnik Textilchemie Umwelttechnik
	Elektronik und Technische Informatik	
	Elektrotechnik	
	Flugtechnik	
	Gebäudetechnik	
	Höhere Lehranstalt für Landtechnik	
	Informatik	
	Informationstechnologie	Medientechnik Netzwerktechnik
	Kunststofftechnik	
	Lebensmitteltechnologie	Biotechnologie / Getreide- und Biotechnologie Fleischwirtschaft Getreidewirtschaft Lebensmittelhygiene / Lebensmittelsicherheit
	Maschinenbau	Anlagentechnik Automatisierungstechnik Fahrzeugtechnik Fertigungstechnik Industriedesign Umwelt- und Verfahrenstechnik Waffen- und Sicherheitstechnik
	Mechatronik	Automatisierung Präzisionstechnik
	Rohstofftechnik	
	Werkstofftechnik	Metallische Werkstoffe Metallurgie
	Wirtschaftsingenieure	Betriebsinformatik Betriebsmanagement Logistik Maschinenwesen Technisches Management
	Wirtschaftsingenieurwesen	Betriebsinformatik Betriebsmanagement

1 Zahlen und Maße

B_T2_1.1 absolute und relative Fehler verstehen und anwenden

1 Bei einer Digitalkamera wird die Gesamtanzahl der Bildpunkte (Pixel) im Allgemeinen als Bildauflösung bezeichnet. Antonia möchte ein Bild aufnehmen und dieses im A4-Format ausdrucken. Dazu wird eine Auflösung von 8,4 Megapixel benötigt. Sie verwendet eine Digitalkamera mit einer Auflösung von 3 280 x 2 460 Pixel.
- Berechnen Sie den Betrag des absoluten Fehlers zwischen der benötigten und der tatsächlichen Auflösung in Megapixel. B

2 In einem alten Buch wird eine Näherung für Berechnungen mit der Zahl π angegeben: „Soll eine Zahl x mit π multipliziert werden, so muss man x zuerst mit 3 multiplizieren und anschließend das Produkt um 5 % vergrößern."
- Erstellen Sie eine Formel für den absoluten Fehler F_a bei der Berechnung des Werts von $x \cdot \pi$ mithilfe dieser Näherungsmethode. A

$F_a =$ ______________________

Der Umfang eines Kreises mit dem Durchmesser d wird mit dieser Näherungsmethode berechnet.
- Zeigen Sie, dass der relative Fehler nicht vom Durchmesser d abhängt. D

B_T2_1.2 komplexe Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene darstellen, erklären und in verschiedene Formen ineinander umrechnen (Komponentenform, Polarformen) sowie komplexe Zahlen addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren

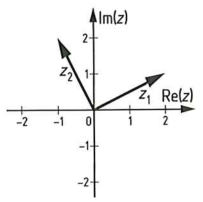
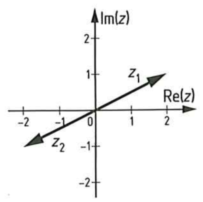
3 Gegeben sind folgende komplexe Zahlen: $z_1 = 6 - 8j$; $z_2 = 4 \angle 68°$; $z_3 = 5 \cdot e^{-2j}$

a) – Stellen Sie z_1, z_2 und z_3 in der Gauß'schen Zahlenebene grafisch dar. B
– Geben Sie z_1 in Polarform ($z = r\angle\varphi$) an. A
– Geben Sie z_2 und z_3 in Komponentenform an. A
– Ermitteln Sie z_1^* und z_2^*. B

b) – Berechnen Sie die Ergebnisse. Stellen Sie diese jeweils in Komponenten- und in Polarform ($z = r\angle\varphi$) dar. A B

$z_1 + z_2$; $z_2 - z_3$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_3}{z_1}$

4 – Ordnen Sie die zutreffenden Aussagen den Diagrammen zu. C

1		☐
2		☐

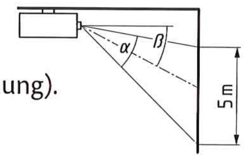
A	Die Multiplikation der komplexen Zahl z_1 mit $(-j)^2$ ergibt z_2.
B	Die Multiplikation der komplexen Zahl z_1 mit $-j^2$ ergibt z_2.
C	Die Multiplikation der komplexen Zahl z_1 mit j ergibt z_2.
D	Die Multiplikation der komplexen Zahl z_1 mit $-j$ ergibt z_2.

Schulformspezifische Kompetenzen

2 Algebra und Geometrie

B_T2_2.1 Trigonometrie des allgemeinen Dreiecks verstehen und anwenden

5 Für ein Public Viewing soll das Bild mit einem Beamer auf eine senkrechte Wand projiziert werden. Der Öffnungswinkel des Lichtkegels beträgt $\alpha = 35°$ und der Winkel $\beta = 27{,}5°$ (siehe Abbildung). Der Beamer soll an der Decke so montiert werden, dass das Bild eine Höhe von 5 m hat.



(B) – Berechnen Sie die horizontale Entfernung zwischen Beamer und Wand.

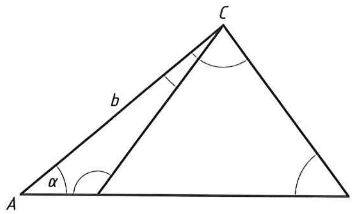
6 Von einem Dreieck kennt man folgende Bestimmungsstücke: $\alpha = 40°$, $a = 4$ cm, $b = 5$ cm

(D) – Erklären Sie, warum durch diese Angabe zwei verschiedene Dreiecke festgelegt werden.

(C) – Ergänzen Sie alle fehlenden Beschriftungen für beide möglichen Dreiecke in der Zeichnung.

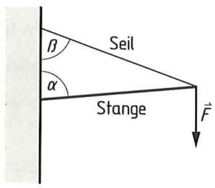
(B) – Ermitteln Sie die fehlenden Winkel, wenn β_1 ein spitzer Winkel ist.

(B) – Ermitteln Sie den Flächeninhalt, wenn β_2 ein stumpfer Winkel ist.



7 Eine Reklametafel wird an einer Stange an einer Hauswand befestigt. Zur Sicherung wird ein Stahlseil gespannt (siehe Skizze). Die Reklametafel erzeugt eine Kraft $\vec{F}$ am Ende der Stange. Diese bewirkt eine Druckkraft $\vec{F_D}$ in der Stange und eine Zugkraft $\vec{F_Z}$ im Seil. Für die drei Kräfte gilt:

$\vec{F_D} + \vec{F_Z} + \vec{F} = \vec{o}$



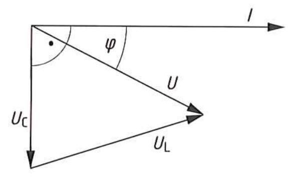
(A) – Skizzieren Sie die Kräftezerlegung der Kraft $\vec{F}$ in die Komponenten $\vec{F_D}$ und $\vec{F_Z}$.

Der Betrag der Kraft F ist $|\vec{F}| = 150$ N, der Winkel α, unter dem die Stange befestigt ist, beträgt 85°, der Winkel β zwischen der Hausmauer und dem Stahlseil beträgt 70°.

(B) – Berechnen Sie die Beträge der Kräfte $\vec{F_D}$ und $\vec{F_Z}$.

8 Im abgebildeten Diagramm sind die Spannungen U, U_L und U_C dargestellt.

(C) – Dokumentieren Sie, wie man den Winkel φ berechnen kann.



B_T2_2.2 anwendungsbezogene Exponential- und Logarithmusgleichungen mittels Technologieeinsatz lösen

9 Die von einem Pilz bedeckte Fläche kann durch die Funktion A beschrieben werden:

$$A(t) = \frac{100}{2 + 48 \cdot e^{-0{,}2 \cdot t}}$$

t ... Zeit ab Beginn der Beobachtung in Tagen
$A(t)$ ... bedeckte Fläche zur Zeit t in cm²

(B) – Berechnen Sie, nach welcher Zeit eine Fläche von 10 cm² bedeckt ist.

10 Eine in der Akustik verwendete Größe zur Beschreibung der Lautstärke ist der Schalldruckpegel L_p. Er wird mit folgender Formel berechnet:

$L_p = 20 \cdot \lg\left(\frac{p}{p_0}\right)$ mit $p_0 = 20\ \mu\text{Pa}$ … Schalldruck bei der Hörschwelle

p … Schalldruck in μPa
L_p … Schalldruckpegel in dB
Leises Flüstern erzeugt einen Schalldruckpegel von 20 dB.
– Berechnen Sie den zugehörigen Schalldruck p. (B)

B_T2_2.3 quadratische Gleichungen in einer Variablen lösen und die verschiedenen möglichen Lösungsfälle inklusive komplexer Lösungen interpretieren

11 Gegeben ist die Gleichung $x^2 + 4x + p = 0$, $p \in \mathbb{R}$.
– Geben Sie die Diskriminante an. (B)
– Bestimmen Sie p so, dass die Gleichung genau eine reelle Lösung hat. (B)
– Erklären Sie, welche Bedingung p erfüllen muss, damit die Gleichung konjugiert komplexe Lösungen hat. (D)

B_T2_2.4 Vektoren im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ verstehen und anwenden

12 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.
– Berechnen Sie: $\vec{a}_0$, $|\vec{c}|$, $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{c} \cdot \vec{d}$ und $\vec{c} \times \vec{d}$ (B)
– Geben Sie beide Normalvektoren und den Gegenvektor von $\vec{a}$ an. (B)
– Erklären Sie, was über zwei Vektoren ($\neq \vec{o}$), deren Skalarprodukt null ist, ausgesagt werden kann. (D)

13 Bewegt sich eine elektrische Ladung mit einer Geschwindigkeit $\vec{v}$ durch ein Magnetfeld, so wird sie durch die Lorenzkraft $\vec{F_L}$ abgelenkt. Es gilt:
$\vec{F_L} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$
q … elektrische Ladung in Coulomb (C), $\vec{v}$ … Geschwindigkeit in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$
$\vec{B}$ … magnetische Flussdichte in Tesla $\left(\text{T} = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}\right)$, $\vec{F_L}$ = Lorenzkraft in N
– Berechnen Sie $\vec{F_L}$ für $q = 2\ \text{C}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 50 \\ 45 \\ 0 \end{pmatrix}$ T. (B)
– Argumentieren Sie, wie sich $\vec{F_L}$ ändert, wenn sich die Orientierung des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}$ ändert.
– Zeigen Sie nachweislich, dass man mit dem Term $(q \cdot \vec{v}) \times \vec{B}$ ebenfalls die Lorenzkraft $\vec{F_L}$ erhält. (D)

14 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ sowie $x \in \mathbb{R}$.
– Ordnen Sie den Aussagen die richtigen Bedingungen zu. (C)

1	$\vec{a} \perp \vec{b}$	☐
2	$\vec{a} \parallel \vec{b}$	☐

A	$(a_1 = x \cdot b_1) \vee (a_2 = x \cdot b_2)$
B	$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = 0$
C	$a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 = 0$
D	$(a_1 \cdot x = b_1) \wedge (a_2 \cdot x = b_2)$

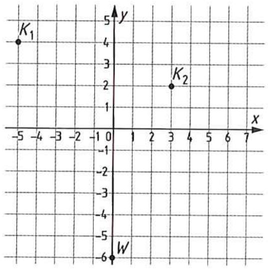
Schulformspezifische Kompetenzen

15 Gegeben ist die Gerade $g[A(1|0|-2), B(3|2|0)]$.

B – Berechnen Sie einen Richtungsvektor der Geraden.

A – Geben Sie eine Parameterdarstellung der Geraden an.

16 Bei einem Computerspiel tauchen auf dem Bildschirm an beliebigen Stellen Krähen auf. Die Krähen sollen durch einen Wasserstrahl aus der in W positionierten Wasserdüse getroffen werden.
Die Krähen K_1 und K_2 sowie die Wasserdüse W können schematisch als Punkte in einem Koordinatensystem dargestellt werden



B – Geben Sie die Vektoren $\overrightarrow{WK_1}$ und $\overrightarrow{WK_2}$ an.

B – Berechnen Sie mithilfe der Vektorrechnung den Winkel, um den die Wasserdüse gedreht werden muss, wenn zuerst die Krähe K_1 anvisiert und die Düse anschließend in Richtung der Krähe K_2 gedreht wird.

17 Im Raum greifen zwei Kräfte $\overrightarrow{F_1} = \begin{pmatrix} 120 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}$ N und $\overrightarrow{F_2} = \begin{pmatrix} 50 \\ 190 \\ 0 \end{pmatrix}$ N im selben Punkt an.

B – Berechnen Sie die resultierende Kraft $\overrightarrow{F_R}$ sowie deren Betrag.

B – Berechnen Sie den Winkel, den $\overrightarrow{F_R}$ mit der z-Achse einschließt.

B_T2_2.5 lineare Gleichungssysteme in Matrizenform übertragen und umgekehrt und diese Darstellungsform mithilfe der Matrizenmultiplikation begründen

18 Ein Gleichungssystem ist auf zwei Arten gegeben:

I: $2x + 3y - z = 1$

II: $4y - 3z = 2$

III: $x - 2z = -7$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

D – Zeigen Sie, dass die beiden Schreibweisen äquivalente Gleichungssysteme angeben.

D – Begründen Sie, warum die beiden folgenden Angaben nicht obiges Gleichungssystem festlegen.

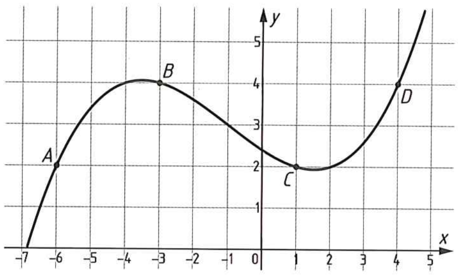
A) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$ **B)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

19 Der Schriftzug eines Transportunternehmens auf den firmeneigenen LKWs soll die Form der dargestellten Polynomfunktion 3. Grads haben.

A C – Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten dieser Polynomfunktion auf.

A – Geben Sie das Gleichungssystem in Matrizenform an.

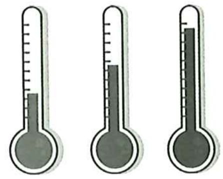
B – Lösen Sie das Gleichungssystem und geben Sie die Funktionsgleichung an.



3 Funktionale Zusammenhänge

B_T2_3.1 den Zusammenhang zwischen Funktion und Umkehrfunktion erklären und grafisch als Spiegelung des Graphen an der 1. Mediane veranschaulichen, interpretieren und damit argumentieren

20 Um ein Flüssigkeitsthermometer zu kalibrieren, wird eine Flüssigkeit erhitzt. Die Volumen V_1 bei 0 °C und V_2 bei 100 °C werden bestimmt und Markierungen am Glasröhrchen angebracht. Geht man davon aus, dass ein linearer Zusammenhang zwischen der Temperatur und dem Volumen der Flüssigkeit besteht, so kann die Temperatur in Abhängigkeit vom Volumen durch eine Funktion T beschrieben werden:

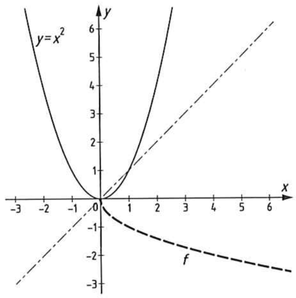


$$T(V) = 100 \cdot \frac{V - V_1}{V_2 - V_1}$$

V ... Volumen in mℓ, $T(V)$ ... Temperatur beim Volumen V in °C

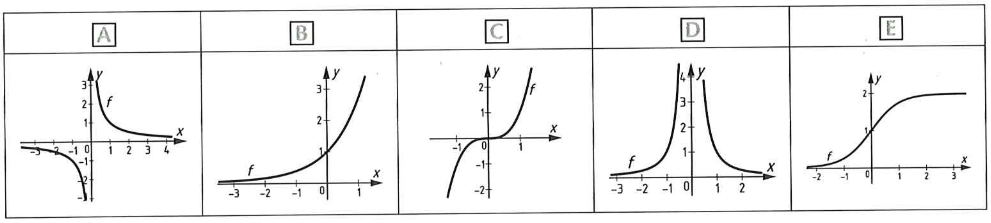
- Stellen Sie die Funktion T für $V_1 = 100$ mℓ und $V_2 = 110$ mℓ grafisch dar. B
- Skizzieren Sie die Umkehrfunktion $V(T)$ und erklären Sie deren Bedeutung im gegebenen Sachzusammenhang. A D

21 Verwenden Sie das nebenstehende Diagramm.



- Begründen Sie, warum die durch Spiegelung der Parabel $y = x^2$ an der 1. Mediane entstehende Kurve keine Funktion ist. D
- Geben Sie die Gleichung der Funktion f im Intervall $[0; \infty[$ an. A

22 – Kreuzen Sie an, zu welcher der dargestellten Funktionen keine Umkehrfunktion existiert. C



B_T2_3.2 folgende Funktionen und deren Verknüpfungen grafisch darstellen, interpretieren, zu Berechnungen verwenden und erklären: lineare Funktion, quadratische Funktion, Wurzelfunktion, Potenzfunktion, Exponentialfunktion (Wachstums-, Sättigungs- und Abklingfunktion), Logarithmusfunktion; den Einfluss der Parameter *a*, *b* und *c* bei $a \cdot f(x + b) + c$ verstehen und anwenden, wenn *f* eine der eben genannten Funktionen ist (Verschiebung im Koordinatensystem und Skalierung)

23 Bei einem Fadenpendel ist die Periodendauer von dessen Länge ℓ abhängig. Sie kann mithilfe einer Funktion T beschrieben werden.

$$T(\ell) = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad \text{mit} \quad g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

ℓ ... Fadenlänge in m, $T(\ell)$ ... Periodendauer bei der Fadenlänge ℓ in Sekunden

- Stellen Sie die Funktion T grafisch dar. B
- Lesen Sie ab, bei welcher Fadenlänge die Periodendauer 4 Sekunden beträgt. C

Schulformspezifische Kompetenzen

24 Bei einem weltweiten Online-Versand sind alle Computer firmenintern durch ein Netzwerk verbunden. Ein Computervirus wurde entdeckt. Zum Zeitpunkt der Entdeckung waren 16 Geräte, nach 5 Stunden 91 Geräte befallen.

Bernhard geht von einem linearen Wachstumsmodell aus.

A – Erstellen Sie eine Funktion zur Beschreibung der Anzahl der befallenen Computer in Abhängigkeit von der Zeit.

Clemens geht von einem exponentiellen Wachstumsmodell aus.

A – Erstellen Sie eine Funktion zur Beschreibung der Anzahl der befallenen Computer in Abhängigkeit von der Zeit.

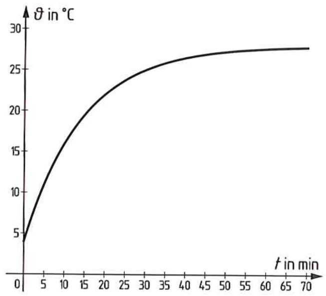
Aufgrund eines der beiden Modelle wird eine Prognose für den nächsten Tag erstellt.

D – Geben Sie an, ob es sich dabei um eine Interpolation oder eine Extrapolation handelt. Begründen Sie Ihre Antwort.

25 Limonade mit einer Temperatur von 4 °C wird aus dem Kühlschrank genommen. Die Raumtemperatur ϑ_U beträgt 28 °C. Die Erwärmung der Limonade erfolgt nach dem Newton'schen Abkühlungsgesetz:

$\vartheta(t) = \vartheta_U - (\vartheta_U - \vartheta_0) \cdot e^{-k \cdot t}$

t … Zeit ab Beginn des Erwärmungsvorgangs in Minuten
$\vartheta(t)$ … Temperatur der Limonade zur Zeit t in °C
ϑ_U … Raumtemperatur in °C
ϑ_0 … Temperatur der Limonade in °C zum Zeitpunkt $t = 0$ Minuten
k … Abkühlkonstante in min^{-1}



Die Temperatur der Limonade ist nach 20 Minuten auf 22 °C gestiegen.

D – Überprüfen Sie nachweislich, dass für die Abkühlkonstante gilt: $k = \frac{\ln(2)}{10}\ \text{min}^{-1}$

C – Kennzeichnen Sie ϑ_U, ϑ_0 und $\vartheta(20)$ in der Grafik.

26 Als Modell für reale Gase dient das sogenannte ideale Gas. Für dieses gilt das ideale Gasgesetz:

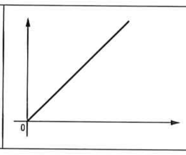
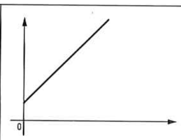
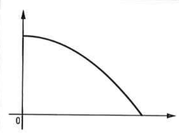
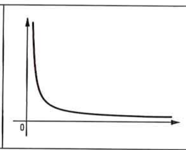
$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$

p … Druck, V … Volumen

n … Stoffmenge, R … Gaskonstante, T … Temperatur

C – Ordnen Sie den gegebenen Funktionen den passenden Graphen zu:

1	Druck in Abhängigkeit vom Volumen		2	Volumen in Abhängigkeit von der Temperatur	

A		B		C		D	

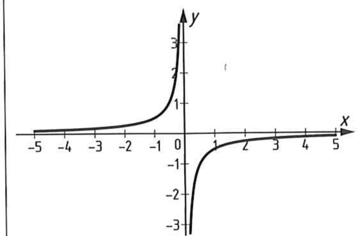
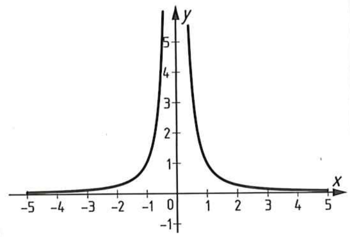
27 Das Gesetz von Gay-Lussac (benannt nach Louis Joseph Gay-Lussac, französischer Chemiker, 1788 – 1850) beschreibt die Abhängigkeit des Volumens eines Gases von der Temperatur:

$$V(T) = V_0 \cdot \left(1 + \frac{T - T_0}{T_0}\right)$$

T … Temperatur in Kelvin
$V(T)$ … Volumen bei der Temperatur T in m^3
T_0 und V_0 … Konstanten

– Zeigen Sie, dass es sich bei der Funktion V um eine lineare Funktion handelt. D

28 – Ordnen Sie den Graphen die passende Funktion zu. C

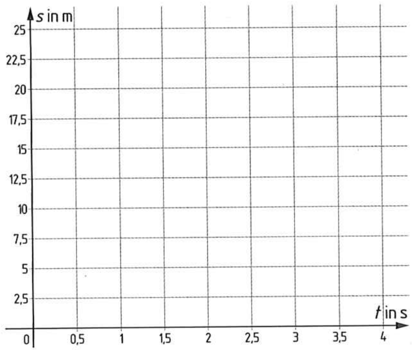
1		
2		

A	$f(x) = \frac{1}{x}$
B	$f(x) = -\frac{1}{x}$
C	$f(x) = \frac{1}{x^2}$
D	$f(x) = -\frac{1}{x^2}$

29 Bei einem Test starten drei Motorräder M_1, M_2 und M_3. Dabei kann der Weg in Abhängigkeit von der Zeit durch folgende Weg-Zeit-Funktion beschrieben werden:

$$s(t) = \frac{a}{2} \cdot t^2$$

t … Zeit in Sekunden
$s(t)$ … Weg zum Zeitpunkt t in Metern
a … konstante Beschleunigung in $\frac{m}{s^2}$



Für das Motorrad M_1 gilt: $a = 2{,}5\ \frac{m}{s^2}$

– Stellen Sie die Weg-Zeit-Funktion für M_1 im gegebenen Koordinatensystem grafisch dar. B

Das Motorrad M_2 startet zur gleichen Zeit wie M_1 mit einer Beschleunigung $b > a$.
– Skizzieren Sie den Graphen einer möglichen Weg-Zeit-Funktion im gleichen Koordinatensystem. A

Die Weg-Zeit-Funktion für das Motorrad M_3 lautet:

$$s(t) = \frac{a}{2} \cdot (t - T)^2 \quad \text{mit} \quad t \geq T$$

– Interpretieren Sie die Bedeutung des Parameters T im gegebenen Sachzusammenhang. C

Schulformspezifische Kompetenzen

30 Befindet sich zwischen zwei Kochsalzlösungen eine halbdurchlässige Membran, so treten elektrische Spannungen, sogenannte Membranspannungen, auf. Es gilt:

$U(x) = k \cdot \lg(x)$ mit $k = 60$ mV
x ... Verhältnis der Konzentrationen der Kochsalzlösungen
$U(x)$ ... Membranspannung beim Konzentrationsverhältnis x in mV

(B) – Stellen Sie die Funktion U im Bereich $]0; 150]$ grafisch dar.
(C) – Lesen Sie in der Grafik das Konzentrationsverhältnis bei einer Membranspannung von 90 mV ab.
(D) – Erklären Sie, wie sich die Membranspannung verändert, wenn sich das Konzentrationsverhältnis verzehnfacht.

B_T2_3.3 die in B_T2_3.2 genannten Funktionen, Polynomfunktionen sowie die Funktionen mit den Gleichungen $y = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ (allgemeine Sinusfunktion) und $y = a \cdot \cos(b \cdot x) + d$ zur anwendungsbezogenen Modellierung verwenden, zugehörige Rechnungen mittels Technologieeinsatz durchführen; im Kontext interpretieren und argumentieren

31 Bei der Produktion von USB-Sticks sind die Kostenfunktion K und die Preisfunktion der Nachfrage p bekannt:
$K(x) = x^3 - 20x^2 + 135x + 150$
$p(x) = 120 - x$
x ... Anzahl in Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ ... Kosten für x ME in Geldeinheiten (GE), $p(x)$ ... Preis für x ME in GE

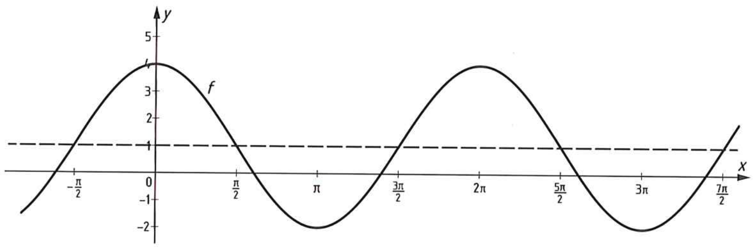
(A) – Stellen Sie die Erlösfunktion E und die Gewinnfunktion G auf.
(B) – Berechnen Sie die Gewinnschwelle.
(B) (C) – Stellen Sie die Erlös- und die Kostenfunktion grafisch dar. Markieren Sie die Gewinnschwelle.

32 Bei der Produktion von Handschuhen sind folgende Werte für die jeweiligen Gesamtkosten K bekannt.

x Paare	10	15	35	45
$K(x)$ in Geldeinheiten	270	320	450	700

(B) – Ermitteln Sie die Kostenfunktion unter der Voraussetzung, dass es sich dabei um eine Polynomfunktion 3. Grads handelt.

33 Die nachfolgende Abbildung zeigt die Funktion f mit $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$.



(D) – Erklären Sie mithilfe der Parameter a, b, c und d, wie sich der Graph der Funktion f von jenem der Funktion $y = \sin(x)$ unterscheidet.
(B) – Ermitteln Sie die Parameter a, b, c und d.

(A) **34** – Stellen Sie die Funktionsgleichung einer Schwingung mit einem Nullphasenwinkel von $\frac{\pi}{2}$, einer Amplitude von 4 cm und einer Frequenz von 50 Hz auf.

35 Familie Bauer möchte eine Solaranlage auf dem Dach ihres Hauses montieren. Sie informiert sich daher über die Sonnenscheindauer in ihrer Wohngegend. Die Tageslängen (Sonnenaufgang bis Sonnenuntergang) können annähernd durch die Funktion f beschrieben werden:

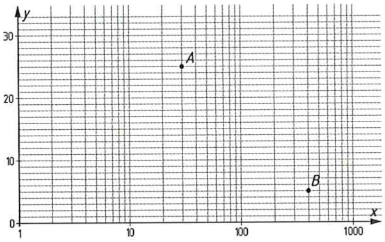
$$f(t) = 4 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot t - \frac{32\pi}{73}\right) + 12$$

t … Zeit in Tagen mit $t = 0$ … 1. Jänner
$f(t)$ … Tageslänge am Tag t in Stunden

- Stellen Sie die Funktion grafisch dar. B
- Erklären Sie die Bedeutung der Parameter $a = 4$, $b = \frac{2\pi}{365}$ und $d = 12$ im gegebenen Sachzusammenhang. D
- Geben Sie an, an welchem Tag die Tageslänge am größten ist. B

B_T2_3.4[1] logarithmische Skalierung: modellieren, interpretieren und argumentieren (Darstellung über mehrere Zehnerpotenzen; Darstellung von Potenz-, Exponential- und Logarithmusfunktion als Gerade)

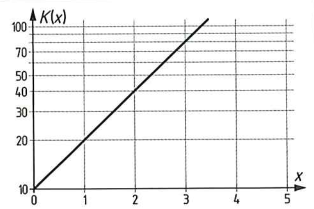
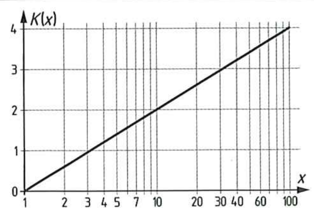
36
- Lesen Sie die Koordinaten der Punkte A und B ab. C
- Tragen Sie im dargestellten Koordinatensystem folgende Punkte ein: B
  $C(60|15)$, $D(200|22)$



37 **a)** Die „Zehnerregel der Fehlerkosten" beschreibt den Zusammenhang zwischen Fehlerkosten und Verarbeitungsstufe:
Wird ein Fehler in einer bestimmten Verarbeitungsstufe entdeckt, so kostet die Behebung 10-mal so viel, wie sie in der vorherigen Arbeitsstufe gekostet hätte.

- Geben Sie eine Funktion an, die die Kosten K in Abhängigkeit von der Verarbeitungsstufe x beschreibt, wenn die Kosten in der ersten Verarbeitungsstufe K_1 betragen. A

b) – Ordnen Sie den dargestellten Graphen die passende Funktionsgleichung zu. C

1		
2		

A	$K(x) = 10 \cdot 2^x$
B	$K(x) = 10 \cdot x^2$
C	$K(x) = 2 \cdot \lg(x)$
D	$K(x) = 2 \cdot 10^x$

[1] Dieser Deskriptor wird mit Einführung des neuen modularen Lehrplans tragend.

B_T2_3.5[1] bei anwendungsbezogenen Aufgabenstellungen mithilfe arithmetischer und geometrischer Folgen und Reihen modellieren, die Aufgaben lösen, bei deren Bearbeitung interpretieren und argumentieren

38 Es soll eine Zählschleife programmiert werden, bei der eine Variable mit dem Startwert 4 bei jedem Durchlauf um 6 erhöht wird.

Ⓐ – Stellen Sie ein rekursives Bildungsgesetz auf, mit dem der Wert der Variablen für den jeweils nächsten Durchlauf berechnet werden kann.

Ⓐ – Stellen Sie ein explizites Bildungsgesetz auf, mit dessen Hilfe man den Wert der Variablen nach n Durchläufen ermitteln kann.

Ⓑ – Ermitteln Sie, nach wie vielen Durchgängen der Wert der Variablen 178 beträgt.

39 Eine Lochfräsmaschine stellt Bohrlöcher her. Der Durchmesser des größten Bohrlochs beträgt 150 mm. Mithilfe einer mehrteiligen Skala sollen Bohrlöcher gefräst werden, dabei ist jeder weitere Bohrlochdurchmesser um 20 % kleiner als der vorherige.

Ⓐ – Stellen Sie ein explizites Bildungsgesetz für die Abnahme der Durchmesser der Bohrlöcher auf.

Ⓑ – Ermitteln Sie, welchen Durchmesser das vierte Bohrloch hat.

Ⓑ Ⓓ – Begründen Sie, warum die Summe aller Durchmesser konvergiert, und berechnen Sie diese Summe.

4 Analysis

B_T2_4.1 Eigenschaften von Funktionen: asymptotisches Verhalten bei Sättigungs- und Abklingfunktionen beschreiben und erklären; Unstetigkeitsstellen interpretieren

40 Beim Programmieren wird die Zeit von der Eingabe eines Befehls bis zu dessen vollständiger Abarbeitung als Responsetime bezeichnet. Sie hängt davon ab, wie viel Prozent der Ressourcen von anderen Prozessen in Anspruch genommen werden, und kann durch die Funktion R_t beschrieben werden:

$$R_t(u) = \frac{t_s}{100 - u}$$

u ... CPU-Auslastung in %
$R_t(u)$ ... Responsetime bei der Auslastung u in s
t_s ... Responsetime, wenn 100 % der Ressourcen zur Verfügung stehen, in s

Für einen bestimmten Befehl gilt $t_s = 5$ s.

Ⓑ – Stellen Sie die Funktion R_t im Intervall [0 %; 100 %[grafisch dar.

Ⓒ – Lesen Sie jene Auslastung u ab, für die die Responsetime $R_t = 0{,}5$ s beträgt.

Ⓒ – Beschreiben Sie das Verhalten der Funktion für u gegen 100 %.

41 Der Benzinverbrauch eines Oldtimers in Liter pro 100 km in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit x in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ lässt sich durch die Funktion B beschreiben.

$$B(x) = \frac{0{,}01x^2 + 3x + 1\,000}{200 - x}$$

Ⓓ – Erklären Sie, um welche Stelle es sich bei $x = 200$ handelt.

Ⓑ – Geben Sie einen sinnvollen Definitionsbereich für diese Funktion an.

[1] Dieser Deskriptor wird mit Einführung des neuen modularen Lehrplans tragend.

42 In einer elektrischen Doppelleitung gilt für die elektrische Feldstärke E für einen Punkt mit dem Abstand x von der Mitte des Leiters:

$E(x) = k \cdot \frac{1}{a^2 - x^2}$ $\qquad k$ … Konstante > 0, 2a … Leiterabstand

– Erklären Sie, wie sich die Feldstärke für $x \to \pm a$ verhält. D

43 Die Spannung eines Kondensators kann durch die Funktion u_C beschrieben werden.

$u_C(t) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ mit $\tau = R \cdot C$

t … Zeit in Sekunden, $u_C(t)$ … Kondensatorspannung zur Zeit t in V
U_0 … Anfangsspannung in V, R … Widerstand in Ω, C … Kapazität in F
Bei einem Kondensator mit dem Widerstand $R = 1\ \text{k}\Omega$ und der Kapazität $C = 20\ \mu\text{F}$ wird die Spannung $U_0 = 220$ V angelegt.
– Stellen Sie den Verlauf der Kondensatorspannung für $0 \leq t \leq 0{,}5$ grafisch dar. B
– Lesen Sie aus der Grafik ab, welchem Grenzwert sich die Spannung nähert. C
– Geben Sie die Gleichung der Asymptote an. A

B_T2_4.2 Ableitungsfunktionen von Winkel- und Logarithmusfunktionen sowie von zusammengesetzten Funktionen berechnen; Quotientenregel anwenden

44 Die folgende Berechnung der Ableitungsfunktion enthält einen Fehler.
– Beschreiben Sie den Fehler und korrigieren Sie das Ergebnis. B C

a) $f(t) = a \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ $\qquad \frac{df}{dt} = a \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

b) $y(x) = 3x \cdot \ln(x^2 + 1)$ $\qquad y'(x) = 3 \cdot \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x$

c) $f(x) = \frac{e^{-x}}{1 - x^2}$ $\qquad f'(x) = \frac{-e^{-x} \cdot (1 - x^2) - e^{-x} \cdot 2x}{(1 - x^2)^2}$

B_T2_4.3 Stammfunktionen von Winkel- und Exponentialfunktionen berechnen; Methode der linearen Substitution anwenden

45 Die Funktion F ist eine Stammfunktion der gegebenen Funktion f.
– Kreuzen Sie die richtige Funktion F an. C

a) $f(x) = \cos(x)$

$F(x) = \cos(x) + C$	A
$F(x) = x \cdot \sin(x)$	B
$F(x) = 3 + \sin(x)$	C
$F(x) = 3 - \sin(x)$	D
$F(x) = -\sin(x)$	E

b) $f(x) = e^{2x}$

$F(x) = 2 \cdot e^{2x}$	A
$F(x) = e^{2x} + 2$	B
$F(x) = e^{2x}$	C
$F(x) = \frac{e^{2x}}{2}$	D
$F(x) = x \cdot e^{2x}$	E

46 Die Änderungsrate der von einem Pilz bedeckten Fläche wird durch die Funktion f beschrieben: $f(t) = 3 \cdot e^t$ $\quad t$ … Zeit in Stunden, $f(t)$ … Änderungsrate zur Zeit t in $\frac{\text{dm}^2}{\text{h}}$

Zu Beginn bedeckt der Pilz eine Fläche von 6 dm^2.
– Geben Sie die Wachstumsfunktion an. A B

B_T2_4.4 Differenzialrechnung im anwendungsbezogenen Kontext anwenden: modellieren, berechnen, interpretieren und damit argumentieren

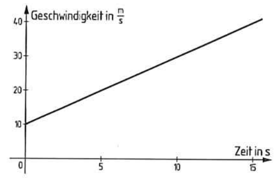
47 Das Profil eines Straßenstücks beginnt im Punkt $A(0|0{,}3)$ mit einer Steigung von 2 % und endet waagrecht im Punkt $H(2|0{,}5)$ (Koordinaten in km).
Das Profil soll im Bereich [0; 2] durch eine Polynomfunktion 3. Grads genähert werden.

(A) (B) – Ermitteln Sie die Funktionsgleichung.

(D) – Erklären Sie die Bedeutung des Wendepunkts der Funktion im gegebenen Sachzusammenhang.

(B) – Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente im Wendepunkt.

48 Im folgenden Diagramm ist die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion eines fahrenden Autos in einem Zeitintervall von 0 s bis 15 s dargestellt.



(D) – Erklären Sie, welche Aussage anhand dieses Graphen über die Beschleunigung getroffen werden kann.

(A) (B) – Ermitteln Sie die Beschleunigungsfunktion und stellen Sie diese grafisch dar.

49 Die Gesamtkosten bei der Produktion von Socken können durch die Funktion K beschrieben werden:
$K(x) = 0{,}1x^3 - 2{,}5x^2 + 25x + 10$
x … Anzahl der produzierten Sockenpaare,
$K(x)$ … Gesamtkosten bei x produzierten Sockenpaaren in GE

(B) – Ermitteln Sie die Minimumstelle der Grenzkostenfunktion K'.

(D) – Erklären Sie die Bedeutung dieser Stelle im gegebenen Sachzusammenhang.

Die Preisfunktion der Nachfrage p wurde empirisch ermittelt:
$p(x) = 20 - 0{,}5x$
x … Anzahl der verkauften Sockenpaare, $p(x)$ … Preis pro Paar in GE

(A) – Stellen Sie die Gewinnfunktion G auf.

(B) – Ermitteln Sie den maximalen Gewinn.

50 Eine Firma hat sich auf die Herstellung und den Vertrieb von Navigationsgeräten spezialisiert. Das Kundeninteresse an einem neuartigen Produkt soll durch das Angebot dieses Navigationsgeräts in einem Geschäft getestet werden.
Es werden $K = 2\,000$ Stück der Navigationsgeräte an das Geschäft geliefert. Am Tag der Lieferung werden $y_0 = 5$ Geräte verkauft, nach weiteren 4 Tagen sind es bereits insgesamt 26 Stück. Die Verkaufszahlen können näherungsweise durch die Funktion y beschrieben werden:

$$y(t) = \frac{K \cdot y_0 \cdot a^t}{y_0 \cdot a^t + (K - y_0)}$$

t … Zeit in Tagen, $t = 0$ … Tag der Lieferung
$y(t)$ … Anzahl der bis zum Tag t insgesamt verkauften Geräte
y_0 … Anzahl der verkauften Geräte am Tag der Lieferung
K … Maximalwert für die Anzahl der verkauften Geräte
a … Verbreitungsfaktor

(B) – Ermitteln Sie den Faktor a.

(B) – Berechnen Sie, an welchem Tag die „Verkaufsgeschwindigkeit" maximal ist und wie viele Geräte bis zu diesem Tag verkauft wurden.

Schulformspezifische Kompetenzen

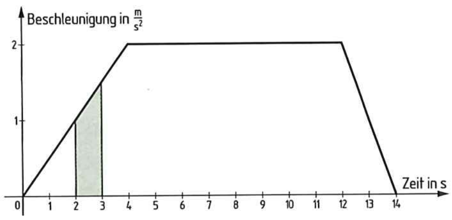
51 Die Konzentration eines Medikaments im Blut in Abhängigkeit von der Zeit lässt sich durch die Funktion K näherungsweise beschreiben:
$K(t) = 8 \cdot (e^{-0{,}13 \cdot t} - e^{-0{,}5 \cdot t})$
t … Zeit ab Beginn der Einnahme in Stunden
$K(t)$ … Konzentration des Medikaments im Blut zum Zeitpunkt t in $\frac{\text{mg}}{\text{L}}$
– Berechnen Sie den Zeitpunkt und den Wert der maximalen Konzentration. B

B_T2_4.5 Integralrechnung im anwendungsbezogenen Kontext anwenden: modellieren, berechnen, interpretieren und damit argumentieren

52 Auf einer geradlinigen Teststrecke wird ein Fahrzeug aus dem Stand von einer Startlinie aus mit einer konstanten Beschleunigung von $2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ beschleunigt.
– Ermitteln Sie die Geschwindigkeitsfunktion v. A
– Berechnen Sie mittels Integralrechnung den innerhalb der ersten 10 Sekunden zurückgelegten Weg. B
Das Fahrzeug startet in einer Entfernung s_0 vor der Startlinie.
– Geben Sie die Funktion an, die den Abstand von der Startlinie in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. A

53 Die Kraft, die beim Schieben einer Scheibtruhe entlang eines geradlinigen Wegs aufgewendet wird, kann durch die Funktion F beschrieben werden:
$F(s) = 0{,}25s^2 - 10s + 200 \quad \text{mit } s \geqslant 0$
s … Weg in m, $F(s)$ … Kraftaufwand an der Stelle s in N
Die Arbeit W, die an einem Körper verricht werden muss, um ihn geradlinig von einer Stelle s_1 bis zu einer Stelle s_2 zu verschieben, entspricht dem orientierten Flächeninhalt unter dem Graphen der Kraft-Weg-Funktion im Intervall $[s_1; s_2]$. Die Scheibtruhe wird aus der Ruhelage 20 m weit geschoben.
– Berechnen Sie die dazu notwendige Arbeit. A B

54 Die nebenstehende Grafik stellt vereinfacht das Beschleunigungsprofil eines Teils einer Autofahrt dar.
– Interpretieren Sie die grau markierte Fläche im gegebenen Sachzusammenhang. C



Die Anfangsgeschwindigkeit $v(0)$ beträgt $10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.
– Ermitteln Sie die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 14$ s. B
– Erstellen Sie die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion im Intervall [0; 14]. A

55 Die Downloadgeschwindigkeit einer bestimmten Internetverbindung lässt sich näherungsweise durch die Funktion v_D beschreiben:
$v_D(t) = 0{,}9 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{30} \cdot t\right) + 2$
t … Zeit in Sekunden, $v_D(t)$ … Downloadgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t in $\frac{\text{Mbit}}{\text{s}}$
– Stellen Sie eine Formel auf, mit der man das Downloadvolumen V im Intervall $[t_1; t_2]$ berechnen kann. A
$V =$ ______________________
– Berechnen Sie das Downloadvolumen in den ersten 2 Minuten des Downloadvorgangs. B
– Ermitteln Sie die mittlere Downloadgeschwindigkeit im Intervall [30 s; 60 s]. B

Schulformspezifische Kompetenzen

B_T2_4.6 in Natur und Technik auftretende Änderungsraten mit dem Differenzialquotienten beschreiben und erklären;
Probleme im Anwendungsbereich mit Differenzialgleichungen des Typs $\frac{dy}{dx} = k \cdot y$ bzw. $\frac{dy}{dx} = k \cdot (r - y)$ modellieren und diese lösen;
Unterschied zwischen exponentiellem und beschränktem Wachstum anhand der Differenzialgleichung interpretieren und erklären

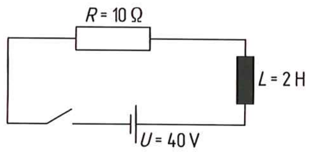
56 Ein Patient erhält einen Wirkstoff mittels Infusion verabreicht. Die Änderung der Konzentration des Wirkstoffs im Blut lässt sich durch die folgende Differenzialgleichung beschreiben:
$y'(t) = -0{,}05 \cdot (y - 0{,}09)$
t … Zeit in Minuten
$y(t)$ … Konzentration des Wirkstoffs zur Zeit t in $\frac{\text{mg}}{\text{d}\ell}$

D – Begründen Sie anhand der Differenzialgleichung, warum die Differenzialgleichung ein beschränktes Wachstum beschreibt.
B – Ermitteln Sie die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung.
D – Berechnen Sie die spezielle Lösung dieser Differenzialgleichung unter der Annahme, dass zu Beginn der Infusion kein Wirkstoff im Blut des Patienten vorhanden war.

57 Zu medizinischen Zwecken wird für bestimmte Untersuchungen radioaktives Technetium 99m eingesetzt. Die Änderung der Anzahl der Kerne in Abhängigkeit von der Zeit ist proportional zur momentanen Anzahl $N(t)$ der radioaktiven Kerne.
A – Stellen Sie die Differenzialgleichung auf, die das Zerfallsgesetz beschreibt.
A – Ermitteln Sie die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung.

B_T2_4.7[1] Probleme in Anwendungsbereichen mit linearen Differenzialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten modellieren und diese lösen; Methode *Trennen der Variablen* anwenden; homogene und inhomogene Differenzialgleichung unterscheiden, allgemeine und spezielle Lösung bestimmen, die Lösungsteile und die Lösung darstellen und interpretieren

58 Im dargestellten Stromkreis wird der Schalter zum Zeitpunkt $t = 0$ s geschlossen. Die Änderung des Stroms i (in Ampere A) mit der Zeit t wird durch folgende Differenzialgleichung beschrieben: $L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i = U$



R … Widerstand in Ohm (Ω), L … Induktivität in Henry (H), U … Spannung in Volt (V)

D – Argumentieren Sie, warum es sich um eine inhomogene Differenzialgleichung handelt.
B – Lösen Sie die Differenzialgleichung mit der Methode *Trennen der Variablen*.
B – Geben Sie die spezielle Lösung für $i(0) = 0$ A an.

59 Eine Probe mit einer Temperatur von 180 °C wird zum Abkühlen in ein Sandbad mit einer Temperatur von 25 °C gelegt. Die Probe kühlt dabei in 2 Minuten auf 90 °C ab. Die momentane Temperaturänderung $d\vartheta$ in Abhängigkeit von der Zeit t ist proportional zur Differenz der konstant gehaltenen Sandtemperatur ϑ_U und der momentanen Temperatur ϑ der Probe.
A – Stellen Sie die Differenzialgleichung auf, die diesen Abkühlvorgang beschreibt.
D – Erklären Sie die Begriffe „allgemeine Lösung" und „spezielle Lösung".
B – Berechnen Sie die spezielle Lösung.

[1] Dieser Deskriptor wird mit Einführung des neuen modularen Lehrplans tragend.

5 Stochastik

B_T2_5.1 Normalverteilung: Zusammenhang zwischen der Dichte- und der Verteilungsfunktion verstehen und anwenden, Erwartungswert μ bzw. Standardabweichung σ bei bekannten Bedingungen (Wahrscheinlichkeit, Intervallgrenzen) ermitteln

60 Maschinenöl wird in einer Abfüllanlage in 2-Liter-Flaschen abgefüllt. Die Füllmengen sind annähernd normalverteilt. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Flasche eine Füllmenge von weniger als 2,01 Liter aufweist, beträgt 15,87 %, jene, dass die Füllmenge größer als 2,07 Liter ist, beträgt 2,28 %.

- Berechnen Sie den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ. Ⓑ
- Stellen Sie die zugehörige Dichtefunktion sowie die Verteilungsfunktion grafisch dar und veranschaulichen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass die Füllmenge mehr als 2,07 Liter aufweist. Ⓐ

B_T2_5.2 Verteilung des Stichprobenmittelwertes normalverteilter Werte: modellieren, berechnen, interpretieren und erklären

61 Die Höhe von Glasziegelelementen ist annähernd normalverteilt mit $\mu = 15$ cm und $\sigma = 2$ mm.

a) Es wird eine Zufallsstichprobe vom Umfang 10 Stück entnommen.
- Ermitteln Sie den zum Erwartungswert symmetrischen Zufallsstreubereich, in dem der Stichprobenmittelwert mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % liegt. ⒶⒷ

b) Für einen Raumteiler werden 10 der Elemente aufeinander gelegt.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Höhe des fertigen Raumteilers mehr als 151,2 cm beträgt. ⒶⒷ

B_T2_5.3[1] Schätzwerte für Verteilungsparameter (μ, σ) bestimmen; zweiseitige Konfidenzintervalle für den Erwartungswert μ einer normalverteilten Zufallsvariablen: modellieren, berechnen, interpretieren und erklären

62 Die Krapfenstraße einer Großbäckerei wurde gereinigt. Vor der Reinigung betrug der Erwartungswert für die Masse der Marmeladefüllung $\mu = 13$ g. Anhand einer Stichprobe von 10 Krapfen soll überprüft werden, ob sich dieser Wert verändert hat.

a) Die Standardabweichung wird als gleichbleibend mit $\sigma = 0{,}5$ g angenommen. Eine Stichprobe ergibt einen Stichprobenmittelwert von $\bar{x} = 12{,}94$ g.
- Ermitteln Sie das zweiseitige Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ mit der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 5$ %. ⒶⒷ

b) Bei einer weiteren Stichprobe erhält man: $\bar{x} = 12{,}94$ g und $s = 0{,}5892$ g
- Ermitteln Sie das zweiseitige Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ mit der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 5$ %. Ⓑ
- Interpretieren Sie das Ergebnis. Ⓒ

c) – Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen zutrifft: Ⓒ
Das Konfidenzintervall wird länger, wenn...

A	B	C	D	E
α kleiner wird.	α größer wird.	$\bar{x}$ kleiner wird.	$\bar{x}$ größer wird.	s kleiner wird.

[1] Dieser Deskriptor wird mit Einführung des neuen modularen Lehrplans tragend.

Schulformspezifische Kompetenzen

B_T2_5.4 lineare Regression und Korrelation: Zusammenhangsanalysen für anwendungsbezogene Problemstellungen beschreiben und relevante Größen (Parameter der Funktionsgleichung, Korrelationskoeffizient nach Pearson) mittels Technologieeinsatz berechnen und interpretieren sowie die Methode der kleinsten Quadrate erklären und interpretieren

63 In einer Region wurde der Zusammenhang zwischen dem Jahrestemperaturmittel und dem privaten Energieverbrauch in Petajoule (PJ) erhoben:

Jahr	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Temperaturmittel in °C	9,8	9,6	10,1	9,7	9,9	10,1	9,8	10,0	10,4
Energieverbrauch in PJ	56	57	54	55	57	52	55	54	53

B – Stellen Sie die Daten in einem Punktwolkendiagramm dar.
B – Ermitteln Sie die Regressionsgerade und zeichnen Sie diese in das Diagramm ein.
B C – Geben Sie den Korrelationskoeffizienten an und interpretieren Sie das Ergebnis.
D – Erklären Sie die Methode der kleinsten Quadrate.
C – Ergänzen Sie die Textlücken in folgendem Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht.

Eine fallende Regressionsgerade hat einen ____①____ Korrelationskoeffizienten, der ____②____ sein kann.

①	
positiven	A
negativen	B
konstanten	C

②	
kleiner (−1)	A
gleich (−1)	B
größer 0	C

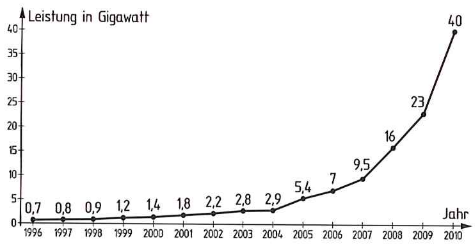
B_T2_5.5 mit Ausgleichsfunktionen (linear, quadratisch, kubisch, exponentiell) modellieren, diese mittels Technologieeinsatz bestimmen, die Ergebnisse interpretieren sowie die Methode der kleinsten Quadrate erklären und interpretieren

64 Eine Firma vertreibt spezielle Computerbauteile. Die Gesamtkosten K in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x sind in nachfolgender Tabelle dargestellt:

x (in ME)	4	7	12	14	20
$K(x)$ (in GE)	68	80	120	140	156

B – Bestimmen Sie eine quadratische Ausgleichsfunktion für diesen Zusammenhang.
B – Stellen Sie diese Ausgleichsfunktion und die gegebenen Werte grafisch dar.

65 In der Grafik ist die Kapazitätssteigerung bei Solarenergie für die Jahre 1996 bis 2010 dargestellt.



B – Ermitteln Sie eine quadratische und eine exponentielle Ausgleichsfunktion.
B – Stellen Sie die Ausgleichsfunktionen und die Originaldaten in einem gemeinsamen Diagramm dar.
D – Argumentieren Sie, dass die exponentielle Ausgleichsfunktion zur Beschreibung der Daten besser geeignet ist.

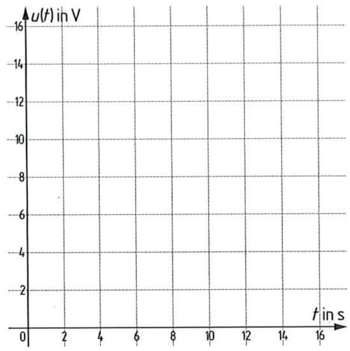
66 Ladung eines Kondensators

Ein ungeladener Kondensator wird durch das Anlegen einer Ladespannung U_0 in Volt (V) aufgeladen. Der Spannungsverlauf am Kondensator abhängig von der Zeit lässt sich durch die Funktion u beschreiben:

$u(t) = U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ mit $U_0 = 12$ V, $\tau = 1{,}16$ s … Zeitkonstante

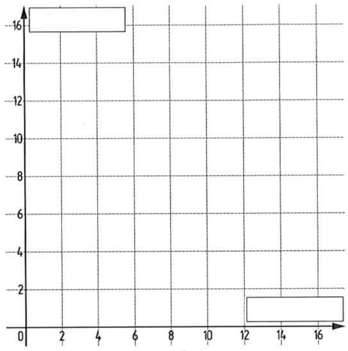
t … Zeit ab Beginn des Ladevorgangs in s
$u(t)$ … Spannung zum Zeitpunkt t in V

a) – Stellen Sie die Funktion u im Intervall [0; 16] in nebenstehendem Koordinatensystem grafisch dar. (B)



– Argumentieren Sie anhand der Funktionsgleichung, dass sich die Spannung u des Kondensators für $t \to \infty$ der angelegten Ladespannung U_0 nähert. (D)

– Skizzieren Sie die Umkehrfunktion der Funktion u in nachfolgendem Koordinatensystem. Ergänzen Sie die fehlende Achsenbeschriftung. (A)



b) – Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an den Funktionsgraphen von u an der Stelle $t = 0$ s. (B)

– Überprüfen Sie nachweislich, dass diese Tangente den Graphen der Funktion $u_0(t) = 12$ an der Stelle $t = \tau$ schneidet. (D)

c) Es soll ermittelt werden, zu welchem Zeitpunkt der Kondensator 80 % der angelegten Spannung U_0 erreicht hat. Dabei wurde folgende Rechnung durchgeführt:

$$0{,}8 \cdot U_0 = U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$
$$0{,}8 = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$\ln(0{,}8) = \ln(1) - \ln(e^{-\frac{t}{\tau}})$$
$$\ln(0{,}8) = \ln(1) + \frac{t}{\tau}$$
$$\ln(0{,}8) = \frac{t}{\tau}$$
$$t = \tau \cdot \ln(0{,}8)$$

– Erklären Sie, welcher Fehler gemacht wurde, und stellen Sie die Rechnung richtig. (B) (D)

a) B_T2_4.1, B_T2_3.1, B_T2_3.2 **b)** A_3.2, B_T2_4.4 **c)** A_2.3

67 Auslaufbecken

Bei einem Fertigungsprozess werden glühende Metallteile zur Abkühlung über eine steile Rutsche in ein horizontales, mit Wasser gefülltes Auslaufbecken befördert.

a) Es wird davon ausgegangen, dass der Reibungswiderstand, den der Körper im Auslauf erfährt, proportional zu seiner momentanen Geschwindigkeit ist.
Für ein bestimmtes Werkstück wird die Geschwindigkeit durch folgende Differenzialgleichung beschrieben:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = -k \cdot v$$

t … Zeit in s, $v(t)$ … Geschwindigkeit zur Zeit t in $\frac{m}{s}$

m … Masse in kg, k … Reibungskonstante in $\frac{kg}{s}$

B D – Zeigen Sie mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*, dass die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung lautet:
$v(t) = C \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t}$

Bei einem Metallteil mit einer Masse von $m = 75$ kg wird beim Übergang in die Horizontale zum Zeitpunkt $t = 0$ s eine Geschwindigkeit von $v = 43{,}2\,\frac{km}{h}$ gemessen. Nach 3 Sekunden geradliniger Bewegung hat das Metallstück eine Geschwindigkeit von $13\,\frac{km}{h}$.

B – Bestimmen Sie die spezielle Lösung der Differenzialgleichung.

b) Für ein weiteres Metallstück kann die Bewegung im Wasser des Auslaufbeckens durch die Funktion v beschrieben werden:

$v(t) = 10 \cdot e^{-0{,}65 \cdot t}$

t … Zeit in s, $v(t)$ … Geschwindigkeit zur Zeit t in $\frac{m}{s}$

D – Begründen Sie mathematisch, warum v für $t \to \infty$ gegen 0 geht.

A – Erstellen Sie eine Formel, mit der der Weg s berechnet werden kann, den das Metallstück im Intervall $[t_0; t_1]$ zurücklegt.

$s =$ ______________________

C – Ergänzen Sie die Textlücken in folgendem Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht.

Erreicht ein gleichartiges Metallstück das Auslaufbecken ____①____ als das erste Metallstück, so wird dessen Geschwindigkeit w durch ____②____ beschrieben.

①	
um zwei Sekunden früher	A
um zwei Sekunden später	B
mit doppelter Anfangsgeschwindigkeit	C

②	
$w(t) = 10 \cdot e^{-0{,}65 \cdot (t-2)}$	A
$w(t) = 10 \cdot e^{-0{,}65 \cdot t - 2}$	B
$w(t) = 10 \cdot e^{-0{,}65 \cdot t} + 2$	C

a) B_T2_4.7[1] **b)** B_T2_4.1, B_T2_4.5, B_T2_3.2

[1] Dieser Deskriptor wird mit Einführung des neuen modularen Lehrplans tragend.

68 Radioaktive Isotope

Manche Elemente, wie zum Beispiel Kalium, Wasserstoff oder Kohlenstoff, bestehen aus radioaktiven Isotopen.

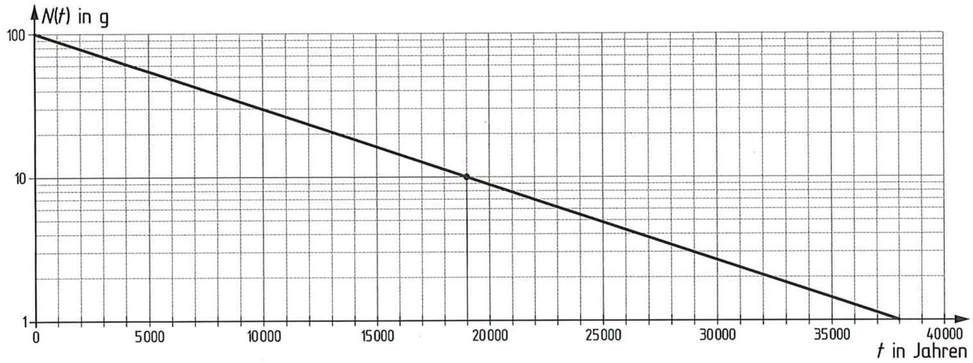
a) Der Körper eines Menschen mit einer Masse von 75 kg enthält 140 g Kalium.
- Berechnen Sie den Anteil von Kalium an der Gesamtmasse dieses Menschen in Prozent. Ⓑ

1,17 % der Kaliummasse entfallen auf das radioaktive Kalium-Isotop K-40.
- Geben Sie die Masse in kg an K-40 im Körper dieses Menschen in Gleitkommadarstellung in der Form $a \cdot 10^k$ mit $1 \leqslant a < 10$ und $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ an. Ⓑ

b) Der radioaktive Zerfall des Wasserstoff-Isotops Tritium kann durch die Funktion N beschrieben werden. Dabei ist $N(t)$ die Masse in Nanogramm (ng) des vorhandenen Tritiums nach t Jahren (a). Die erste Ableitung der Funktion N ist direkt proportional zu N. Die Proportionalitätskonstante λ in a^{-1} ($\lambda > 0$) wird als Zerfallskonstante bezeichnet.
- Stellen Sie die Differenzialgleichung auf, die den radioaktiven Zerfall von Tritium beschreibt. Ⓐ
- Ermitteln Sie die allgemeine Lösung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen.* Ⓑ

Zu Beginn der Messung sind 10 ng Tritium vorhanden, nach einem halben Jahr sind es noch 9,72 ng.
- Ermitteln Sie die Masse an Tritium, die nach zehn Jahren zerfallen ist. ⒶⒷ

c) Der radioaktive Zerfall des Kohlenstoff-Isotops C-14 kann durch die Funktion N beschrieben werden. Die Abbildung zeigt den Graphen dieser Funktion N.



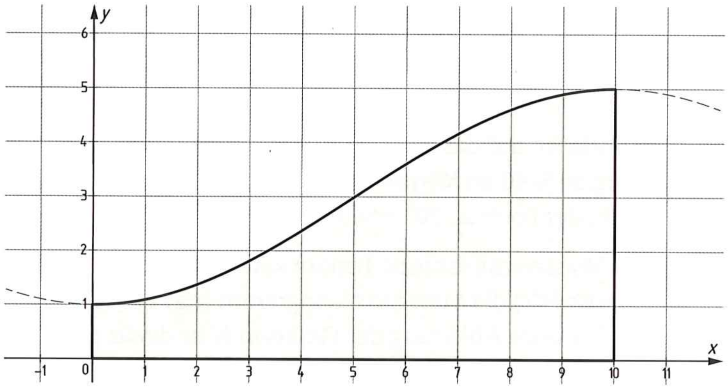
- Erklären Sie, warum die Skalierung der senkrechten Achse nicht mit 0 beginnen kann. Ⓓ
- Erklären Sie mithilfe der Abbildung, warum es sich bei der Funktion N um eine Exponentialfunktion handeln muss. Ⓓ
- Stellen Sie eine Gleichung der Funktion N auf. Ⓐ
- Lesen Sie aus dem abgebildeten Funktionsgraphen die Halbwertszeit des Kohlenstoff-Isotops C-14 ab. Ⓒ

a) A_1.5, A_1.2 ***b)*** B_T2_4.6, B_T2_4.7[1] ***c)*** B_T2_3.4[1]

[1] Dieser Deskriptor wird mit Einführung des neuen modularen Lehrplans tragend.

69 Aluminiumzuschnitt

Aus Aluminiumplatten sollen Abdeckplatten mit der unten dargestellten Form herausgeschnitten und mit farblosem Lack lackiert werden.



a) Die obere Randkurve wird durch eine Funktion der Bauart $y = -a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{10} \cdot x - \frac{\pi}{2}\right) + c$ beschrieben.

Ⓐ – Veranschaulichen Sie die Parameter a und c in der Grafik.

b) Um die notwendige Lackmenge zu berechnen, wird der Flächeninhalt zwischen der Kurve und der x-Achse ermittelt, wobei die obere Randkurve durch die Funktion $y = -2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{10} \cdot x\right) + 3$ beschrieben werden kann. Dabei wird folgender Rechenschritt durchgeführt:

$$A = \int_0^{10} \left(-2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{10} \cdot x\right) + 3\right) dx = \left(-\frac{2\pi}{10} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{10} \cdot x\right) + 3x\right)\Big|_0^{10}$$

ⒷⒹ – Erklären Sie, welcher Fehler gemacht wurde, und korrigieren Sie diesen.

Jemand behauptet, dass der Flächeninhalt $A = 3 \cdot 10\ \text{cm}^2$ beträgt.

Ⓓ – Argumentieren Sie anhand der Zeichnung, dass diese Behauptung wahr ist.

c) Der Lack befindet sich in Dosen mit einer Sollfüllmenge von 500 Millilitern (mℓ). Der Inhalt der Dosen ist normalverteilt mit einem Erwartungswert $\mu = 500{,}5$ mℓ und einer Standardabweichung $\sigma = 1$ mℓ.

Ⓑ – Zeichnen Sie die Dichtefunktion und die Verteilungsfunktion dieser Normalverteilung.

Ⓐ – Veranschaulichen Sie in beiden Grafiken die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Dose weniger als 500 mℓ Inhalt hat.

Nach einer Wartung der Abfüllanlage soll ermittelt werden, ob sich der Erwartungswert verändert hat. Dazu wird eine Zufallsstichprobe von 8 Dosen entnommen und der Stichprobenmittelwert $\bar{x} = 498{,}5$ mℓ ermittelt. Die Standardabweichung wird als unverändert mit $\sigma = 1$ mℓ angenommen.

Ⓑ – Ermitteln Sie das Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ mit $\alpha = 1\ \%$.

Ⓒ – Interpretieren Sie das Ergebnis im gegebenen Sachzusammenhang.

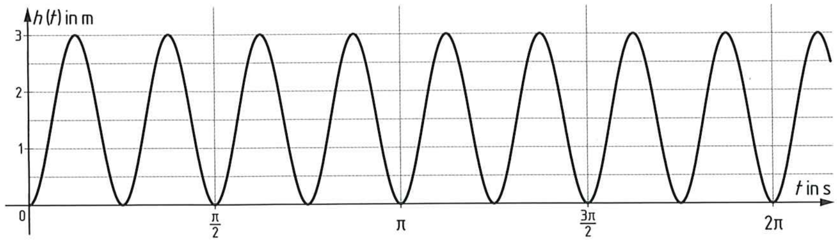
a) B_T2_3.2 **b)** B_T2_4.3, B_T2_4.5 **c)** A_5.6, B_T2_5.1, B_T2_5.3[1]

[1] Dieser Deskriptor wird mit Einführung des neuen modularen Lehrplans tragend.

70 Schiffsmotoren

Für den Antrieb von Schiffen und Booten werden meist Dieselmotoren verwendet. Dabei bewegen sich Kolben in Zylindern aufgrund thermodynamischer Prozesse periodisch auf und ab. Diese Kolbenbewegungen werden in eine Drehbewegung umgewandelt.

a) Für ein Frachtschiff kann die Höhe eines Kolbens im Zylinder abhängig von der Zeit durch eine Funktion h beschrieben werden. In nachfolgender Abbildung ist der Graph von h dargestellt.



t … Zeit in s, $h(t)$ … Höhe des Kolbens zur Zeit t in m

– Stellen Sie eine Gleichung der Funktion h mit $h(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + h_0$ auf. Ⓐ

b) Die Höhe eines Kolbens eines anderen Frachtschiffmotors lässt sich mithilfe der Funktion y beschreiben: $y(t) = 1{,}25 \cdot \sin(3{,}4\pi \cdot t) + 1{,}25$
t … Zeit in s, $y(t)$ … Höhe des Kolbens zur Zeit t in m

– Ermitteln Sie diejenige Funktion v, die die Geschwindigkeit des Kolbens in Abhängigkeit von der Zeit t angibt. Ⓑ
– Erklären Sie, welche Bedeutung ein negativer Wert der Geschwindigkeit v im gegebenen Sachzusammenhang hat. Ⓓ

Für die Kreisfrequenz ω gilt: $\omega = 2\pi f$ mit f … Frequenz in Hertz ($1\ \text{Hz} = 1\ \text{s}^{-1}$)
Die Anzahl der Umdrehungen pro Minute wird als Drehzahl n bezeichnet.

– Zeigen Sie, dass die Drehzahl n dieses Motors $n = 102\ \text{min}^{-1}$ beträgt. Ⓓ

c) Um den Treibstoffverbrauch eines Frachtschiffs in Liter pro Stunde zu untersuchen, wurde dieser bei 6 Testfahrten unter gleichen Bedingungen erhoben:

14 354   14 408   14 392   14 384   14 367   14 378

Es wird angenommen, dass der Treibstoffverbrauch annähernd normalverteilt ist.

– Ermitteln Sie den Stichprobenmittelwert $\overline{x}$ und die Stichprobenstandardabweichung s. Ⓑ
– Bestimmen Sie den zweiseitigen 95-%-Vertrauensbereich für den Erwartungswert μ. Ⓑ

d) Bei einem Motor wurden die Drehmomente M in Newtonmeter (Nm) bei 8 verschiedenen Drehzahlen n in min^{-1} gemessen:

	1	2	3	4	5	6	7	8
Drehzahl n	500	1 500	2 000	2 300	2 900	3 300	4 200	5 000
Drehmoment M	38	75	87	95	100	107	100	85

– Ermitteln Sie eine quadratische Ausgleichsfunktion. Ⓑ

a) B_T2_3.3 ***b)*** B_T2_4.2, B_T2_4.4, A_2.6 ***c)*** A_5.2, B_T2_5.3[1] ***d)*** B_T2_5.5

[1] Dieser Deskriptor wird mit Einführung des neuen modularen Lehrplans tragend.

71 Beton-Transport

Der Geschwindigkeitsverlauf eines Betonmischfahrzeugs wurde mithilfe eines Fahrtenschreibers aufgezeichnet.

a) In der Tabelle sind die Momentangeschwindigkeiten während einer halbstündigen Fahrt festgehalten.

Zeit in h	0	0,1	0,25	0,35	0,5
Geschwindigkeit in $\frac{km}{h}$	0	35	60	65	0

Ⓐ Ⓑ – Berechnen Sie die mittlere Beschleunigung in $\frac{m}{s^2}$ im Intervall [0,1; 0,25].

Der Geschwindigkeitsverlauf kann näherungsweise durch die folgende Funktion v beschrieben werden:

$v(t) = -8\,857t^4 + 6\,962t^3 - 2\,306t^2 + 520t \quad \text{mit } 0 \leqslant t \leqslant 0{,}5$

t ... Zeit nach Beginn der Fahrt in Stunden

$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in $\frac{km}{h}$

Ⓑ – Stellen Sie die Funktion v grafisch dar.

Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t = 0,25 h wird mithilfe der Näherungsfunktion v berechnet.

Ⓑ – Ermitteln Sie den Betrag des relativen Fehlers in Prozent.

b) Der Geschwindigkeitsverlauf kann näherungsweise durch die folgende Funktion v beschrieben werden:

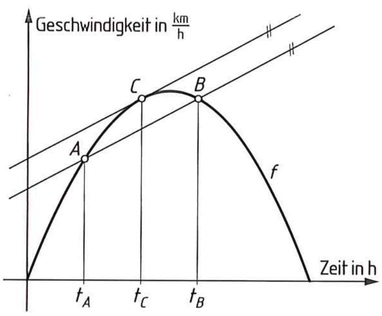
$v(t) = -8\,857t^4 + 6\,962t^3 - 2\,306t^2 + 520t \quad \text{mit } 0 \leqslant t \leqslant 0{,}5$

t ... Zeit nach Beginn der Fahrt in Stunden

$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in $\frac{km}{h}$

Ⓑ – Ermitteln Sie, nach welcher Zeit das Betonmischfahrzeug die maximale Geschwindigkeit erreicht hatte.

c) Bei einer weiteren Fahrt kann die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit annähernd durch eine Funktion f beschrieben werden.



Ⓒ – Interpretieren Sie die Steigung der Geraden durch die Punkte A und B im gegebenen Sachzusammenhang.

Ⓒ – Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen der Steigung der Tangente an der Stelle t_C und der Steigung der Geraden durch A und B im gegebenen Sachzusammenhang.

Der im Zeitintervall $[t_C; t_B]$ zurückgelegte Weg soll ermittelt werden.

Ⓐ – Erstellen Sie eine Formel zur Ermittlung dieses Wegs.

$s =$ ______________________

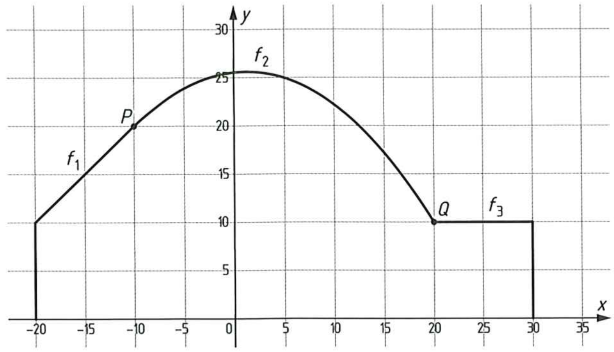
Ⓐ – Veranschaulichen Sie den im Intervall $[t_C; t_B]$ zurückgelegten Weg in der Abbildung.

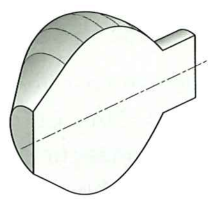
a) A_4.2, B_T2_1.1 **b)** B_T2_4.4 **c)** B_T2_4.4, B_T2_4.5

72 CNC-Drehteile

Mit einer CNC-gesteuerten Drehmaschine werden verschiedene Werkstücke hergestellt.

a) Die halbe Schnittfläche eines solchen Werkstücks ist in untenstehender Abbildung dargestellt. Dabei entspricht die x-Achse der Drehachse.





x, y ... Koordinaten in mm

Die obere Randkurve setzt sich aus den Funktionen f_1, f_2 und f_3 zusammen. f_1 und f_3 sind lineare Funktionen.

– Stellen Sie die Funktionsgleichungen für f_1 und f_3 auf. Ⓐ Ⓒ

f_2 ist eine Polynomfunktion 2. Grads. Der Übergang zwischen der Geraden f_1 und der Polynomfunktion f_2 im Punkt P erfolgt knickfrei, dh. mit gleicher Steigung.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten der Polynomfunktion f_2 ermittelt werden können. Ⓐ Ⓒ

– Geben Sie das Gleichungssystem in Matrizenform an. Ⓐ

– Beschreiben Sie, wie man den größten Außendurchmesser des Drehteils berechnen kann. Ⓒ

b) Ein weiteres Werkstück hat die Form, die durch Drehung der Kurve
$y = 0{,}0004x^3 - 0{,}016x^2 - 0{,}12x + 17{,}2$ (x, y ... Koordinaten in mm)
im Bereich $[-20; 30]$ um die x-Achse entsteht.

– Berechnen Sie das Volumen des CNC-Drehteils in cm^3. Ⓑ

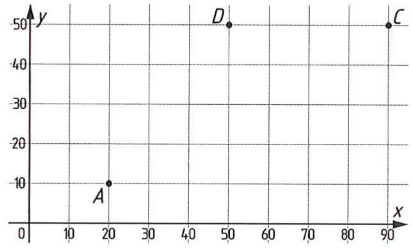
c) Die Massen der Drehteile einer Charge sind normalverteilt. Der Erwartungswert beträgt $\mu = 460$ g.
Laut Produktionsvorschrift betragen die Toleranzgrenzen $\mu \pm 1{,}8$ g und es dürfen maximal 5 % der Produktion außerhalb des Bereichs liegen.

– Ermitteln Sie, wie groß die Standardabweichung σ maximal sein darf. Ⓑ

a) A_3.2, A_4.4, B_T2_2.5, B_T2_4.4 **b)** B_T2_4.5 **c)** B_T2_5.1

73 Stahlplatten

In einem Betrieb werden Stahlplatten in Form von Parallelogrammen zugeschnitten und weiterverarbeitet. Im abgebildeten Koordinatensystem sind drei Eckpunkte A, C und D eines solchen Parallelogramms eingezeichnet.



x, y ... Koordinaten in cm

B **a)** – Zeichnen Sie das Parallelogramm ein.
C – Geben Sie die Koordinaten des Punkts B an.

Jemand hat den Ortsvektor zum Punkt B folgendermaßen ermittelt:
$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CD}$

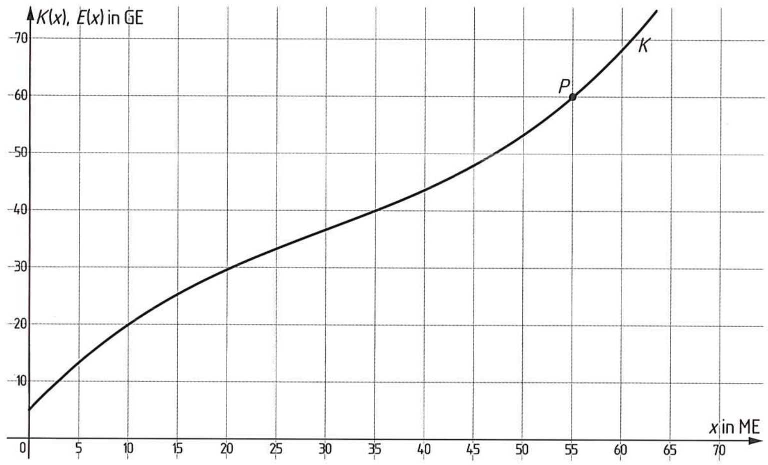
C – Kennzeichnen Sie den Fehler und stellen Sie die Formel richtig.
B – Berechnen Sie den Winkel $\sphericalangle ADC$ mithilfe der Vektorrechnung.

b) Auf der Diagonalen AC soll eine Markierung 5 Einheiten von A entfernt angebracht werden.

A – Geben Sie eine Parameterdarstellung der Trägergeraden der Diagonalen AC des Parallelogramms an.
B – Ermitteln Sie die Koordinaten des zu markierenden Punkts P.

c) Die Strecken AD und BC sollen so verkürzt werden, dass eine Raute entsteht.
B – Ermitteln Sie den Eckpunkt A' der Raute $A'B'CD$.

d) In der folgenden Abbildung ist die Kostenfunktion K für die Produktion der Stahlplatten dargestellt.



C – Lesen Sie die Fixkosten aus der Grafik ab.
C – Beschreiben Sie, wie man die Kostenkehre ermittelt.

Die Stahlplatten werden zu einem fixen Preis p (in $\frac{GE}{ME}$) verkauft. Die Erlösfunktion E schneidet die Kostenfunktion K im Punkt $P(55|60)$.

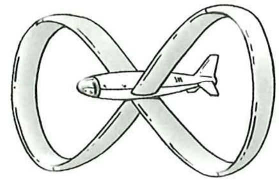
B – Zeichnen Sie die Erlösfunktion in der Grafik ein.
A – Stellen Sie die Gleichung der Erlösfunktion auf.
C – Kennzeichnen Sie den Break-Even-Point.

a) A_2.5, B_T2_2.4 **b)** B_T2_2.4[1] **c)** B_T2_2.4 **d)** B_T2_4.4, A_3.9

[1] Paramterdarstellung wird mit Einführung des neuen modularen Lehrplans tragend.

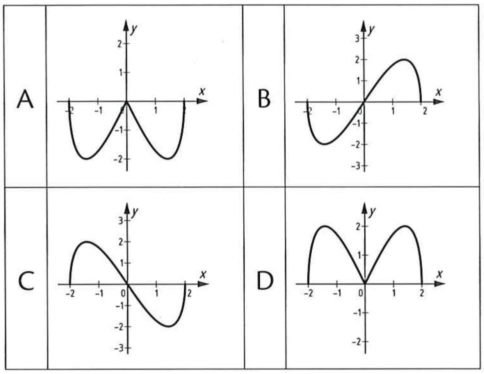
74 Drohnen

Unter einem Winglet versteht man eine spezielle Form der Tragflächen eines Flugkörpers. Durch Winglets wird der Luftwiderstand beim Fliegen verringert. Eine Firma hat Drohnen entwickelt, deren Tragflächen schlaufenförmig sind (siehe Abbildung).



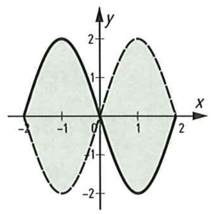
a) Die Form der Schlaufe kann mithilfe der Funktionen f bzw. g beschrieben werden.
– Ordnen Sie den Funktionen jeweils den passenden Graphen zu. C

1	f: $y = x \cdot \sqrt{4 - x^2}$	
2	g: $y = \sqrt{4x^2 - x^4}$	



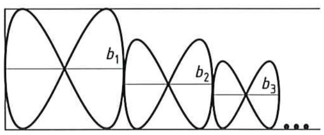
b) Bei einem anderen Modell wird die Form der Tragfläche mithilfe folgender Funktion im Intervall $[-2; 2]$ beschrieben:

$y = -2 \cdot \sin(\frac{\pi}{2} \cdot x)$
x, y ... Koordinaten in dm
Um das aerodynamische Verhalten der Drohne zu analysieren, ist es notwendig, die von der Tragfläche eingeschlossene Fläche zu kennen.



– Berechnen Sie den Inhalt der grau markierten Fläche. A B

c) Eine Serie von unterschiedlich großen Drohnen wurde angefertigt (siehe Abbildung). Die Breiten der Tragflächen bilden eine geometrische Folge. Die Breite der größten Drohne beträgt $b_1 = 4$ dm.



Die Breite jeder weiteren Drohne ist jeweils um 25,5 % kleiner als jene der nächstgrößeren Drohne.
– Stellen Sie das Bildungsgesetz der Folge der Breiten $\langle b_n \rangle$ auf. A

Für den Transport der fünf größten Drohnen wurde eine erschütterungshemmende Kiste angefertigt. Die Drohnen werden wie in der Abbildung in die 1,3 m breite Kiste nebeneinandergelegt.
– Überprüfen Sie nachweislich, dass alle fünf Drohnen in dieser Kiste Platz haben. D
– Berechnen Sie, welche Breite eine Transportkiste mindestens haben müsste, um jede beliebige Anzahl an nebeneinander gelegten Drohnen transportieren zu können. B

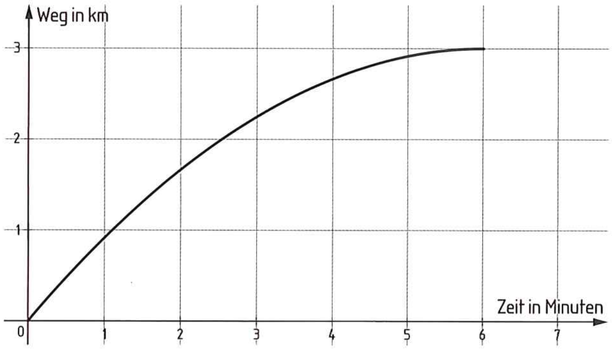
a) A_3.1 **b)** B_T2_4.5 **c)** B_T2_3.5[1]

[1] Dieser Deskriptor wird mit Einführung des modularen Lehrplans tragend.

75 Straßenverkehr

Im Rahmen einer Verkehrszählung an einer stark befahrenen Straße wurden verschiedene Daten erhoben.

a) Die Weg-Zeit-Funktion der letzten 6 Minuten einer Fahrt ist in der nebenstehenden Grafik veranschaulicht.



Ⓑ – Ermitteln Sie die mittlere Geschwindigkeit während dieser Zeit in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Ⓒ – Interpretieren Sie den Wert der Steigung des Graphen an der Stelle $t = 6$ min im gegebenen Sachzusammenhang.

b) Die Lärmbelastung durch eine Schallquelle kann durch den Schallintensitätspegel L bestimmt werden:

$L = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$ mit $I_0 = 10^{-12}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ … Schallintensität bei der Hörschwelle

I … gemessene Schallintensität in $\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$

L … Schallintensitätspegel in dB

Ⓑ – Berechnen Sie die Schallintensität I für $L = 100$ dB.

Für n Schallquellen der gleichen Intensität I gilt:

$L_n = 10 \cdot \lg\left(\frac{n \cdot I}{I_0}\right)$

Ⓓ – Zeigen Sie mithilfe der Rechenregeln für Logarithmen, dass gilt: $L_n = 10 \cdot \lg(n) + L$

c) An einer bestimmten Kreuzung wurde im Rahmen einer Langzeitstudie die Anzahl an Fahrzeugen pro Jahr ermittelt:

Jahr	1994	1999	2004	2009	2013
Anzahl an Fahrzeugen pro Jahr	43 084	44 853	51 934	50 880	51 896

Ⓑ – Stellen Sie die Daten in einem Diagramm dar.

Ⓑ – Ermitteln Sie die Regressionsgerade.

Ⓑ – Ermitteln Sie den Korrelationskoeffizienten r.

Jemand möchte mithilfe der Daten für die Jahre 2009 und 2013 die Anzahl der Autos im Jahr 2010 schätzen.

Ⓑ – Ermitteln Sie mittels linearer Interpolation die Anzahl der Autos im Jahr 2010.

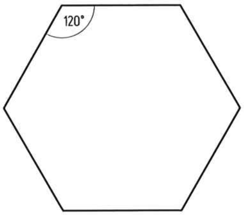
a) A_4.2, B_T2_4.4 **b)** A_2.3, B_T2_2.2 **c)** B_T2_5.4

Aufgaben zur Vorbereitung auf die sRDP

76 Koffein

Koffein ist ein weißes, wasserlösliches Pulver und kommt in über 60 Pflanzenarten vor.

a) Ein Teil der chemischen Struktur von Koffein kann mithilfe eines so genannten Sechsrings symbolisiert werden. Dieser stellt, vereinfacht gesehen, ein regelmäßiges Sechseck dar.
– Zeigen Sie, dass die Innenwinkel jeweils 120° betragen. D



b) Um den biologischen Koffeinabbau zu untersuchen, wurde die Koffeinmenge im Blut eines Probanden über einen Zeitraum von 12 Stunden bestimmt. Dabei wurden folgende Daten ermittelt:

Zeit nach der Koffein-Aufnahme in Stunden	0,5	2,0	3,25	5,5	7,0	10,5	12,0
Koffeingehalt in $\frac{mg}{L}$	90	68	53	34	25	11	9

– Ermitteln Sie die Gleichung der exponentiellen Ausgleichsfunktion, die den Koffeinabbau in Abhängigkeit von der Zeit nach der Koffeinaufnahme näherungsweise beschreibt. B

– Zeigen Sie, dass 5 Stunden nach der Koffeinaufnahme der Koffeingehalt diesem Modell gemäß unter 40 $\frac{mg}{L}$ liegt. D

c) Die Kaffeemenge, die die Kaffeekapseln einer bestimmten Firma enthalten, soll auf der Website der Firma angegeben werden. Dafür untersucht die Qualitätsmanagerin des Unternehmens eine Stichprobe von 10 Kapseln und misst folgende Mengen in g:
6,4 5,4 6,1 5,5 5,9 6,1 6,2 5,6 5,8 6,2

– Berechnen Sie den Stichprobenmittelwert $\overline{x}$ und die Stichprobenstandardabweichung s. B

– Ermitteln Sie das zweiseitige 95-%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ. B

d) Die (maximale) Wasserlöslichkeit von reinem Koffein ist temperaturabhängig. Sie kann im Bereich von 20 °C bis 80 °C durch eine lineare Funktion dargestellt werden. Dabei gilt:

Temperatur ϑ des Wassers in °C	20	80
Wasserlöslichkeit W von Koffein in $\frac{g}{L}$	22	182

– Stellen Sie mithilfe dieser Wertepaare die Gleichung einer Funktion auf, die die Abhängigkeit der Wasserlöslichkeit W von der Temperatur ϑ beschreibt. A

Für eine Koffeinlösung soll eine Menge von 100 g Koffein in einem Liter Wasser gelöst werden.
– Geben Sie die (Mindes-)Temperatur des Wassers an, das zur Herstellung dieser Lösung verwendet werden sollte. B

a) A_2.5 ***b)*** B_T2_5.5 ***c)*** B_T2_5.2, B_T2_5.3[1] ***d)*** B_T2_3.2, A_2.4

[1] Dieser Deskriptor wird mit Einführung des neuen modularen Lehrplans tragend.

77 Förderpumpen

Erdöl kann mithilfe von Pumpen gefördert werden.

a) Auf einem Ölfeld sind zwei Pumpen P_1 und P_2 in Betrieb. Gemeinsam fördern sie in einer Zeit von 400 Minuten die gewünschte Menge V an Öl. Arbeiten sie einzeln, so würde die Pumpe P_1 für die gleiche Ölmenge t Stunden brauchen, die Pumpe P_2 würde um 3 Stunden weniger als P_1 benötigen.

C – Interpretieren Sie die Bedeutung der Gleichung $V = \frac{400}{60} \cdot \left(\frac{V}{t} + \frac{V}{t-3}\right)$ im gegebenen Sachzusammenhang.

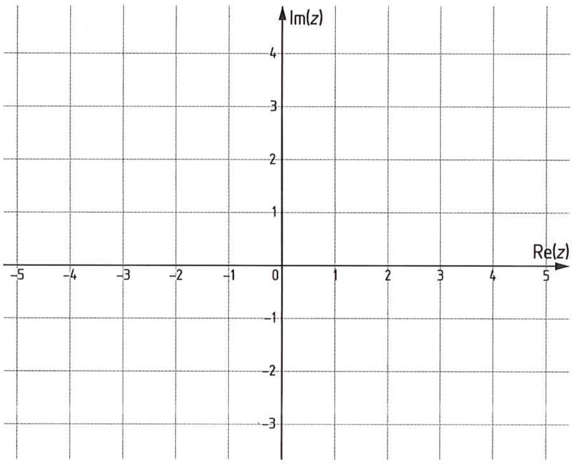
A – Geben Sie die Gleichung in der Form $a \cdot t^2 + b \cdot t + c = 0$ an.

B – Berechnen Sie, wie lang jede Pumpe alleine zum Fördern der gewünschten Ölmenge brauchen würde.

b) Die Lösungen einer quadratischen Gleichung können auch komplexe Zahlen sein.

D – Zeigen Sie, dass $z_1 = 2 + 3j$ und $z_2 = 2 - 3j$ Lösungen der Gleichung $z^2 - 4z + 13 = 0$ sind.

B – Stellen Sie z_2 in der Gauß'schen Zahlenebene dar.



A – Geben Sie z_2 in Polarform an.

D – Zeigen Sie, dass das Produkt von $(a + bj) \cdot (a - bj)$ eine reelle Zahl ist.

c) Die Förderrate einer Pumpe kann durch die Funktion f beschrieben werden:

$$f(t) = -0{,}0338t^4 + 0{,}518t^3 - 2{,}688t^2 + 5{,}31t \quad \text{für } 0 \leq t \leq 6$$

t ... Zeit in Stunden
$f(t)$ ... Förderrate zum Zeitpunkt t in $\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}$

D – Zeigen Sie mithilfe der Differenzialrechung, dass die Förderrate zweimal ein Maximum erreicht.

B – Berechnen Sie, wie viel Öl im Zeitintervall [1; 6] gefördert wird.

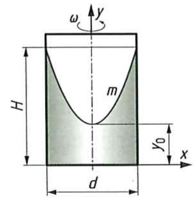
B – Stellen Sie die Funktion f grafisch dar.

A – Veranschaulichen Sie die im Intervall [1; 6] geförderte Ölmenge in der Grafik.

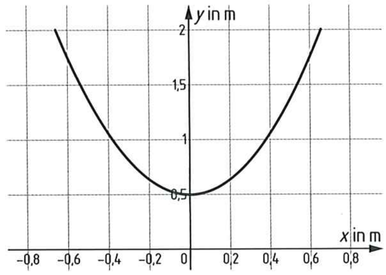
a) A2_9, B_T2_2.3 **b)** B_T2_1.2 **c)** B_T2_4.4, B_T2_3.3, B_T2_4.5

78 **Rotierendes Gefäß**

Ein mit Treibstoff gefülltes, zylindrisches Gefäß rotiert um seine senkrechte Achse. Dadurch entsteht ein Hohlraum in Form eines Drehparaboloids.



a) Bei der Rotation des Gefäßes kann das Drehparaboloid durch Drehung der dargestellten Parabel um die y-Achse beschrieben werden.
Der Innendurchmesser des Gefäßes beträgt $d = 100$ cm und die Höhe beträgt $H = 150$ cm.



– Erklären Sie anhand der Grafik, ob der Treibstoff aus dem Gefäß schwappt. D

b) Die erzeugende Kurve eines Drehparaboloids wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$y(r) = \frac{\omega^2}{2g} \cdot r^2 + y_0$ mit $g \approx 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ... Gravitationsbeschleunigung

r ... Radius in m
$y(r)$ ... y-Koordinate beim Radius r in m
ω ... Winkelgeschwindigkeit in s^{-1}
y_0 ... Höhe des Scheitels in m

– Geben Sie eine Formel für das Volumen V der Flüssigkeit in dem Gefäß an. A

$V =$ ____________________

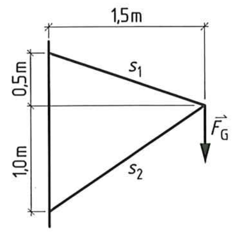
Ein Gefäß mit einer Höhe von $H = 200$ cm wird mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 10\ \text{s}^{-1}$ gedreht, sodass die Höhe des Scheitels $y_0 = 5$ cm beträgt.

– Berechnen Sie, welchen Durchmesser das Gefäß mindestens haben muss, damit keine Flüssigkeit aus dem Gefäß „schwappt". B

c) Der Mittelpunkt des Basiskreises des Gefäßes befindet sich im Koordinatenursprung O.
Im Punkt $P(30|40|0)$ des Basiskreises wirkt eine beschleunigende Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Längen in cm, Kräfte in kN).
Für das Drehmoment $\vec{M}$ gilt: $\vec{M} = \overrightarrow{OP} \times \vec{F}$

– Berechnen Sie den Betrag des Drehmoments. B

d) Um das leere Gefäß zu lagern, wird es am Ende zweier Wandstreben s_1 und s_2 frei hängend angebracht (siehe Skizze).



– Zeichnen Sie das zugehörige Kräftedreieck. B
– Berechnen Sie die Beträge der Stabkräfte $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$, die durch Belastung mit der Gewichtskraft $\vec{F_G}$ mit $F_G = 70$ N auftreten. A B

a) A_3.1 **b)** B_T2_4.5, B_T2_2.3 **c)** B_T2_2.4 **d)** B_T2_2.4

79 Tumorwachstum

Ein Tumor ist eine örtlich umschrieben Zunahme des Gewebevolumens.

a) Die Änderung der Größe *G* eines Tumors in Abhängigkeit von der Zeit *t* ist direkt proportional zur momentanen Größe.

C – Kreuzen Sie die Differenzialgleichung an, die diesen Zusammenhang beschreibt.

A	B	C	D	E
$\frac{dG}{dt} = G$	$\frac{dG}{dt} = k \cdot G$	$\frac{dG}{dt} = \frac{k}{G}$	$\frac{dG}{dt} = k \cdot G(0)$	$\frac{dG}{dt} = G \cdot e^{k \cdot t}$

b) Für die Untersuchung von Tumoren wird das radioaktive Isotop Technetium 99m (^{99m}Tc) verwendet. Dazu wird eine Markierungssubstanz (Marker) einem Patienten injiziert und die Einlagerung des Isotops in das Gewebe beobachtet. In einer klinischen Studie wurde die Aktivität von ^{99m}Tc zu bestimmten Zeiten bestimmt:

Zeit nach Verabreichung in Stunden	0,5	1,0	2,0	2,8	3,0
Aktivität in Megabecquerel (MBq)	133,5	118,9	105,6	96,6	94,4

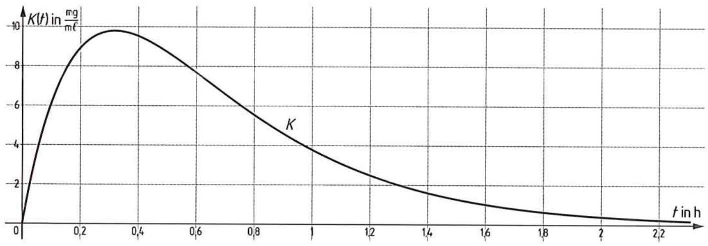
B – Ermitteln Sie die lineare Ausgleichsfunktion, die diesen Zusammenhang beschreibt.

B C – Beschreiben Sie den Korrelationskoeffizienten *r* und interpretieren Sie diesen im gegebenen Sachzusammenhang.

Mithilfe einer linearen Ausgleichungsfunktion ergibt sich für $t = 2{,}8$ h eine Aktivität von rund 95,95 MBq.

B – Berechnen Sie den Betrag des relativen Fehlers zum tatsächlichen Wert in der Tabelle.

c) Die Abbildung zeigt die Konzentration *K* eines bestimmten Medikaments im Blut in Abhängigkeit von der Zeit *t*.



Das Medikament wirkt, solange die Konzentration mindestens 2 $\frac{\text{mg}}{\text{m}\ell}$ beträgt.

C – Kennzeichnen Sie in der Grafik jenes Zeitintervall, in dem das Medikament wirksam ist.

Eine wichtige Kenngröße in der Medizin ist die AUC („Area Under the Curve"). Sie bezeichnet die Fläche unter dem Graphen von *K* und dient als Maß für die Bio-Verfügbarkeit eines Medikaments.

A – Veranschaulichen Sie in der Grafik die AUC im Wirksamkeitsintervall des Medikaments.

A – Geben Sie eine Formel für die mittlere Konzentration $\overline{K}$ in einem Zeitintervall $[t_1; t_2]$ an, wenn eine Gleichung der Funktion *K* bekannt ist

$\overline{K}$ = ______________________

a) B_T2_4.7 **b)** B_T2_5.4, B_T2_5.5, B_T2_1.1 **c)** A_3.8, A_4.8, B_T2_4.5

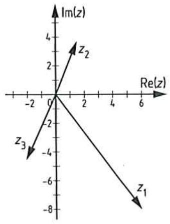
1 –) tatsächliche Auflösung: $3\,280 \cdot 2\,460 = 8\,068\,800 = 8{,}0688 \cdot 10^6$
absoluter Fehler: $8{,}4 \cdot 10^6 - 8{,}0688 \cdot 10^6 = 0{,}3312 \cdot 10^6 = 0{,}3312$ Megapixel

2 –) Näherung: $x \cdot 3 \cdot 1{,}05 = x \cdot 3{,}15$ *[um 5 % vergrößern $\Rightarrow \cdot 1{,}05$]*
$F_a = |x \cdot 3{,}15 - x \cdot \pi| = |x \cdot (3{,}15 - \pi)|$

–) Umfang Kreis: $u = d \cdot \pi$

relativer Fehler: $\frac{u - u_0}{u_0} = \frac{d \cdot (3{,}15 - \pi)}{d \cdot \pi} = \frac{3{,}15 - \pi}{\pi}$ *d* kann gekürzt werden.

3 **a)** –)

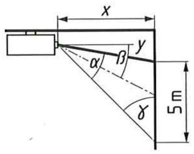


–) $z_1 = 10 \angle 306{,}9°$
–) $z_2 = 1{,}5 + 3{,}7j$ und $z_3 = -2{,}1 - 4{,}5j$
–) $z_1^* = 6 + 8j$, $z_2^* = 4 \angle 292°$

b) –) $z_1 + z_2 = 7{,}5 - 4{,}3j = 8{,}6 \angle 330{,}2°$
$z_2 - z_3 = 3{,}6 + 8{,}3j = 9{,}0 \angle 66{,}6°$
$z_1 \cdot z_2 = 38{,}7 + 10{,}3j = 40 \angle 14{,}9°$
$\frac{z_3}{z_1} = 0{,}24 - 0{,}44j = 0{,}5 \angle 298{,}5°$

4 –) 1C, 2A

5 –)



$\gamma = 90° - \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) = 45°$

$\frac{y}{\sin(\gamma)} = \frac{5}{\sin(\alpha)} \Rightarrow y = \frac{5 \cdot \sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = 6{,}164...$

$x = y \cdot \cos\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right) = 6{,}070... \approx 6{,}07$ m

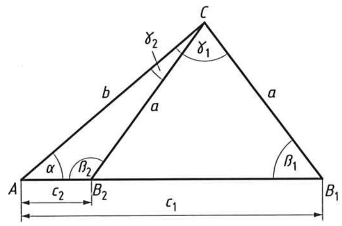
6 –) Da der gegebene Winkel der kürzeren Seite gegenüber liegt, kann die Seite a zweimal abgeschlagen werden.

–) $\frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{a} \Rightarrow \sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha) \cdot b}{a} = 0{,}803...$

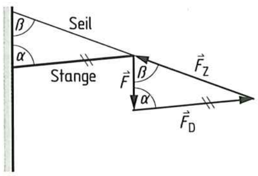
$\beta_1 = 53{,}464...° \approx 54{,}5°$
$\gamma_1 = 180° - 53{,}464...° - 40° = 86{,}535...° \approx 86{,}5°$

–) $\beta_2 = 180° - 53{,}464...° = 126{,}535...° \approx 126{,}5°$
$\gamma_2 = 180° - 126{,}535...° - 40° = 13{,}464...° \approx 13{,}5°$
$A = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\gamma_2)}{2} = \frac{4 \cdot 5 \cdot \sin(13{,}464...°)}{2} = 2{,}328... \approx 2{,}3\ \text{cm}^2$

–)



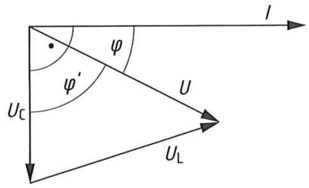
7 –)



–) $\frac{F_Z}{\sin(85°)} = \frac{F}{\sin(180° - 85° - 70°)} \Rightarrow F_Z \approx 353{,}58$ N

$\frac{F_D}{\sin(70°)} = \frac{F}{\sin(180° - 85° - 70°)} \Rightarrow F_D \approx 333{,}53$ N

8 –) Berechnung von φ' mittels Cosinus-Satz:
$\varphi' = \arccos\left(\frac{U^2 + U_C^2 - U_L^2}{2 \cdot U \cdot U_C}\right)$
φ ist der Komplementärwinkel von φ': $\varphi = 90° - \varphi'$



9 –) $10 = \frac{100}{2 + 48 \cdot e^{-0{,}2 \cdot t}}$ mit TE lösen: $t \approx 8{,}96$ Tage *[Der TE-abhängige Befehl muss angegeben werden.]*

10 –) $20 = 20 \cdot \lg\left(\frac{p}{20}\right)$ mit TE lösen: $p = 200\ \mu$Pa *[Der TE-abhängige Befehl muss angegeben werden.]*

11 –) $D = 4 - p$ –) $D = 0 \Rightarrow p = 4$ –) Die Diskriminante muss negativ sein, hier also $p > 4$.

Lösungen

12 –) $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5} = 2{,}236...$ $\Rightarrow$ $\vec{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}894... \\ -0{,}447... \end{pmatrix}$

$|\vec{c}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14} = 3{,}741...$ $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 5 + (-2) \cdot 0 + 3 \cdot (-2) = -1$ $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)\cdot(-2) - 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 5 - 1 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 0 - (-2) \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 17 \\ 10 \end{pmatrix}$

–) $\vec{a_L} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{a_R} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $-\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

–) Sie stehen normal (im rechten Winkel) aufeinander.

13 –) $\vec{F_L} = 2 \cdot \left[\begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 50 \\ 45 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 720 \\ -800 \\ 350 \end{pmatrix}$ N –) Es ändert sich die Orientierung von $\vec{F_L}$.

–) $\vec{F_L} = q \cdot \left[\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \right] = q \cdot \left[\begin{pmatrix} v_y \cdot B_z - v_z \cdot B_y \\ v_z \cdot B_x - v_x \cdot B_z \\ v_x \cdot B_y - v_y \cdot B_x \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} q \cdot v_y \cdot B_z - q \cdot v_z \cdot B_y \\ q \cdot v_z \cdot B_x - q \cdot v_x \cdot B_z \\ q \cdot v_x \cdot B_y - q \cdot v_y \cdot B_x \end{pmatrix}$

$\vec{F_L} = \left[q \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \right] \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \cdot v_x \\ q \cdot v_y \\ q \cdot v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \cdot v_y \cdot B_z - q \cdot v_z \cdot B_y \\ q \cdot v_z \cdot B_x - q \cdot v_x \cdot B_z \\ q \cdot v_x \cdot B_y - q \cdot v_y \cdot B_x \end{pmatrix}$

14 –) 1B, 2D

15 –) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $[\vec{AB} = B - A]$

–) $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $[g: \vec{OX} = \vec{OA} + t \cdot \vec{AB}]$

16 –) $\vec{WK_1} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix}$; $\vec{WK_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ –) $\cos(\alpha) = \frac{\vec{WK_1} \cdot \vec{WK_2}}{|\vec{WK_1}| \cdot |\vec{WK_2}|} = \frac{65}{\sqrt{125 \cdot 73}} = 0{,}680... \Rightarrow \alpha \approx 47{,}12°$

17 –) $\vec{F_R} = \begin{pmatrix} 120 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 50 \\ 190 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 170 \\ 190 \\ 30 \end{pmatrix}$ N $|\vec{F_R}| = \sqrt{170^2 + 190^2 + 30^2} \approx 256{,}71$ N

–) $\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix} 170 \\ 190 \\ 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{256{,}709... \cdot 1} = 0{,}116...$ *[Winkel zwischen $\vec{F_R}$ und der z-Achse]*

$\varphi = \arccos(0{,}116...) = 83{,}288...° \approx 83{,}3°$

18 –) Bei der Matrizenmultiplikation wird jedes Element einer Zeile mit dem zugehörigen Element einer Spalte multipliziert und diese Produkte addiert.
Für die gegebene Matrizenmultiplikation gilt: 1. Zeile · 1. Spalte = $(2\ \ 3\ \ -1) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x + 3y - z = 1$, damit ergibt sich die 1. Gleichung, usw.

–) **A)** Da die Spalte mit den Variablen links von der Koeffizientenmatrix steht, ist eine Multiplikation nicht möglich.

B) Beim Vertauschen der Zeilen dürfen die Variablen nicht vertauscht werden, da dann die Koeffizienten vor der falschen Variablen stehen.

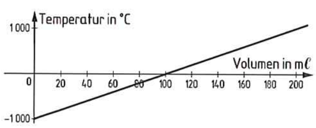
19 –) $y = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$; $A(-6|2), B(-3|4), C(1|2), D(4|4)$

I: $-216a + 36b - 6c + d = 2$
II: $-27a + 9b - 3c + d = 4$
III: $a + b + c + d = 2$
$\underline{\text{IV: } 64a + 16b + 4c + d = 4}$

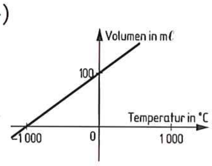
–) $\begin{pmatrix} -216 & 36 & -6 & 1 \\ -27 & 9 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 64 & 16 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

–) $a = \frac{1}{30}, b = \frac{1}{10}, c = -\frac{8}{15}y, d = \frac{12}{5}$ $y = \frac{1}{30}x^3 + \frac{1}{10}x^2 - \frac{8}{15}x + \frac{12}{5}$

20 –)



–)



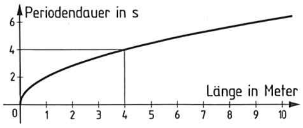
Mithilfe von $V(T)$ kann das Volumen in Abhängigkeit von der Temperatur ermittelt werden.

21 –) Es würden jedem x-Wert (> 0) zwei y-Werte zugeordnet werden.

–) $f(x) = -\sqrt{x}$

22 –) D

23 –)



–) Die Fadenlänge beträgt rund 4 m.

24 –) $\left.\begin{array}{l} N(0) = 16 \ldots 16 = k \cdot 0 + d \\ N(5) = 91 \ldots 91 = k \cdot 5 + d \end{array}\right\} \Rightarrow d = 16, k = 17$ *[lineare Funktion: $N(t) = k \cdot t + d$]*

$N(t) = 17 \cdot t + 16$

t … Zeit in Stunden, $N(t)$ … Anzahl der befallenen Computer zur Zeit t

–) $\left.\begin{array}{l} N(0) = 16 \ldots 16 = N_0 \cdot 1 \\ N(5) = 91 \ldots 91 = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot 5} \end{array}\right\} \Rightarrow N_0 = 16, \lambda \approx 0{,}347654$ *[exponentielle Funktion: $N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$ oder $N(t) = N_0 \cdot a^t$]*

$N(t) = 16 \cdot e^{0{,}347654 \cdot t}$

t … Zeit in Stunden, $N(t)$ … Anzahl der befallenen Computer zur Zeit t

–) Bei der Prognose handelt es sich um eine Extrapolation, da ein Wert außerhalb des erfassten Zeitraums gesucht ist.

25 –) $\vartheta(t) = \vartheta_U - (\vartheta_U - \vartheta_0) \cdot e^{-k \cdot t}$

$22 = 28 - (28 - 4) \cdot e^{-k \cdot 20}$

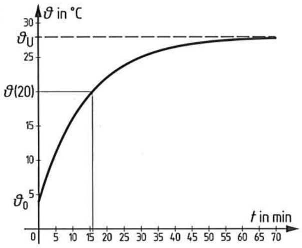
$-6 = -24 \cdot e^{-k \cdot 20}$

$\frac{1}{4} = e^{-k \cdot 20}$

$\ln\left(\frac{1}{4}\right) = -k \cdot 20$

$k = -\frac{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{20} = -\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)^2}{20} = -\frac{2 \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right)}{20} = -\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{10} = -\frac{\ln(1) - \ln(2)}{10} = \frac{\ln(2)}{10}$

–)

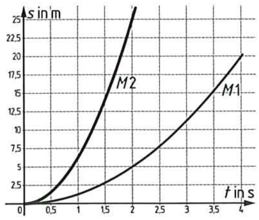


26 –) 1D, 2A

27 –) Vereinfachen ergibt $V(T) = \frac{V_0}{T_0} \cdot T$. Die Funktion hat die Form $y = k \cdot x$ und ist damit linear.

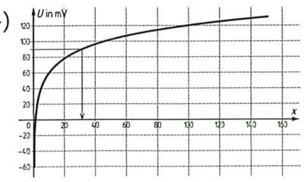
28 –) 1B, 2C

29 –)



–) Das Motorrad M_3 startet zum Zeitpunkt $t = T$.

30 –)



–) Wenn das Konzentrationsverhältnis verzehnfacht wird, steigt die Membranspannung um 60 mV.

$U(x) = 60 \cdot \lg(x)$

$U(10 \cdot x) = 60 \cdot \lg(10 \cdot x) = 60 \cdot [\lg(10) + \lg(x)] =$

$= 60 \cdot \lg(10) + 60 \cdot \lg(x) = 60 + 60 \cdot \lg(x)$

$U(10 \cdot x) = 60 + U(x)$

–) Bei 90 mV beträgt das Verhältnis ≈ 32.

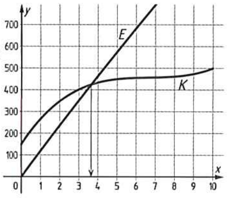
Lösungen

31 –) $E(x) = p(x) \cdot x = (120 - x) \cdot x = 120x - x^2$ und $G(x) = E(x) - K(x) = -x^3 + 19x^2 - 15x - 150$
x … verkaufte Stück in ME, $E(x)$ … Erlös bei x ME in GE, $G(x)$ … Gewinn bei x ME in GE

–) $G(x) = 0 \Rightarrow -x^3 + 19x^2 - 15x - 150 = 0$ *[Gewinnschwelle ≙ Nullstelle der Gewinnfunktion]*

Gleichung mit TE lösen: *[Der TE-abhängige Befehl muss angegeben werden.]*
$x_1 = -2{,}32\ldots;\ x_2 = 3{,}65\ldots;\ x_3 = 17{,}67\ldots$

Die Gewinnschwelle liegt bei 3,7 ME.

–) 

32 –) $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

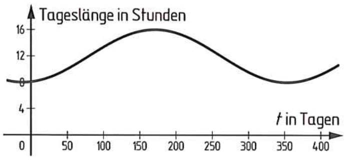
I: $270 = 10^3 \cdot a + 10^2 \cdot b + 10 \cdot c + d$
II: $320 = 15^3 \cdot a + 15^2 \cdot b + 15 \cdot c + d$
III: $450 = 35^3 \cdot a + 35^2 \cdot b + 35 \cdot c + d$
IV: $700 = 45^3 \cdot a + 45^2 \cdot b + 45 \cdot c + d$

Gleichungssystem mit TE lösen: *[Der TE-abhängige Befehl muss angegeben werden.]*

$K(x) = \frac{227}{10\,500}x^3 - \frac{503}{350}x^2 + \frac{14\,977}{420}x + \frac{71}{2}$

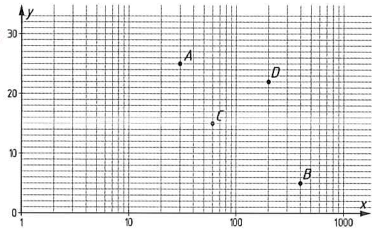
33 –) a streckt die Kurve in y-Richtung, b ist die Kreisfrequenz, c verschiebt sie in x-Richtung, d in die y-Richtung.
–) $a = 3$, $p = 2\pi \Rightarrow b = 1$, um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschoben $\Rightarrow c = \frac{\pi}{2}$, $d = 1$

34 –) $y(t) = 4 \cdot \sin(100\pi \cdot t + \frac{\pi}{2})$ *[$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$ mit $\omega = 2\pi f$, φ_0 … Nullphasenwinkel]*

35 –) 

–) d ist die mittlere Tageslänge; a ist der maximale Unterschied zu d; b ergibt sich aus der Periodendauer von 365 Tagen.
–) Der längste Tag ist am 172. Tag, Sommeranfang

36 –) $A(30|25)$, $B(400|5)$

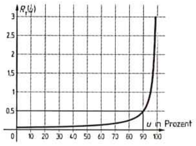
–) 

37 **a)** –) $K(x) = K_1 \cdot 10^{x-1}$ **b)** –) 1A, 2C

38 –) $a_{n+1} = a_n + 6$ mit $a_1 = 4$
–) $a_n = 4 + (n - 1) \cdot 6$ *[$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$]*
–) $178 = 4 + (n - 1) \cdot 6 \Rightarrow n = 30$

39 –) $b_n = 150 \cdot 0{,}8^{n-1}$ b_n … Durchmesser in mm *[20 % kleiner $\Rightarrow \cdot 0{,}8$]*

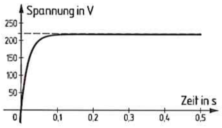
–) $b_4 = 150 \cdot 0{,}8^3 = 76{,}8$ mm
–) Da $q < 1$ ist, konvergiert die Summe aller Durchmesser: $s = \frac{b_1}{1-q} = \frac{150}{1-0{,}8} = 750$ mm

40 –) 

–) Bei $R_t = 0{,}5$ s beträgt die CPU-Auslastung 90 %.
–) Für u gegen 100 % geht der Nenner gegen null und somit $R_t(u)$ gegen unendlich.

41 –) Die Stelle $x = 200$ ist eine Polstelle, hier gibt es eine senkrechte Asymptote.
–) $D = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x < 200\}$

42 –) Für $x \to \pm a$ geht die Feldstärke gegen ∞, da der Nenner des Bruchs gegen 0 geht.

43 –) 

–) Die Spannung nähert sich dem Wert $U_0 = 220$ V.
–) Der Graph nähert sich der waagrechten Asymptote $u(t) = 220$.

44 **a)** –) Die innere Ableitung fehlt: $\frac{df}{dt} = a \cdot \omega \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

b) –) Die Produktregel wurde nicht angewendet: $y'(x) = 3 \cdot \ln(x^2 + 1) + \frac{6x^2}{x^2 + 1}$

c) –) Das Minus zwischen den beiden Termen im Zähler ist falsch: $f'(x) = \frac{-e^{-x} \cdot (1 - x^2) + e^{-x} \cdot 2x}{(1 - x^2)^2}$

45 **a)** –) C **b)** –) D

46 –) $F(t) = \int f(t)\,dt = 3 \cdot e^t + C$ *[unbestimmtes Integral ermitteln]*

$F(0) = 6 \Rightarrow C = 3$ *[Anfangsbedingung einsetzen, um C zu berechnen.]*

$F(t) = 3 \cdot e^t + 3$ $F(t)$ … Fläche des Pilzes zur Zeit t in dm^2

47 –) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ x … waagrechte Entfernung in km

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $f(x)$ … Höhe an der Stelle x in km

$f(0) = 0{,}3$ I: $d = 0{,}3$ *[Punkt auf Kurve]*

$f'(0) = 0{,}02$ II: $c = 0{,}02$ *[Steigung 2 %; k = 0,02]*

$f(2) = 0{,}5$ III: $2^3 \cdot a + 2^2 \cdot b + 2c + d = 0$ *[Punkt auf Kurve]*

$f'(2) = 0$ IV: $3 \cdot 2^2 \cdot a + 2 \cdot 2b + c = 0$ *[Hochpunkt]*

[Werden nur die Bedingungsgleichungen angegeben und kein Gleichungssystem, so müssen die Funktionsgleichung und die Ableitungsfunktion angegeben werden.]

$f(x) = -\frac{9}{200} \cdot x^3 + \frac{13}{10} \cdot x^2 + \frac{1}{50} \cdot x + \frac{3}{10}$ *[Der TE-abhängige Befehl muss angegeben werden.]*

–) Im Wendepunkt steigt die Straße am stärksten an.

–) $f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{26}{27} \approx 0{,}96$ $W(0{,}96|0{,}399625)$

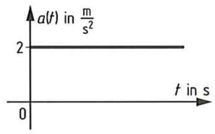
$y = k \cdot x + d$; $k = f'\left(\frac{26}{27}\right) = \frac{98}{675} \approx 0{,}15$; $d = f\left(\frac{26}{27}\right) - k \cdot \frac{26}{27} = 0{,}259\ldots \approx 0{,}26$

$y = 0{,}15x + 0{,}26$

48 –) Da die Geschwindigkeitsfunktion eine lineare Funktion ist, muss die Beschleunigung konstant sein.

–) $a(t) = 2$ *[Steigung ablesen]*

t … Zeit in s, $a(t)$ … Beschleunigung zum Zeitpunkt t in $\frac{m}{s^2}$



49 –) Grenzkostenfunktion: $K'(x) = 0{,}3x^2 - 5x + 25$

Minimum von K': $K''(x) = 0 \Rightarrow x \approx 8{,}33$ ME

–) An dieser Stelle ist der Wendepunkt der Kostenfunktion, hier wechseln die Kosten von degressiv auf progressiv.

–) $E(x) = p(x) \cdot x = (20 - 0{,}5x) \cdot x = 20x - 0{,}5x^2$

$G(x) = E(x) - K(x) = -0{,}1x^3 + 2x^2 - 5x - 10$

–) $G'(x) = 0 \Rightarrow x_1 \approx 1{,}40$; $x_2 \approx 11{,}94$ *[Der TE-abhängige Befehl muss angegeben werden.]*

Maximum bei x_2, da $G''(x_2) = -3{,}162\ldots$ *[Das Maximum kann auch grafisch ermittelt werden.]*

maximaler Gewinn: $G(x_2) \approx 45{,}21$ GE

50 –) $y(t) = \frac{2\,000 \cdot 5 \cdot a^t}{5 \cdot a^t + (2\,000 - 5)}$

$26 = \frac{2\,000 \cdot 5 \cdot a^4}{5 \cdot a^4 + (2\,000 - 5)}$ *[Die Gleichung y(4) = 26 wird mithilfe von Technologieeinsatz nach a gelöst.]*

$a = 1{,}514\ldots$

–) $v(t) = y'(t)$ *[Die Verkaufsgeschwindigkeit entspricht der 1. Ableitung der Funktion.]*

$y''(t) = 0$ *[Das Maximum wird durch Nullsetzen von y″ ermittelt.]*

$t = 14{,}437\ldots \Rightarrow$ am 15. Tag

$y(14{,}437\ldots) = 1\,000$ Stück

51 –) $K'(t) = 0$ *[Gleichung mit TE nach t lösen; der TE-abhängige Befehl muss angegeben werden.]*

Nach 3,64 Stunden erreicht das Medikament die maximale Konzentration von $3{,}69\ \frac{mg}{L}$.

52 –) $v(t) = 2t$ –) $s = \int_0^{10} 2t\,dt = 100$ m –) $s(t) = t^2 + s_0$

53 –) $W = \int_0^{20} F(s)\,ds \approx 2\,666{,}67$ J

Lösungen

54 –) Die Fläche beschreibt den Geschwindigkeitszuwachs im Intervall [2; 3].

–) $v = 10 + \frac{14+8}{2} \cdot 2 = 32\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ *[Die Fläche unter dem Graphen der Beschleunigungsfunktion entspricht dem Geschwindigkeitszuwachs.]*

–) $a(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} & \text{für } 0 \leq t \leq 4 \\ 2 & \text{für } 4 < t \leq 12 \\ -t + 14 & \text{für } 12 < t \leq 14 \end{cases}$

$v_1(t) = \frac{t^2}{4} + C_1;\ v_1(0) = 10 \Rightarrow C_1 = 10$

$v_2(t) = 2t + C_2;\ v_1(4) = v_2(4) = 14 \Rightarrow C_2 = 6$

$v_3(t) = -\frac{t^2}{2} + 14t + C_3;\ \ v_2(12) = v_3(12) = 30 \Rightarrow C_3 = -66$

$v(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4} + 10 & \text{für } 0 \leq t \leq 4 \\ 2t + 6 & \text{für } 4 < t \leq 12 \\ -\frac{t^2}{2} + 14t - 66 & \text{für } 12 < t \leq 14 \end{cases}$

55 –) $V = \int_{t_1}^{t_2} \left(0{,}9 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{30} \cdot t\right) + 2\right) dt$ –) $V = \int_{0}^{120} \left(0{,}9 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{30} \cdot t\right) + 2\right) dt = 240$ Mbit

–) $\overline{v} = \frac{1}{30} \cdot \int_{30}^{60} v_D(t)\, dt = 1{,}427\ldots\ \frac{\text{Mbit}}{\text{s}}$

56 –) Die Änderungsrate y' ist proportional zur Differenz zwischen der momentanen Konzentration und der Konstanten 0,09.

–) $y(t) = C \cdot e^{-0{,}05 \cdot t} + 0{,}09$

–) $y(t) = -0{,}09 \cdot e^{-0{,}05 \cdot t} + 0{,}09$

57 –) $\frac{dN}{dt} = k \cdot N$ mit $k < 0$

–) $\int \frac{dN}{dt} = k \cdot \int dt \Rightarrow \ln|N| = k \cdot t + \overline{C} \Rightarrow N(t) = C \cdot e^{k \cdot t}$

58 –) Aufgrund der konstanten Störfunktion U handelt es sich um eine inhomogene Differenzialgleichung.

$2 \cdot \frac{di}{dt} + 10i = 40 \quad |-10i \Rightarrow 2 \cdot \frac{di}{dt} = 40 - 10i \quad |:2$

$\frac{di}{dt} = 20 - 5i$

$\frac{di}{20 - 5i} = dt$ *[Trennen der Variablen]*

$-\frac{1}{5} \cdot \int \frac{1}{u}\, du = \int dt$ *[Integration mithilfe Substitution]*

$-\frac{1}{5} \cdot \ln(|u|) + C_1 = t + C_2 \quad |\cdot(-5)$

$\ln(|20 - 5i|) = -5t + \overline{C} \Rightarrow 20 - 5i = \tilde{C} \cdot e^{-5t} \Rightarrow 5i = 20 - \tilde{C} \cdot e^{-5t}$

$i(t) = 4 - C \cdot e^{-5t}$ *[allgemeine Lösung]*

–) $0 = 4 - C \cdot e^{-5 \cdot 0}$ *[Einsetzen der Anfangsbedingung]*

$C = 4 \Rightarrow i(t) = 4 - 4 \cdot e^{-5t}$ *[spezielle Lösung]*

59 –) $\frac{d\vartheta}{dt} = k \cdot (\vartheta_U - \vartheta)$

–) allgemeine Lösung ... Funktionenschar,
spezielle Lösung ... Spezielle Funktion, die man durch Einsetzen der Anfangsbedingung(en) erhält

–) $\int \frac{d\vartheta}{\vartheta_U - \vartheta} = k \cdot \int dt$ *[Lösen der Differenzialgleichung*

$-\ln(|\vartheta_U - \vartheta|) = k \cdot t + \overline{C}$ *mit Trennen der Variablen]*

$\vartheta_U - \vartheta = C \cdot e^{-k \cdot t}$

$\vartheta = \vartheta_U - C \cdot e^{-k \cdot t}$ *[allgemeine Lösung]*

$\vartheta = 25 - C \cdot e^{-k \cdot t}$

$180 = 25 - C \cdot e^{-k \cdot 0}$ *[Einsetzen der Anfangsbedingung]*

$C = -155$

$\vartheta = 25 + 155 \cdot e^{-k \cdot t}$

$\vartheta(2) = 90 \Rightarrow 90 = 25 + 155 \cdot e^{-2 \cdot k}$

mit TE lösen: $k = 0{,}434\ldots$ *[Der TE-abhängige Befehl muss angegeben werden]*

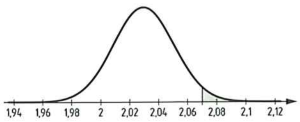
$\vartheta(\overline{C}) = 25 + 155 \cdot e^{-0{,}434 \cdot t}$ *[spezielle Lösung]*

60 –) $P(X < 2{,}01) = 0{,}1587$ $\quad$ $P(X < 2{,}07) = 1 - 0{,}0228$

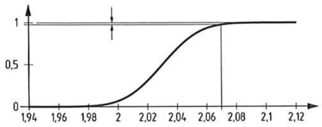
$\frac{2{,}01 - \mu}{\sigma} = u_{0{,}1587} = -0{,}999815$ $\quad$ $\frac{2{,}07 - \mu}{\sigma} = u_{0{,}9772} = 1{,}999077$ *[Standardisierungsformel]*

$\mu = 2{,}03$ L; $\sigma = 0{,}02$ L *[Gleichungssystem mit TE lösen]*

–) Dichtefunktion



Verteilungsfunktion



61 **a)** –) $\mu = 15$ cm; $\sigma = \frac{0{,}2}{\sqrt{10}}$ cm; $\quad P(\bar{x}_u \leq \mu \leq \bar{x}_o) = 0{,}9$; $\quad u_{0{,}95} = 1{,}6448...$

$\bar{x}_u = 15 - u_{0{,}95} \cdot \frac{0{,}2}{\sqrt{10}} = 14{,}895...$; $\bar{x}_o = 15 + u_{0{,}95} \cdot \frac{0{,}2}{\sqrt{10}} = 15{,}104...$

[14,90 cm; 15,10 cm]

b) –) X ... Höhe des Raumteilers in cm

$\mu = 150$ cm; $\sigma = 10 \cdot \frac{0{,}2}{\sqrt{10}}$ cm; $P(X > 151{,}2) \approx 0{,}0289$ $\quad$ $\left[\mu_n = \mu \cdot n;\ \sigma_n = n \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

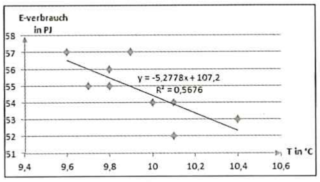
62 **a)** –) [12,63 g; 13,25 g] *[Der TE-abhängige Befehl muss angegeben werden.]*

b) –) [12,52 g; 13,36 g] *[Der TE-abhängige Befehl muss angegeben werden.]*

–) 13 g liegen im VB, der Erwartungswert hat sich mit 5 % Irrtumswahrscheinlichkeit nicht geändert.

c) –) A

63 –)



[Der TE-abhängige Befehl muss angegeben werden.]

–) $r = -0{,}753399...$
Da der Korrelationskoeffizient negativ ist, ist die Regressionsgerade fallend.

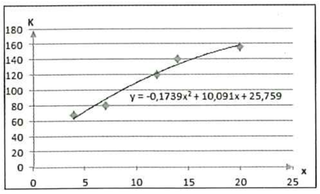
–) Man bestimmt eine Ausgleichsfunktion so, dass die Summe der Quadrate der Differenzen zwischen den tatsächlichen Werten und den mithilfe der Funktion bestimmten Funktionswerten minimal wird.

$y = -5{,}3x + 107{,}2$

x ... Temperatur in °C, y ... Energieverbrauch bei einer Temperatur x in PJ

64 –) Eine fallende Ausgleichsfunktion hat einen negativen Korrelationskoeffizienten, der gleich (–1) sein kann.

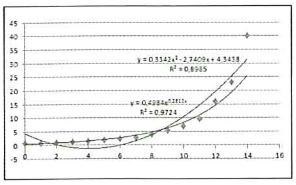
–)



[Der TE-abhängige Befehl muss angegeben werden.]

–) $K(x) = -0{,}17x^2 + 10{,}1x + 25{,}8$

65 –) 1996 ... $t = 0$



[Der TE-abhängige Befehl muss angegeben werden.]

$y_Q = 0{,}33x^2 - 2{,}7x + 4{,}3$

$y_E = 0{,}50 \cdot e^{0{,}28x}$

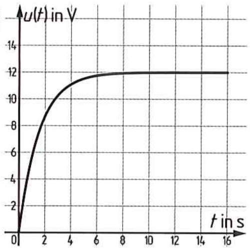
x ... Zeit in Jahren ab 1996, y_Q, y_E ... Leistung zur Zeit t in GW

–) Die quadratische Ausgleichsfunktion ist ungeeignet, da negative Werte nicht möglich sind.

Lösungen

66 Ladung eines Kondensators

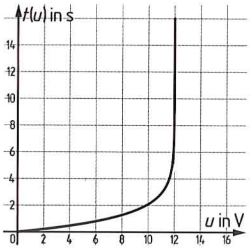
a) –)



–) $u(t) = 12 \cdot \left(1 - \underbrace{e^{-0{,}862\ldots \cdot t}}_{\to 0}\right)$

Für $t \to \infty$ geht der Term $e^{-0{,}862\ldots \cdot t}$ gegen null. Damit geht der Klammernausdruck gegen 1 und $u(t)$ gegen 12.

–)



[Der Graph der Umkehrfunktion entsteht durch Vertauschen der Koordinaten und Koordinatenachsen.]

b) –) $u(t) = 12 \cdot \left(1 - e^{-0{,}862\ldots \cdot t}\right);\quad u(0) = 0$

$u'(t) = 10{,}344\ldots \cdot e^{-0{,}862\ldots \cdot t}$ *[Bilden der ersten Ableitung]*

$k = u'(0) = 10{,}344\ldots$ *[Ermitteln der Steigung k an der Stelle t = 0 s]*

Tangentengleichung: $u_T(t) = 10{,}344\ldots \cdot t$ *[Geradengleichung: y = k · x, d = 0 da u(0) = 0]*

–) $10{,}344\ldots \cdot t = 12 \;\Rightarrow\; t = 1{,}16$ s *[Gleichsetzen der Tangentengleichung mit $u_0(t) = 12$]*

$\tau = 1{,}16$ s $\;\Rightarrow\; t = \tau$ w. z. z. w.

c) –) Der Fehler ist in der zweiten Zeile:

$\ln\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \neq \ln(1) - \ln\left(e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

$0{,}8 = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$

$-0{,}2 = -e^{-\frac{t}{\tau}} \;|\cdot(-1)$

$-0{,}2 = -e^{-\frac{t}{\tau}}$

$\ln(0{,}2) = -\frac{t}{\tau} \;\Rightarrow\; t = -\tau \cdot \ln(0{,}2)$

67 Auslaufbecken

a) –) $m \cdot \frac{dv}{dt} = -k \cdot v$

$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m} \cdot v$ *[Division durch m]*

$\frac{1}{v}\,dv = -\frac{k}{m}\,dt$ *[Trennen der Variablen]*

$\int \frac{1}{v}\,dv = -\frac{k}{m}\int dt$ *[Integrieren]*

$\ln(v) = -\frac{k}{m} \cdot t + C$ *[Entlogarithmieren]*

$v(t) = C \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t}$ *[allgemeine Lösung]*

–) $43{,}2\,\frac{km}{h} = 12\,\frac{m}{s}$, $13\,\frac{km}{h} = 3{,}611\ldots\,\frac{m}{s}$ *[$3{,}6\,\frac{km}{h} = 1\,\frac{m}{s}$]*

$v(0) = 12 \;\Rightarrow\; v(t) = 12 \cdot e^{-\frac{k}{75} \cdot t}$ *[Anfangswert einsetzen.]*

$v(3) = 3{,}611\ldots \;\Rightarrow\; 3{,}611\ldots = 12 \cdot e^{-\frac{k}{75} \cdot 3}$ *[Nach 3 Sekunden hat das Metallstück $13\,\frac{km}{h}$.]*

$k \approx 30{,}022\ldots\,\frac{kg}{s}$ *[Der TE-abhängige Befehl muss angegeben werden.]*

$\frac{k}{m} = 0{,}4\,s^{-1} \;\Rightarrow\; v(t) = 12 \cdot e^{-0{,}4 \cdot t}$ *[spezielle Lösung]*

b) –) $v(t) = 10 \cdot \underbrace{e^{-0{,}65 \cdot t}}_{\to 0}$

Für $t \to \infty$ geht der Term $e^{-0{,}65 \cdot t}$ gegen 0. Damit geht $v(t)$ gegen 0.

–) $s = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt$ bzw. $s = \int_{t_0}^{t_1} 10 \cdot e^{-0{,}65 \cdot t}\,dt$

–) Erreicht ein gleichartiges Metallstück das Auslaufbecken um zwei Sekunden später als das erste Metallstück, so wird dessen Geschwindigkeit w durch $w(t) = 10 \cdot e^{-0{,}65 \cdot (t-2)}$ beschrieben.

68 **Radioaktive Isotope**

a) –) $\frac{0{,}14\text{ kg}}{75\text{ kg}} \cdot 100 = 0{,}186...\ \%$

–) $140\text{ g} \cdot 0{,}0117 = 1{,}638\text{ g} = 1{,}638 \cdot 10^{-3}\text{ kg}$

b) –) $\frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N$ *[Die Masse nimmt beim radioaktiven Zerfall ab.]*

–) $\frac{1}{N}dN = -\lambda dt$ *[Trennen der Variablen]*

$\ln(N) = -\lambda \cdot t + \bar{C}$ *[Integrieren, Entlogarithmieren]*

$N(t) = C \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

–) $N(0) = 10 \Rightarrow N(t) = 10 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ *[Anfangswert einsetzen.]*

$N(0{,}5) = 9{,}72 \Rightarrow 9{,}72 = 10 \cdot e^{-\lambda \cdot 0{,}5}$ *[Nach 0,5 Jahren sind noch 9,72 ng Tritium vorhanden.]*

$\lambda = 0{,}056798...\ a^{-1}$ *[Der TE-abhängige Befehl muss angegeben werden.]*

$N(t) = 10 \cdot e^{-0{,}056798... \cdot t}$ *[Funktion des radioaktiven Zerfalls der Masse]*

$N(10) = 5{,}66663...\text{ ng}$ *[vorhandene Masse nach 10 Jahren]*

$m = N(0) - N(10) = 10 - 5{,}66663...$ *[m ... Masse an Tritium, die zerfallen ist]*

$m \approx 4{,}3\text{ ng}$

c) –) Die Achse ist logarithmisch skaliert. Der Ausdruck ln(0) ist nicht definiert.

–) Da der Graph in einem ordinatenlogarithmischen Koordinatensystem eine Gerade ist, ist die Funktion eine Exponentialfunktion.

–) $N(t) = 100 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ *[$N_0 = 100$ g ... Ausgangsmenge]*

$N(19\,000) = 10$ *[Ablesen des Punkts P(19 000|10)]*

$10 = 100 \cdot e^{-\lambda \cdot 19\,000}$ *[Einsetzen des Punkts P(19 000|10)]*

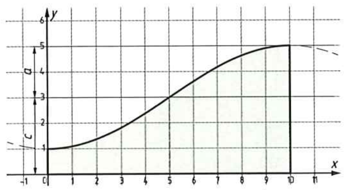
$\lambda = 0{,}000121188...\ a^{-1}$ *[Lösen nach λ]*

$N(t) = 100 \cdot e^{-0{,}000121188... \cdot t}$ *[Funktion des radioaktiven Zerfalls von C-14]*

–) Die Halbwertszeit beträgt rund 5 700 Jahre.

69 **Aluminiumzuschnitt**

a) –)

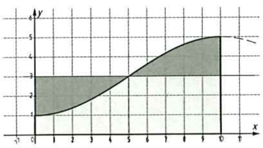


b) –) Beim Integrieren wurde mit der Ableitung der inneren Funktion multipliziert, statt durch die Ableitung der inneren Funktion zu dividieren.

Korrekte Integration:

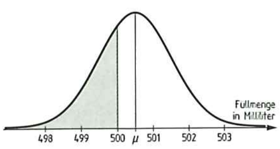
$$A = \int_0^{10} \left(-2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{10}x\right) + 3\right) dx = \left(-\frac{20}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{10}x\right) + 3x\right)\Big|_0^{10}$$

–)

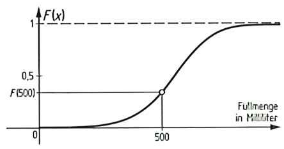


Da die beiden markierten Flächen gleich groß sind, lässt sich ein Rechteck mit den Seitenlängen 3 und 10 bilden. Der Flächeninhalt dieses Rechtecks beträgt $A = 3 \cdot 10 = 30\text{ cm}^2$.

c) –) Dichtefunktion:



Verteilungsfunktion:



–) $\bar{x} - u_{0{,}995} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + u_{0{,}995} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *[Die Standardabweichung ist bekannt, daher wird mit der Normalverteilung gerechnet.]*

$\bar{x} = 498{,}5$ mℓ; $\sigma = 1$ mℓ; $n = 8$ *[Der TE-abhängige Befehl muss angegeben werden.]*
$u_{0{,}995} = 2{,}575...$

Vertrauensbereich: [497,59 mℓ; 499,41 mℓ]

–) Der Erwartungswert $\mu = 500{,}5$ mℓ liegt nicht im Vertrauensbereich, daher hat sich der Erwartungswert mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % verändert.

70 Schiffsmotoren

a) –) Amplitude $A = 1{,}5$ m; $h_0 = 1{,}5$ m *[Ablesen der Parameter aus dem Funktionsgraphen]*

Periode $T = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8\text{s}^{-1}$ ... Kreisfrequenz

Nullphasenwinkel φ: $t_0 = \frac{\pi}{16}$ *[Verschieben um $\frac{1}{4}$ der Periode T nach rechts]*

$0 = \omega \cdot t_0 + \varphi \Rightarrow \varphi = -\omega \cdot t_0 = -8 \cdot \frac{\pi}{16} = -\frac{\pi}{2}$

$h(t) = 1{,}5 \cdot \sin\left(8 \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) + 1{,}5$ *[Gleichung der Funktion h]*

b) –) $v(t) = \frac{dy}{dt} = 4{,}25\pi \cdot \cos(3{,}4\pi \cdot t)$ *[Die Ableitung von y ist die Funktion v der Geschwindigkeit.]*

–) Ein negativer Wert für die Geschwindigkeit bedeutet, dass sich der Kolben nach unten bewegt.

–) $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3{,}4\pi\ \text{s}^{-1}}{2\pi} = 1{,}7\ \text{s}^{-1}$; $n = 60 \cdot f = 102\ \text{min}^{-1}$

c) –) $\bar{x} = 14\,380{,}5\,\frac{\text{L}}{\text{h}}$; $s = 18{,}928...\,\frac{\text{L}}{\text{h}}$ *[Der TE-abhängige Befehl muss angegeben werden.]*

–) $\bar{x} - t_{5;\,0{,}975} \cdot \frac{s}{\sqrt{6}} \leq \mu \leq \bar{x} - t_{5;\,0{,}975} \cdot \frac{s}{\sqrt{6}}$ *[Standardabweichung unbekannt, Verwendung der*

$t_{5;\,0{,}975} = 2{,}570...$ *t-Verteilung: $n = 6$; $f = n - 1 = 5$; $1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975$]*

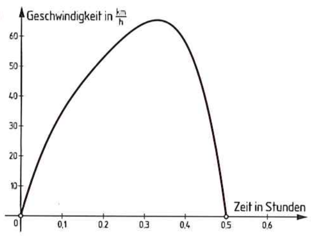
Vertrauensbereich: $[14\,360{,}6\,\frac{\text{L}}{\text{h}};\ 14\,400{,}4\,\frac{\text{L}}{\text{h}}]$

d) –) $y = -0{,}000008x^2 + 0{,}053x + 12{,}82$ *[Der TE-abhängige Befehl muss angegeben werden.]*

x ... n, y ... M

71 Beton-Transport

a) –) $\bar{a} = \left(\frac{\frac{60}{3{,}6} - \frac{35}{3{,}6}}{0{,}25 \cdot 3\,600 - 0{,}1 \cdot 3\,600}\right) = 0{,}01286...\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ *[Für die mittlere Beschleunigung gilt: $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$]*

–) 

–) $v(0{,}25) = 60{,}058...\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Betrag des relativen Fehlers: $\left|\frac{v - v_0}{v_0}\right| = \left|\frac{60{,}058... - 60}{60}\right| = 0{,}000976... \approx 0{,}098\ \%$

b) –) $v'(t) = -35\,428t^3 + 20\,886t^2 - 4\,612t + 520$ *[Die maximale Geschwindigkeit wird im Hochpunkt der Geschwindigkeitsfunktion erreicht.]*
$v'(t) = 0$

mit TE lösen: $t = 0{,}329... \approx 0{,}33$ h *[Der TE-abhängige Befehl muss angegeben werden.]*

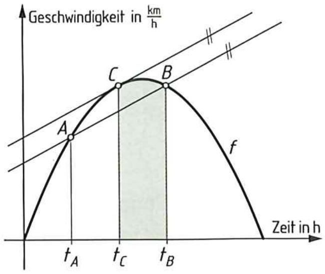
$v''(t) = -106\,284t^2 + 41\,772t - 4\,612$ *[Die Überprüfung des Hochpunkts erfolgt mithilfe der zweiten Ableitung.]*
$v''(0{,}329...) = -2\,393{,}875... < 0 \Rightarrow$ Maximum

Das Fahrzeug erreicht die maximale Geschwindigkeit nach 0,33 h.

c) –) Die Steigung der Geraden durch A und B gibt die mittlere Beschleunigung im Intervall $[t_A; t_B]$ an.

–) Die Steigung der Tangente an der Stelle t_C gibt die momentane Beschleunigung zum Zeitpunkt t_C an. Aufgrund der Parallelität ist diese momentane Beschleunigung gleich der mittleren Beschleunigung in $[t_A; t_B]$.

–) $s = \int_{t_C}^{t_B} v(t)\,\mathrm{d}t$ *[Der zurückgelegte Weg zwischen zwei Zeitpunkten ist das bestimmte Integral der Geschwindigkeitsfunktion.]*

–) 

72 **CNC-Drehteile**

a) –) $f_1(x) = 30 + x$ für $-20 \leqslant x \leqslant -10$; $f_3(x) = 10$ für $20 < x \leqslant 30$

–) $f_2(x) = ax^2 + bx + c$, $f_2'(x) = 2ax + b$

$f_2(-10) = 20$	I:	$100a - 10b + c = 20$	*[Punkt auf Kurve]*
$f_1'(-10) = f_2'(-10) = 1$	II:	$-20a + b = 1$	*[Steigungen sind gleich]*
$f_2(20) = 10$	III:	$400a + 20b + c = 10$	*[Punkt auf Kurve]*

–) $$\begin{pmatrix} 100 & -10 & 1 \\ -20 & 1 & 0 \\ 400 & 20 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

–) Zum Ermitteln des größten Außendurchmessers kann entweder das Maximum der Funktion f_2 mithilfe der Differentialrechnung berechnet werden oder die y-Koordinate des Scheitels wird durch Umformung der Funktionsgleichung auf die Scheitelgleichung ermittelt. Der Funktionswert am Maximum entspricht dem Radius. Um den Durchmesser zu erhalten, muss dieser Wert noch verdoppelt werden.

b) –) $V_x = \pi \int_{-20}^{30} y^2\,\mathrm{d}x = 32\,537{,}923\ldots\ \mathrm{mm}^3 \approx 33\ \mathrm{cm}^3$

c) –) $P(458{,}2 \leqslant X \leqslant 461{,}8) \geqslant 95\ \%$

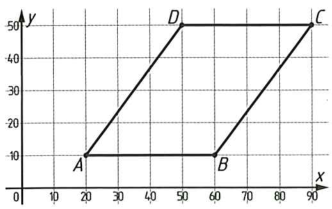
$P(X \leqslant 461{,}8) \geqslant 97{,}5\ \%$

$\frac{461{,}8 - 460}{\sigma} \geqslant u_{0{,}975}$ *[Standardisierungsformel verwenden]*

$\sigma \leqslant \frac{1{,}8}{u_{0{,}975}} = \frac{1{,}8}{1{,}959\ldots} = 0{,}918\ldots$ *[$u_{0{,}975} = 1{,}959\ldots$ mit Technologie berechnen]*

Die Standardabweichung darf maximal 0,9 g betragen.

73 **Stahlplatten**

a) –) 

–) $B(60|10)$

–) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CD}$ korrekt: $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{DC}$ *[$\overrightarrow{CD}$ hat nicht die gleiche Orientierung wie $\overrightarrow{DC}$]*

–) $\sphericalangle ADC = \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix} -30 \\ -40 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{30^2 + 40^2} \cdot 40}\right) \approx 126{,}87°$ *[Winkel zwischen 2 Vektoren: $\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ mit $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{DC}$]*

b) –) g: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AC}$ $\quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 70 \\ 40 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ *[Parameterdarstellung einer Geraden]*

g: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ *[Für den Richtungsvektor ist auch jeder Vektor, der ein Vielfaches von $\overrightarrow{AC}$ ist, möglich.]*

–) $\overrightarrow{AC_0} = \frac{1}{\sqrt{70^2 + 40^2}} \cdot \begin{pmatrix} 70 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}868... \\ 0{,}496... \end{pmatrix}$ *[$\overrightarrow{AC_0}$ ... Einheitsvektor von $\overrightarrow{AC}$]*

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + 5 \cdot \overrightarrow{AC_0} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4{,}341... \\ 2{,}480... \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24{,}341... \\ 12{,}480... \end{pmatrix}$

Punkt $P(24{,}34|12{,}48)$

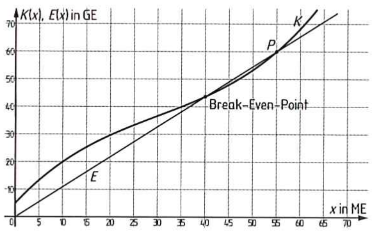
c) –) $|\overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{DA}| = 40$

$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OD} + 40 \cdot \overrightarrow{DA_0} = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix} + 40 \cdot \frac{1}{\sqrt{30^2 + 40^2}} \cdot \begin{pmatrix} -30 \\ -40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 18 \end{pmatrix}$

$A'(26|18)$

d) –) Fixkosten: 5 GE *[Schnittpunkt mit der senkrechten Achse]*

–) Die Kostenkehre entspricht der Wendestelle der Kostenfunktion, also der Lösung der Gleichung: $K''(x) = 0$

–) 

–) $E(x) = p \cdot x$ *[Erlös = Preis · Menge]*

$60 = p \cdot 55$ *[Die Erlösfunktion verläuft durch den Punkt P(55|60).]*

$p = \frac{60}{55} = \frac{12}{11}$

$E(x) = \frac{12}{11} \cdot x$

74 Drohnen

a) –) 1B, 2D

b) –) $y(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2$ *[Berechnung der Nullstellen zum Ermitteln der Integrationsgrenzen.]*

$A = 4 \cdot \int_{-2}^{0} \left(-2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)\right) dx$ *[Aus Symmetriegründen genügt es, den Flächeninhalt zwischen der Funktion und der x-Achse im 2. Quadranten zu ermitteln und mit 4 zu multiplizieren.]*

$A = 10{,}1859...\ \text{dm}^2$ *[Der TE-abhängige Befehl muss angegeben werden.]*

c) –) $b_n = 4 \cdot 0{,}745^{n-1}$ *[Um 25,5 % kleiner: $q = 1 - 0{,}255 = 0{,}745$]*

–) $s_5 = 4 \cdot \frac{1 - 0{,}745^5}{0{,}255} = 12{,}08...\ \text{dm}$ *[Summe der endlichen geometrischen Reihe: $s_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$]*

$12{,}08...\ \text{dm} < 1{,}3\ \text{m}$

Alle fünf Drohnen finden in der Transportkiste Platz.

–) $S = \frac{4}{0{,}255} = 15{,}68...\ \text{dm} \approx 1{,}57\ \text{m}$ *[Summe der unendlichen geometrischen Reihe: $S = b_1 \cdot \frac{1}{1-q}$]*

Der Innenraum der Transportkiste muss mindestens eine Länge von rund 1,57 m aufweisen.

75 **Straßenverkehr**

a) –) $\overline{v} = \frac{3}{0{,}1} = 30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ *[Für die mittlere Geschwindigkeit gilt: $\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$; 6 min = 0,1h]*

–) Am Ende der Fahrt ist die Steigung 0, also die Geschwindigkeit 0. Das Auto bleibt stehen.

b) –) $100 = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad |\,:10$

$10 = \lg\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad |\,\wedge 10$

$10^{10} = \frac{I}{I_0}$

$I = 10^{10} \cdot I_0 = 10^{10} \cdot 10^{-12} = 10^{-2}$

Die Schallintensität beträgt $0{,}01\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$.

–) $L_n = 10 \cdot \lg\left(\frac{n \cdot I}{I_0}\right) = 10 \cdot \lg(n) + \underbrace{10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)}_{L} =$ *[Anwenden der Rechenregel: $\lg(a \cdot b) = \lg(a) + \lg(b)$]*

$= 10 \cdot \lg(n) + L$ *[$L = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$ Schallpegel für eine Schallquelle]*

c) –) $y = 497{,}783x - 948\,928{,}901$
[Die Ermittlung der Regressionsgeraden mit entsprechender Technologie muss angegeben werden.]

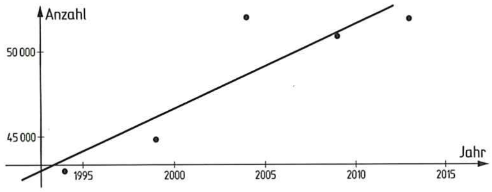
–) $r = 0{,}8936$

–) $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

$\frac{51\,896 - 50\,883}{2\,013 - 2\,009} = \frac{y - 50\,880}{2\,010 - 2\,009}$

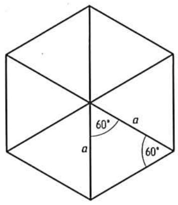
$y = 51\,133{,}25 \approx 51\,133$

Im Jahr 2010 betrug die Anzahl der Autos rund 51 133.

–)


76 **Koffein**

a) –) Das Sechseck kann in sechs gleichschenklige Dreiecke geteilt werden. Da ein Winkel gleich 360° : 6 = 60° ist, sind auch die beiden anderen Winkel gleich 60°. Jeder Innenwinkel ist somit gleich 2 · 60° = 120°.



b) –) $y(t) = 102{,}41 \cdot e^{-0{,}205 \cdot t}$ *[Der TE-abhängige Befehl muss angegeben werden.]*

t … Zeit in Stunden nach der Einnahme

$y(t)$ … Koffeinmenge nach t Stunden in $\frac{\text{mg}}{\text{L}}$

–) $y(5) = 102{,}41 \cdot e^{-0{,}205 \cdot 5} = 36{,}744\ldots < 40$

c) –) $\overline{x} = 5{,}92$ g und $s \approx 0{,}336$ g *[Der TE-abhängige Befehl muss angegeben werden.]*

–) $\overline{x} - t_{9;\,0{,}975} \cdot \frac{s}{\sqrt{10}} \leq \mu \leq \overline{x} - t_{9;\,0{,}975} \cdot \frac{s}{\sqrt{10}}$ *[Die Standardabweichung ist unbekannt, daher wird mit der t-Verteilung gerechnet:*

$t_{9;\,0{,}975} = 2{,}262\ldots$

Konfidenzintervall: [5,68 g; 6,16 g] *$n = 10$; $f = n - 1 = 9$; $1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975$]*

d) –) $k = \frac{182 - 122}{80 - 20} = \frac{160}{60} = \frac{8}{3}$

$22 = \frac{8}{3} \cdot 20 + d \Rightarrow d = \frac{94}{3}$

$W(\vartheta) = \frac{8}{3} \cdot \vartheta - \frac{94}{3}$

–) $100 = \frac{8}{3} \cdot \vartheta - \frac{94}{3} \Rightarrow \vartheta = 49{,}25$ °C *[Der TE-abhängige Befehl muss angegeben werden.]*

Das Wasser sollte eine (Mindest-)Temperatur von 49,25 °C haben.

Lösungen

77 Förderpumpen

a) –) Mithilfe dieser Gleichung wird berechnet, wie lang die Pumpe P_1 allein zur Förderung der gewünschten Ölmenge braucht.

–) $$V = \frac{400}{60} \cdot \left(\frac{V}{t} + \frac{V}{t-3}\right) \qquad | : V$$

$$1 = \frac{20}{3} \cdot \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-3}\right) \qquad | \cdot 3t \cdot (t-3)$$

$$3t \cdot (t-3) = 20t - 60 + 20t$$

$$3t^2 - 49t + 60 = 0$$

–) mit TE lösen: *[Der TE-abhängige Befehl muss angegeben werden.]*

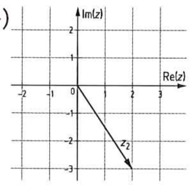
$t_1 = 15 \quad \left(t_2 = \frac{4}{3}\right)$ *[Lösung $t_2 < 3$ ist nicht möglich.]*

P_1 braucht alleine 15 Stunden, P_2 braucht alleine 12 Stunden.

b) –) $(2 + 3j)^2 - 4 \cdot (2 + 3j) + 13 = 0$ *[Einsetzen von z_1 bzw. z_2 in die Gleichung.]*

$$4 + 12j - 9 - 8 - 12j + 13 = 0$$
$$0 = 0$$

$$(2 - 3j)^2 - 4 \cdot (2 - 3j) + 13 = 0$$
$$4 - 12j - 9 - 8 + 12j + 13 = 0$$
$$0 = 0$$

–) 

–) $r = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$, $\varphi = \arctan\left(-\frac{3}{2}\right) + 360° = 303{,}69°$ *[z_2 liegt im 4. Quadranten.]*

$z_2 = (\sqrt{13}; 303{,}69°) = \sqrt{13}\,\underline{/303{,}69°} = \sqrt{13} \cdot (\cos(303{,}69°) + j \cdot \sin(303{,}69°)) = \sqrt{13} \cdot e^{j \cdot 5{,}3}$

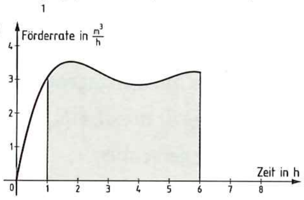
–) Das Produkt konjugiert komplexer Zahlen ist reell, da $j^2 = -1$ und daher $a^2 - j^2b^2 = a^2 + b^2$ gilt.

c) –) $f(t) = -0{,}0338t^4 + 0{,}518t^3 - 2{,}688t^2 + 5{,}31t$

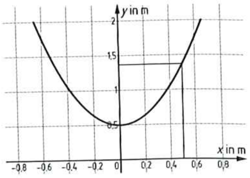
$f'(t) = -0{,}1352t^3 + 1{,}554t^2 - 5{,}376t + 5{,}31$ *[Berechnen der ersten Ableitung.]*

Bei der 1. Ableitung handelt es sich um eine Polynomfunktion 3. Grads, damit kann es maximal 3 Extrempunkte geben. Da der Koeffizient von t^4 negativ ist, sind zwei davon Maxima.

–) $V = \int_1^6 f(t)\,dt = 15{,}428... \approx 15{,}4\ m^3$

–) 

78 **Rotierendes Gefäß**



a) –) Trägt man in der Grafik eine senkrechte Gerade bei $x = 0{,}5$ ein, so erkennt man, dass die y-Koordinate des Schnittpunkts dieser Geraden mit der Parabel kleiner als 1,5 ist. Daher schwappt der Treibstoff nicht aus dem Gefäß.

b) –) $V = V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Paraboloid}}$

$$V_{\text{Paraboloid}} = \int_{y_0}^{h} [r(y)]^2 \, dy$$

$$y = \frac{\omega^2}{2g} \cdot r^2 + y_0$$

$$y - y_0 = \frac{\omega^2}{2g} \cdot r^2$$

$$r^2 = \frac{(y - y_0) \cdot 2g}{\omega^2}$$

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h - \pi \cdot \int_{y_0}^{h} \frac{(y - y_0) \cdot 2g}{\omega^2} \, dy$$

[Rotationsvolumen bei Drehung um die y-Achse: $V_y = \pi \cdot \int_c^d x^2 \, dy$]

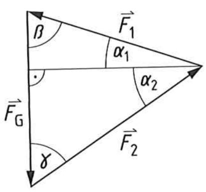
–) $2 = \frac{10^2}{20} \cdot r^2 + 0{,}05 \implies r = 0{,}624...$

Das Gefäß sollte einen Durchmesser von mindestens 1,25 m haben.

c) –) $\vec{M} = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix}$

$M = |\vec{M}| = 18$ kNm

d)



–) $\alpha_1 = \arctan\left(\frac{0{,}5}{1{,}5}\right) = 18{,}434...°$; $\beta = 71{,}565...°$

$\alpha_2 = \arctan\left(\frac{1}{1{,}5}\right) = 33{,}690...°$; $\gamma = 56{,}309...°$

$$F_1 = \frac{\sin(\gamma) \cdot F_G}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \approx 73{,}8 \text{ N}$$

$$F_2 = \frac{\sin(b) \cdot F_G}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \approx 84{,}1 \text{ N}$$

79 **Tumorwachstum**

a) –) B

b) –) $y = 137{,}21 - 14{,}73 \cdot t$
t … Zeit in Stunden
y … Aktivität in MBq

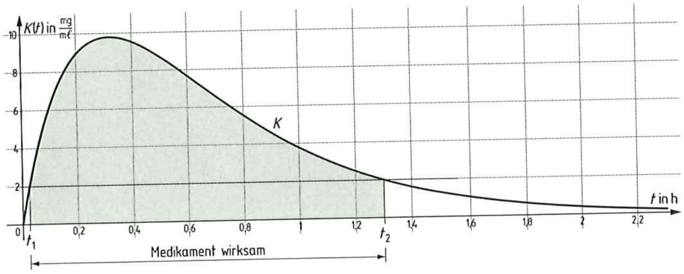
[Der TE-abhängige Befehl muss angegeben werden. Technologieabhängige Abweichungen sind möglich.]

–) $r \approx -0{,}984$; spricht für einen starken linearen Zusammenhang, die Gerade ist fallend; dies bedeutet eine Abnahme der Aktivität.

–) Betrag des relativen Fehlers:

$\left|\frac{95{,}95 - 96{,}6}{96{,}6}\right| = 0{,}0067... \approx 0{,}7\ \%$ *$\left[\left|\frac{\text{Istwert} - \text{Sollwert}}{\text{Sollwert}}\right|\right]$*

c) –)



–) $\overline{K} = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} K(t) \, dt$ *[linearer Mittelwert der Funktion K]*

Dieses Übungsheft dient der Vorbereitung auf Teil B der standardisierten Reife- und Diplomprüfung an Höheren technischen Lehranstalten für Cluster HTL 2.

www.hpt.at

Mathe mit techn. Anw. Vorb. RDP CL. 2
Schulbuchnummer: 180006
ISBN 978-3-230-04276-7
Wien, 1. Auflage

Alle Drucke der 1. Auflage können im Unterricht nebeneinander verwendet werden.

9 783230 042767

hpt