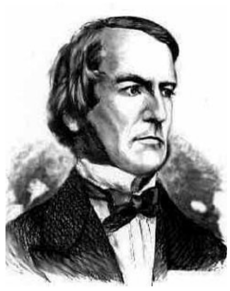
# TEIL B: Boolesche Algebra

# Boolsche Algebra

Die Boolesche oder auch Aussagenalgebra geht auf den englischen Mathematiker und Philosophen **George Boole** (1815 - 1864) zurück.



Diese Form der Algebra beschäftigt sich mit **mathematischen Aussagen und ihren Verknüpfungen**. Dabei gelten Aussagen als mathematisch, wenn sie klar als **wahr (w)** bzw. **falsch (f)** zu bezeichnen sind (Es gibt keine dritte Möglichkeit!). Wahre Aussagen werden durch einer „1" dargestellt, falsche durch eine „0".

Im Jahre 1938 wurde die Boolesche Algebra auf Schaltungen mit Relais angewendet. **Claude E. Shannon** führte damit den Begriff „**Schaltalgebra**" ein. Mithilfe der Schaltalgebra lassen sich logische Schaltungen vereinfachen und berechnen. Wird eine Schaltfunktion mit einem Operationszeichen ($\neg$, $\vee$, $\wedge$) dargestellt, so spricht man von einer booleschen oder auch logischen Verknüpfung.

## Aussage, Aussagenform, Junktor

Ist A eine Aussage, so bezeichnet w(A) ihren Wahrheitswert, w(A) = 1 falls A eine wahre Aussage ist und w(A) = 0 andernfalls.

Für die Wahrheitswerte verwendet man auch andere Bezeichnungen, gebräuchlich sind

- wahr, w, true, t, 1
- falsch, f, false, f, 0

**Beispiele:**

„Hamburg ist die Hauptstadt Deutschlands" – „1 + 1 = 2" – „Es regnet."
„Wie geht es dir?" (ist keine Aussage!) – „x > 5" (ist keine Aussage!)

Aussagenformen sind sprachliche Gebilde mit Leerstellen (Aussagevariablen). Dort können Subjekte (Dinge), Prädikate (Eigenschaften) oder Aussagen eingesetzt werden. Wenn man einsetzt, erhält man eine Aussage. Es muss wohldefiniert werden, was eingesetzt werden darf!

**Beispiele:**

- *P(x)* sei „*x* ist die Hauptstadt von Deutschland";
  *P(x)* ist eine Aussageform (keine Aussage!); für die Variable *x* dürfen wir Städtenamen einsetzen.
  *P(München)* (ist eine Aussage) ist falsch, *P(Berlin)* ist wahr.
- $Q(z) \Leftrightarrow z > 3$. Wir setzen reelle Zahlen ein, $z \in R$.
  $Q(11)$ ist wahr, $Q(-2)$ ist falsch.

Mehrere Aussagen können mit bestimmten **Verknüpfungen** (**Junktoren**) zu neuen Aussagen verbunden werden. Sie werden zur Vereinfachung mit folgenden Symbolen dargestellt:

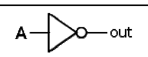
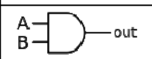
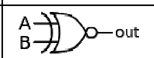
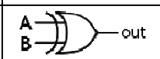
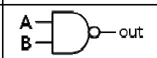
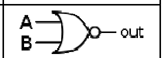
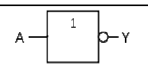
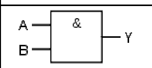
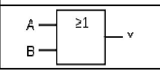
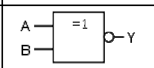
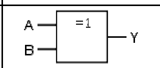
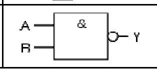
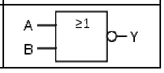
- Negation ¬A („nicht A“)
- Konjunktion A ∧ B („A und B“)
- Disjunktion A ∨ B („A oder B“)
- Implikation A ⇒ B („wenn A, dann B“)
- Äquivalenz A ⇔ B („A ist äquivalent zu B“)
- Kontravalenz A ⊻ B („A ist kontravalent zu B“)

Während ∨, ∧, ⇒, ⇔ und ⊻ zwei Aussagen verknüpfen, bezieht sich ¬ nur auf eine einzelne Aussage oder das „Ergebnis“ mehrerer Aussagen.

Dies sind aber nicht alle möglichen Verknüpfungen zweier Aussagen, es gibt genau **$2^4$ = 16** verschiedene Junktoren. Alle 16 Junktoren lassen sich mit den elementaren Junktoren *Negation* ¬, *Konjunktion* ∧ und *Disjunktion* ∨ darstellen.

# Wahrheitswertetabellen

Die genaue Festlegung der Bedeutung der Junktoren geschieht mit einer Wahrheitstafel.

| | | **NOT** | **AND** | **OR** | **Implik.** | **Äquiv.** | **XOR** | **NAND** | **NOR** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **A** | **B** | **¬A** | **A ∧ B** | **A ∨ B** | **A ⇒ B** | **A ⇔ B** | **A ⊻ B** | **A ↑ B**<br>¬ (A ∧ B) | **A ↓ B**<br>¬ (A ∨ B) |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| Symbol | |  |  |  | |  |  |  |  |
| | |  |  |  | |  |  |  |  |

**Beispiele:**

A ⇔ „Es regnet.“, B ⇔ „Es ist Montag.“

¬B ⇔ „Es ist nicht Montag.“

(A ∧ B) ⇔ „Es regnet und es ist Montag.“

(A ∨ B) ⇔ „Es regnet oder es ist Montag“

(A ⇒ B) ⇔ „Immer wenn es regnet, ist Montag.“

(B ⇒ A) ⇔ „Wenn Montag ist, dann regnet es.“

**Beispiele:**

Verknüpfe die folgenden Aussagen:

A :⇔ „Er geht zur Arbeit.“, B :⇔ „Er ist gesund.“

$\neg B \Leftrightarrow$ Er ist nicht gesund

$(B \wedge A) \Leftrightarrow$ Er geht zur Arbeit und ist gesund.

$(A \vee \neg B) \Leftrightarrow$ Er geht zur Arbeit oder er ist nicht gesund.

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow$ Wenn er zu Arbeit geht, ist er gesund.

$(B \Rightarrow A) \Leftrightarrow$ Wenn er gesund ist, geht er zur Arbeit.

**Technische Anwendungsbeispiele:**

Stelle nachfolgende Beispiele mit einem logischen Ausdruck dar!
Tipp: Veranschauliche dir mit Hilfe einer Wahrheitstabelle den Sachverhalt.

a) Eine Alarmanlage (A) ist an einen Bewegungsmelder (B) gekoppelt. Sie wird erst eingeschaltet, wenn sämtliche Personen das Gebäude verlassen haben. Ein Alarm wird also nur dann ausgelöst, wenn zwei Zustände gleichzeitig eintreten: Die Anlage ist eingeschaltet und es wird eine Bewegung registriert.

b) Eine Alarmanlage überwacht in einem Haus die Terrassen- (A) und die Eingangstür (B). Ein Alarm soll ausgelöst werden, wenn eine dieser Türen geöffnet wird. Das heißt, das Eintreten eines dieser Zustände, „Terrassentür offen" oder „Eingangstür offen" bewirkt ein Ausgangssignal.

c) Eine Lichtschranke (A) überwacht den Eingang eines Gebäudes. Solange der Lichtstrahl nicht unterbrochen wird, liegt ein Eingangssignal an, das zu keiner Reaktion führt, das Ausgangssignal hat den Wert 0. Wird der Lichtstrahl unterbrochen, d. h. das Eingangssignal nimmt den Wert 0 an, soll ein Alarm ausgelöst werden. Das wird durch eine Signalumkehrung realisiert.

d) Eine Beleuchtungsanlage soll automatisch ausgeschaltet werden. Dafür müssen zwei Bedingungen erfüllt sein. Es muss eine bestimmte Helligkeit (A) und eine vorgegebene Uhrzeit (B) erreicht sein. Damit stellt man sicher, dass die Anlage nicht zu früh ausgeschaltet wird, es aber auch schon ausreichend hell ist.

e) In einem Gebäude wird die Anwesenheit von Personen über zwei Sensoren (A, B) registriert. Erst wenn keiner dieser Sensoren ein Signal liefert, wird der Ausgang automatisch geschlossen.

| | | a) | b) | c) | d) | e) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B | $A \wedge B$ | $A \vee B$ | $\neg A$ | $\neg(A \wedge B)$ | $\neg(A \vee B)$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

# Boolesche Gesetze

## Kommutativgesetz

$$A \lor B = B \lor A$$
$$A \land B = B \land A$$

## Assoziativgesetz

$$(A \land B) \land C = A \land (B \land C)$$
$$(A \lor B) \lor C = A \lor (B \lor C)$$

## Distributivgesetz

$$A \land (B \lor C) = (A \land B) \lor (A \land C)$$
$$A \lor (B \land C) = (A \lor B) \land (A \lor C)$$

## Identitätsgesetz

$$A \land 1 = A$$
$$A \lor 0 = A$$

## Null-/Einsgesetz

$$A \land 0 = 0$$ immer nicht erfüllbar
$$A \lor 1 = 1$$

## Komplementärgesetz

$$A \land \neg A = 0$$
$$A \lor \neg A = 1$$

## Idempotenzgesetz

$$A \land A = A$$
$$A \lor A = A$$

## Absorptionsgesetz

$$A \land (A \lor B) = A$$
$$A \lor (A \land B) = A$$

### De Morgen’sche Gesetz

$$\neg(A \vee B) = (\neg A \wedge \neg B)$$
$$\neg(A \wedge B) = (\neg A \vee \neg B)$$

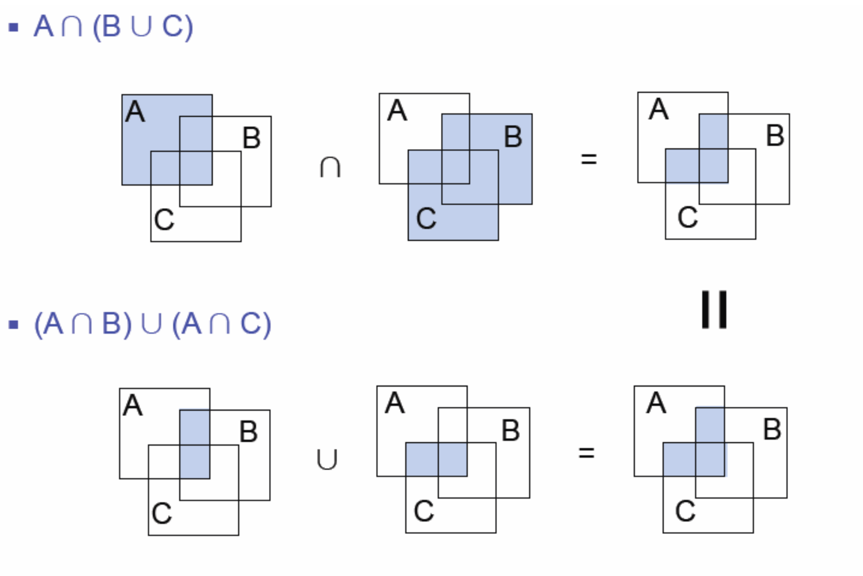
### Doppeltes Negationsgesetz

$$\neg(\neg A) = A$$

## Gesetze mit der Mengenlehre

### Distributivgesetz

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$
$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$



# Beweis- und Entscheidungsverfahren

Wahrheitstafeln ermöglichen die Überprüfung aller Belegungen einer Formel.
Es existieren folglich Algorithmen, um Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit zu untersuchen.

- F ist Tautologie ⇔ Wahrheitstafel liefert nur wahr (also allgemeingültig)
- F erfüllbar ⇔ Wahrheitstafel liefert mindestens ein wahr
- F unerfüllbar ⇔ Wahrheitstafel liefert kein wahr

**Beispiel:** Beweis des Distributivgesetzes durch Einsetzen aller Möglichkeiten

Zeige durch die logische Äquivalenz der 3. und 6. Spalte in folgender Wahrheitstabelle die Gültigkeit des Distributivgesetzes.

| ABC | $(B \vee C)$ | $A \wedge (B \vee C)$ | $(A \wedge B)$ | $(A \wedge C)$ | $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 001 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 010 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 011 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 101 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 110 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 111 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**Beispiel:**

Beweise die Gesetze von DeMorgen!

| AB | $\neg(A \vee B)$ | $\neg(A \wedge B)$ | $\neg A \wedge \neg B$ | $\neg A \vee \neg B$ |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 01 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 10 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**Beispiel:**

Welchem Junktor entspricht folgender logischer Ausdruck?

$$(A \wedge B) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B))$$

$$\neg(A \vee B) \vee (A \wedge B)$$

$$\neg A$$

**Beispiel:**

Welchem Junktor entspricht folgender logischer Ausdruck?

$$\neg((A \wedge B) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B)))$$

**Beispiel:**

Überprüfe folgende Aussage: $\neg (A \vee B) \rightarrow \neg B$