5. Kinematik (Bewegungslehre)

5.1 Ruhe und Bewegung

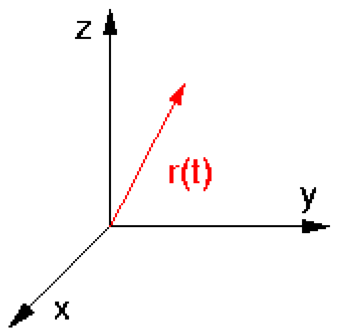
In der Kinematik werden die Größen, die zur Beschreibung von Bewegungen notwendig sind, definiert und deren mathematischen Beziehungen festgelegt. Die Ursachen von Bewegungsänderungen werden nicht untersucht.
Körper werden idealisiert als Massenpunkte aufgefasst, d.h. sie haben zwar endliche Masse, aber keine Ausdehnung (Grund: Vereinfachung. Man braucht sich um Effekte der Ausdehnung nicht kümmern. Abstraktion der Wirklichkeit!)

Die ganze Masse eines Massenpunktes (Punktmasse, Teilchen) ist in einem einzigen Punkt vereinigt.

Frage: Welches Volumen hat ein Massenpunkt? (V = 0)

Koordinatensystem: dient der Positions- und Ortsbestimmung. Die Lage eines Massenpunktes wird durch Angabe von Koordinaten in diesem KS festgelegt.

Ein kartesisches KS wird durch die Angabe eines Nullpunktes (Ursprung) und dreier aufeinander senkrechter Achsen durch den Ursprung definiert (3 Finger Regel der rechten Hand: Daumen: x-Achse, Zeigefinger: y-Achse, Mittelfinger: z-Achse).
Die Koordinaten des Ortes werden durch senkrechte Projektion (Normalprojektion) der Verbindung Ursprung – Massenpunkt auf die einzelnen Achsen bestimmt.
Die Koordinaten sind die senkrechten Abstände von den Flächen, die durch die Achsen aufgespannt werden (z-Koordinate: Abstand von durch x- und y-Achse aufgespannten Ebene).
Diese Koordinaten bestimmen die Lage eines Punktes eindeutig. Die Ebene ist 2-dimensional (2 Koordinaten), der Raum 3-dimensional (3 Koordinaten).
Ein Punkt A wird somit im Raum durch seine Koordinaten (a_x, a_y, a_z) beschrieben.



Beispiel: Ecke des Klassenraumes, Position eines Stuhles (Maßband!)

Vektoren:
In der Physik gibt es Größen, bei denen nicht nur ein Betrag, sondern auch eine Richtung angegeben werden muss, um diese Größe hinreichend zu bestimmen (gerichtete Größen, vektorielle Größen). Z.B. reicht es nicht, den Betrag einer Geschwindigkeit anzugeben, man muss zur eindeutigen Beschreibung auch die Richtung der Geschwindigkeit anführen.

Physikalische Größen, die sowohl einen Betrag als auch eine Richtung haben, heißen Vektoren. Die Einheit einer vektoriellen Größe ist die Einheit des Betrags des Vektors.

Skizze: Vektor als Pfeil darstellen, Richtung und Betrag vorzeigen. Verschiedene Vektoren mit gleicher Richtung, aber unterschiedlicher Länge und verschiedene Vektoren mit gleicher Länge, aber unterschiedlicher Richtung. Die Länge des Pfeils entspricht dem Betrag des Vektors, die Richtung des Pfeils der Richtung des Vektors.

Symbolisch: Zeichen mit Pfeil: $\vec{V}$. Ein Vektor wird durch 3 Komponenten im Raum (3 dimensional) dargestellt $\vec{V} = (v_x, v_y, v_z)$, durch 2 in der Ebene und durch 1 in einer eindimensionalen Linie.

Unter dem Betrag (der Länge) eines Vektors versteht man nach dem Satz von Pythagoras:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Beispiel: Durch Angabe eines Anfangspunktes $A = (a_x, a_y, a_z)$ und eines Endpunktes $B = (b_x, b_y, b_z)$ wird ein Vektor definiert, der die Richtung von A nach B hat und den Betrag des Abstandes zwischen den beiden Punkten hat. Die Komponenten des Vektors ergeben sich zu

$$\vec{AB} = \vec{V} = (v_x, v_y, v_z) = (b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z)$$

(Der Richtungsvektor $\vec{AB}$ ist der Vektor von A nach B.)

Beispiel: A=(2,2), B=(4,3), $\vec{AB} = (2,1)$, $\vec{BA} = (-2,-1)$

Ein negatives Vorzeichen bedeutet in Richtung der negativen Halbachse.)

Ein Vektor gibt die gegenseitige Lage (die Richtung und den Abstand) zwischen zwei Punkten an.

Nimmt man als Anfangspunkt den Ursprung, so nennt man diesen Vektor den **Ortsvektor** des Punktes B.
Der Ortsvektor gibt die Position eines Punktes vom Nullpunkt aus an.

Ein Vektor beschreibt die gerichtete Differenz der Orte, die ja eine Richtungsangabe ist. Ein und derselbe Vektor beschreibt die Differenz zwischen vielen verschiedenen Punkten. (Eine Geschwindigkeit kann mit demselben Vektor von verschieden Punkten ausgehen. Position und Geschwindigkeit sind unabhängig von einander.)
Allerdings gibt es zu jedem Anfangspunkt nur einen einzigen Endpunkt, mit dem dann die Ortsdifferenz durch diesen Vektor beschrieben ist.

Beispiel: Richtungsumkehr eines Vektors $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -v_x \\ -v_y \end{pmatrix}$.

Eindimensional: $v \to -v$

Physikalische Größen, die einzig und allein durch ihren Betrag (einen einzigen Wert!) bestimmt sind, heißen Skalare.

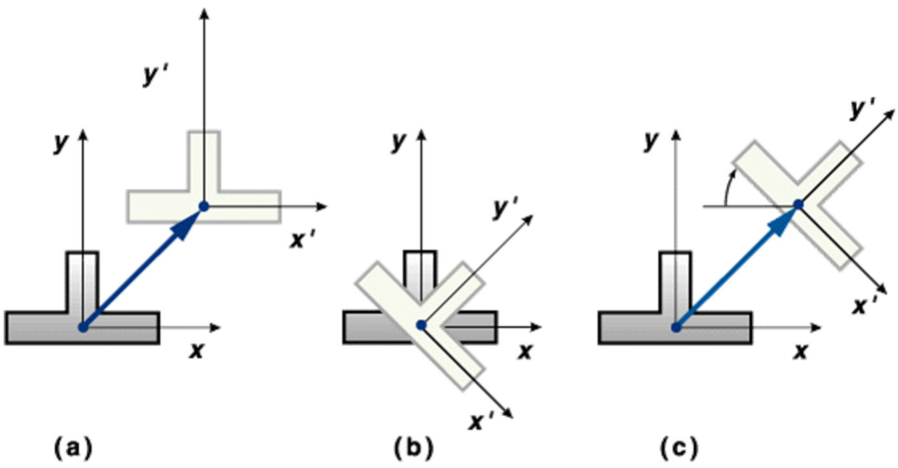
<u>Bezugssystem:</u> dient zur Beschreibung von Positionsänderungen, d.h. Bewegungen.

Bewegungen sind zeitliche Ortsänderungen.
Ein Bezugssystem ist ein KS, in dem eine Bewegung beschrieben wird.

Ohne Angabe eines Bezugssystems ist die Beschreibung einer Bewegung sinnlos.
Jede Bewegung erfolgt relativ zu einem als ruhend angenommenen Bezugssystem.
Eine absolute Bewegung (d.h. von einem Bezugssystem unabhängige Bewegung) gibt es nicht!

Beispiel: Geschwindigkeit eines in einem Zug ruhenden Gegenstandes in Bezug zu einem Mitreisenden und eines Beobachters auf dem Bahnsteig.

Eine Bewegung im physikalischen Sinn ist eine Lageänderung in einem Bezugssystem im Laufe der Zeit.



Es gibt 2 grundsätzlich verschiedene Bewegungsarten:

Bei **der Translation (fortschreitenden Bewegung)** legen alle Punkte eines Körpers in der gleichen Zeit die gleiche Strecke in die gleiche Richtung zurück (Parallelverschiebung) (in Abbildung (a)).

Bei **der Rotation (Drehbewegung)** drehen sich alle Punkte eines Körpers in der gleichen Zeit um den gleichen Winkel um eine gemeinsame Achse (Drehachse) (in Abbildung (b)).

Frage:
- Welche Bahnen beschreiben die Punkte eines Körpers bei der Rotation? (Kreisbahnen)

Beispiel:
- Rotation eines ausgedehnten Körpers um eine Achse **innerhalb** des Körpers. (Beispiel: Dreieck.)
- Rotation eines ausgedehnten Körpers um eine Achse **außerhalb** des Körpers. (Beispiel: Dreieck. Vergleiche die Winkel, die die einzelnen Eckpunkte des Dreiecks zurücklegen; sie sind gleich – Rotation!)
- Translation eines ausgedehnten Körpers auf einer Kreisbahn um eine Achse außerhalb des Körpers. (Beispiel: Dreieck. Vergleiche die Winkel, die die einzelnen Eckpunkte des Dreiecks zurücklegen; sie sind nicht gleich – keine Rotation!)
- Förderband: Translation der darauf liegenden Gegenstände

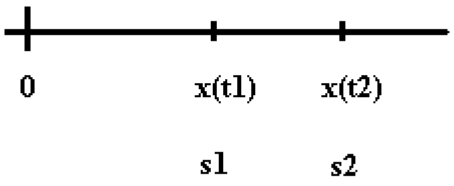
Frage:
- Machen Rotationen eines Massenpunktes um eine Achse **innerhalb** des Körpers Sinn? (Nein – Massenpunkte haben keine Ausdehnung).
- Ist eine Kreisbewegung eines Massenpunktes um eine Achse eine Translation oder eine Rotation? (Beides - Massenpunkte haben keine Ausdehnung).

Viele Bewegungen sind Zusammensetzungen aus Translationen und Rotationen.

Jede Bewegung eines ausgedehnten Körpers kann zerlegt werden in eine Translations- und eine Rotationsbewegung. (Beispiel in Abbildung (c).)

Die Bewegung (der Bewegungszustand) eines Körpers wird durch die physikalische Größe seiner Geschwindigkeit beschrieben. Die Geschwindigkeit ist ein Vektor und hat daher Richtung und Betrag (= Geschwindigkeitsbetrag, Schnelligkeit). Bewegt sich ein Körper nur auf einer festgelegten Linie, dann spricht man von einer eindimensionalen Bewegung und benötigt zu deren Beschreibung nur eine einzige Komponente.

Skizze: Bewegung eines Punktes auf einer Geraden in der Zeit t_1 bis t_2 zwischen den Orten $x(t_1)$ und $x(t_2)$. Damit Erklärung der folgenden Definition.



$$Geschwindigkeit = \frac{Zurückgelegter\ Weg}{benötigte\ Zeit}$$

$$v = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

$$Geschwindigkeit = \frac{Weg}{Zeit}$$

$$v = \frac{s}{t} \text{ (wenn } s_1 = 0,\ t_1 = 0\text{)}$$

$$[v] = 1\frac{m}{s}$$

$$1\frac{m}{s} = 3{,}6 \cdot \frac{km}{h}$$

$$1\frac{km}{h} = \frac{1}{3.6}\frac{m}{s}$$

$$\text{Vektoriell: } \vec{v} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$

Beachte, dass x und s mit der gleichen Bedeutung verwendet werden! Mit x betont man die x-Koordinate, mit s den zurückgelegten Weg. Nicht am Buchstaben hängen bleiben, sondern flexibel sein!

Beispiel: $\mathrm{t_1 = 5s}$, $\mathrm{t_2 = 15s}$, $\mathrm{x(5s) = 30m}$, $\mathrm{x(15s) = 60m}$. Die Geschwindigkeit beträgt daher $\mathrm{v = \frac{60m - 30m}{15s - 5s} = 3\frac{m}{s}}$.

Beachte, dass die Geschwindigkeit auch negative Werte annehmen kann. Nämlich dann, wenn $x(t_2) < x(t_1)$ ist. Das ist eine Bewegung entgegen der Richtung der positiven x-Achse, im gewissen Sinne „ein Rückwärtsfahren“.

Beispiel: $\mathrm{t_1 = 5s}$, $\mathrm{t_2 = 15s}$, $\mathrm{x(5s) = 60m}$, $\mathrm{x(15s) = 30m}$. Die Geschwindigkeit beträgt daher $\mathrm{v = \frac{30m - 60m}{15s - 5s} = -3\frac{m}{s}}$.

Vektoriell gilt: $\vec{v} = \frac{\vec{x}(t_2) - \vec{x}(t_1)}{t_2 - t_1} = \left(\frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}, \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1}, \frac{z(t_2) - z(t_1)}{t_2 - t_1}\right)$

5.2 Die geradlinig gleichförmige Bewegung

Eine Geschwindigkeit, deren Betrag und Richtung konstant (zeitlich unveränderlich) sind, beschreibt eine geradlinig gleichförmige Bewegung.

$$\boxed{\vec{v} = const}$$

Dabei werden in **gleichen** Zeiten **gleiche** Strecken in die **gleiche** Richtung zurückgelegt. Das Wort geradlinig beschreibt die konstante Richtung des Vektors, das Wort gleichförmig den konstanten Betrag.

Beispiel: Ein Autofahrer benötigt für eine Strecke von 240 km 4 Stunden. Seine Geschwindigkeit beträgt daher 60 km / h.
Natürlich ist die Geschwindigkeit des Autos über diese Strecke nicht andauernd die gleiche. Seine Geschwindigkeit ist nicht konstant und seine Bewegung daher nicht gleichförmig. Aber dieser Wert gibt seine durchschnittliche Geschwindigkeit (Durchschnittsgeschwindigkeit) an.

Die Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v}$ ist jene konstante Geschwindigkeit, die ein Körper haben müsste, um in der gleichen Zeit den gleichen Weg wie in Wirklichkeit zurückzulegen.

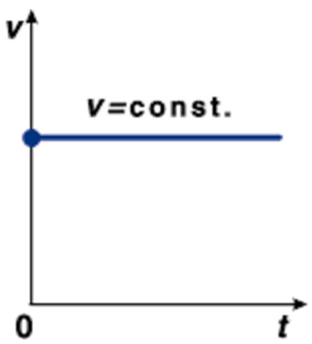
$$\boxed{\text{Durchschnittsgeschwindigkeit } \bar{v} = \frac{Gesamtweg}{Gesamtzeit}}$$

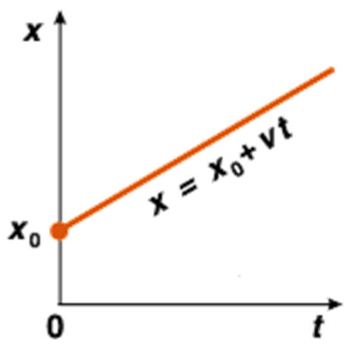
Die tatsächliche aktuelle Geschwindigkeit heißt Momentangeschwindigkeit.

$$\boxed{\text{Momentangeschwindigkeit } v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}}$$

Beachte: Wir betrachten meist die Durchschnittsgeschwindigkeit.

Darstellung der gleichförmigen Bewegung:





v - t Diagramm: Die Geschwindigkeit ist konstant. Einzeichnen einzelner Punkte und verbinden zu einer achsparallelen Geraden (z.B. 2 m/s).
Die Fläche unter der Geschwindigkeitskurve ist der zurückgelegte Weg ($s(t) = v \cdot t$).

Beachte, dass $s(t) = v \cdot t$ nur für konstante Geschwindigkeiten gilt! Dass die Fläche unter der Geschwindigkeitskurve der zurückgelegte Weg ist, gilt jedoch immer!

<u>s - t Diagramm:</u> zu obigen Beispielen mit Anfangswert $s_0 = 0$. Je steiler die Gerade, desto höher die Geschwindigkeit.

Für den Ort (die Position) bei der gleichförmigen Bewegung gilt:

$$x(t) = v \cdot t + x_0 = s + x_0$$
$x_0 = x(0)$ ... Anfangsort
$x(t) = v \cdot t$ für $x_0 = 0$

Für die zurückgelegte Wegstrecke s bei der gleichförmigen Bewegung gilt:

$$s(t) = v \cdot t$$

Beispiele:

- Welche Strecke legt ein Projektil mit v = 500m/s in 10 s zurück? (5000m)
- Wie lange braucht diese Projektil für 250m? (0,5s)
- Ein Radfahrer fährt 30min mit $20km/h$ und 20min mit $15km/h$. Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeit und zeichne das v-t-Diagramm und das s-t-Diagramm.
  $(\bar{v} = \dfrac{\frac{20km}{2} + \frac{15km}{3}}{\frac{5}{6}h} = 18\dfrac{km}{h})$
- Ein Autofahrer fährt 10 min mit 80 km/h und dann 15 min mit 65 km/h. Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit? Zeichne das v-t- und das s-t-Diagramm! $(\bar{v} = \dfrac{\frac{80km}{6} + \frac{65km}{4}}{\frac{25}{60}h} = 71\dfrac{km}{h})$
  $(s_1 = 13,\dot{3}km \quad s_2 = 16{,}25km)$
- Ein Körper bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v = 10\dfrac{m}{s}$ von der Stelle $x = 100m$ für 20 Sekunden weg. (Skizze!) Berechne seinen Ort am Ende der Bewegung.
  $(x(t) = v \cdot t + x_0 = 200m + 100m = 300m)$
- Beispiel in 2 Dimensionen:

$$\vec{x}(t_2) = \begin{pmatrix} 2cm \\ 3cm \end{pmatrix} \qquad \vec{x}(t_1) = \begin{pmatrix} 1cm \\ 1cm \end{pmatrix} \qquad t_1 = 12h27\min 30s \qquad t_2 = 12h27\min 50s$$

$$\rightarrow \qquad \vec{v} = \frac{\begin{pmatrix} 1cm \\ 2cm \end{pmatrix}}{20s} = \begin{pmatrix} 0{,}05cm/s \\ 0{,}1cm/s \end{pmatrix} \qquad v = \frac{\sqrt{5}}{20s} = 0{,}11m/s$$

5.3 Die gleichmäßig beschleunigte, geradlinige Bewegung

Wird die Geschwindigkeit mit der Zeit größer, dann heißt die Bewegung beschleunigt.
Wird die Geschwindigkeit mit der Zeit kleiner, dann heißt die Bewegung verzögert (negativ beschleunigt).

Eine Beschleunigung im physikalischen Sinn ist eine zeitliche Bewegungsänderung in einem Bezugssystem.

Eine Geschwindigkeit, deren Richtung zwar konstant ist, aber deren Betrag veränderlich ist, beschreibt eine beschleunigte, geradlinige Bewegung.

$$Beschleunigung = \frac{Geschwindigkeitsänderung}{benötigte\ Zeit}$$

$$a = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

$$Beschleunigung = \frac{Geschwindigkeit}{Zeit}$$

$$a = \frac{v}{t} \text{ (wenn } v_1 = 0,\ t_1 = 0\text{)}$$

$$[a] = 1\frac{m}{s^2} = 1ms^{-2}$$

$$\text{Vektoriell: } \vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

Beachte, dass die Beschleunigung auch negative Werte annehmen kann. Nämlich dann, wenn $v(t_2) < v(t_1)$ ist. Das ist eine Verringerung der Geschwindigkeit mit der Zeit, also ein Abbremsen (Verzögerung).

Ist die Beschleunigung zeitlich konstant, dann heißt die Bewegung gleichmäßig beschleunigt.

Beispiel: Ein Auto erreicht aus dem Stillstand in 10s eine Geschwindigkeit von 50km / h. Wie groß ist die Beschleunigung?
Δv = 50 km/h = 13,89 m/s
a = 13,89 / 10 ms^{-2} = 1,389 ms^{-2}

Beachte, dass aus der vektoriellen Definition der Beschleunigung hervorgeht:
Eine Bewegung heißt beschleunigt, wenn sich der Geschwindigkeitsvektor (Richtung und Betrag) mit der Zeit ändert. Das heißt, eine Kreisbewegung mit dem stets gleichen Geschwindigkeitsbetrag ist auch beschleunigt.

(Vorgriff auf die Dynamik: Um einen Körper zu beschleunigen braucht es immer einen Kraftaufwand. Da man Kraft aufwenden muss, um einen Körper auf der Kreisbahn zu halten, ist die Kreisbewegung eine beschleunigte Bewegung.)

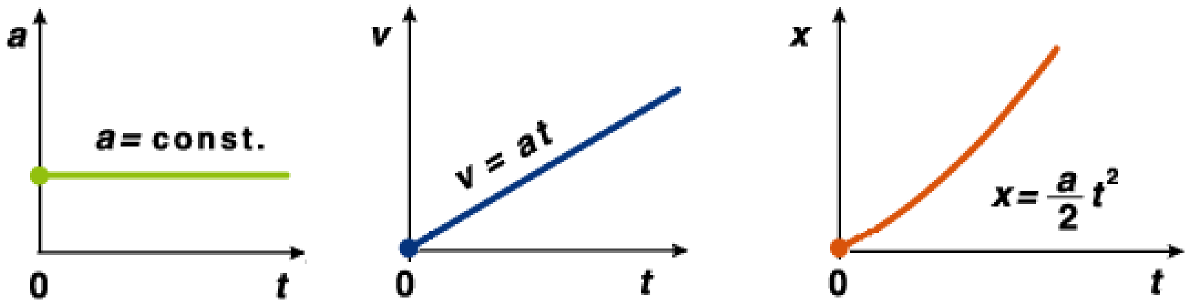
Frage: Wie groß ist die Beschleunigung bei einer gleichförmigen Bewegung? ($a = 0$);

Wie bei der Geschwindigkeit wird auch bei der Beschleunigung zwischen Durchschnittsbeschleunigung (mittlere Beschleunigung) und Momentanbeschleunigung unterschieden.

Durchschnittsbeschleunigung $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$
Momentanbeschleunigung $a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$

Beispiel:

- **Darstellung der gleichmäßig beschleunigten Bewegung aus dem Stillstand:**



<u>a - t Diagramm:</u> achsparallele Gerade (Bsp: 2 ms^{-2})

<u>v - t Diagramm:</u> Gerade mit Steigung 2.

Die Fläche unter der Beschleunigungskurve ist die aktuelle Geschwindigkeit.

In diesem Fall: $v = a \cdot t$.

(Eigentlich ist die Fläche unter der Beschleunigungskurve zwischen zwei Zeitpunkten die Geschwindigkeitsdifferenz zwischen diesen beiden Zeitpunkten. Ist die Anfangsgeschwindigkeit aber Null, so ist die Differenz gleich der aktuellen Geschwindigkeit.)

Beachte, dass $v = a \cdot t$ nur für konstante Beschleunigungen gilt! Dass die Fläche unter der Beschleunigungskurve die Geschwindigkeitsdifferenz ist, gilt jedoch immer!

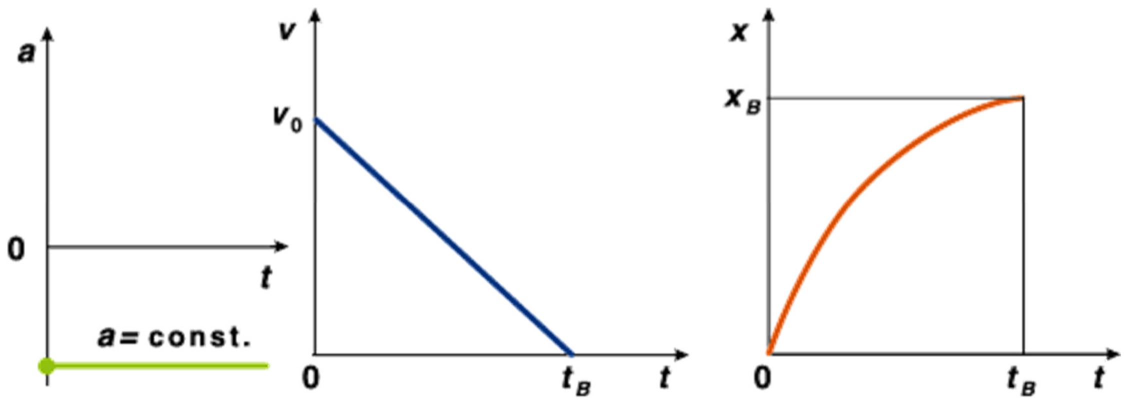
<u>s - t Diagramm:</u> Steigende Parabel. Zu obiger Beschleunigung. Berechnung des zurückgelegten Wegs mit Hilfe der Fläche unter der v-t-Kurve (Fläche von Dreiecken). **Die Fläche unter der Geschwindigkeitskurve zwischen zwei Zeitpunkten ist wiederum der zurückgelegte Weg in dieser Zeit.**

In diesem Fall ($v_0 = 0$): $s = \frac{1}{2} v \cdot t = \frac{a}{2} t^2$.

Beachte: $s = v \cdot t$ **gilt für gleichförmige Bewegungen (also** $v = const$ **),** $s = \frac{1}{2} v \cdot t = \frac{a}{2} t^2$ **für gleichmäßig beschleunigte Bewegungen (also** $a = const$ **).**

(Der Ausdruck $\frac{1}{2} v \cdot t$ ist natürlich die Fläche des Dreiecks und gleichzeitig der Mittelwert der Geschwindigkeiten 0 und v .)

- **Darstellung einer verzögerten Bewegung**



- **Darstellung zweier gleichmäßig beschleunigten Bewegungen (mit verschiedenen Werten) hintereinander**

Für gleichmäßig beschleunigte Bewegungen (also auch für gleichförmige Bewegungen (a=0)) gilt für die aktuelle Geschwindigkeit:

$$a(t) = const$$
$$v(t) = at + v_0$$
$$v_0 = v(0) \text{ ... Anfangsgeschwindigkeit}$$
$$v(t) = at \text{ für } v_0 = 0$$

Ist die Beschleunigung nicht konstant, dann bleibt zur Berechnung der aktuellen Geschwindigkeit v(t) nur die Flächenbestimmung unter der Beschleunigungskurve (Integralrechnung).

Für gleichmäßig beschleunigte Bewegungen (also auch für gleichförmige Bewegungen (a=0)) gilt für den Ort:

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 \cdot t + x_0$$
$$x(t) = \frac{\Delta v}{2}t + v_0 \cdot t + x_0$$
$$x_0 = x(0) \text{ ... Anfangsposition}$$
$$v_0 = v(0) \text{ ... Anfangsgeschwindigkeit}$$

Und für den zurückgelegten Weg:

$$s(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 \cdot t$$

$$s(t) = \frac{a}{2}t^2 \text{ für } v_0 = 0$$

Ist die Beschleunigung nicht konstant, dann bleibt zur Berechnung des zurückgelegten Weges s(t) nur die Flächenbestimmung unter der Geschwindigkeitskurve (Integralrechnung).

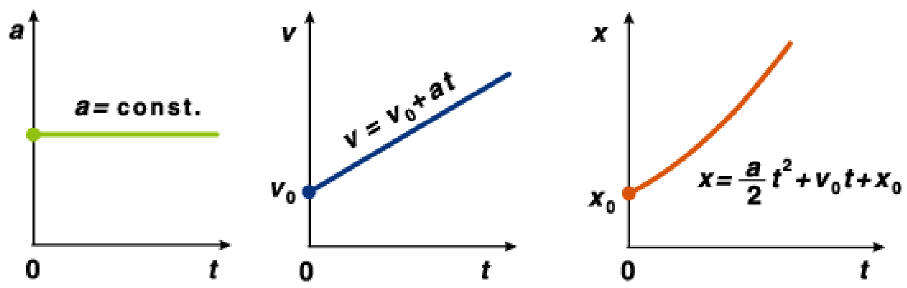
Gilt $s_0 = 0$ und $v_0 = 0$, dann ist zum Zeitpunkt t $s(t) = \frac{a}{2}t^2$ und $v(t) = at$. Ersetzt man in der Weggleichung die Zeit durch den Ausdruck aus der Geschwindigkeitsgleichung $t = \frac{v}{a}$, so erhält man die **zeitfreie Gleichung** $v = \sqrt{2as}$.

Die zeitfreie Gleichung $v = \sqrt{2as}$ beschreibt die Geschwindigkeit, die ein Körper nach dem gleichmäßigen Beschleunigen aus dem Stillstand durch die Beschleunigungsstrecke s besitzt (bzw. die Anfangsgeschwindigkeit beim Abbremsen auf 0 auf dieser Wegstrecke)**.**

Anwendung: Die Geschwindigkeit eines Autos kann aus der Länge der Bremsspur ermittelt werden, wenn die Verzögerung für dieses Auto (Bereifung) und für die gegebenen Witterungsverhältnisse aus Tabellen bekannt ist.

Beispiele:

- Darlegung obiger Formeln als Flächeninhalt aus dem v-t Diagramm für einen allgemeinen Fall ($s_0 \neq 0$, $v_0 \neq 0$).



- Ein Fahrzeug beschleunigt aus dem Stillstand mit $3{,}5\frac{m}{s^2}$ auf einer Strecke von 60m. Welche Geschwindigkeit erreicht es dabei? (t ist nicht gegeben, daher zeitfreie Gleichung $v = \sqrt{2as} = 20{,}49\frac{m}{s}$, $\mathrm{t} = 5{,}86\mathrm{s}$)
- Wie lange braucht ein Zug um aus dem Stillstand eine Geschwindigkeit von $100\frac{km}{h}$ zu erreichen, wenn seine Beschleunigung $0{,}6\frac{m}{s^2}$ beträgt? ($t = \frac{v}{a} = \frac{27{,}78}{0{,}6}s = 46{,}3s$, Weg dabei $s = \frac{v^2}{2a} = 643m$)
  Der Weg kann natürlich auch aus der zeitfreien Gleichung berechnet werden.
- Welche Geschwindigkeit erreicht ein Fahrzeug in 6,8s bei einer Beschleunigung von $4{,}2\frac{m}{s^2}$. ($v = at = 28{,}56\frac{m}{s}$) Die Zeit für 0 auf $100\frac{k}{h}$ ergibt sich aus $t = \frac{v}{a} = \frac{27{,}78}{4{,}2}s = 6{,}6s$, $\mathrm{s} = 97{,}10\mathrm{m}$.
- Ein Körper bewegt sich mit der Geschwindigkeit v = 20m/s und beschleunigt dann für 1 Minute mit 2m/s². Berechne die Geschwindigkeit am Ende der Beschleunigung.
  ($v(t) = at + v_0 = 2\frac{m}{s^2} \cdot 60s + 20\frac{m}{s} = 140\frac{m}{s}$.)
  Skizziere die a-t-, v-t- und s-t-Diagramme.

5.4 Der freie Fall

Der freie Fall, i.e. die von außen ungestörte Bewegung im Schwerefeld der Erde (im besonderen mit ruhendem Anfangszustand) ist eine in guter Näherung (i.e. auf kleinen Strecken betrachtet) gleichmäßig beschleunigte Bewegung. Werden große Fallstrecken betrachtet, so gilt dies nicht mehr.

Frage: Warum? (die Erdanziehungskraft und damit die Beschleunigung ist auch von der Entfernung vom Erdmittelpunkt abhängig).

Galileo Galilei (1564 – 1642) war der Erste, der diesen freien Fall untersuchte und zwar mit Hilfe von ausgeklügelten Experimenten. So verwendete er zur Verlangsamung der Bewegung Fallrinnen (schiefe Ebenen).

Die Ergebnisse:

- **Im luftleeren Raum beschleunigen alle Körper gleich schnell.**

Frage: Warum nur im Vakuum? (weil die Luft der Bewegung Widerstand entgegensetzt, der abhängig ist von der Beschaffenheit des Körpers).

Anwendung: Kommt ein Flugzeug in ein Luftloch (d.h. der Auftrieb bricht plötzlich ab), dann fallen Passagiere und Flugzeug gleich schnell (kein Schweben an die Decke!).

Im Experiment zeigt sich eine quadratische Abhängigkeit des Weges von der Zeit: $s \propto t^2$. Das ist für uns ein Hinweis auf eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung.

- **Der freie Fall ist eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit der Fallbeschleunigung (Erdbeschleunigung)** $g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$**.**

Alle Formeln für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung gelten also auch für den freien Fall!

Frage: Die Erdbeschleunigung beträgt an den Polen $g = 9{,}83\frac{m}{s^2}$ und am Äquator $g = 9{,}78\frac{m}{s^2}$. Warum?

(Erdabplattung ($g_{Pol} = 9{,}8688\frac{m}{s^2}$, $g_{Äquator} = 9{,}8027\frac{m}{s^2}$), Fliehkräfte durch Erdrotation $a_z = 0{,}034\frac{m}{s^2}$). Als Normalfallbeschleunigung definiert man $g = 9{,}80665\frac{m}{s^2}$.

Beispiel:

- Wie lange fällt ein Stein aus 10m Höhe? (1,43s)
  Welche Geschwindigkeit erreicht er dabei? (14,01m/s)

5.5 Zusammengesetzte Bewegungen

Führt ein Körper zwei Bewegungen gleichzeitig aus, so nennt man die Gesamtbewegung eine **zusammengesetzte Bewegung**. Zum Beispiel ist die Gesamtbewegung eines quer zur Strömungsrichtung angetriebenen Bootes durch die Eigenströmung des Flusses eine schräge Gerade in Flussrichtung. Wäre die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses gleich Null (See), so würde sich das Boot senkrecht zum Ufer über das Wasser bewegen.

Führt ein Körper zwei (oder mehr) Bewegungen gleichzeitig aus, so stören sich diese gegenseitig nicht – sie überlagern sich ungestört (Unabhängigkeitsprinzip, Superpositionsprinzip, Überlagerungsprinzip).

Keine der beiden Bewegungen wird abgeschwächt oder nicht ausgeführt, beide Bewegungen bleiben aufrecht! Sie werden zur selben Zeit unabhängig von einander ausgeführt.

Versuch: Man lässt einen Ball entlang des Tisches rollen und in dem Moment, in dem er über die Kante läuft, einen zweiten Ball neben dem Tisch aus der Höhe der Tischkante frei fallen. Welcher erreicht zuerst den Boden? Wie verhält es sich mit ihren Endgeschwindigkeiten? (Beiden schlagen gleichzeitig auf, da beide den freien Fall aus derselben Höhe ungestört ausführen. Die Endgeschwindigkeiten sind unterschiedlich, nur die Vertikalkomponente aus dem freien Fall ist gleich groß.)

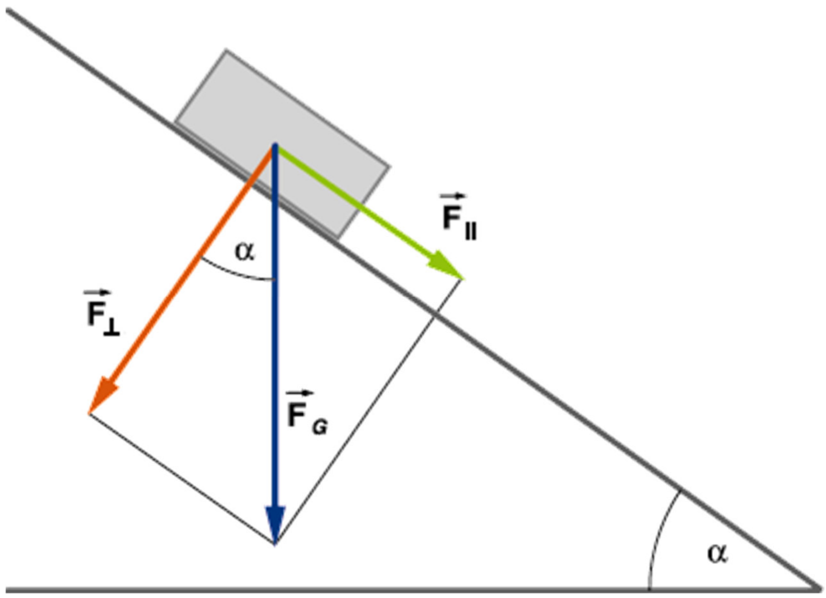
(**Grafische Erläuterung:** Die Parabel in kleine Treppen zerlegen, gleichzeitig den freien Fall alleine für die gleichen Zeitpunkte daneben aufzeichnen. Da beide Kugel frei fallen, werden von beiden in der gleichen Zeit gleiche senkrechte Strecken zurückgelegt.
Für den waagrechten Wurf ergibt die Summe der waagrechten Strecken von der gleichförmigen Bewegung in Summe die waagrechte Fallweite. Die Summe der senkrechten Strecken ist gleich der Fallhöhe.)

Diese Tatsache muss sich natürlich auch in der mathematischen Beschreibung von Bewegungen niederschlagen. Das Konzept, das dies auch leisten kann, sind Vektoren.

Die ungestörte Überlagerung der beiden Bewegungen wird durch die Vektoraddition der beiden Geschwindigkeiten beschrieben.
Umgekehrt: Jede Bewegung kann in zwei Teilbewegungen zerlegt werden, die addiert wieder die ursprüngliche Bewegung ergeben (Komponentenzerlegung).

Beispiele:

- **Schiefe Ebene:**



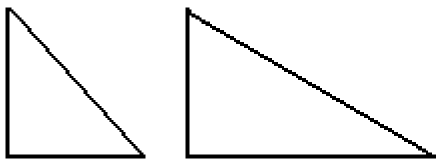
Die Bewegung entlang einer schiefen Ebene ist ein Beispiel für die Komponentenzerlegung von Vektoren. Der Beschleunigungsvektor g ist nach zwei Richtungen zu zerlegen: entlang der Bewegungsrichtung ($g_{\parallel}$) und der Normalen ($g_{\perp}$) dazu. Die wirksame Beschleunigung ist $g_{\parallel}$; $g_{\perp}$ wirkt normal auf die Fläche der schiefen Ebene und kann daher keinen Beitrag zur Bewegung leisten. Die zeitfreie Gleichung liefert $v = \sqrt{2g_{\parallel}s}$. Durch Ähnlichkeitsüberlegungen erhält man $g_{\parallel} = \frac{h}{s}g$ und daraus $v = \sqrt{2gh}$. Das heißt: die Endgeschwindigkeit ist bei der Bewegung entlang der schiefen

Ebene genauso groß wie beim freien Fall (wenn von der Reibung abgesehen wird). Die Beschleunigung ist zwar kleiner, aber dafür dauert sie länger.

Die Endgeschwindigkeit eines Körpers ist die gleiche, wenn er aus der Höhe h frei fällt oder aus der Höhe h entlang einer schiefen Ebene rollt. Die dafür benötigte Zeit ist aber unterschiedlich groß.

$v = \sqrt{2gh}$ $\qquad t = \sqrt{\frac{2s}{g_{\parallel}}} = \sqrt{\frac{2s \cdot s}{g \cdot h}} = \sqrt{\frac{2s^2}{g \cdot h}}$

Beispiel:



Hier sind die Endgeschwindigkeiten gleich groß, da die beiden schiefen Ebenen die gleiche Höhe haben.

- **Der lotrechte (senkrechte, vertikale) Wurf nach oben:**
  Ein Körper wird mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben geworfen.

  Für seine Geschwindigkeit gilt: $v(t) = -gt + v_0$.

  Für seinen Weg gilt: $h(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \cdot t$

  Am Scheitelpunkt (Umkehrpunkt) gilt: $v(t) = 0$. Das heißt: Steigzeit $t_H = \frac{v_0}{g}$ und Steighöhe (Scheitelhöhe) durch Einsetzen der Steigzeit in die Formel für den Weg $s_H = s(t_H) = \frac{v_0^2}{2g}$.

  Frage: Welche Gleichung ist das? (Zeitfreie Gleichung. Mit dieser Gleichung zum Vergleich direkt berechnen!).

  Die Zeit bis zum Aufschlag ist natürlich $2t_H = \frac{2v_0}{g}$.

  Frage: Welche Gleichung ist das? (Zeitfreie Gleichung. Mit dieser Gleichung zum Vergleich direkt berechnen!).

  Aufschlagsgeschwindigkeit = Anfangsgeschwindigkeit.

  ($\mathrm{v}(2\mathrm{t}_H) = -\mathrm{g}\frac{2\mathrm{v}_0}{\mathrm{g}} + \mathrm{v}_0 = -\mathrm{v}_0$)

- **Der waagrechte (horizontale) Wurf:**
  Ein Körper wird mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 waagrecht geworfen. (Skizze!)
  Die Bewegung entlang der x-Achse ist eine gleichförmige Bewegung :
  $x(t) = v_0 t$.
  Die Bewegung entlang der y-Achse ist eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung :

$y(t) = -\frac{g}{2}t^2$.

Ersetzt man t in der Bewegung entlang der y-Achse durch den Ausdruck für t aus der Bewegung entlang der x-Achse, so erhält man die Bahngleichung:

$y = -\frac{g}{2}\frac{x^2}{v_0^2}$ (Wurfparabel).

Beispiel: Ein Flugzeug soll einen Beutel mit Medikamenten in ein Boot werfen. Es fliegt mit einer Geschwindigkeit von 250km/h in einer Höhe von 50m. In welcher waagrechten Entfernung vom Boot muss der Beutel abgeworfen werden ?

(Damit der Beutel aus der Höhe von 50m auf die Erde fällt, braucht er $t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = 3{,}19\mathrm{s}$. In dieser Zeit legt er aber waagrecht $x = \frac{250}{3{,}6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 3{,}19\mathrm{s} \approx 221{,}7\mathrm{m}$ zurück.).

Beispiel: Dartpfeil, der immer trifft.

- **Der schiefe Wurf:**
  Ein Körper wird mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 und dem Winkel φ zur Waagrechten geworfen. Die allgemeine Lösung ist nur mit Hilfe der Winkelfunktionen darzustellen, wir merken uns aber folgendes:

  Die Bahn ist wieder eine Wurfparabel. (Skizze!)
  Maximale Wurfweite bei 45°.
  Gleiche Wurfweite bei Komplementärwinkeln (z.B. 30° und 60°).

  Die Bahnkurve mit Luftwiderstand heißt ballistische Kurve (keine Parabel!).

  Beispiel: Wie muss ich auf einen Affen zielen, der im Moment des Schusses sich vom Baum fallen lässt? (Direkt auf den Affen. Erklären ohne und mit Einfluss der Schwerkraft. Affe und Kugel fallen beide im freien Fall.)

5.6 Gleichförmige Drehbewegung

Im Gegensatz zur Translation, wo alle Punkte eines Körpers in der gleichen Zeit t gleich große Strecken zurücklegen (gleiche Geschwindigkeit!), gilt dies bei der Rotation nur für Punkte, die gleich weit von der Drehachse entfernt sind. Zwei Punkte, die verschieden weit von der Drehachse entfernt sind, legen aber verschieden weite Strecken zurück – sie haben unterschiedliche Geschwindigkeiten! Die Bahngeschwindigkeit v ist daher keine geeignete Größe zur Beschreibung der Rotation.
Allerdings gilt für alle Punkte: der von ihren Abständen zur Drehachse (Radiusvektoren) überstrichene Winkel ist gleich groß.

Bei der Rotation ist der Drehwinkel φ das Maß für die ausgeführte Bewegung.

Frage: Welche physikalische Größe ist bei der Translation das Maß für die ausgeführte Bewegung? (der zurückgelegte Weg)

Die Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte eines rotierenden Körpers sind ungleich groß, der pro Zeit überstrichene Winkel ist dagegen für alle Punkte des Körpers gleich groß.

Als Maßeinheit wird in der Physik nicht Grad verwendet, sondern das Bogenmaß.

Die physikalische Maßeinheit für den Drehwinkel ist das Bogenmaß.

Es zeigt sich nämlich, dass bei einer Drehung um einen festen Winkel φ das Verhältnis aus Bogenlänge und Radius für alle an der Drehbewegung beteiligten Punkte gleich groß ist.
(Skizze: Beispiel für 90°. 2 verschiedene Radien, Bogenlängen $\frac{2r\pi}{4}$, Verhältnisse Bogenlänge zu Radius.)

Dieses Verhältnis kann daher als Maß für die Drehbewegung, den Winkel, genommen werden und wird als Bogenmaß bezeichnet.

$$Drehwinkel\ im\ Bogenmaß\ = \frac{Bogenlänge}{Radius}, \quad \varphi = \frac{s}{r}$$

Einheit: $[\varphi] = \frac{[s]}{[r]} = \frac{1m}{1m} = 1(Radiant) = 1(rad)$

Das Bogenmaß ist eigentlich dimensionslos ($[\varphi] = 1\frac{m}{m} = 1$).

Frage: Welches Bogenmaß hat der Vollkreis? (2π).

Gradmaß	Bogenmaß
0	0
90	$\pi / 2$
180	π
270	$3\pi / 2$
360	2π

Allgemeine Formeln zur Umrechnung:

$$\varphi° = \frac{\varphi(rad)}{2\pi}.360° \qquad \varphi(rad) = \frac{\varphi°}{360°}.2\pi$$

Beachte, dass beim Taschenrechner das Bogenmaß eingestellt ist!
(Möglicher Test: sin (2π) = 0 im Bogenmaß, /= 0 im Gradmaß).

Vorteil des Bogenmaßes: **Um die Bogenlänge zu berechnen, muss der Wert des Winkels nur mit dem Radius multipliziert werden.**

$$Bogenlänge = Winkel\ im\ Bogenmaß \cdot Radius$$

Der Geschwindigkeit bei der Translation entspricht die zeitliche Veränderung des Drehwinkels bei der Rotation.

$$Winkelgeschwindigkeit = \frac{überstrichener\ Winkel}{verstrichene\ Zeit}$$

$$Winkelgeschwindigkeit = \frac{Änderung\ des\ Drehwinkels}{benötigte\ Zeit}$$

$$\omega = \frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

$$\omega = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1}$$

$$\omega = \frac{\varphi}{t} \text{ (wenn } \varphi(t_1) = 0,\ t_1 = 0\text{)}$$

$$[\omega] = 1\frac{(\mathrm{rad})}{s} = 1s^{-1}$$

Wiederum unterscheidet man zwischen Durchschnittswinkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ und Momentanwinkelgeschwindigkeit $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}$.

Beispiel: Eine Scheibe dreht sich in 5s um 90°. Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit?
($\omega = \frac{\pi/2}{5s} = \frac{\pi}{10} s^{-1}$)

Beispiel: Die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation beträgt $\omega = \frac{2\pi}{86400s} = 7{,}27 \cdot 10^{-5} s^{-1}$.

Die Winkelgeschwindigkeit ist ein Vektor mit dem Betrag ω und liegt in der Drehachse mit der Richtung nach der Rechtsschraubenregel (dreht sich ein Körper in eine bestimmte Richtung, so ist die Richtung von ω gleich der Richtung, in die sich eine Rechtsschraube mit der selben Drehrichtung bewegen würde – hinein oder heraus) **oder Rechte-Hand-Regel** (ω ist der Daumen, die Fingerspitzen zeigen in die Richtung der Bahngeschwindigkeit).

Beispiele: Uhr im Uhrzeigersinn, entgegen des Uhrzeigersinnes, Töpferscheibe.

Eine Drehbewegung heißt gleichförmig, wenn die Winkelgeschwindigkeit ω konstant ist.
Für sie gilt: $\omega(\mathrm{t}) = \mathrm{const}$, $\varphi(\mathrm{t}) = \omega\mathrm{t} + \varphi_0$

Drehzahl:

$$Drehzahl = \frac{Anzahl\ der\ vollen\ Umdrehungen}{benötigte\ Zeit}$$

$$n = \frac{z}{t}$$

$[n] = 1s^{-1}$ oder $\frac{U}{s}$ (Umdrehungen pro Sekunde)

oder auch $\frac{U}{\min}$ (Umdrehungen pro Minute).

$$1\frac{U}{\min} = \frac{1}{60}\frac{U}{s}$$

$$1\frac{U}{s} = 60\frac{U}{\min}$$

Frequenz:

$$Frequenz = \frac{Anzahl\ der\ periodischen\ Vorgänge}{benötigte\ Zeit}$$

$[f] = 1s^{-1} = 1Hz$ (Hertz)

Auch eine Drehbewegung ist in diesem Sinne ein periodischer Vorgang (nach einer vollen Umdrehung wiederholt sich exakt der gleiche Vorgang). Die Drehzahl ist in diesem Sinn die Frequenz der Drehbewegung. Aber bei Drehzahlmessungen wird **nie** mit der Einheit Hertz gearbeitet!

Gemessen wird die Drehzahl z.B. mit Hilfe eines Zählwerks oder eines Stroboskops. Stimmen Blitzfrequenz und Drehzahl überein, so erscheint eine Messmarke still zu stehen.

Die **Umlaufzeit** T bei einer Drehbewegung ist jene Zeit, die für eine volle Umdrehung benötigt wird.

Beispiel:

- $n = 10s^{-1}$, die Zeit für eine Umdrehung ist daher $T = \frac{1}{10}s$.
- $n = 100s^{-1}$, die Zeit für eine Umdrehung ist daher $T = \frac{1}{100}s$.

Es gilt die wichtige Beziehung:

$$T = \frac{1}{n} \qquad [T] = 1s$$

Bei allgemeinen periodischen Vorgängen wird T als **Periodendauer** bezeichnet. Sie ist dann die Zeit für einen einzelnen vollständigen periodischen Vorgang.

Dann gilt:

$$T = \frac{1}{f} \qquad [T] = 1s$$

Es gelten folgende Beziehungen:

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot n$$

Beispiel:

Eine Bohrmaschine hat die Drehzahl 1200U/min.

n= 20U/s T=0,05s $\omega = 2\pi n = 125{,}66s^{-1}$

Bahngeschwindigkeit:

Wird eine Kugel an einer Schnur im Kreis bewegt und dann abrupt losgelassen, so fliegt sie tangential weg. Ab diesen Moment wirkt dann keine Kraft mehr zum Zentrum und die Bewegung ist somit eine geradlinig gleichförmige Bewegung mit der aktuellen Geschwindigkeit des Zeitpunktes des Loslassens (abgesehen von der Überlagerung durch den freien Fall).

Die Geschwindigkeit eines rotierenden Massenpunktes kann in zwei Komponenten zerlegt werden: in eine Radial- und in eine Tangentialkomponente. Beide stehen aufeinander senkrecht (sind normal zueinander). Bei der Rotation verschwindet aber der Radialanteil.

Ein auf einer Kreisbahn laufender Körper besitzt stets nur eine tangential gerichtete Geschwindigkeit (Bahngeschwindigkeit, Umfangsgeschwindigkeit, Tangentialgeschwindigkeit).

Es gilt folgender Zusammenhang bei der Rotation:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r f = \omega r$$
$$v = \omega r$$

Beispiel:

Eine Drehscheibe rotiert mit der Drehzahl n=0,2U/s

$\omega = 2\pi n = 1{,}26 s^{-1}$

Bahngeschwindigkeit im Abstand 1m: $v = 1{,}26 \frac{m}{s}$

Bahngeschwindigkeit im Abstand 2,5m: $v = 3{,}14 \frac{m}{s}$

Beispiel: Umfangsgeschwindigkeit am Äquator. ($\mathrm{r = 6370km}$)

$$\mathrm{v = \omega r = \frac{2\pi}{T} r = \frac{2\pi}{86400s} \cdot 6370000m = 463{,}2m/s = 1668km/h}$$

Die Winkelgeschwindigkeit ist für alle Punkte eines starren Drehkörpers gleich groß. Die Bahngeschwindigkeit aber nimmt mit dem Abstand von der Drehachse zu.
(Bei einer gleichförmigen Drehbewegung sind die Bahngeschwindigkeiten für Punkte mit unterschiedlicher Entfernung von der Drehachse zwar verschieden groß, die Bahngeschwindigkeiten der einzelnen Punkte sind aber zeitlich konstant.)

5.7 Gleichmäßig beschleunigte Drehbewegung

Viele Drehbewegungen haben nicht immer die gleiche Drehzahl, ihre Drehbewegung ist beschleunigt oder verzögert.
Analog zur Bahnbeschleunigung bei der Translation kann man auch eine Winkelbeschleunigung bei der Rotation festlegen.

$$Winkelbeschleunigung = \frac{\text{Änderung des Winkelgeschwindigkeit}}{\text{benötigte Zeit}}$$

$$\alpha = \frac{\omega(t_2) - \omega(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}$$

$\alpha = \frac{\omega}{t}$ (wenn $\omega_1 = 0$, $t_1 = 0$)

$$[\alpha] = 1\frac{(\text{rad})}{s^2} = 1s^{-2}$$

Bei einer gleichmäßig beschleunigten Drehbewegung ist α = const. Für sie gilt:

$$\omega(t) = \alpha t + \omega_0$$
$$\omega(t) = \alpha t \text{ für } \omega_0 = 0$$

$$\varphi(t) = \frac{\alpha}{2}t^2 + \omega_0 \cdot t + \varphi_0$$
$$\varphi(t) = \frac{\omega}{2}t = \frac{\alpha}{2}t^2 \text{ für } \varphi_0 = 0,\ \omega_0 = 0$$

Beachte, dass in diesen Gleichungen für gleichmäßig beschleunigte Drehbewegungen auch die gleichförmigen Drehbewegungen (α=0) enthalten sind!

Beispiel: Eine Scheibe beschleunigt gleichmäßig in 10s von 0 auf 3000U/s. Berechne $\omega(10\text{s})$, α, $\varphi(10\text{s})$ und $z(10\text{s})$.

($\omega(10\text{s}) = 2\pi \cdot 3000\text{U/s} = 6000\pi\text{s}^{-1}$, $\alpha = \frac{\omega(10\text{s})}{10\text{s}} = 600\pi\text{s}^{-2}$, $\varphi(10\text{s}) = \frac{600\pi\text{s}^{-2}}{2}100\text{s}^2 = 30000\pi$,

$z(10\text{s}) = \frac{\varphi(10\text{s})}{2\pi} = 15000\text{U}$)

Analogien Translation / Rotation		
Bahngröße (Translation)	**Zusammenhang**	**Drehgröße (Rotation)**
Weg s	$s = \varphi \cdot r$	Drehwinkel φ
Geschwindigkeit $v = \frac{s}{t}$	$v = \omega \cdot r$	Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{\varphi}{t}$
gleichförmige Bahnbewegung $v = const$ $s = v \cdot t$		gleichförmige Drehbewegung $\omega = const$ $\varphi = \omega \cdot t$
Beschleunigung $a = \frac{v}{t}$	$a = \alpha \cdot r$	Winkelbeschleunigung $\alpha = \frac{\omega}{t}$
gleichmäßig beschleunigte Bahnbewegung $a = const$ $v = a \cdot t$ $s = \frac{v}{2}t = \frac{a}{2}t^2$		gleichmäßig beschleunigte Drehbewegung $\alpha = const$ $\omega = \alpha \cdot t$ $\varphi = \frac{\omega}{2}t = \frac{\alpha}{2}t^2$
Wird eine Drehgröße mit dem Radius multipliziert, so erhält man die entsprechende Bahngröße.		

6. Statik

Statik ist die Lehre vom Gleichgewichtszustand (meist Ruhezustand) eines Körpers unter Krafteinwirkung.
Dynamik ist die Lehre von der Bewegung von Körpern im Zusammenhang mit den wirkenden Kräften.

6.1 Kraft

Alltagserfahrung: Muskel-, Gewichtskraft, elektrische Kraft, magnetische Kraft.

Eine Kraft kann man ihren Wirkungen erkennen: **Kräfte sind die Ursachen von Bewegungsänderungen oder Verformungen.**

$$\boxed{\text{Kraft F: } [F] = 1N \text{ (Newton)}}$$

Die Kraft ist eine abgeleitete Größe, ihre Definition folgt in der Dynamik.

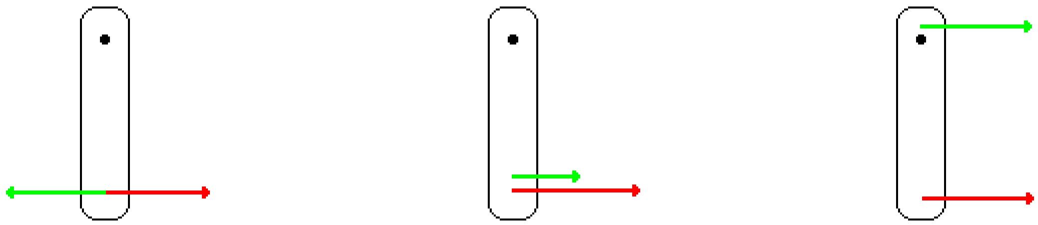
Die Kraft als Vektor:

Die Kraft ist eine vektorielle Größe, sie hat eine Richtung und einen Betrag. Wird sie durch einen Pfeil dargestellt, so ist dessen Richtung die Richtung der Kraft und seine Länge ihr Betrag.

Eine Kraft ist eine vektorielle Größe, deren Wirkung durch ihren Betrag, Richtung und Angriffspunkt vollständig bestimmt ist.

Skizze: Kräfte an einem drehbar gelagerten Körper (Pendel),

- die gleichen Betrag und gleichen Angriffspunkt, aber unterschiedliche Richtung oder
- die gleiche Richtung und gleichen Angriffspunkt, aber unterschiedlichen Betrag oder
- gleichen Betrag und gleiche Richtung, aber unterschiedlichen Angriffspunkt (z.B. unter- oder oberhalb der Drehachse) haben.



(Wirkungen erläutern: Ausschlag nach links, Ausschlag nach rechts, starken oder schwachen Ausschlag, keinen Ausschlag (wenn genau auf Drehachse gerichtet)).

Wirkungslinie einer Kraft:
Ob eine Kraft direkt an einem Körper oder über ein Seil (Skizze!) angreift, ist für die Wirkung gegenstandslos. **Die Wirkung einer Kraft bleibt die gleiche, wenn sie entlang ihrer Wirkungslinie (z.B. entlang ihrer eigenen Richtung) verschoben wird. Die Kraft ist ein linienflüchtiger Vektor.**

Die Wirkungslinie kann auch eine zusammenhängende Kette aus Materie sein (z.B. ein Seil). Die einzelnen Bestandteile geben die Kraftwirkung an den Nachbarn weiter. Damit können Kräfte auch umgelenkt werden.

Zusammensetzung von Kräften:
Beispiele:

- Gleichgerichtete Kräfte auf derselben Wirkungslinie (Skizze!). Die *Resultierende* hat dieselbe Wirkungsrichtung wie die Einzelkräfte.

Sind die Kräfte gleichgerichtet, so ist die Summe ihrer Beträge gleich dem Betrag der Resultierenden.

Vektorgleichung: $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$

Betragsgleichung: $F = F_1 + F_2$

Beispiel: 2 Personen ziehen an einem Wagen in dieselbe Richtung. (Skizze!).

- Entgegengesetzt gerichtete Kräfte auf derselben Wirkungslinie (Skizze!, $F_1 > F_2$). Die *Resultierende* hat dieselbe Wirkungslinie wie die Einzelkräfte.

Sind die Kräfte entgegengesetzt gerichtet, so ist die Differenz ihrer Beträge gleich dem Betrag der Resultierenden.

Vektorgleichung: $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$

Betragsgleichung: $F = F_1 - F_2$

Beispiel: 2 Personen ziehen an einem Wagen in die entgegengesetzte Richtung. (Skizze!).

- Kräfte auf Wirkungslinien, die einander schneiden (Skizze!). Die Kräfte dürfen in den Schnittpunkt ihrer Wirkungslinien, den gemeinsamen Angriffspunkt, verschoben werden. Der Betrag der Resultierenden ist nicht mehr die Summe oder Differenz der Einzelbeträge.

Vektorgleichung: $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$

Beispiel: 2 Personen ziehen an einem Schlitten in zwei Richtungen nach vorne, eine schräg nach links, eine schräg nach rechts. (Skizze!).

- Kräfte auf Wirkungslinien, die einander rechtwinklig schneiden (Skizze!). Der Betrag der Resultierenden ergibt sich aus dem Satz des Pythagoras:

Vektorgleichung: $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$

Betragsgleichung: $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$

- Mehr als zwei Kräfte mit gemeinsamen Angriffspunkt (Skizze!). Es gilt:

Vektorgleichung: $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$

$\vec{F}_{Ges} = \Sigma \vec{F}_i$

Beispiel: Strommast mit drei Leitungen.

Überlagerungsprinzip für Kräfte:
Greifen zwei (oder mehrere) Kräfte mit gleichem Angriffspunkt an einem Körper an, dann ist die daraus Resultierende die Vektorsumme der Einzelkräfte im gemeinsamen Angriffspunkt.

Vektoriell gilt daher stets: $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$ **.**

Beachte: Zwei gleichzeitig wirkende Kräfte stören einander nicht, sie überlagern sich ungestört, d.h. die Wirkungen beider Kräfte werden gleichzeitig und ungestört nebeneinander erzielt.
Wirken zwei oder mehrere Kräfte auf einen Körper, dann ist die Gesamtwirkung auf den Körper die Summe der Einzelwirkungen. Eine Überlagerung von Kräften hat eine ungestörte Überlagerung deren Wirkungen zur Folge.

Zerlegung von Kräften:

Jede Kraft in der Ebene kann in 2 beliebige vorgegebene Richtungen zerlegt werden. (Skizze: beliebige Kraft, ihr Angriffspunkt ist Ursprung eines 2 dimensionalen Koordinatensystems. Zerlegung durch Normalprojektion der Kraft auf die beiden Achsen.)

Jede Kraft kann in Komponenten mit gleichem Angriffspunkt zerlegt werden, deren gemeinsame Wirkung diejenige der ursprünglichen Kraft ist.

Wesentlich ist nicht die tatsächliche Zahl der wirkenden Kräfte, sondern nur deren Wirkung. Habe verschiedene Kraftkonstellationen gleiche Wirkung, dann sind sie aus physikalischer Sicht durch ihre gemeinsame Wirkung äquivalent.

Jede 2 dimensionale Vektor kann in 2 Komponenten, jeder 3 dimensionale Vektor in 2 oder 3 Komponenten zerlegt werden. Beachte, dass es im Prinzip auch beliebig viele Komponenten sein könnten! Einzig und allein die gleiche Vektorsumme muss erhalten bleiben!
Diese Erkenntnis spielt eine große Rolle bei Anordnungen, bei denen Komponenten der Kraft durch Gegenkräfte aufgehoben werden.

Beispiel:
- Schiefe Ebene. Der wirksame Teil der Gewichtskraft ist nur die Komponente entlang der Ebene. Die Komponente normal dazu wird durch die Gegenkraft aus der Ebene kompensiert.

Das Wechselwirkungsgesetz:

Wirkt ein Körper mit einer Kraft (Aktion) auf einen zweiten Körper, so wirkt der zweite Körper mit einer gleich großen, aber entgegengesetzt gerichteten Kraft (Gegenkraft, Reaktion) auf den ersten Körper. Kräfte treten immer paarweise auf. Kraft und Gegenkraft greifen an verschieden Körpern an.

$$\boxed{\begin{array}{c}\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \\ F_1 = F_2\end{array}}$$

Das Wechselwirkungsgesetz wird auch als Prinzip von Wirkung und Gegenwirkung (Aktion und Reaktion, Actio est Reactio) bezeichnet. Jede der beiden Kräfte kann als Reaktionskraft der anderen angesehen werden.

Beispiele:
- Eine Hand zerrt an einer Feder mit einer Kraft, die Feder zieht an der Hand mit der selben Kraft.
- Ein Würfel drückt auf eine Unterlage mit seiner Gewichtskraft, die Unterlage drückt mit der selben Kraft auf den Würfel.
  (Der Körper ist auf der festen Unterlage in Ruhe. Auf den Körper wirkt die Gewichtskraft, Kräfte möchten einen Körper beschleunigen. Warum beschleunigt dieser Körper nicht? Weil von der Unterlage eine der Schwerkraft entgegengerichtete Kraft auf den Körper wirkt, der die Schwerkraft genau aufhebt und die Resultierende somit verschwinden lässt.)
- Die Erde zieht den Würfel mit der Schwerkraft an, der Würfel zieht an der Erde mit dem selben Betrag.

Versuch: Zwei gleichstarke Kraftmesser werden ineinander verhakt und auseinander gezogen. Beide zeigen die gleiche Kraft an. (Skizze)

Gleichgewicht von Kräften mit gemeinsamen Angriffspunkt:

Zwei Kräfte mit gleichem Angriffspunkt sind im Gleichgewicht, wenn sie gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind. Der Betrag der Resultierenden ist dann Null. (Skizze!)

Beachte, dass dieser Satz für Kräfte mit gleichem Angriffspunkt gilt. (Skizze: zwei gleich große und entgegengesetzt gerichtete Kräfte an einer Scheibe (mit gegenüberliegenden Angriffspunkten in Bezug auf die Drehachse) führen zu einer Drehbewegung.)

Vektorgleichung: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$
Betragsgleichung: $F = F_1 - F_2 = 0$

Mehrere Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn das Krafteck (die vektorielle Addition) geschlossen ist. Der Betrag der Resultierenden ist dann Null. (Skizze!)

Vektorgleichung: $\vec{F}_{Ges} = \Sigma \vec{F}_i = 0$
Betragsgleichung: $F_{Ges} = \Sigma F_i = 0$

Ein Körper ist in Ruhe, wenn alle an ihm wirkenden Kräfte im Gleichgewicht sind. D.h. Körper können auch dann in Ruhe sein, wenn Kräfte an ihnen wirken!

Beispiel: feste Rolle. (Skizze.) Eine feste Rolle sei an der Decke festgemacht. Zieht man am Seil so bringt das keine Kraftersparnis, sondern nur eine Umlenkung der Kraft. **Mit einer festen Rolle kann maximal das eigene Körpergewicht gehoben werden.**

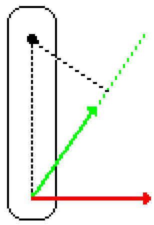
Beispiel: lose Rolle und feste Rolle. (Skizze.) Eine lose Rolle (Seil an Decke festgemacht, am anderen Ende zieht man nach der Umlenkung über die feste Rolle) teilt dagegen die Kräfte auf beide Seilenden auf (die Gewichtskraft der Last und die Summe der Kraft auf die Decke und der Kraft auf den Arbeiter sind im Gleichgewicht). Die vom Menschen aufzuwendende Kraft wird halbiert. **Mit einer Kombination aus einer losen und einer festen Rolle kann maximal das doppelte Körpergewicht gehoben werden.**

Durch geeignete Kombinationen aus losen und festen Rollen kann ein Vielfaches des Körpergewichts gehoben werden (Flaschenzüge).

6.2 Das Drehmoment

Aus der Erfahrung weiß man, dass eine Schraube leichter zu lösen ist. wenn man statt eines kurzen einen langen Schraubenschlüssel verwendet. Der Krafteinsatz beim langen Schlüssel ist dabei geringer als beim kurzen Schlüssel.

Offenbar hängt die Drehwirkung einer Kraft nicht nur von ihrer Größe ab, sondern auch von der Länge des Kraftarmes, d.h. wo diese Kraft ansetzt (die neben der Größe die Wirkung bestimmenden Eigenschaften Angriffspunkt und Richtung einer Kraft werden im Kraftarm zusammengefasst). Unter Kraftarm versteht man dabei den Normalabstand der Wirkungslinie der Kraft von der Drehachse.

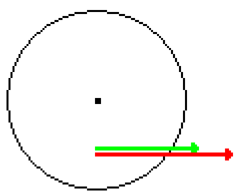


Skizze: Pendel. Kraft, die normal zur Verbindung Drehachse und Angriffspunkt angreift (Kraftarm einzeichnen). Kraft, die nicht normal zur Verbindung Drehachse und Angriffspunkt angreift (Kraftarm einzeichnen).

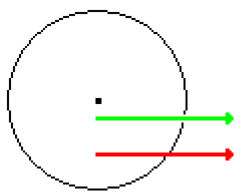
Die Drehwirkung einer Kraft ist umso größer, je größer die Kraft und je größer der Kraftarm ist. Der Kraftarm ist der Normalabstand der Wirkungslinie der Kraft von der Drehachse.
Das Maß für die Drehwirkung einer Kraft ist das Produkt aus Kraft und Kraftarm (Drehmoment M).

$$\boxed{\begin{gathered} Drehmoment = Kraft \cdot Kraftarm \\ M = F \cdot l \\ [M] = 1 Nm \end{gathered}}$$

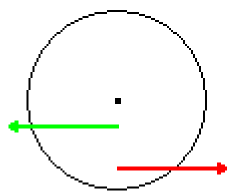
Das Drehmoment ist die maßgebliche Ursache einer Drehbewegung.
Das Produkt aus Kraftgröße und Kraftarm wird allgemein als **Moment M einer Kraft** oder als **Kraftmoment** bezeichnet. Bewirkt das Moment eine Drehung, so nennt man es Drehmoment.



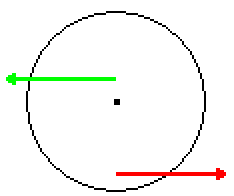
(1)



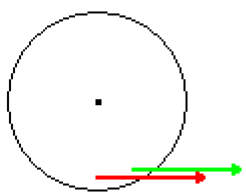
(2)



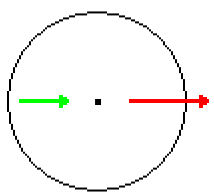
(3)



(4)



(5)



(6)

Skizze: Drehwirkung von Kräften auf eine Scheibe:

- zwei verschieden große Kräfte, gleicher Kraftarm **(1)**
- zwei gleich große Kräfte, verschieden großer Kraftarm **(2)**
- bei zwei gleich großen, entgegengesetzt gerichteten Kräften in verschiedenen Abständen zur Drehachse (unterschiedlicher Kraftarm)
  - auf der selben Seite in Bezug auf die Drehachse **(3)**
  - auf gegenüber liegenden Seiten in Bezug auf die Drehachse **(4)**
- zwei gleich große Kräfte, gleich großer Kraftarm, aber verschiedener Angriffspunkt **(5)** (gleiche Wirkung)
- Wirkungslinie einer Kraft geht durch die Drehachse (Kraftarm verschwindet, keine Drehwirkung) **(6)**

Geht die Wirkungslinie der Kraft durch die Drehachse, so erzeugt die Kraft kein Drehmoment ($M = 0$, da $l = 0$).

Das Drehmoment M ist ein Vektor, der in der Drehachse liegt. Die Richtung lässt sich mit der Rechtsschraubenregel (die Richtung des Drehmoments zeigt in die Richtung, in die eine Rechtsschraube sich drehen würde, die von der Kraft gedreht wird) **oder der rechten Hand Regel** (der Daumen der rechten Hand gibt die Richtung des Drehmoments an, wenn die Kraft in die Richtung der gerundeten Finger weist) **finden.**

Beispiel: Drehsinn der Rollen. (Skizze, Wirkungslinie der Kraft durch die Drehachse, parallel zur Unterlage (im Uhrzeigersinn), normal zur Unterlage (im Gegenuhrzeigersinn), Richtung des Drehmomentvektors zeigen. Drehachse ist Auflagelinie der Spule, denn hier wird durch Reibungskräfte eine Drehachse vorgegeben. Die Bereiche der links- und rechtsdrehenden Kraftrichtungen werden durch jene beiden Wirkungslinien von Kräften vorgegeben, die genau durch die Drehachse gehen.)

Gleichgewicht am Hebel:
Ein starrer drehbarer Körper heißt Hebel.
Skizze: starrer Körper mit Drehachse, links Kraft F_1 und Normalabstand l_1, rechts Kraft F_2 und Normalabstand l_2, beide Kräfte nach unten.

Das Drehmoment der Kraft F_1 ist $M_1 = F_1 \cdot l_1$ und damit linksdrehend. Es versucht den Hebel gegen den Uhrzeigersinn zu drehen.
Das Drehmoment der Kraft F_2 ist $M_2 = F_2 \cdot l_2$ und damit rechtsdrehend. Es versucht den Hebel im Uhrzeigersinn zu drehen.
der Hebel ist dann im Gleichgewicht, wenn das rechtsdrehende Moment gleich dem linksdrehenden ist: $M_1 = M_2$, d.h. $M_1 - M_2 = 0$ (das negative Vorzeichen stammt von der entgegen gesetzten Richtung).

Hebelgesetz:

$$M_1 = M_2 \Leftrightarrow F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$$

Kraft $\cdot$ Kraftarm $=$ Last $\cdot$ Lastarm

vektoriell: $\Sigma \vec{M}_i = 0$

Hebelgesetz:
Ein Hebel ist im Gleichgewicht, wenn die Summe der rechtsdrehenden Momente gleich der Summe der linksdrehenden Momente ist. Der Betrag des resultierenden Momentes ist null.

(Es genügt also nicht, dass die **Kräfte** gleich groß sind, sondern die **Drehmomente** müssen übereinstimmen.)

Anwendungen des Hebels:

zweiseitige Hebel: (Lastarm und Kraftarm sind bezüglich der Drehachse gegenüberliegend)

Beispiel: Die gleicharmige Balkenwaage ist ein zweiseitiger Hebel (die Kräfte greifen an verschiedenen Seiten der Drehachse an). (Skizze! Waage mit gleich langen Armen und daran die Schalen.) Die Balkenwaage ist im Gleichgewicht (Nullausschlag), wenn $M_1 = M_2 \Leftrightarrow F_1 \cdot l = F_2 \cdot l$ und damit $F_1 = F_2$ ist. Da $F_1 = m_1 g$ und $F_2 = m_2 g$ gilt im Gleichgewicht $m_1 = m_2$.

Beispiel: ungleicharmige Balkenwaage. (Skizze! Sauwaage. Waage mit einem festen Lastarm und einem Kraftarm mit beweglichen Massestück.) Die Balkenwaage ist nach Verschieben des Massenstücks im Gleichgewicht (Nullausschlag), wenn $M_1 = M_2 \Leftrightarrow F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$ ist.

einseitige Hebel: (Lastarm und Kraftarm sind bezüglich der Drehachse auf der gleichen Seite)

Beispiel: Eine Scheibtruhe ist ein einseitiger Hebel (die Kräfte greifen an der gleichen Seite der Drehachse an) (Skizze!). Im Gleichgewichtsfall gilt $M_1 = M_2 \Leftrightarrow F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$.

Um die aufzubringende Kraft $F_2 = \frac{F_1 \cdot l_1}{l_2}$ möglichst klein zu halten, kann man:

- F_1 (die Last) klein halten (kaum möglich)
- l_1 (den Lastarm) klein halten (über der Radachse aufladen!)
- l_2 (den Kraftarm) groß machen (nur begrenzt möglich)

Das Hebelgesetz erlaubt uns, mit einer kleinen Kraft an einem großen Kraftarm eine große Kraftwirkung zu erzielen.

Mit Hebeln kann man Kraft sparen. Es tritt eine Kraftübersetzung auf.
Ist der Kraftarm n-mal so lange wie der Lastarm, so muss man nur den n-ten Teil der Last aufwenden.
Je größer der Kraftarm ist, desto kleiner kann die aufzubringende Kraft sein.

Beispiel: Ein Kübel soll mit einer Kurbel 5m hochgezogen werden. Radius der Achse $r_1 = 50mm$, Radius der Kurbel $r_2 = 275mm$. Mit welcher Kraft muss gedreht werden, wenn der Kübel eine Gewichtskraft von 200N aufweist? Wie viele Umdrehungen sind für das Heben des Kübels notwendig? ($F = \frac{50}{275} \cdot 200N = 36{,}36N$, $n \cdot 2r_1 \cdot \pi = 5m$, Zahl der Umdrehungen $n = 15{,}92$)

Beispiel: Auf einer Wippe mit einer Seitelänge von 2m sitzt ein Kind mit 20kg. Wo muss ein Erwachsener mit 80kg sitzen, um diesem Kind das Gleichgewicht zu halten? (0,5m)

6.3 Allgemeine Gleichgewichtsbedingungen:

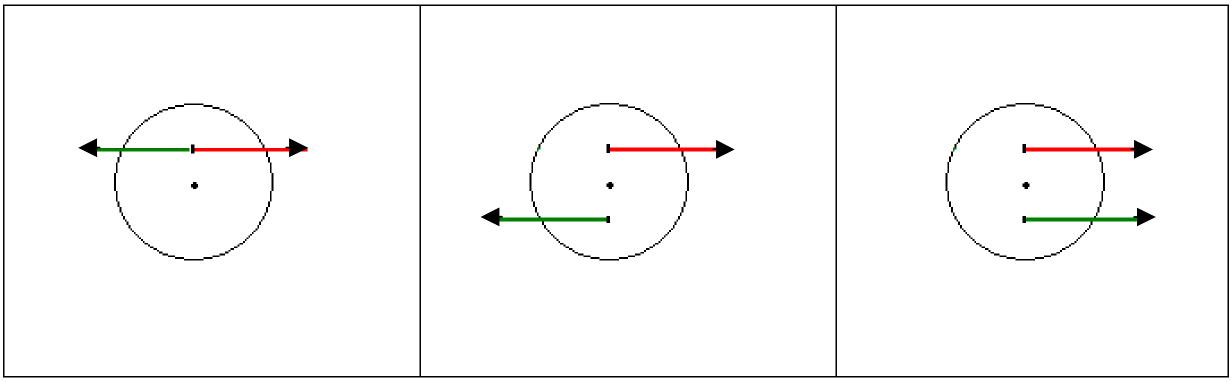
Greifen Kräfte an einem Körper an, so kann es zu einer Verschiebung und zu einer Drehung des Körpers kommen (Bewegung ist Translation und Rotation).

Ein Körper ist nur dann im Gleichgewicht (in Ruhe), wenn weder eine Verschiebung noch eine Drehung des Körpers auftritt.
Die maßgebliche Ursache einer Translation ist die Kraft, die maßgebliche Ursache einer Rotation ist das Drehmoment.

Damit keine Verschiebung auftritt, muss daher der Betrag der Resultierenden aller Kräfte null sein.
Damit keine Drehung auftritt, muss der Betrag der Resultierenden aller Drehmomente null sein.

Ein Körper ist dann im Gleichgewicht, wenn die Summe der an ihm angreifenden Kräfte und die Summe der an ihm wirkenden Drehmomente null ist.

Beispiele: Scheibe mit verschieden ansetzenden Kräften (Skizze!)



- zwei gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kräfte F_i mit gleichem Angriffspunkt
  ($\sum F_i = 0$: keine Translation, $\sum M_i = 0$: keine Rotation)
- zwei gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kräfte F_i mit gegenüberliegendem Angriffspunkt (die Kraftarme l_i sind gleich groß)
  ($\sum F_i = 0$: keine Translation, $\sum M_i \neq 0$: Rotation, Kräftepaar!)
- zwei gleich große, gleich gerichtete Kräfte F_i mit gegenüberliegendem Angriffspunkt (die Kraftarme l_i sind gleich groß)
  ($\sum F_i \neq 0$: Translation, $\sum M_i = 0$: keine Rotation)

Stets gilt in diesen Beispielen $\sum M_i = M_1 + M_2 = F_1 \cdot l_1 + F_2 \cdot l_2$ und $\sum F_i = F_1 + F_2$. Für die einzelnen Kräfte F_i sind je nach Orientierung die Werte F oder $-F$, für die einzelnen Kraftarme l_i sind je nach Orientierung die Werte l oder $-l$ zu nehmen.

Im Allgemeinen werden angreifende Kräfte sowohl eine Translation als auch eine Rotation bewirken.

<u>Schwerpunkt:</u>
Man kann sich einen beliebigen Körper zusammengesetzt denken aus lauter kleineren Körpern (Skizze!) (im Extremfall aus lauter Massenpunkten). Jeder dieser kleinen Körper wirkt mit seiner eigenen Gewichtskraft auf die Unterlage. Die Summe dieser Einzelkräfte muss dann die Gesamtgewichtskraft ergeben. Welchen Angriffspunkt hat diese Kraft?
Da der Körper sich in Ruhe befindet (er dreht sich nicht), muss dieser Punkt so gewählt werden, dass kein Drehmoment entsteht. Dieser Punkt heißt dann Schwerpunkt.
(Man findet ihn, indem den Körper an verschiedenen Punkten aufhängt und dann vom Aufhängepunkt das Lot zieht (Schwerlinie). Der Schnittpunkt aller Schwerlinien ist der Schwerpunkt.)

Wird ein Körper im Schwerpunkt unterstützt, so ist er im Gleichgewicht (in Ruhe). Der Betrag der Resultierenden aller durch die Gewichte der Teilkörper erzeugten Drehmomente ist dann null.

(Versuch: Balanciere ein Geodreieck auf einer Bleistiftspitze oder ein Lineal auf der schmalen Seitenfläche eines anderen Lineals!)

Ein starrer Körper verhält sich unter dem Einfluss der Schwerkraft so, als ob seine gesamte Masse im Schwerpunkt vereinigt wäre. Im Schwerpunkt kann man sich daher die gesamte Masse des Körpers vereinigt denken, deshalb wird er auch als **Massenmittelpunkt** bezeichnet.

Der Schwerpunkt ist der gedachte Angriffspunkt der gesamten Gewichtskraft.

Um die Translation eines Körpers zu beschreiben, denkt man sich alle Kräfte auf den Schwerpunkt wirkend.

Die allgemeine Bewegung eines Körpers kann beschrieben werden durch die Translation seines Schwerpunkts und durch die Rotation des Körpers um den Schwerpunkt.

Gleichgewichtslagen: (Skizze)

- Stabiles (sicheres) Gleichgewicht: Wird der Körper aus seiner Ruhelage gebracht, so kehrt er wieder in seine Ausgangslage zurück.
  Ein System kehrt bei kleinen Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage von selbst ins Gleichgewicht zurück.
  Beispiele:
  Kugel in Schüssel,
  nach unten hängendes Pendel,
  Klotz, der (nicht zu stark) gekippt wird und wieder in seine Ausgangslage zurückfällt,
  auf breiter Fläche (Finger) balanciertes Lineal.

- Labiles (unsicheres) Gleichgewicht: Wird der Körper auch nur wenig aus seiner Ruhelage gebracht, so entfernt er sich für immer aus seiner Ausgangslage und geht in eine stabile Lage über.
  Ein System verlässt bei kleinen Auslenkungen die Gleichgewichtslage für immer.
  Beispiele:
  Kugel auf umgedrehter Schüssel,
  nach oben stehendes Pendel,
  Klotz, der zu stark gekippt wird und umfällt,
  auf Bleistiftspitze balanciertes Lineal.

- Indifferentes (unbestimmtes) Gleichgewicht: Der Körper bleibt in jeder Lage in Ruhe.
  Ein System bleibt auch bei kleinen Auslenkungen in der Gleichgewichtslage.
  Beispiele: Kugel auf ebener Fläche.
  Die Gesamtheit aller Punkte, in denen der Körper im Gleichgewicht ist, bildet dann eine Fläche.

Ein Körper hat das Bestreben, eine Lage einzunehmen, in welcher der Schwerpunkt möglichst tief liegt.
Grund: die potentielle Energie wird dann minimal.
Dieses Bestreben gilt sowohl für Translation als auch für Rotation.

7. Elastische Eigenschaften fester Körper

7.1 Hookesches Gesetz

Aus dem Alltag kennen wir das elastische Verhalten (Elastizität) von Körpern.

Eine Verformung (Gestaltsänderung) heißt elastisch, wenn sie nach dem Aufhören der Krafteinwirkung wieder vollständig zurückgeht. (Beispiele: Gummi, Metall, Metallfeder)
Andernfalls heißt sie plastisch. (Beispiel: Plastillin)
Eine elastische Verformung ist reversibel (umkehrbar), eine plastische Verformung ist irreversibel (nicht umkehrbar).

In der Statik interessiert man sich nicht für Verformungen des Körpers. Man nimmt ihn als starr an. Natürlich gibt es keinen wirklich starren Körper. Er ist ein gedachter Grenzfall.

<u>Die elastische Verformung einer Schraubenfeder:</u>
Eine Schraubenfeder ist für die Untersuchung von Elastizitätseigenschaften besonders geeignet. Bei ihr sind große elastische Verformungen (Dehnungen) möglich, die gut sichtbar sind.
Dagegen sind elastische Verformungen eines Metallstabes so gering, dass sie nur mit speziellen Hilfsmitteln sichtbar gemacht werden können.

Versuch: Schraubenfeder. Belastung mit gleich großen Massestücken, Ausdehnung bestimmen. Liste mit Gewicht und Ausdehnung und Verhältnis von Kraft und Ausdehnung.

Die Ausdehnung Δx der Feder und die auf sie wirkende Kraft F sind proportional: $\Delta x \propto F$. Das heißt: wird die Kraft verdoppelt, so verdoppelt sich auch die Ausdehnung.

Gewicht F	Ausdehnung Δx
F	Δx
$2F$	$2\Delta x$
$3F$	$3\Delta x$

Dies wird mathematisch ausgedrückt:

$\Delta x = \dfrac{F}{k}$ oder umgeformt

Hookesches Gesetz oder lineares Kraftgesetz:

$$F = k \cdot \Delta x$$

vektoriell: $\vec{F} = k \cdot \Delta\vec{x}$

$$[k] = 1\frac{N}{m}$$

Anmerkung: dieses Kraftgesetz heißt linear, da die Abhängigkeitskurve der Kraft von der Ausdehnung eine Gerade ist.

Die Konstante k heißt Federkonstante oder Richtgröße. $k = \dfrac{F}{\Delta x}$.
Die Federkonstante charakterisiert das elastische Verhalten der Feder.

(Das Hookesche Gesetz beschreibt tatsächlich ein elastisches Verhalten:
die Verformung Δx verschwindet, wenn keine Kraft F wirkt.)

Ist k groß, so bedeutet das für eine bestimmte Kraft nur eine kleine Ausdehnung der Feder. Ist k klein, so bedeutet das eine große Ausdehnung. k bestimmt die Steifigkeit der Feder, die Federhärte.

Anmerkung: Eigentlich gilt: $F = -k \cdot \Delta x$, wenn man die der Auslenkung entgegengesetzte Richtung der Kraft berücksichtigen möchte. Vom Betrag her ist allerdings auch $F = k \cdot \Delta x$ richtig.

Je größer die Federkonstante ist, desto größer ist die für eine bestimmte Verlängerung erforderliche Kraft (desto härter, starrer, steifer ist die Feder).

Das lineare Kraftgesetz gilt, solange die Elastizitätsgrenze nicht überschritten wird. Der Gültigkeitsbereich heißt Proportionalitätsbereich, Linearitätsbereich oder Hookescher Bereich.

Beispiel: Eine Feder wird durch 5,25N um 2,5cm verlängert. Wie groß ist die Federkonstante, und welche Kraft kann die Feder um 1,5cm verlängern? ($\mathrm{k} = \frac{F}{\Delta \mathrm{x}} = \frac{5{,}25N}{0{,}025m} = 210\frac{N}{m}$, $\mathrm{F} = \mathrm{k} \cdot \Delta \mathrm{x} = 210\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot 0{,}015m = 3{,}15N$)

7.2 Spannung, Druck

Eine gedehnte oder gestauchte Feder steht unter Spannung.

Ohne äußere Kräfte befinden sich die Gitterbausteine in ihren Gleichgewichtslagen. Wirken äußere Kräfte ein (Dehnen oder Stauchen), werden die Gitterbausteine aus ihren Gleichgewichtslagen verrückt. Im Inneren des Körpers treten dadurch Verformungskräfte und damit verbunden Spannungen auf. Diese machen sich als Verformungen bemerkbar.

Die Spannung wird durch eine äußere Kraft verursacht. Dies Kraft greift allerdings nicht an einem Punkt an, sondern über eine Fläche verteilt. Die Wirkung einer Kraft ist daher auch abhängig von der Fläche, über die sie auf den Körper wirkt.

Kräfte wirken im Allgemeinen auf Flächen und verteilen sich über diese. Ihre Wirkung ist daher abhängig von der Größe der Kraft und von der Angriffsfläche.

Die Spannung ist umso größer, je größer die wirkende Kraft und je kleiner die Fläche ist.

$$Spannung \propto Kraft$$

$$Spannung \propto \frac{1}{Fläche}$$

Wir definieren:

$$\boxed{\begin{gathered} Spannung = \frac{Kraft}{Fläche} \\ \sigma = \frac{F}{A} \\ [\sigma] = 1\frac{N}{m^2} = 1Pa \quad \text{(Pascal)} \end{gathered}}$$

Die Spannung ist die Kraft, die pro Flächeneinheit wirkt.

Da sich mit der Einheit Pascal sehr große Maßzahlen ergeben (Pascal ist eine kleine Einheit), verwendet man oft die Einheiten $\frac{N}{mm^2}$ oder die Einheit bar.

Es gelten die Beziehungen:

$$1\ bar\ =\ 10^5\ Pa$$
$$1\frac{N}{mm^2} = 10^6\ \frac{N}{m^2}$$

Je nach der Art des Einflusses der äußeren Kraft unterscheidet man zwischen Zugspannung oder Druckspannung. Eine Druckspannung wird oft auch nur als Druck bezeichnet.

Beachte:
- bei kleinen Flächen können bereits kleine Kräfte einen großen Druck erzeugen (Nadel)
- durch große Flächen können große Kräfte ohne nennenswerten Druck verteilt werden (Kettenpanzer, Schi).

7.3 Spannung und Dehnung

Anhand der Dehnung eines Drahtes (Stabes) kann der Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung untersucht werden.

Es gilt: $\Delta l \propto \frac{F}{A} \cdot l$ oder unter Verwendung eines Proportionalitätsfaktors $\frac{1}{E}$:

$$\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{A} \cdot l$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{A} = \frac{1}{E} \cdot \sigma$$

F	...	wirkende Kraft
A	...	Querschnittsfläche
Δl	...	Längenänderung
l	...	Länge des Drahtes
E	...	Elastizitätsmodul.

Bezeichnet man $\frac{\Delta l}{l}$ mit $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ (**Dehnung** oder **relative Längenänderung**), dann erhält man aus $\varepsilon = \frac{1}{E} \cdot \sigma$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$
Hooksches Gesetz

Das Hooksche Gesetz stellt den Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung dar, der Proportionalitätsfaktor ist das Elastizitätsmodul.

Die Einheiten:

$$[\sigma] = 1\frac{N}{m^2} = 1Pa$$

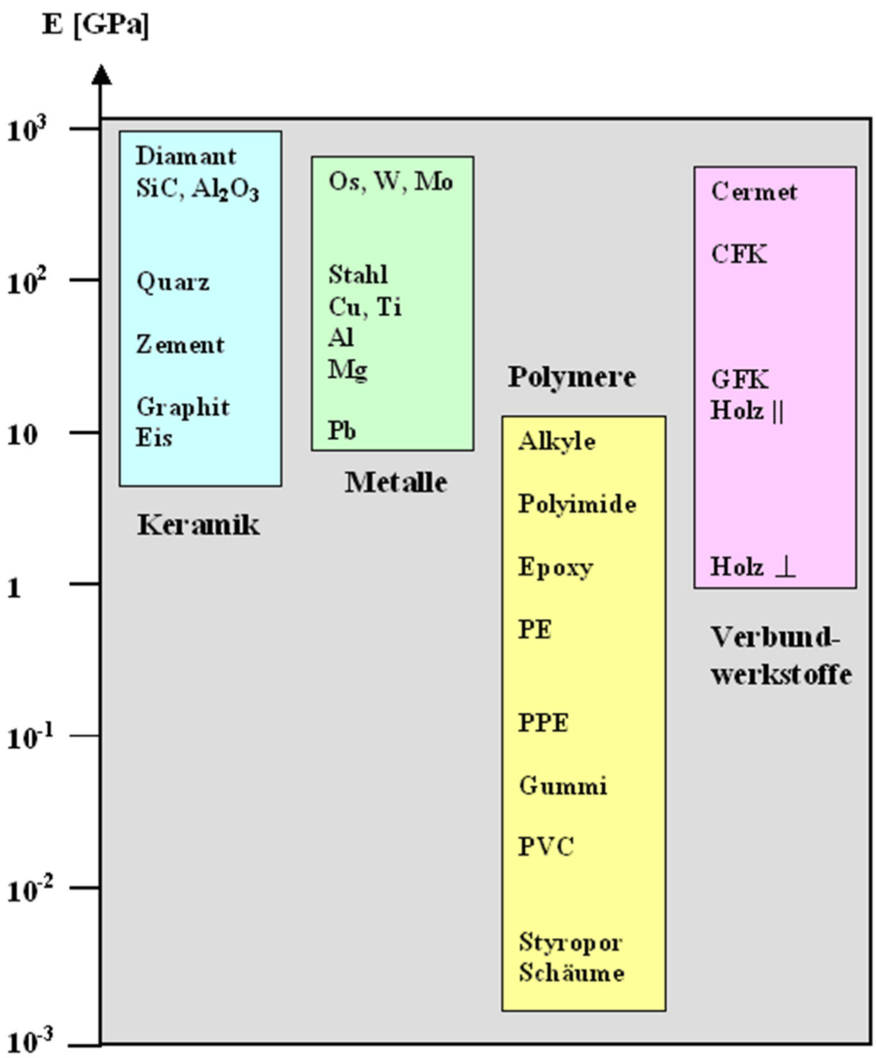
$$[\varepsilon] = 1 \text{ (dimensionslos)}$$
$$[E] = 1\frac{N}{m^2}$$

Beachte: Die Einheit des Elastizitätsmoduls ist $1\frac{N}{m^2}$ und nicht $1Pa$!

Beispiel: An einem 3m langen Stahldraht ($E = 2{,}1 \cdot 10^{11}\frac{N}{m^2}$) von 1,5mm Durchmesser hängt ein Gewicht von 200N. Wie groß ist die Längenänderung Δl und die Dehnung ε? ($\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{A} \cdot l$,

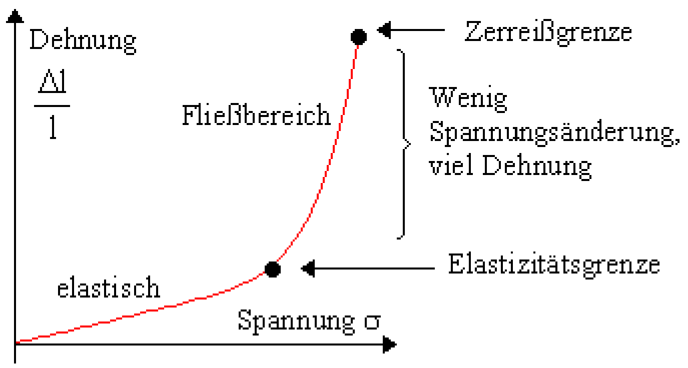
$\Delta l = \frac{200N \cdot 3m}{(0{,}75 \cdot 10^{-3}m)^2 \cdot \pi \cdot 2{,}1 \cdot 10^{11}\frac{N}{m^2}} = 1{,}62 \cdot 10^{-3}m$, $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta l}{3m} = 5{,}39 \cdot 10^{-4}$).

Beispiel: $E_{Kupfer} = 1{,}15 \cdot 10^{11}\frac{N}{m^2}$ $\quad E_{Aluminium} = 0{,}7 \cdot 10^{11}\frac{N}{m^2}$ $\quad E_{Gummi} = 0{,}01 - 0{,}1 \cdot 10^{9}\frac{N}{m^2}$



Spannungs-Dehnungs-Diagramm:

Wird ein „weicher“ Stahl durch Zug belastet, dann steigen anfangs im $\sigma - \varepsilon -$ Diagramm Zugspannung und Dehnung proportional zueinander an (Proportionalitätsbereich). Es ergibt sich eine Gerade mit der Steigung E. Bei weiterer Belastungszunahme wächst aber die Dehnung stärker als die Spannung. Der Werkstoff beginnt zu fließen.
Bei weiterer Belastung steigt die Spannung bei starker Dehnung weiter an. Bei der höchsten Spannung beginnt sich der Stab einzuschnüren und reißt schließlich ab.



Die Kurven von weicheren Körpern liegen oberhalb dieser Linie, die Kurve von härteren Körpern darunter.

Anmerkungen:
- Bleibt man unterhalb der Elastizitätsgrenze, so kehrt bei nachlassender Spannung der Spannungs-Dehnungs-Zustand auf derselben Linie zum Ursprung zurück (elastisches Verhalten! Die Verformung verschwindet vollständig.).
- Wird diese Grenze aber überschritten, dann bleibt, wenn die Spannung wieder gegen Null geht, eine Restdehnung zurück (mechanische Hysterese). Der Elastizitätsbereich wurde überschritten, die Verformung ist nicht mehr elastisch.

8. Dynamik

8.1 Trägheit und Masse

Beim Beschleunigen oder Abbremsen unseres Körpers spüren wir, dass der Körper dieser Geschwindigkeitsänderung einen Widerstand entgegensetzt. Diesen Widerstand bezeichnen wir als **Beharrungsvermögen** oder **Trägheit** des Körpers.

Die Trägheit (das Beharrungsvermögen) eines Körpers (von Materie) ist der Widerstand des Körpers (der Materie) gegen eine Änderung des Bewegungszustandes (= Beschleunigung)**.**

Trägheitsgesetz:
Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder in gleichförmig geradliniger Bewegung, so lange keine Kraft auf ihn einwirkt. Jeder Körper setzt einer Änderung des Bewegungszustandes (Beschleunigung) einen Widerstand entgegen.

(Beachte: die physikalische Größe der Bewegung ist die Geschwindigkeit, die der Bewegungsänderung die Beschleunigung.)

Diese Eigenschaft der Trägheit wird als Masse m bezeichnet. Je größer die Masse eines Körpers ist, desto größer ist auch der Widerstand, den der Körper einer Geschwindigkeitsänderung entgegensetzt.

Die Masse ist ein Maß für die Trägheit eines Körpers. Die Masse ist eine ortsunabhängige Eigenschaft eines Körpers.

$[m] = 1kg$ 1 Kilogramm

(Anschauliche Definition: Die Masse ist ein Maß für die Menge von Materie eines Körpers.)

8.2 Dynamisches Grundgesetz

Was ist nun die Ursache für eine Bewegungsänderung?

Kräfte sind die Ursachen von Bewegungsänderungen.

Zusammenhang zwischen Kraft, Masse und Beschleunigung:

(**Anmerkung:** Schüler sollen den Zusammenhang selbst erarbeiten:
- je größer ..., desto größer ... $\Rightarrow$ direkt proportional $\Rightarrow$ physikalische Größe steht im Zähler
- je kleiner ..., desto größer ... $\Rightarrow$ indirekt proportional $\Rightarrow$ physikalische Größe steht im Nenner

)

- Wird die Kraft auf eine bestimmt Masse verdoppelt, dann verdoppelt sich auch die dadurch bewirkte Beschleunigung.

  Die Beschleunigung ist damit direkt proportional zur Kraft:

  $a \propto F$.

- Wird dagegen bei konstanter beschleunigender Kraft die Masse verdoppelt, halbiert sich die Beschleunigung.

$$a \propto \frac{1}{m}.$$

Beide Proportionalitäten zusammen ergeben:

$$a \propto \frac{F}{m}.$$

Um die Gleichung so einfach als möglich zu gestalten, wählt man 1 als Proportionalitäts-faktor. Dies ist nur deshalb möglich, weil die Einheit für die Kraft noch nicht festgelegt wurde.

Dynamisches Grundgesetz (Grundgesetz der Dynamik):

$$\boxed{\begin{array}{c} F = m \cdot a \\ Kraft = Masse \cdot Beschleunigung \\ \vec{F} = m \cdot \vec{a} \end{array}}$$

Eine Masse m erfährt unter der Wirkung einer Kraft F eine Beschleunigung $a = \frac{F}{m}$**.**

Die Kraft ist natürlich eine abgeleitete Größe. Das dynamische Grundgesetz ist die „dynamische Definition" der Kraft.

$$\boxed{[F] = [m] \cdot [a] = 1\frac{kg \cdot m}{s^2} = 1N \text{ (1 Newton)}}$$

1 Newton ist jene Kraft, die einer Masse von 1kg die Beschleunigung von $1\frac{m}{s^2}$ **erteilt.**

(1 Newton ist jene Kraft, die eine Masse von 1kg in einer Sekunde von der Ruhe auf eine Geschwindigkeit von $1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ **bringt.)**

Beachte: der Trägheitssatz ist ein Sonderfall des dynamischen Grundgesetzes.
Falls $F = 0$, dann ist auch $a = 0$ (wirkt keine Kraft, dann erfolgt auch keine Beschleunigung).

Die Newtonschen Gesetze:

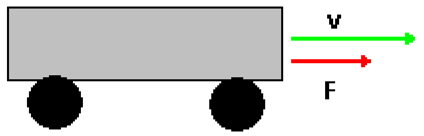
- Erstes Newtonsches Gesetz: Trägheitsgesetz.
- Zweites Newtonsches Gesetz: dynamisches Grundgesetz.
- Drittes Newtonsches Gesetz: Wechselwirkungsgesetz (Aktion und Gegenaktion).

Beispiel: Eine Fahrzeug mit einer Masse von 850kg hat eine Geschwindigkeit von 50km/h. Welche Endgeschwindigkeit stellt sich ein, wenn 8s lang eine beschleunigende Kraft von 2380N wirkt? ($a = \frac{F}{m} = \frac{2380N}{850kg} = 2{,}80\frac{m}{s^2}$, $v(t) = at + v_0 = 2{,}8\frac{m}{s^2} \cdot 8s + \frac{50}{3{,}6}\frac{m}{s} = 36{,}29\frac{m}{s} = 130{,}6\frac{km}{h}$)

8.3 Anwendungen des dynamischen Grundgesetzes

Wir interessieren uns nun auch für die Richtung der Beschleunigungen und nicht nur für deren Betrag.

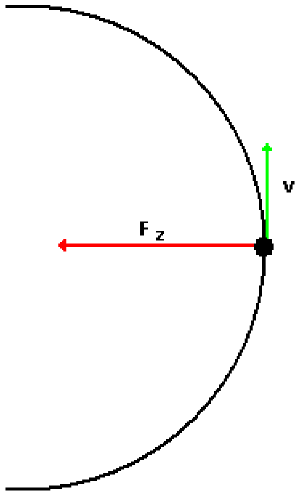
Die Kraft wirkt in Bahnrichtung: (d.h. in Richtung der Geschwindigkeit)



Die beschleunigende Kraft in Bahnrichtung bewirkt eine Änderung des Geschwindigkeitsbetrages, die Bewegungsrichtung (die Richtung der Bahn) bleibt aber gleich. Diese Beschleunigung heißt auch Bahnbeschleunigung.

Die Kraft wirkt normal zur Bahnrichtung:

Wird ein Tennisball an einer Federwaage mit konstanter Geschwindigkeit im Kreis bewegt, so zeigt sich, dass trotz konstanter Bahngeschwindigkeit die Waage eine Kraft anzeigt. Diese Kraft ist zum Kreismittelpunkt gerichtet und zwingt den Körper auf die Kreisbahn, sie ändert also die Richtung der Bewegung. Wir nennen sie Zentripetalkraft F_Z. **Die Zentripetalkraft ist jene Kraft, die einen Körper auf eine Kreisbahn zwingt.**



(**Anmerkung:** Die Schüler sollen den Zusammenhang selbst erarbeiten:
- je größer ..., desto größer ... $\Rightarrow$ direkt proportional $\Rightarrow$ physikalische Größe steht im Zähler
- je kleiner ..., desto größer ... $\Rightarrow$ indirekt proportional $\Rightarrow$ physikalische Größe steht im Nenner

)

Der Zusammenhang zwischen Zentripetalkraft, Masse, Geschwindigkeit und Radius ist:

$$\boxed{F_Z = m\frac{v^2}{r}}$$

m ... Masse des Körpers
v ... Geschwindigkeit des Körpers
r ... Radius der Kreisbahn

Der Faktor $\frac{v^2}{r}$ besitzt die Einheit einer Beschleunigung.

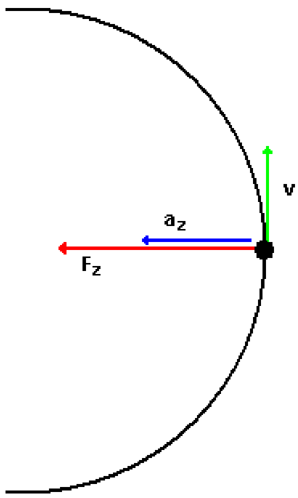
(**Frage:** Beweise das! ($\left[\frac{v^2}{r}\right] = 1\frac{(\frac{m}{s})^2}{m} = 1\frac{m}{s^2}$)).

Wir schreiben für $\frac{v^2}{r}$ kurz a_Z und nennen diese Größe **Zentripetalbeschleunigung**.

$$\boxed{F_Z = ma_Z}$$

Die Masse m ist stets positiv, daher sind die Vektoren $\vec{F}$ und $\vec{a}_Z$ gleich orientiert. $\vec{a}_Z$ zeigt zum Rotationszentrum.

$$\boxed{\vec{F}_Z = m\vec{a}_Z}$$



Da die Bahngeschwindigkeit stets den gleichen Betrag hat, muss die Zentripetal-beschleunigung ihre Ursache in der Richtungsänderung der Bahngeschwindigkeit haben.

Um den Körper auf seiner Kreisbahn zu halten, ist eine Kraft nötig. Da aber Kräfte Ursachen von Beschleunigungen sind, ist die Kreisbewegung eine beschleunigte Bewegung. Es ändert sich zwar nicht der Betrag der Geschwindigkeit (die „Schnelligkeit“), sehr wohl aber die Richtung der Geschwindigkeit.

Die gleichförmige Kreisbewegung ist eine beschleunigte Bewegung. In jedem Punkt der Bahn zeigt die Zentripetalbeschleunigung a_Z zum Kreismittelpunkt.
Die Ursache dieser Beschleunigung ist die Zentripetalkraft F_Z, die nur die Richtung der Bewegung, aber nicht den Betrag der Geschwindigkeit ändert.

$$\boxed{\begin{aligned} a_Z &= \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \\ F_Z &= ma_Z = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r \end{aligned}}$$

Das dynamische Grundgesetz gilt somit sowohl für Kräfte in der Bahnrichtung als auch normal zu ihr.

Beachte: Die Kreisbahn stellt eine Abweichung der Bahn von einer Geraden dar. Nach dem Trägheitssatz muss daher eine Kraft wirksam sein. Diese ist natürlich der Änderung des Geschwindigkeitsvektors (der Beschleunigung) gleichgerichtet, die zum Kreismittelpunkt zeigt.

Beispiel: Ein Stein ($m = 0{,}25kg$) wird an einer Schnur im Kreis ($r = 60cm$) geschleudert. Der horizontale Schleuderkreis liegt in 1,7m Höhe. Welche Zentripetalkraft muss ständig aufgebracht werden, damit der Stein eine Bahngeschwindigkeit von $30\frac{km}{h}$ besitzt? Wie groß ist die Umlaufzeit? Wie lang und weit fliegt der Stein, wenn die Schnur reißt?

($F_Z = m\frac{v^2}{r} = 0{,}25kg \cdot \frac{(\frac{30}{3{,}6}\frac{m}{s})^2}{0{,}6m} = 0{,}25kg \cdot 115{,}74\frac{m}{s^2} = 28{,}94N$,

Umlaufzeit: $T = \frac{2\pi r}{v} = 0{,}45s$, Wurfzeit: $h = \frac{g}{2}t^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0{,}59s$, Wurfweite: $s = v \cdot t = 4{,}9m$)

8.4 Gewichtskraft und Masse

Gewichtskraft:

Jeder Körper wird von der Erde angezogen. Diese anziehende Kraft heißt Gewichtskraft, Schwerkraft, Erdanziehungskraft oder kurz Gewicht. Dabei können die typischen Wirkungen einer Kraft (Beschleunigung und Verformung) beobachtet werden.

Achtung: Im Alltag wird mit Gewicht oft die Masse bezeichnet! Das ist ein Irrtum!
Die Gewichtskraft ist jene Kraft, mit der ein Körper von der Erde (oder allgemein von einer anderen Masse) auf Grund seiner Masse angezogen wird.

Die Gewichtskraft greift im Schwerpunkt des Körpers an und ist zum Erdmittelpunkt hin gerichtet.

Für jede beschleunigende Kraft gilt das dynamische Grundgesetz $F = m \cdot a$. Daher gilt für die Gewichtskraft:

$$\boxed{\begin{array}{c} Gewichtskraft = Masse \cdot Fallbeschleunigung \\ F_G = m \cdot g \end{array}}$$

Die Gewichtskraft ist jene Kraft, die einer Masse m die Fallbeschleunigung g erteilt.
Die Gewichtskraft ist vom Ort abhängig an dem sie wirkt, daher ist das auch die Fallbeschleunigung.

Die Masse ist eine unveränderliche (ortsunabhängige) Eigenschaft eines Körpers. Die Gewichtskraft dagegen ist ortsabhängig.

Die Fallbeschleunigung ist für alle Körper am selben Ort gleich groß, die Gewichtskraft ist von der Masse abhängig.

Beispiel: Berechne das Gewicht (die Gewichtskraft) eines Mannes mit 80kg. (784,8N)

Die Messung der Masse mit der gleicharmigen Balkenwaage:

(Skizze: Balkenwaage mit Schalen.)
Mit Hilfe von Gewichtsstücken wird Gleichgewicht am Balken eingestellt. Dabei ist das linksdrehende Moment M_1 gleich dem rechtsdrehenden Moment M_2.

$$M_1 = M_2$$
$$F_1 \cdot l = F_2 \cdot l$$
$$F_1 = F_2$$
$$m_1 \cdot g = m_2 \cdot g$$
$$m_1 = m_2$$

Mit der Balkenwaage werden Massen verglichen.

Am Pol erhält man damit das gleiche Ergebnis wie am Äquator.

Die Messung der Masse mit der Federwaage:

Eine Federwaage misst die Gewichtskraft im Gleichgewicht mit einer gespannten oder gestauchten Feder.
Die Feder wird dabei so weit gedehnt bis $F = k \cdot \Delta x = F_G$.
Die einfachste Form der Federwaage ist der Kraftmesser. Auch die Personenwaage ist eine Federwaage, allerdings zeigt ihre Skala Kilogramm (also Masseneinheiten) an. Da die Gewichtskraft ortsabhängig ist, die Masse aber nicht, gilt, dass diese Waagen nur an dem Ort richtige Werte anzeigt, an dem sie eingestellt wurden.

Am Pol erhält man damit eine höhere Gewichtskraft als am Äquator.

8.5 Dichte

Betrachtet man verschiedene Körper mit demselben Volumen, so zeigt sich, dass deren Massen stark unterschiedlich sein können. So hat $1cm^3$ Kupfer eine größere Masse als $1cm^3$ Aluminium.

Man bezeichnet allgemein Masse pro Volumseinheit (Masse durch Volumen) als die Dichte eines Stoffes. Die Dichte ist eine charakteristische Stoffkonstante.

$$Dichte = \frac{Masse}{Volumen}$$
$$\rho = \frac{m}{V}$$
$$[\rho] = 1\frac{kg}{m^3} = 10^{-3}\frac{kg}{l}$$

Die auf ein Liter bezogene Dichteeinheit wird besonders bei Flüssigkeiten und Gasen verwendet.

$$[\rho] = 1\frac{kg}{m^3} = 10^{-3}\frac{kg}{l} = 10^{-3}\frac{kg}{dm^3} = 10^{-3}\frac{g}{cm^3}$$

Die Dichte ist ein Maß für die Packungsdichte der atomaren Bestandteile eines Stoffes.

Beispiel: Wasser

$$[\rho_{H_2O}] = 1000\frac{kg}{m^3} = 1\frac{kg}{l} = 1\frac{kg}{dm^3} = 1\frac{g}{cm^3}$$

Wird ein physikalische Größe auf eine Volumseinheit bezogen, dann nennt man sie eine **spezifische Größe**. Deshalb wird die Dichte auch manchmal als **spezifische Masse** bezeichnet.

„Blei ist schwerer als Stahl“ ist eigentlich kein korrekter Ausdruck. Es kann nur ein Körper schwerer als ein anderer sein; die Schwerkraft auf einen Körper ist abhängig vom Stoff und vom Volumen. Der Vergleich zwischen zwei Stoffen kann daher nur in der Dichte (also unabhängig vom Volumen) erfolgen. „Blei hat eine größere Dichte als Stahl.“

In der Praxis muss man hin und wieder die Masse eines Körpers aus der Dichte des Stoffes und seinem Volumen berechnen:

$$\boxed{\rho = \frac{m}{V} \Leftrightarrow m = \rho \cdot V}$$

Beispiel: Berechne die Dichte von Kupfer mit Hilfe eines Würfels von 2cm Kantenlänge und der Masse $71{,}2g$. ($V = (2 \cdot 10^{-2})^3 m^3 = 8 \cdot 10^{-6} m^3$, $\rho = \frac{m}{V} = \frac{7{,}12 \cdot 10^{-2} kg}{8 \cdot 10^{-6}} = 8900 \frac{kg}{m^3} = 8{,}9 \frac{g}{cm^3}$)

Beispiel: Berechne Masse und Gewicht eines 100m langen Kupferdrahtes von 2mm Durchmesser. ($V = \frac{d^2\pi}{4} \cdot l = \frac{(2 \cdot 10^{-3})^2 \cdot \pi}{4} \cdot 10^2 m^3 = 3{,}14 \cdot 10^{-4} m^3$, $m = \rho \cdot V = 8900 \frac{kg}{m^3} \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-4} m^3 = 2{,}80 kg$,

Gewicht: $F_G = m \cdot g = m \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} = 27{,}43 N$)

Beispiel: Die Masse von Wasser beträgt $\rho = 1000 \frac{kg}{m^3} = 1 \frac{kg}{l} = 1 \frac{kg}{dm^3} = 1 \frac{g}{cm^3}$

8.6 Reibung

Reibung ist eine stets die Bewegung behindernde, bremsende Kraft, wenn zwei Körper einander berühren.

Haftreibung (Haftung):

Haftreibung tritt auf, wenn zwei einander berührende (aber noch ruhende) Körper gegeneinander verschoben werden sollen.

Beispiel: Reibungsapparat. Man zieht mit einem Kraftmesser an einem Klotz, der auf einer Oberfläche aufliegt. Die Zugkraft kann bis zu einem bestimmten Maximalwert anwachsen, ohne dass sich der Körper bewegt. Das heißt aber (keine Bewegung = keine Beschleunigung = alle auf den Körper wirkenden Kräfte sind null), dass der variierenden Federkraft in diesem Ruhezustand stets eine Kraft entgegenwirken muss, die immer gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet ist.

Die Haftreibungskraft ist stets gleich groß, aber entgegen gesetzt gerichtet zur angreifenden Kraft. Sie wächst bis zu einem Maximalwert F_{max} der angreifenden Kraft mit, bei dem sich der Körper gerade noch nicht zu bewegen beginnt und damit die Haftreibung in die Gleitreibung übergeht.

Der Maximalwert der Zugkraft $F_{\max}$ ohne Bewegung des Körpers steht im Gleichgewicht mit der maximalen Haftreibungskraft oder Haftung F_R.
F_R ist daher gleich groß wie $F_{\max}$, aber entgegengesetzt gerichtet.

Die Haftung versucht die Bewegung zu verhindern. Wird die maximale Zugkraft aber überschritten. so setzt sich der Körper in Bewegung.

Frage: Bewegt sich der Körper bei Zugkraft = $F_{\max}$? (Nein, erst wenn $F_{\max}$ überschritten wird.)

Gleitreibung:
Gleittreibung tritt auf, wenn zwei einander berührende Körper gegeneinander verschoben werden.

Die Bewegung des Körpers und die Gleitreibungskraft F_R sind entgegen gesetzt gerichtet. Die Größe der Gleitreibungskraft ist aber unabhängig von der Größe der ziehenden Kraft.

Bei einer gleichförmigen Bewegung halten eine Zugkraft F und die Gleitreibungskraft einander das Gleichgewicht.

Frage: Woran sieht man das? (Keine Beschleunigung bedeutet, dass die Summe aller angreifenden Kräfte null ist.)

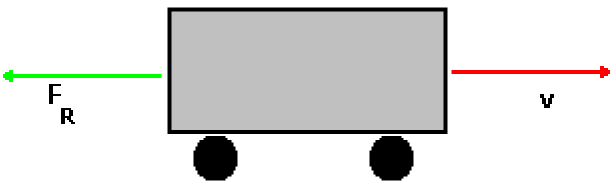
Die Gleitreibung hemmt die Bewegung.

Es gilt:	$F = F_R$	...	gleichförmige Bewegung
	$F < F_R$	...	verzögerte Bewegung
	$F > F_R$	...	beschleunigte Bewegung

Versuch: Ein Gewicht hängt mit einem Ring an einem Stab. Wird der Stab hoch gehoben, so wirkt die Haftung der Gewichtskraft entgegen. Hebt man den Stab bis zu einer Höhe, wo das Gewicht noch gerade nicht zu rutschen beginnt und dreht dann den Stab um seine eigene Achse, so beginnt das Gewicht zu rutschen.

Haftreibungskraft > Gleitreibungskraft

Rollreibung:
Rollreibung tritt auf, wenn ein Körper auf einem anderen abrollt.



Wiederum gilt: Bewegung und Rollreibungskraft F_R sind entgegengerichtet und halten bei einer gleichförmigen Bewegung einander das Gleichgewicht.

Die Rollreibungskraft ist wesentlich kleiner als die Gleitreibungskraft, ist aber wie diese der Bewegung des Körpers entgegen gerichtet.

Allgemein gilt:
Jede Bewegung wird durch Reibung gehemmt. Bei jeder Bewegung wirkt eine Reibungskraft der Zugkraft entgegen (Reibungswiderstand).

Haftreibung:	entgegen der angreifenden Kraft
Gleit- / Rollreibung:	entgegen der Bewegung (Geschwindigkeit)

Reibungsgesetz für die Gleitreibung:

Versuch: Reibungsapparat. Durch Auflegen verschiedener Gewichte werden die Berührungsflächen von Reibungsapparat und Boden verschieden stark aufeinander gepresst. Wie stark diese beiden Körper aufeinander gepresst werden, wird durch die **Normalkraft** F_N angegeben.

Beachte, dass Gewichtskraft und Normalkraft nicht immer identisch sind (schiefe Ebene!).

Vervielfacht man die Normalkraft, dann wird auch die Reibungskraft größer.

$F_R \propto F_N$.

Die Reibungskraft ist direkt proportional zur Normalkraft.

$$F_R = \mu F_N \quad \text{... } \textbf{Reibungsgesetz}$$
$$[\mu] = 1$$

μ ... Reibungszahl, Reibungskoeffizient der Gleitreibung

μ ist dimensionslos, sie ist eine Verhältniszahl.

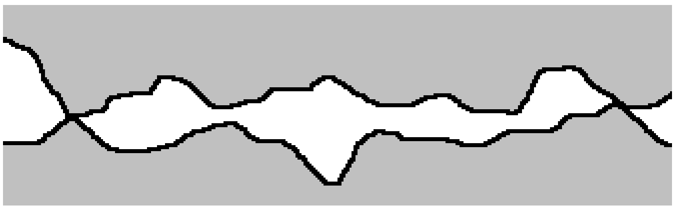
Die Reibung ist mikroskopisch betrachtet ein äußerst komplizierter Vorgang, der nicht vollständig berechnet werden kann. Alle nicht berechenbaren Einflüsse stecken in der Reibungszahl μ. Diese kann nur durch Versuche ermittelt werden und gilt stets nur für das betreffende Stoffpaar. Das Reibungsgesetz gilt stets auch nur näherungsweise!

Die Reibungszahl ist von der Stoffart und von der Beschaffenheit der Berührungsflächen abhängig.

Versuch: Reibungsapparat. Durch Verwenden verschiedener Berührungsflächen variiert auch die Gleitreibungskraft.

Je rauer die Berührungsflächen sind, desto größer ist die Reibungskraft.

Unter dem Mikroskop sind auch scheinbar glatte Oberflächen eines Körpers uneben. Diese Erhebungen und Vertiefungen von Körper und Unterlage verzahnen sich ineinander.



Die Reibungskraft ist für starre Körper von der Größe der Berührungsfläche nahezu unabhängig.
Dies wird verständlich, wenn man bedenkt, dass mikroskopisch betrachtet ein starrer Körper und die Unterlage sich nur in drei Punkten berühren.

(Beachte: für verformbare Körper gilt das nicht! Breite Autoreifen liefern eine bessere Bodenhaftung als schmale Reifen. Verformbare Körper können einander über große Flächen berühren.)

Die Reibung ist abhängig von

- **der Normalkraft (i.e. die Kraft, mit der die beiden Flächen aufeinander gepresst werden)**
- **der Stoffart der berührenden Körper**
- **der Oberflächenbeschaffenheit.**

Sie ist für starre Körper (fast) unabhängig von der Größe der Berührungsfläche.

Schmierung: Werden die Oberflächen der beteiligten Körper mit Schmiermitteln (Öl, Fett, ...) überzogen, dann können sich die Körper nicht berühren. Die Reibung tritt dann nur innerhalb der Schmierschicht auf. Diese innere Reibung ist viel geringer als die äußere Reibung.
Schmierung vermindert die Reibung.
Auch durch Wasserschichten kann die Reibung vermindert werden (Aquaplaning)!

Reibungsgesetz für die Haftreibung:

Die Haftreibung wird ähnlich wie die Gleitreibung beschrieben.

$$F_R = \mu_0 F_N$$
$$[\mu_0] = 1$$

μ_0 ... Haftreibungszahl

Beispiel: Holz auf Holz. $\mathrm{m} = 10\mathrm{kg}$, $\mathrm{F_R} = 0{,}5 \cdot 10\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \frac{1}{2}\mathrm{F_G}$. Um den Körper zu verschieben muss also nur die halbe Gewichtskraft aufgebracht werden.
(Welche Masse kann ein Schüler noch gerade schieben? Geschätzt ca. 80kg, weil er ungefähr 40kg heben kann.)

Reibungsgesetz für die Rollreibung:

Auch für die Rollreibung gilt ein ähnliches Reibungsgesetz.

$$F_R = \mu_R F_N$$
$$[\mu_R] = 1$$

μ_R ... Rollreibungszahl

Die Rollreibung wird nicht nur durch die Stoffeigenschaften bestimmt, sondern auch durch die Verformung des Rades oder der Unterlage und vom Radius des Rades. Die Rollreibungszahl ist wesentlich kleiner als die Gleitreibungszahl.

Beispiel: Kugel- und Rollenlager.

Stoffpaar	μ_0	μ	μ_r
Holz auf Holz	0,4 – 0,6	0,2 – 0,4	
Stahl auf Stahl	0,2 – 0,3	0,1 – 0,2	0,003
Autoreifen auf Asphalt (trocken)	0,8	0,75	0,025
Autoreifen auf Asphalt (nass)	0,5	0,45	
Autoreifen auf Eis	0,1	0,05	

Vorteile der Reibung:

Reibung ist nicht nur ein unerwünschter Effekt, sonder auch mitunter ein notwendige Voraussetzung für uns vertraute Erscheinungen.

- Beim Gehen drücken wir mit einer Kraft nach hinten. Die Haftreibungskraft des Fußes auf dem Boden als Gegenkraft ist nach vorne gerichtet und ist die Antriebskraft. Ohne Haftreibungskraft würden wir rutschen und nicht vom Fleck kommen.

- Beim Fahren wird die Antriebskraft des Motors durch die Haftreibung auf die Straße übertragen. Die Rollreibung hemmt die Bewegung.

  Dreht sich der Reifen ohne Schlupf (ohne Rutschen) über den Boden, dann wirkt die Haftreibungskraft, beim Rutschen ist nur die bei weitem kleinere Gleitreibung wirksam. Der Bremsweg bei blockierenden Reifen ist daher wesentlich länger.

  Beispiel: Kurvenfahrt eines Autos.
  Die Haftreibungskraft soll so groß sein, dass das Auto nicht von der Straße rutscht.
  - Haftreibungszahl μ_0 vergrößern (weiche Gummireifen)
  - Normalkraft erhöhen (Spoiler)
  - Zentrifugale Fliehkräfte wirken parallel zur Fahrbahn und leisten damit keinen Beitrag zur Normalkraft. Wird die Fahrbahn in der Kurve aber schräg gebaut, so wird eine Komponente der Zentrifugalkraft als Normalkraft wirksam.

- Beim Bremsen wird die Bremskraft durch Reibung auf die Straße übertragen.

- Verbindungen, die mit Nägeln oder Schrauben hergestellt sind, halten dank der Haftreibung.

Beispiel: Ein Auto fährt mit einer Geschwindigkeit von 100km/h auf trockener Straße. In welcher Zeit kann das Fahrzeug zum Stillstand gebracht werden? Wie groß ist dann der Bremsweg?
(Wenn die Räder gerade nicht blockieren, ist die Haftreibung (Normalkraft $F_N = F_G = m \cdot g$, $F_R = \mu_0 F_N = \mu_0 mg$) maximal wirksam. Dadurch wird die maximale Bremskraft gerade zur Haftreibungskraft: $m \cdot a = \mu_0 \cdot m \cdot g$.

Die maximale Verzögerung ist dann $a = \mu_0 \cdot g = 0{,}8 \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} = 7{,}85 \frac{m}{s^2}$.

Beachte: Die maximale Verzögerung ist unabhängig von der Masse, da sich diese wegkürzt (Gewicht und Reibung sind proportional zur Masse.).

Die Bremszeit berechnet sich aus $t = \frac{v}{a} = \frac{\frac{100}{3{,}6}\frac{m}{s}}{7{,}85 \frac{m}{s^2}} = 3{,}5s$ und der Bremsweg aus $s = \frac{v^2}{2a} = \frac{v}{2} \cdot t = 49m$.)

Beispiel: Mit welcher Höchstgeschwindigkeit darf ein Auto in eine Kurve mit dem Krümmungsradius 150m fahren, ohne die Bodenhaftung zu verlieren?
(Zentrifugalkraft und Haftreibungskraft müssen einander gleich sein, um gerade noch die Kurve durchfahren zu können. $F_R = \mu_0 mg = m\frac{v^2}{r} \Leftrightarrow v^2 = \mu_0 \cdot g \cdot r \Leftrightarrow v = \sqrt{\mu_0 \cdot g \cdot r} = \sqrt{0{,}8 \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 150m} = 34{,}31 \frac{m}{s} = 123 \frac{km}{h}$)

Nachteile der Reibung:

- Nach dem Trägheitsgesetz bleibt ein Körper im Zustand der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung, solange keine Kräfte auf ihn einwirken. Da aber bei jeder Bewegung Reibungskräfte auftreten, erfordert eine gleichförmige, geradlinige Bewegung eine ständige Antriebskraft (die gleich groß wie die

Rollreibungs- oder Gleitreibungskraft ist), um die Behinderung durch die Reibungskräfte zu überwinden. Energieverlust!

- Materialabnützung.
- Wärmeentwicklung.

8.7 Arbeit

Kräfte bewirken an einem Körper eine Änderung des Bewegungszustandes oder eine Verformung.

Betrachtet man das Auftreten einer Kraft entlang eines Weges, so kommt man zu einer neuen physikalischen Größe: der Arbeit.

Arbeit wird verrichtet, wenn ein Körper entlang einer Kraft oder gegen eine Kraft um eine Wegstrecke verschoben wird.

$$Arbeit = Kraft\ in\ Richtung\ des\ Weges \cdot Weg$$
$$W = F_S \cdot s$$
$$[W] = 1Nm = 1J = 1Ws$$

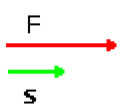
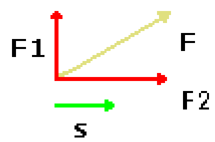
(1 Newtonmeter, 1 Joule, 1 Wattsekunde)

Mitunter wird auch die Einheit Kilowattstunde (kWh) üblich: $1kWh = 3{,}6 \cdot 10^6\,Ws$.

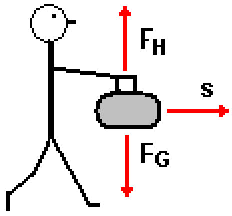
Die Arbeit W ist eine skalare Größe, $\vec{F_S}$ und $\vec{s}$ sind dagegen vektorielle Größen.

Beachte: Die Arbeit enthält nur den Anteil einer Kraft in Richtung des Weges, Komponenten der Kraft normal zum Weg liefern keinen Beitrag!
Zeigt eine Kraft nicht in Richtung des Weges, so zerlegt man die Kraft in eine Komponente in Richtung des Weges und in eine Komponente normal dazu. Einen Beitrag zur Arbeit leistet dann nur die Komponente in Wegrichtung.

Beispiel:

 $W = F \cdot s$	 $W = F_2 \cdot s$ F_1 liefert keinen Beitrag zur Arbeit F_2 liefert einen Beitrag zur Arbeit

Beispiel: Ein Koffer wird in der Hand getragen.



Es muss dabei nur eine Kraft entgegen die Schwerkraft aufgebracht werden, in Richtung des Weges gibt es keine Kraft. Damit wird auch keine Arbeit entlang des Weges geleistet.

Hubarbeit, Hebearbeit:
Um eine Masse m um die Höhe h anzuheben, muss die Gewichtskraft F_G auf den Körper überwunden werden.

Hubarbeit: $W_H = F_G \cdot h = m \cdot g \cdot h$

Dehnungsarbeit:
Bei der Berechnung der Arbeit zur Verformung einer Feder muss beachtet werden, dass die Kraft bei dieser Verformung nicht konstant bleibt.

Frage: Warum? (Die Federkraft ist proportional zur Auslenkung.)

Da die Federkraft linear ansteigt, kann man zur Berechnung der Arbeit von der Ruhelage (Auslenkung x_1) bis zur Auslenkung x_2 den Mittelwert der Federkraft $\overline{F} = \frac{1}{2} \cdot (kx_2 - kx_1) = \frac{k \cdot (x_2 - x_1)}{2} = \frac{k \cdot \Delta x}{2}$ nehmen.

Die Arbeit wird dadurch zu $W = \overline{F} \cdot \Delta x = \frac{k \cdot \Delta x}{2} \cdot \Delta x = \frac{k \cdot (\Delta x)^2}{2}$

Dehnungsarbeit: $W_D = \frac{k \cdot (\Delta x)^2}{2}$

Beschleunigungsarbeit:
Wird ein ruhender Körper aus dem ruhenden Zustand entlang eines Weges s durch eine konstante Kraft gleichmäßig beschleunigt, so wird Beschleunigungsarbeit verrichtet.

$W = F \cdot s = m \cdot a \cdot s = m \cdot a \cdot \frac{a}{2} t^2 = m \cdot \frac{a^2}{2} \cdot t^2 = m \cdot \frac{v^2}{2 \cdot t^2} \cdot t^2 = \frac{mv^2}{2}$ (da $a = \frac{v}{t}$).

Beschleunigungsarbeit: $W_B = \frac{m \cdot v^2}{2}$

(W_B ist jene Arbeit, die notwendig ist, um einen Körper der masse m vom Stillstand auf die Geschwindigkeit v zu beschleunigen.)
Beachte: Die Beschleunigungsarbeit steigt mit dem Quadrat der Geschwindigkeit. Um die doppelte Geschwindigkeit zu erreichen, ist die vierfache Arbeit erforderlich. Dasselbe gilt natürlich auch für die Abbremsung aus der doppelten Geschwindigkeit!

Reibungsarbeit:

Sie ist erforderlich, um einen Körper mit konstanter Geschwindigkeit entlang eines Weges gegen die Reibungskraft zu bewegen.

Reibungsarbeit: $W_R = F_r \cdot s$

8.8 Energie

Beispiel: Eine Kugel, die in einer bestimmten Höhe in eine runde Schüssel gelegt wird und dann diese Fläche hinunterrollt (Skizze!), kann auf der anderen Seite der Schüssel kein höheres Niveau erreichen als das Ausgangsniveau.
Das gleiche gilt für ein aus der Ruhelage ausgelenktes Pendel.

Natürlich verhindert die Reibung, dass die rollende Kugel die Ausgangshöhe ganz erreicht. Aber es zeigt sich, dass sie dem Ausgangsniveau umso näher kommt, je geringer die Reibung ist.

Die Geschwindigkeit am Fuß der Schüssel hängt nur von der Höhendifferenz h und nicht von der Neigung der Schüsselwand ab (siehe schiefe Ebene!). Sieht man von der Reibung ab, findet ein andauerndes Hinauf- und Hinunterrollen der Kugel statt. Es treten immer dieselben Höhen und dieselben Geschwindigkeiten auf.

Diese Erscheinung lässt auf eine neue physikalische Größe schließen, die erhalten bleibt, sich also nicht ändert. Diese Größe heißt **Energie**.

Betrachtet man obiges Beispiel, dann wird zu Beginn Hubarbeit an der Kugel verrichtet, um sie an die Ausgangsstelle an der Schüsselinnenfläche zu bringen. Diese Arbeit wird beim Hinunterrollen offenbar wieder frei und in Beschleunigungsarbeit umgewandelt.
Die anfängliche Arbeit ist also eine Art Arbeitsvermögen: diese Arbeit kann in irgendeiner Form zurückgewonnen und in eine andere Arbeit investiert werden.

Das Arbeitsvermögen eines Körpers nennt man seine Energie.
Energie E ist Arbeitsvermögen, gespeicherte Arbeit, Fähigkeit, Arbeit zu verrichten.

Energie E: $[E] = 1Nm = 1J = 1Ws$

Da auf verschiedene Art und Weise an einem Körper Arbeit verrichtet werden kann, kann auch auf eine von dieser Arbeit abhängige Weise dem Körper Arbeitsvermögen (Energie) zugeführt werden.

Energie kann zwischen diesen verschiedenen Formen übertragen werden.
Energie kann von einer Form in eine andere umgewandelt werden.
Arbeit ist eine Form der Energieübertragung, -umwandlung.

Spannenergie:

Elastisch verformte Körper besitzen sogenannte Spannenergie. Diese ist eine Form potentieller Energie.

Lageenergie (potentielle Energie):

Ein Körper kann auf Grund seiner Lage eine bestimmte Energie haben, die durch Hubarbeit investiert wurde: potentielle Energie.

potentielle Energie: $E_{pot} = m \cdot g \cdot h$

Bewegungsenergie (kinetische Energie):

Bewegungsenergie wird durch Beschleunigungsarbeit in ein System gesteckt.

kinetische Energie: $E_{kin} = \frac{m \cdot v^2}{2}$

<u>Energieerhaltung:</u>

Eine Erhaltungsgröße ist eine physikalische Größe, die sich während eines physikalischen Vorgangs nicht ändert und damit zeitunabhängig ist.

Die Energie ist eine Erhaltungsgröße.

Systeme, in denen die Energie erhalten bleibt, heißen energetisch abgeschlossene Systeme.

In diesen Systemen ist kein Energieaustausch mit der Umgebung möglich (es geht nix rein und nix raus.)

(Allgemein: Systeme, in denen Erhaltungsgrößen auftreten, heißen abgeschlossene Systeme im Sinne dieser Erhaltungsgrößen.)

In energetisch abgeschlossenen Systemen ist somit kein Energieaustausch mit der Umgebung möglich. Diese sind experimentell nur annähernd realisierbar.

Energieerhaltungssatz der Mechanik:

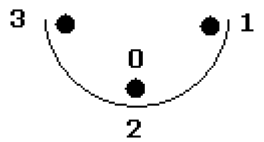
Potentielle und kinetische Energie werden als mechanische Energieformen bezeichnet.

Für sie gilt in einem abgeschlossenen, reibungsfreien System der Energieerhaltungssatz der Mechanik:

Während einer Bewegung verändern sich potentielle und kinetische Energie ständig. In einem abgeschlossenen System bleibt die Gesamtenergie (die Summe aus potentieller und kinetischer Energie) stets gleich.

Energieerhaltungssatz der Mechanik:
$E_{ges} = E_{kin} + E_{pot} = const$

Beispiel: Kugel in der Schüssel.



Beachte: von Position 0 zu Position 1 ist ein Eingriff von außen notwendig. Das System ist hier nicht abgeschlossen! Die Gesamtenergie ändert sich daher.

Position	E_{pot}	E_{kin}	E_{Ges}
0	0	0	0
1	$mgh_{\max}$	0	$mgh_{\max}$

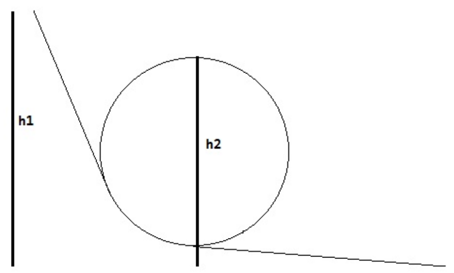
2	0	$\frac{mv_{max}^2}{2}$	$\frac{mv_{max}^2}{2}$
3	mgh_{max}	0	mgh_{max}

Periodisch werden kinetische und potentielle Energie ineinander umgewandelt. Es gilt stets $E_{ges} = E_{kin} + E_{pot} = const$.

Aus der Energieerhaltung zwischen den Punkten 1 und 2 muss daher gelten: $mgh_{max} = \frac{mv_{max}^2}{2}$.

Die maximale Geschwindigkeit kann durch die zeitfreie Gleichung $v_{max} = \sqrt{2gh_{max}}$ gewonnen werden.

Beispiel: Berechne die Geschwindigkeit am oberen Punkt des Loopings mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes:



$$E_{ges} = \frac{m \cdot v_1^2}{2} + mgh_1 = \frac{m \cdot v_2^2}{2} + mgh_2$$

$$0 + mgh_1 = \frac{m \cdot v_2^2}{2} + mgh_2$$

$$v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

Innere Energie – Erweiterung des Energieerhaltungssatzes:

Auch in reibungsbehafteten Systemen gilt ein erweiterter Energieerhaltungssatz.

Beispiel: Ein Klotz, der auf einem horizontalen Brett gleitet, kommt auf Grund der Reibung zum Stillstand. Die potentielle Energie bleibt gleich, die kinetische Energie sinkt dagegen auf Null. Der Klotz ist daher im mechanischen Sinn kein abgeschlossenes System. Durch die Wechselwirkung zwischen Klotz und Unterlage verrichtet der Klotz Arbeit gegen die Gleitreibung. Dabei erwärmen sich sowohl der Klotz als auch die Unterlage.
Diese Erwärmung bedeutet aber eine Energiezunahme innerhalb der beiden Körper: die **innere Energie** wird erhöht.

Die innere Energie eines Systems ist die Summe der Energien der einzelnen Atome (also Energie im mikroskopischen Bereich). Kinetische und potentielle Energie des ganzen Körpers sind dagegen Energieformen im makroskopischen Bereich.

In Systemen mit Reibung setzt sich die Gesamtenergie aus innerer Energie U und mechanischer Energie zusammen. In einem abgeschlossenen System bleibt diese Gesamtenergie stets gleich.

Energieerhaltungssatz in Systemen mit Reibung:

$$E_{ges} = E_{kin} + E_{pot} + U = const$$

Zusätzlich zu diesen Energieformen gibt es noch weitere Energieformen: Schallenergie, elektrische Energie, chemische Energie, Wärmeenergie ….

Energie kann nicht verloren gehen, sondern nur in eine andere Energieform umgewandelt werden.

8.9 Leistung

Leistung ist verrichtete Arbeit pro Zeit.

$$Leistung = \frac{verrichtete\ Arbeit}{verstrichene\ Zeit}$$

$$P = \frac{W}{t}$$

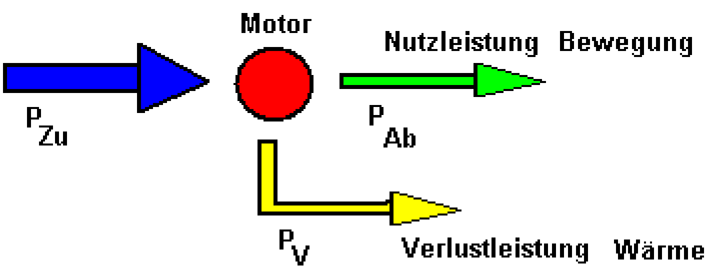
$$[P] = 1\frac{J}{s} = 1W \quad \text{(Watt)}$$

Beispiel: Ein Auto soll von $0km/h$ auf $100km/h$ beschleunigt werden. Dazu muss Beschleunigungsarbeit geleistet werden. In umso kürzerer Zeit diese Arbeit geleistet wird, desto höher ist die Leistung des Motors. Berechne die Leistung, wenn dies in 4,6s geschieht. ($m = 1000kg$, die Durchschnittsleistung beträgt $P = \frac{W}{t} = \frac{\frac{mv^2}{2}}{t} = 83870W = 114PS$ mit $1PS = 735{,}5W$).

8.10 Wirkungsgrad

Wird einer mechanischen Maschine ein bestimmter Energiebetrag E_{zu} zugeführt, so wird dieser in veränderter Form E_{ab} wieder abgegeben: die Maschine verrichtet Arbeit.

Ein Teil ΔE der zugeführten Energie geht allerdings in innere Energie über und kann daher technisch nicht genutzt werden. Nach dem Energieerhaltungssatz bleibt die Gesamtenergie aber gleich: $E_{zu} = E_{ab} + \Delta E$.



Als Wirkungsgrad η einer Maschine wird das Verhältnis von abgegebener Leistung P_{ab} und zugeführter Leistung P_{zu} definiert.

$$Wirkungsgrad = \frac{abgegebene\ Nutzleistung}{zugeführte\ Leistung}$$

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}}, \quad [\eta] = 1$$

$$[P] = 1\frac{J}{s} = 1W \quad \text{(Watt)}$$

Der Wirkungsgrad ist dimensionslos, er ist eine Verhältniszahl.

Je größer E_{ab} im Vergleich zur Gesamtenergie ist, umso besser wird die zugeführte Energie verwertet, umso größer ist der Wirkungsgrad η.

Auf Grund der Verluste in die innere Energie ist der Wirkungsgrad einer Maschine stets kleiner als 1.

$$0 < \eta < 1$$

Beispiel: Einem Ottomotor wird durch Verbrennung chemisch gespeicherte Energie zugeführt, die dann in mechanische Bewegungsenergie umgewandelt wird.
$\eta \approx 0{,}35$.

Zugeführte Energie:	chemische Energie
Nutzenergie:	Bewegung
Verluste:	Wärme.

8.11 Impuls

In der Kinematik haben wir den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Zeit bei gegebener Beschleunigung hergestellt. Nun wollen wir untersuchen, welche Folgerung sich für die Dynamik ergibt.

Beispiel:
Ein Ball wird durch eine Kraft innerhalb eines Zeitintervalls Δt auf eine bestimmte Geschwindigkeit beschleunigt.

$$F = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}$$
$$F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v = \Delta p$$
$$F \cdot \Delta t = mv_2 - mv_1$$

v_1 … Geschwindigkeit vor der Beschleunigung

v_2 … Geschwindigkeit nach der Beschleunigung

Das Produkt $F \cdot \Delta t$ heißt Kraftstoß. Das Produkt mv aus Masse und Geschwindigkeit wird als Impuls (Bewegungsgröße) p bezeichnet: $p = mv$. Ein Kraftstoß $F \cdot \Delta t$ bewirkt daher eine Impulsänderung $\Delta p = m \cdot \Delta v$.

$$[p] = [m] \cdot [v] = 1kg.1\frac{m}{s} = 1\frac{kgm}{s}$$

Da die Geschwindigkeit ein Vektor ist, ist auch der Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$ eine vektorielle Größe. Da m stets positiv ist, sind $\vec{p}$ und $\vec{v}$ gleich orientiert.

Anmerkung: Die Bewegung eines Körpers wird durch die Geschwindigkeit v beschrieben. Die Änderung der Bewegung ist von der Trägheit (Masse m) abhängig. Beide Größen zusammengefasst ergeben die eigentliche Bewegungsgröße Impuls $p = mv$.

Beispiel: Wie lange muss eine Kraft von $35\ N$ auf einen Körper wirken, um diesem eine Impulsänderung von $250\,kgm/s$ zu erteilen? Wie groß ist die Geschwindigkeitsänderung Δv?
(

- $F \cdot \Delta t = \Delta p$, $\Delta t = \frac{\Delta p}{F} = \frac{250 kg \cdot m/s}{35N} = 7{,}1s$
- $\Delta v = \frac{\Delta p}{m}$. Die Geschwindigkeitsänderung ist also abhängig von der Masse.

)

Impulserhaltungssatz:
Der Impuls ist wie die Energie eine Erhaltungsgröße.

Beispiel:
Ein abgeschlossenes System besteht aus zwei Körpern K_1 und K_2 mit den Massen m_1 und m_2. K_1 hat die Geschwindigkeit v_1, K_2 die Geschwindigkeit v_2.
Berechne den Gesamtimpuls, wenn die beiden Körper

a) nicht in Wechselwirkung treten,
b) in Wechselwirkung treten.

a) $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = const$. (Die beiden Körper treten nicht in Wechselwirkung mit einander, d.h. sie wirken keine Kräfte aufeinander. Da auch sonst keine Kräfte wirken, gibt es keine Beschleunigungen und daher bleiben die Geschwindigkeiten (und natürlich auch die Massen) gleich groß.)

b) Nach dem Wechselwirkungsgesetz üben die beiden Körper betragsgleiche Kräfte aufeinander aus, deren Vektorsumme Null ist:

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$, damit $m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = \vec{0}$ und $m_1 \frac{\Delta\vec{v}_1}{\Delta t} + m_2 \frac{\Delta\vec{v}_2}{\Delta t} = \vec{0}$.

Daraus folgt: $m_1\Delta\vec{v}_1 + m_2\Delta\vec{v}_2 = \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = \vec{0}$.
Da die Summe der Impulsänderungen Null ist, bleibt der Gesamtimpuls unverändert.

$$\sum \Delta p_i = 0 \Rightarrow \sum p_i = const$$

Impulserhaltungssatz: In einem abgeschlossenen System bleibt der Gesamtimpuls erhalten.

Das bedeutet auch: Ist der Gesamtimpuls zu irgendeinem Zeitpunkt der Bewegung Null, so bleibt er auch während des gesamten Bewegungsablaufs Null.

Beachte:
Der Impulserhaltungssatz ist eine direkte Folge des Wechselwirkungsgesetzes.
Wird ein Kraftstoß $F \cdot \Delta t$ auf einen Körper ausgeübt, so wird gleichzeitig auch ein Kraftstoß $-F \cdot \Delta t$ auf einen anderen Körper ausgeübt.

Beispiel: Zwei kleine Wägelchen seien durch eine zusammengedrückte Feder miteinander verbunden, ein Faden verhindert das Entspannen der Feder und damit die Beschleunigung der Wägelchen. (Skizze)
Wird der Faden durchgebrannt, fahren die beiden Wägelchen (die zusammengedrückte Feder dehnt sich aus) in entgegengesetzten Richtungen auseinander.

Nach dem Impulserhaltungssatz muss gelten:

$$\Delta\vec{p}_1+\Delta\vec{p}_2=m_1\Delta\vec{v}_1+m_2\Delta\vec{v}_2=\vec{0}$$

$$m_1\Delta\vec{v}_1=-m_2\Delta\vec{v}_2\,.$$

Als Betraggleichung ist das:

$$\Delta p_1+\Delta p_2=m_1\Delta v_1+m_2\Delta v_2=0$$

$$m_1\Delta v_1=-m_2\Delta v_2$$

Die Geschwindigkeitsänderungen sind also entgegengesetzt gerichtet.
Weiters gilt:

$$\frac{m_1}{m_2}=-\frac{\Delta v_2}{\Delta v_1}$$

Die Massen verhalten sich also umgekehrt wie die Geschwindigkeitsänderungen.
Doppelte Masse bedeutet somit zum Beispiel halbe Geschwindigkeit.

Der Impulserhaltungssatz und der Energieerhaltungssatz gehören zu den wichtigsten Sätzen der Physik.

Beispiel: Eine Kugel ($m=10\,g$) wird in einen ruhenden Holzblock ($m=15\,kg$) geschossen.
Die Geschwindigkeit des Blocks mit der Kugel beträgt nach dem Stoß $0,3\,m/s$. Berechne die Anfangsgeschwindigkeit der Kugel.

($p_1+p_2=p$

$$m_1v_1+0=(m_1+m_2)\cdot v$$

$$v_1=\frac{(m_1+m_2)\cdot v}{m_1}=\frac{15{,}01kg\cdot 0{,}3ms^{-1}}{0{,}01kg}=450{,}3m/s$$)

8.12 Das Gravitationsgesetz

Newton gelang es, eine dynamische Erklärung der Planetenbahnen zu finden.

Er ging von der Voraussetzung aus, dass nicht nur die Sonne die Erde anzieht, sondern dass auch auf die Sonne von der Erde dieselbe Anziehungskraft ausgeübt wird. Auf Grund der größeren Masse der Sonne ist der Einfluss auf ihre Bewegung viel kleiner als der auf die Bewegung der Erde.

Eine Wechselwirkung wie zwischen Erde und Sonne besteht zwischen beliebigen Körpern mit den Massen m_1 und m_2 im Abstand r. (Der Mensch empfindet die Wechselwirkung zwischen der Erde und seinem Körper als Gewichtskraft.)

Die beiden Kräfte F_1 auf m_1 und F_2 auf m_2 stellen ein Aktions-Reaktionskräftepaar dar.

Es gilt also:

$$F=F_1=F_2$$

Die einzelnen Kräfte sind proportional zu den Massen, auf die sie wirken:

$F\propto m_1$, $F\propto m_2$

Weiters zeigt sich, dass bei Verdopplung des Abstandes der beiden Massen die Anziehungskraft auf 1/4 ihres Wertes sinkt.

Newtonsches Gravitationsgesetz:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$ ... Gravitationskonstante

r ... Abstand der Schwerpunkte von m_1 und m_2

Die Gravitationskraft ist von der chemischen Beschaffenheit der Stoffe unabhängig, sie ist nur von den beteiligten Massen und deren Abstand abhängig.

Sie ist die am häufigsten auftretende Wechselwirkung (und die schwächste).

Beispiel: Berechne die Gravitationskraft zwischen einem Schüler und einem Stück Kreide. ($\mathrm{m_s} = 50\mathrm{kg}$, $\mathrm{m_K} = 0{,}1\mathrm{kg}$, $\mathrm{r} = 4\mathrm{m}$). $F = 2{,}08 \cdot 10^{-11} N$

Beispiel: Berechne die Masse der Erde.
(Für eine Masse m auf der Erde gilt:

- Gewicht $F = mg$
- Nach dem Gravitationsgesetz ist $F = G \cdot \frac{m \cdot m_E}{r^2}$

Beide Kräfte sind betragsgleich: $mg = G \cdot \frac{m \cdot m_E}{r^2} \Leftrightarrow g = G \cdot \frac{m_E}{r^2} \Leftrightarrow m_E = \frac{g \cdot r^2}{G}$.

$$m_E = \frac{g \cdot r^2}{G} = \frac{9{,}81 ms^{-2} \cdot (6{,}37 \cdot 10^6 m)^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11} m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}} = 6 \cdot 10^{24} kg .$$

)

Beispiel: Welche Gravitationsbeschleunigung erfährt ein Körper in 20 000 km Entfernung von der Erdoberfläche?

($F_G = m \cdot g(r) = G \cdot \frac{m \cdot m_E}{r^2} \Leftrightarrow g(r) = G \cdot \frac{m_E}{r^2}$.

Diese Beschleunigung ist unabhängig von der Masse des Körpers! (Gesetz von Galilei: alle Körper fallen gleich schnell!)

$$g(26370 km) = 6{,}67 \cdot 10^{-11} m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} kg}{(2{,}637.10^7 m)^2} = 0{,}576 ms^{-2}$$

)

Gravitationsbeschleunigung im Abstand r vom Erdmittelpunkt:

$$g(r) = G \cdot \frac{m_E}{r^2}$$

Frage: Was ist der eigentliche Grund dafür, dass an einem bestimmten Punkt alle Körper (alle Massen) gleich große Beschleunigung erfahren (gleich schnell fallen)?
(
- die Gravitationskraft ist direkt proportional zur (schweren) Masse
- die Beschleunigung ist umgekehrt proportional zur (trägen) Masse
- träge und schwere Masse sind identisch (zumindest vom Wert her gleich groß)

)

Beispiel: Welche Geschwindigkeit muss ein Satellit besitzen, damit er die Erde auf erdnaher Bahn umkreist? (Welche tangentiale Geschwindigkeit muss ein Körper im Schwerefeld der Erde haben, um nicht mehr auf die Erde zu fallen? Skizze)
(Für einen erdnahen Satelliten gilt annähernd $g = 9{,}81 ms^{-2}$.

$$Gewichtskraft = Zentripetalkraft$$

$$m \cdot g = m\frac{v^2}{r} \Leftrightarrow v^2 = g \cdot r \Leftrightarrow v = \sqrt{g \cdot r}$$

$$v = \sqrt{g \cdot r} = \sqrt{9{,}81 ms^{-2} \cdot 6{,}37 \cdot 10^6 m} = 7{,}9 km/s$$

Diese Geschwindigkeit wird als **1. kosmische Geschwindigkeit** bezeichnet.
)

Beispiel: Welche Geschwindigkeit ist erforderlich, um einen Satelliten aus dem Anziehungsbereich der Erde zu bringen? (Mit welcher Geschwindigkeit muss man einen Körper senkrecht nach oben schießen, damit er nicht mehr zurückfällt? Skizze)

Arbeit im Gravitationsfeld vom Punkt r_1 zum Punkt r_2:

$$W = G \cdot m_1 \cdot m_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Die Arbeit, die man aufwenden muss, um einen Körper aus dem Anziehungsbereich der Erde zu befördern, kann nun mit folgender Überlegung berechnet werden:

Da r_2 "unendlich" groß wird, strebt der Bruch $\frac{1}{r_2}$ gegen Null. r_1 ist in diesem Fall der Erdradius r.

Damit wird $W = G \cdot m_E \cdot m \cdot (\frac{1}{r} - 0) = G \cdot \frac{m_E \cdot m}{r}$

$$Erforderliche\ Arbeit = Beschleunigungsarbeit$$

$$\frac{mv^2}{2} = G \cdot \frac{m_E m}{r} = m \cdot g(r) \cdot r = mgr \Leftrightarrow v = \sqrt{2gr}$$

$$v = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 ms^{-2} \cdot 6{,}37 \cdot 10^6} = 11{,}2 km/s$$

Diese Geschwindigkeit wird als **2. kosmische Geschwindigkeit** bezeichnet.
)

Schwerelosigkeit (Mikrogravitation):

Warum sind Menschen und Gegenstände in einem Raumschiff schwerelos, obwohl in 300 km Entfernung von der Erde die Erdbeschleunigung noch immer 90 % des Wertes auf der Erdoberfläche beträgt?

Während des freien Falls einer Federwaage, an der ein Massenstück hängt, zeigt sich, dass die Ausdehnung der Feder auf Null zurückgeht. Beiden Körpern wird dieselbe Erdbeschleunigung g erteilt. Daher ist das Gewicht des Massenstücks Null.

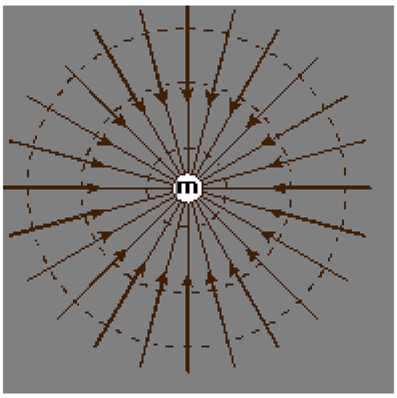
Die Gravitationskraft der Erde wirkt für ein Raumschiff als Zentripetalkraft. Sie zwingt es nach Erreichen der 1. kosmischen Geschwindigkeit auf eine Kreisbahn. Alle Menschen und Gegenstände im Raumschiff unterliegen dann derselben Zentralbeschleunigung, sie sind (nahezu) schwerelos. Die wirksame Erdbeschleunigung ist kleiner als $10^{-4} g$. Man nennt diese Erscheinung deshalb **Mikrogravitation**.

In der Materialforschung unter Mikrogravitation hat man eine Vielzahl von Effekten entdeckt. die unter irdischen Bedingungen weitgehend unbeobachtet bleiben. Zum Beispiel weisen im Zustand der Schwerelosigkeit geschmolzene und erstarrte Metallproben ein homogenes und damit äußerst haltbares Kristallgefüge auf.

Gravitationsfeld:
Kann man jedem Punkt eines Raumes den Messwert einer bestimmten physikalischen Größe zuordnen, spricht man von einem physikalischen Feld.

So kann man z. B. in einem Schwimmbecken jedem Raumpunkt eine bestimmte Wassertemperatur $T(X)$ zuordnen. Man erhält so ein Temperaturfeld. Oder man ordnet jedem Punkt X des Raumes, der die Erde umgibt, die Gravitationsbeschleunigung $\vec{g}(X)$ zu, die ein Körper dort erfahren würde. Auf diese Weise erhält man das Gravitationsfeld der Erde.
Da $T(X)$ eine skalare Größe ist, spricht man von einem **Skalarfeld**. Das Gravitationsfeld ist daher ein **Vektorfeld**. Die Größe $\vec{g}(X)$ heißt Gravitationsfeldstärke im Punkt X.

Will man das Gravitationsfeld der Erde (oder eines anderen Körpers) grafisch darstellen, bedient man sich sogenannter **Feldlinien** oder der **Feldstärkevektoren**. Die Richtung der Feldlinien ist durch die Feldstärkevektoren festgelegt. Sie enden an der Erdoberfläche.



Gravitationsfeldstärke: $g(r)$

Aus $F = m \cdot g(r)$ folgt $g(r) = \frac{F}{m}$.

Unter der Feldstärke g in einem bestimmten Raumpunkt eines Gravitationsfeldes versteht man den Quotienten aus der auf den Körper wirkenden Kraft F und dessen Masse m.

$$g(r) = \frac{F}{m}$$

Die Feldstärke an einem Normort auf der Erde beträgt $9{,}81\ m/s$. Je größer die Entfernung von der Erde ist, desto kleiner ist die Feldstärke.

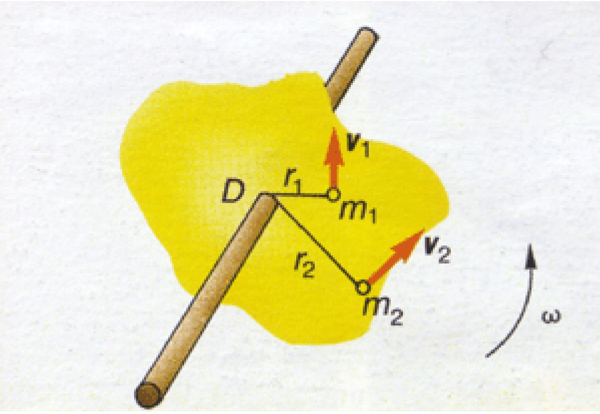
Da die Feldstärke ein Vektor ist, kann durch sie ein Vektorfeld beschrieben werden: $\vec{g}(r) = \frac{\vec{F}}{m}$.

Das Gravitationsfeld gibt die Fallbeschleunigung (die Feldstärke) in einem beliebigen Punkt um eine Masse an.

8.13 Trägheitsmoment

Trägheitsmoment und Rotationsenergie:

Will man die Bewegungsenergie eines rotierenden Körpers bestimmen, zeigt sich, dass im Gegensatz zur Translation die einzelnen Massenpunkte unterschiedliche Geschwindigkeiten aufweisen. Die Bahngeschwindigkeit ist abhängig von der Winkelgeschwindigkeit und dem Abstand des Punktes von der Drehachse.



Es gilt: $v_i = r_i \cdot \omega$.

Für die Bewegungsenergie des Massenpunktes m_i erhält man dann:

$$E_i = \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2}.$$

Um die Rotationsenergie des gesamten Körpers zu berechnen, bildet man die Summe der Bewegungsenergien aller Massenpunkte.

$$E_{rot} = \Sigma E_i$$
$$E_{rot} = \frac{1}{2}\omega^2 \cdot \Sigma m_i r_i^2$$

Die Summe $\Sigma m_i r_i^2$ heißt Trägheitsmoment I oder Drehmasse des Körpers bezüglich der Drehachse D.

$$I = \Sigma m_i r_i^2$$
$$[I] = [m] \cdot [r^2] = 1 kgm^2$$

Daraus ergibt sich für die Rotationsenergie:

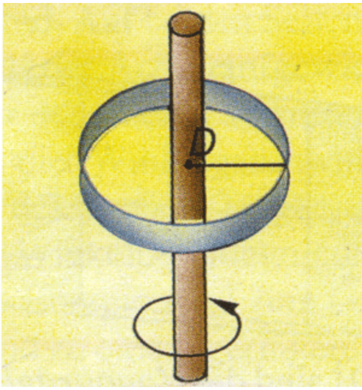
$$E_{rot} = \frac{I\omega^2}{2}.$$

Die Masse m bei der Translation entspricht dem Trägheitsmoment I bei der Rotation.
Das bedeutet: Ist bei der Translation die Masse das Maß für die Trägheit des Körpers (das Maß für den Widerstand gegen eine Änderung der Tranlationsbewegung), so ist es bei der Rotation das Trägheitsmoment.

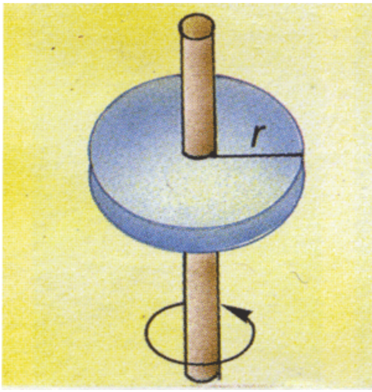
Das Trägheitsmoment ist der Widerstand, den ein Körper einer Änderung des Zustandes der Drehbewegung (= Winkelbeschleunigung) **entgegensetzt.**

Trägheitsmoment symmetrischer Körper:

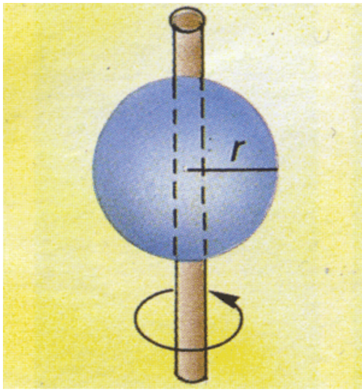
Das Trägheitsmoment ist von den Quadraten der Abstände zwischen den Massenpunkten und der Drehachse abhängig. Dabei ist die räumliche Massenverteilung für das Drehmoment
von Bedeutung.



Dünner Hohlzylinder (Reifen)
$I = mr^2$



Homogener Vollzylinder
$I = \frac{1}{2}mr^2$



Homogene Kugel
$I = \frac{2}{5}mr^2$

Hohlkugel: $I = \frac{2}{3}mr^2$

Beispiel: Berechne die Endgeschwindigkeit eines Massivzylinders, welcher längs einer schiefen Ebene der Höhe h herunterrollt. (Die Verluste durch Reibung werden vernachlässigt.)

(Nach dem Energieerhaltungsgesetz gilt:

$E_{pot} = E_{kin} + E_{rot}$, also $mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$.

Mit $I = \frac{1}{2}mr^2$ und $\omega = \frac{v}{r}$ ergibt das $mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{4}$.

Daraus folgt $\mathrm{v} = \sqrt{\frac{4}{3}\mathrm{gh}} = \frac{2\sqrt{\mathrm{gh}}}{\sqrt{3}}$.

Die Geschwindigkeit ist unabhängig von der Masse und dem Radius des Körpers und von der Länge der schiefen Ebene. Sie hängt aber von der Form und der Massenverteilung des Körpers und von der Höhe der schiefen Ebene ab.

Beachte:

- Vernachlässigt man die Rotation ($E_{rot} = 0$, der Körper rutscht die schiefe Ebene entlang; keine Haftreibung!), so erhält man: $E_{pot} = E_{kin} \Leftrightarrow mgh = \frac{mv^2}{2} \Leftrightarrow v = \sqrt{2gh}$, also unser Ergebnis aus der zeitfreien Gleichung.

- Bei Berücksichtigung der Rotation erhält man stets kleinere Endgeschwindigkeiten, da ein Teil der Lageenergie immer der Rotation zugeführt wird und nicht alles in kinetische Energie allein umgewandelt wird.

)

Beispiel: Berechne die Endgeschwindigkeit eines Hohlzylinders, welcher längs einer schiefen Ebene der Höhe h herunterrollt. (Die Verluste durch Reibung werden wiederum vernachlässigt.)

(

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} \Leftrightarrow v = \sqrt{gh}\ .$$

Der Hohlzylinder ist langsamer als der Vollzylinder.

- Für Hohl- und Vollzylinder gilt: $m_{HZ} = m_{Vz}$, aber $I_{HZ} > I_{Vz}$.
  Der Hohlzylinder setzt also der Drehbewegung (und da ein Schlupf ausgeschlossen ist, auch der Translationsbewegung) einen größeren Widerstand entgegen, er bleibt daher langsamer.

- Der Hohlzylinder ist langsamer als der Vollzylinder, da bei ihm auf Grund des größeren Trägheitsmomentes mehr Energie in die Rotation als in die Translation fließt.

	E_{rot}	E_{kin}	
Hohlzylinder	$\frac{mv^2}{2} = E_{Ges}/2$	$\frac{mv^2}{2} = E_{Ges}/2$	$E_{rot} = 50\% E_{ges}$
Vollzylinder	$\frac{mv^2}{4} = E_{Ges}/3$	$\frac{mv^2}{2} = 2 \cdot E_{Ges}/3$	$E_{rot} = 33\% E_{ges}$
Kugel	$\frac{mv^2}{5} = 2E_{Ges}/7$	$\frac{mv^2}{2} = 5E_{Ges}/7$	$E_{rot} = 29\% E_{Ges}$

)

Beispiel: Berechne die Endgeschwindigkeit einer Kugel, welche längs einer schiefen Ebene der Höhe h herunterrollt. (Die Verluste durch Reibung werden wiederum vernachlässigt.)

($\mathrm{v} = \sqrt{\frac{10}{7}\mathrm{gh}}$. Es gilt: $\mathrm{v}_{\mathrm{ohneRotation}} > \mathrm{v}_{\mathrm{Kugel}} > \mathrm{v}_{\mathrm{Vollzylinder}} > \mathrm{v}_{\mathrm{Hohlzylinder}}$.)

Freie Achsen:

Bei einem beliebig geformten Körper hat das Trägheitsmoment für verschiedene Drehachsen durch den Schwerpunkt unterschiedliche Werte. Für jeden Körper gibt es aber drei **Hauptträgheitsmomente**.
Im allgemeinen wirken bei der Rotation auf die mit dem Körper fest verbundenen Drehachsen Trägheitskräfte, die auf die Lager der Achsen übertragen werden.

Diese Kräfte heben einander auf, wenn die Achse durch den Schwerpunkt des Drehkörpers verläuft und eine der drei Hauptträgheitsachsen ist. Man bezeichnet eine solche Achse auch als **freie Achse**.

Trägheitsmoment und Drehmoment:

Wie bereits bekannt , ist das Drehmoment definiert als Produkt von angreifender Kraft und zugehöriger Länge des Kraftarmes: $M = F\ r$.

Wir betrachten nun einen um eine feste Achse drehbaren starren Körper, auf den ein Drehmoment wirkt. Auf jeden Massenpunkt m_i des Körpers wirkt ein durch eine angreifende Kraft F_i verursachtes Drehmoment M_i .

Es gilt: $M = \Sigma M_i = \Sigma F_i r_i$.

In $F_i = m_i a_i$ können wir a_i durch αr_i ersetzen. Die Größe α , die Winkelbeschleunigung, ist für alle Massenpunkte des Körpers gleich. Damit können wir schreiben:

$$M = \Sigma F_i r_i = \Sigma m_i a_i \cdot r_i = \Sigma m_i \alpha r_i \cdot r_i = \alpha \cdot \Sigma m_i r_i^2 .$$

Mit $I = \Sigma m_i r_i^2$ folgt:

$M = I \cdot \alpha$ ... **dynamisches Grundgesetz der Rotation**

Der Kraft bei der Translation entspricht das Drehmoment bei der Rotation. Es kann somit analog zur Translation ein dynamisches Grundgesetz der Rotation formuliert werden:

Wirkt auf einen Körper ein Drehmoment, kommt es zu einer Änderung der Winkelgeschwindigkeit, also einer Winkelbeschleunigung.

8.14 Arbeit und Leistung bei der Rotation

Arbeit:

Die Arbeit, die an einem starren Körper durch ein konstantes Drehmoment verrichtet wird, kann durch einen Analogieschluss aus der Translation abgeleitet werden. Gilt für die Translation $W = F\ s$, so erhält man für die Rotation $W = M\varphi$. Denn das Trägheitsmoment M entspricht der Kraft F , und der Drehwinkel φ dem Weg s
.
Damit ergibt sich die Arbeit als:

$W = M\varphi$ ... Arbeit an einem rotierenden Körper

Leistung:

Da Leistung Arbeit pro Zeit ist, ergibt sich: $P = \frac{M\varphi}{t}$.

Mit $\omega = \frac{\varphi}{t}$ folgt:

$P = M\omega$ ... Leistung an einem rotierenden Körper

8.15 Drehimpuls

Wir haben festgestellt, dass für die physikalischen Größen der Translation entsprechende Größen der Rotation existieren. Es stellt sich nun die Frage, ob auch ein Impuls für die Rotation, ein Drehimpuls definiert werden kann.

Stellen wir gegenüber:

Translation		Rotation	
Kraft	$F = ma = m\frac{\Delta v}{\Delta t}$	Drehmoment	$M = I\alpha = I\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$
Kraftstoß	$F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v$	Drehmomentstoß	$M \cdot \Delta t = I \cdot \Delta\omega$
Impuls	$p = mv$	Drehimpuls	$L = I\omega$

Nun definieren wir (aus der Analogie $m \to I$ und $v \to \omega$):

Unter dem Drehimpuls L versteht man das Produkt aus Trägheitsmoment I und Winkelgeschwindigkeit ω.

$$L = I\omega$$
$$[L] = [I] \cdot [\omega] = 1kgm^2s^{-1}$$

Bei der Translation bewirkt ein Kraftstoß eine Impulsänderung. Entsprechend bewirkt bei der Rotation ein Drehmomentstoß eine Drehimpulsänderung.
Der Drehimpuls ist eine vektorielle Größe $\vec{L} = I\vec{\omega}$.
Da die Maßzahl für das Trägheitsmoment I stets positiv ist (**Frage:** Warum? (m_i und r_i^2 sind stets positiv.), sind $\vec{L}$ und $\vec{\omega}$ gleich orientiert. Die Orientierung von $\vec{\omega}$ findet man mit der Rechtsschraubenregel.

Anmerkung: $L = I\omega = (\Sigma m_i r_i^2) \cdot \omega = \Sigma(m_i r_i^2 \omega) = \Sigma(m_i r_i \cdot r_i \omega) = \Sigma m_i r_i \cdot v_i = \Sigma r_i p_i$.
Der Drehimpuls ist also auch die Summe aus den Produkten von Radien und Impulsen der einzelnen Massenpunkte.

Der Drehimpuls L ist die Summe der Produkte aus Radius und Impuls für alle Massenpunkte eines Körpers.

$$L = \Sigma r_i p_i$$
$$[L] = [r] \cdot [p] = 1m \cdot kg \cdot ms^{-1} = 1kgm^2s^{-1}$$

Die Erhaltung des Drehimpulses:

Für die Translation gilt der Impulserhaltungssatz. Entsprechend erwarten wir für die Rotation einen Drehimpulserhaltungssatz:

In einem abgeschlossenen System bleibt der Gesamtdrehimpuls erhalten.

Versuch:
Eine Person sitzt mit Gewichten in den ausgestreckten Händen auf einem sich drehenden Sessel. Bei Verringerung des Trägheitsmomentes durch Heranziehen der Gewichte kommt es zu einer Erhöhung der Winkelgeschwindigkeit. Das Produkt $I\omega$ und damit der Drehimpuls L bleibt konstant.

Beachte: Die Rotationsenergien sind keineswegs gleich:

$$\frac{I_1\omega_1^2}{2} < \frac{I_2\omega_2^2}{2}$$

Beim Anziehen der Arme muss Arbeit gegen die Zentrifugalkraft verrichtet werden. Diese von der Person aufgebrachte Arbeit wird in Rotationsenergie umgewandelt.

Anwendungen im Sport:

Beim Eislaufen kann die Eisläuferin bei der Pirouette durch ein seitliches Ausstrecken der Arme ihre Winkelgeschwindigkeit herabsetzen, durch Anziehen der Arme erhöhen.
Beim Schlagen eines Saltos wird durch das Anziehen der Arme und Beine die Drehgeschwindigkeit erhöht.