Projet de Mathématiques

Thomas SU, Kexin SHAO, You ZUO

May 14, 2019

Contents

1 Modèle de Cox-Ross-Rubinstein

1.0.1 Question 1

Pour trouver q_N, on a :

$$T_i^{(N)} \in \{1 + h_N, 1 + b_N\}$$
$$q_N = \mathbb{Q}(T_1^{(N)} = 1 + h_N)$$

alors on a

$$1 - q_N = 1 - \mathbb{Q}(T_1^{(N)} = 1 + h_N) = \mathbb{Q}(T_1^{(N)} = 1 + b_N)$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[T_1^{(N)}] &= (1 + h_N)\mathbb{Q}(T_1^{(N)} = 1 + h_N) + (1 + b_N)\mathbb{Q}(T_1^{(N)} = 1 + b_N) \\ &= (1 + h_N)q_N + (1 + b_N)(1 - q_N) \qquad (1) \end{aligned}$$

en même temp sous la probabilité $\mathbb{Q}$ on a

$$E_{\mathbb{Q}}[T_1^{(N)}] = 1 + r_N \qquad (2)$$

enfin on a déterminé de (1) et (2) que

$$q_N = \frac{r_N - b_N}{h_N - b_N}$$

1.0.2 Question 2

$$p_{(N)} := \frac{1}{(1 + r_N)^2} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f(S_{tN}^{(N)})]$$

Pour calculer l'esperance on va définir une variable T pour signifie la nombre de succes $(T_i = 1 + h_N)$, cette variable suit une lois de Binomiale $T \sim B(N, q_N)$

De plus, on a $S_{t_N}^{(N)} = S_0^{(N)} \cdot \prod_{i=1}^{n} Ti = S_0^{(N)} \cdot (1 + h_N)^T \cdot (1 + b_N)^{N-T}$, donc

$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f(S_{t_N}^{(N)})]$

$= \sum_{k=0}^{N} f(S_{t_N}^{(N)})\ \mathbb{P}(T = k)$

$= \sum_{k=0}^{N} f(S_0^{(N)}(1 + h_N)^k (1 + b_N)^{N-k})\ \mathbb{P}(T = k)$

$= \sum_{k=0}^{N} f(s(1 + h_N)^k (1 + b_N)^{N-k}) \binom{N}{k} q_N^k (1 - q_N)^{N-k}$

donc:

$$p_{(N)} = \frac{1}{(1 + r_N)^N} \sum_{k=0}^{N} f(s(1 + h_N)^k (1 + b_N)^{N-k}) \binom{N}{k} {q_N}^k (1 - q_N)^{N-k}$$

1.1 Premier pricer

1.1.1 Question 3

1.1.2 Question 4

En prennant $f(x) = max(x - 90, 0)$ avec $s = 100$, $h_N = 0.05$, $b_N = -0.05$, $r_N = 0.01$ et $N = 30$ la fonction $price1$ nous donne:

```
## [1] 33.90672
```

1.2 Deuxième pricer

1.2.1 Question 5

1.2.2 Question 6

En prennant $f(x) = max(x - 90, 0)$ avec $s = 100$, $h_N = 0.05$, $b_N = -0.05$, $r_N = 0.01$ et $N = 3$, la fonction $price2$ nous donne:

```
## [1] 12.91166
```

1.2.3 Question 7

En prennant $f(x) = max(x - 100, 0)$ avec $s = 100$, $h_N = 0.05$, $b_N = -0.05$, $r_N = 0.01$ et N un nombre aléatoire entre 5 et 15, la fonction $price1$ et $price2$ nous donne:

```
## [1] 20.04211
```

```
## [1] 20.04211
```

Selon les resultats on peut voir qu'ils sont pareils, de fait, on peut conclure que les deux méthodes sont équivalentes. Bien qu'elles ne calculent pas le prix de la même façon, elle permettent d'obtenir le même résultat.

1.3 La couverture

1.3.1 Question 8

Le système d'équation:

$$\alpha_{N-1}(S_{t_{N-1}}^{(N)})(1 + h_N)S_{t_{N-1}}^{(N)} + \beta_{N-1}(S_{t_{N-1}}^{(N)})S_{t_{N-1}}^{0} = f((1 + h_N)S_{t_{N-1}}^{(N)}) \tag{3}$$

$$\alpha_{N-1}(S_{t_{N-1}}^{(N)})(1 + b_N)S_{t_{N-1}}^{(N)} + \beta_{N-1}(S_{t_{N-1}}^{(N)})S_{t_{N-1}}^{0} = f((1 + b_N)S_{t_{N-1}}^{(N)}) \tag{4}$$

(3)-(4) on a

$$\alpha_{N-1} = \frac{f((1+h_N)S^{(N)}_{t_{N-1}}) - f((1+b_N)S^{(N)}_{t_{N-1}})}{S^{(N)}_{t_{N-1}}(h_N - b_N)}$$

$$\beta_{N-1} = \frac{f((1+b_N)S^{(N)}_{t_{N-1}})(1+h_N) - f((1+h_N)S^{(N)}_{t_{N-1}})(1+b_N)}{S^0_{t_N}(h_N - b_N)}$$

1.3.2 Question 9

Le système d'équation: pour $k \in \{1, ..., N\}$

$$\alpha_{k-1}(S^{(N)}_{t_{k-1}})(1+h_N)S^{(N)}_{t_{k-1}} + \beta_{k-1}(S^{(N)}_{t_{k-1}})S^0_{t_{k-1}} = v_k((1+h_N)S^{(N)}_{t_{k-1}}) \tag{5}$$

$$\alpha_{k-1}(S^{(N)}_{t_{k-1}})(1+b_n)S^{(N)}_{t_{k-1}} + \beta_{k-1}(S^{(N)}_{t_{k-1}})S^0_{t_{k-1}} = v_k((1+b_N)S^{(N)}_{t_{k-1}}) \tag{6}$$

(5)-(6) on a:

$$\alpha_{k-1} = \frac{v_k((1+h_N)S^{(N)}_{t_{k-1}}) - v_k((1+b_N)S^{(N)}_{t_{k-1}})}{S^{(N)}_{t_{k-1}}(h_N - b_N)}$$

$$\beta_{k-1} = \frac{v_k((1+b_N)S^{(N)}_{t_{k-1}})(1+h_N) - v_k((1+h_N)S^{(N)}_{t_{k-1}})(1+b_N)}{S^0_{t_k}(h_N - b_N)}$$

1.3.3 Question 10

```
## [[1]]
##           [,1]     [,2]
## [1,] 0.0000000 1.078947
## [2,] 0.7961165 0.000000
##
## [[2]]
##            [,1]       [,2]
## [1,]  0.0000000 -0.9453883
## [2,] -0.7563107  0.0000000
```

2 Modèle de Black-Scholes

2.1 Le modèle

Ici on modèle le prix des actifs de manière continu. Soit le prix S^0 de l'actif sans risque satisfait l'équation différentielle suivante

$$dS^0_t = rS^0_t dt$$

avec $S_0^0 = 1$. Le prix S de l'actif risqué vérifie l'équation différentielle stochastique suivante

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dB_t)$$

avec $S_0^0 = 1$, σ et r deux constantes strictement positives. B est un processus stochastique appelé mouvement brownien.

2.1.1 Question 11

On utilise la formule d'Ito pour déterminer la formule de S_t en fonction de s, r, σ, t et B_t:

$$dg(S_t) = g'(S_t)dS_t + \frac{|\sigma S_t|^2}{2} g''(S_t)dt$$

En appliquant la formule d'Ito à $ln(S_t)$ on a:

$$d(ln(S_t)) = ln'(S_t)dS_t + \frac{|\sigma S_t|^2}{2} ln''(S_t)dt$$

$$d(ln(S_t)) = \frac{1}{S_t}dS_t - \frac{|\sigma S_t|^2}{2}\frac{1}{S_t^2}dt$$

$$d(ln(S_t)) = \frac{1}{S_t}(S_t(rdt + \sigma dB_t)) - \frac{\sigma^2}{2}dt$$

$$d(ln(S_t)) = (r - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dB_t$$

Et intégrant entre 0 et 1 on obtient alors:

$$ln(S_t) - ln(S_0) = (r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma(B_t - B_0)$$

Donc avec les valeurs initiales $S_0 = s$ et $B_0 = 0$:

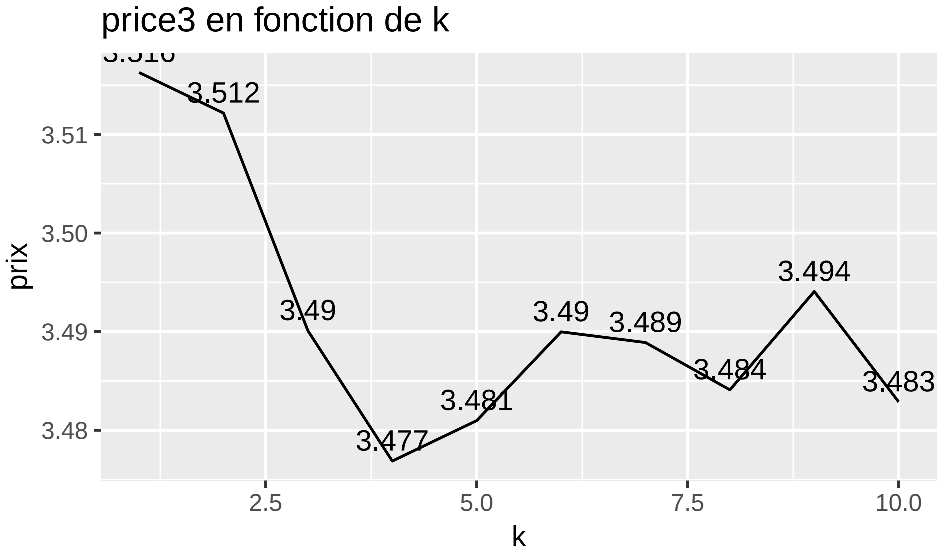
$$S_t = s\, exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t)$$

2.2 Le pricer par la méthode de Monte-Carlo

2.2.1 Question 12

2.2.2 Question 13

En prenant comme paramètre $r = 0.01$, $\sigma = 0.1$, $s = 100$, $T = 1$, $f(x) = max(100 - x, 0)$, $n = 10^5 k$ pour $1 \leq k \leq 10$, on obtient le graphique suivant



2.2.3 Question 14

On a

$$\hat{p}_{(n)} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{-rT} f(s\, exp((r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}\xi_i))$$

on peut poser que

$$X_i = e^{-rT} f(s\, exp((r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}\xi_i))$$

alors

$$\hat{p}_{(n)} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Pour $X \in \{X_1, ..., X_n\}$ on peut facilement déduire que $\mathbb{E}[X] < +\infty$ car $\forall v, f(v) < +\infty$ et $e^{-rT} < +\infty$. De plus, $(\xi_i)_{1 \le i \le n}$ sont une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, donc en donnant r, σ, s, T et $f(x)$ les $(X_i)_{1 \le i \le n}$ sont aussi indépendantes et identiquement distribuées. Donc on peut appliquer la loi forte des grands nombres pour $(X_i)_{1 \le i \le n}$:

$$\bar{X}_n \to_{p.s} \bar{\mu}$$

d'où $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $\bar{\mu} = \mathbb{E}[\bar{X}_n]$

Alors on peut obtenir que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{-rT} f(s\, exp((r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}\xi_i)) \to_{p.s} \mathbb{E}[e^{-rT} f(s\, exp((r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}\xi_i)] \quad (7)$$

en plus on a

$$p := \mathbb{E}[e^{-rT} f(S_T)]$$

Donc pour montrer (7) on doit montrer que

$$S_T = s\ exp((r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}\xi_i)$$

d'après question 11 on a déja

$$S_T = s\ exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t)$$

avec B_T un mouvement brownien, donc on a besoin de montrer que

$$\sqrt{T}\xi_i = B_T$$

C'est à dire qu'il faut montrer que $\sqrt{T}\xi_i$ est un mouvement brownien.

On va le faire par trois étapes:

1.Quand $T = 0$ on a bien

$$\sqrt{T}\xi_i = 0$$

2.Vu que $\xi_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ donc on a

$$\sqrt{T}\xi_i \sim \mathcal{N}(0,T)$$

de manière équivalente, pour la valeur S avec $0 \leq S \leq T$, on a donc

$$B_S \sim \mathcal{N}(0,S)$$

Selon les propriétés des variables aléatoires gaussiennes, on peut savoir que $B_T - B_S$ suit une loi normale (car c'est une combinaison des v.a. gaussiennes indépendantes) avec

$$\mathbb{E}[B_T - B_S] = \mathbb{E}[B_T] - \mathbb{E}[B_S] = 0$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{V}[B_T - B_S] \\
&= \mathbb{V}[B_T] + \mathbb{V}[B_S] - 2cov(B_T, B_S) \\
&= T + S - 2(\mathbb{E}[(B_T - \mathbb{E}[B_T])(B_S - \mathbb{E}[B_S])]) \\
&= T + S - 2(\mathbb{E}[B_T B_S]) \\
&= T + S - 2(\mathbb{E}[B_S(B_T - B_S)] + \mathbb{E}[B_S^2]) \\
&= T + S - 2(\mathbb{E}[B_S]\mathbb{E}[B_T - B_S] + \mathbb{V}[B_S]) \\
&= T + S - 2S \\
&= T - S
\end{aligned}$$

donc on obtient

$$B_T - B_S \sim \mathcal{N}(0, T - S)$$

3.D'après des propriétés de v.a. gaussiennes, pour tous les temps $0 \leq S' \leq T' \leq S \leq T$ et pour tous $B_T = \sqrt{T}\xi_i$ $B_S = \sqrt{S}\xi_i$ $B_{T'} = \sqrt{T'}\xi_i$ $B_{S'} = \sqrt{S'}\xi_i$ on peut savoir que le vecteur $(B_T - B_S, B_{T'} - B_{S'})$ est un vecteur gausienne, parce que selon la demostration 2) on peut voir que $B_T - B_S$ et $B_{T'} - B_{S'}$ sont bien deux v.a gaussiennes, et pour prouver qu'elles sont indépendants, il suffit de montrer que $cov(B_T - B_S, B_{T'} - B_{S'}) = 0$, donc

$$
\begin{aligned}
&cov(B_T - B_S, B_{T'} - B_{S'}) \\
&= \mathbb{E}[(B_T - B_S)(B_{T'} - B_{S'})] \\
&= \mathbb{E}[B_T B_{T'}] - \mathbb{E}[B_T B_{S'}] - \mathbb{E}[B_S B_{T'}] + \mathbb{E}[B_S B_{S'}] \\
&= T' - S' - T' + S' \\
&= 0
\end{aligned}
$$

On a bien montré que $B_T - B_S$ et $B_{T'} - B_{S'}$ sont indépendants, donc de 1)2)3) on a

$$\sqrt{T}\xi_i = B_T$$

c'est à dire que $\sqrt{T}\xi_i$ est un mouvement brownien. Par conséquence, on a bien que la suite $(\hat{p}_{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers p.

2.3 Le pricer par la formule fermée

2.3.1 Question 15

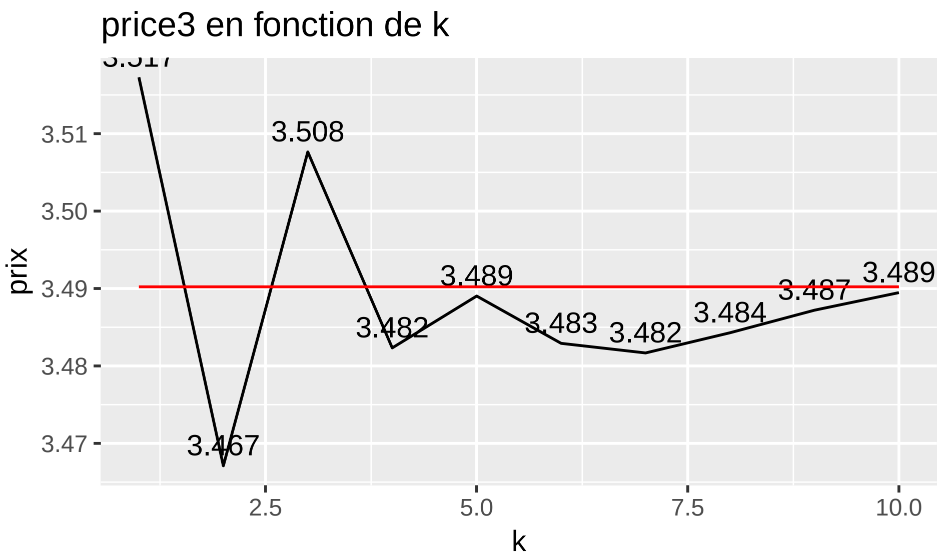
2.3.2 Question 16

En appliquant la fonction *put* à: $r = 0.01$, $\sigma = 0.1$, $s = 100$, $T = 1$, $K = 100$, on obtient:

```
## [1] 2.257405
```

2.3.3 Question 17

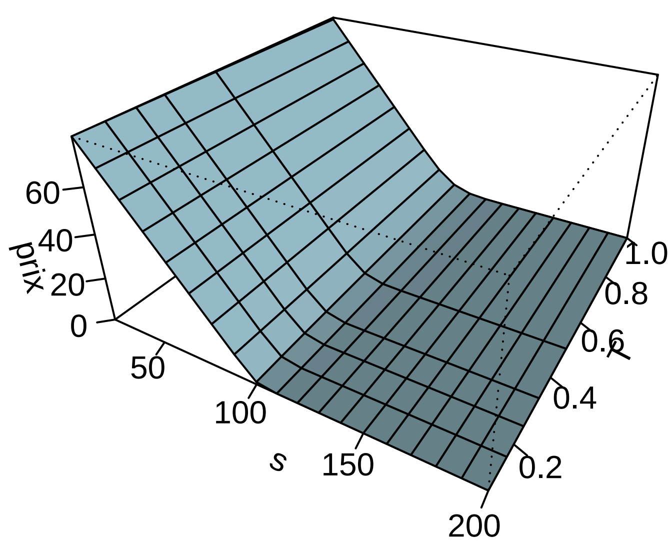
On trace le prix donné par la fonction price3 avec $r = 0.01$, $\sigma = 0.1$, $s = 100$, $T = 1$, $f(x) = max(100 - x, 0)$, $n = 10^5 k$ pour $1 \leq k \leq 10$, et aussi le prix donée par la fonction put sur le même graphique:



On a remarqué que k devient grand, la valeur retournée par price3 semble être assez proche du prix donné par put. On peut conjecturer que price3 converge vers la valeur donné par put, lorsque k tend vers l'infini.

2.3.4 Question 18

On trace ensuite le graphique en 3 dimensions le prix d'option en utilisant la fonction put lorsque $r = 0.01$, $\sigma = 0.1$, $K = 100$, $s = 20k$ avec $1 \leq k \leq 10$, et $T \in \{\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$

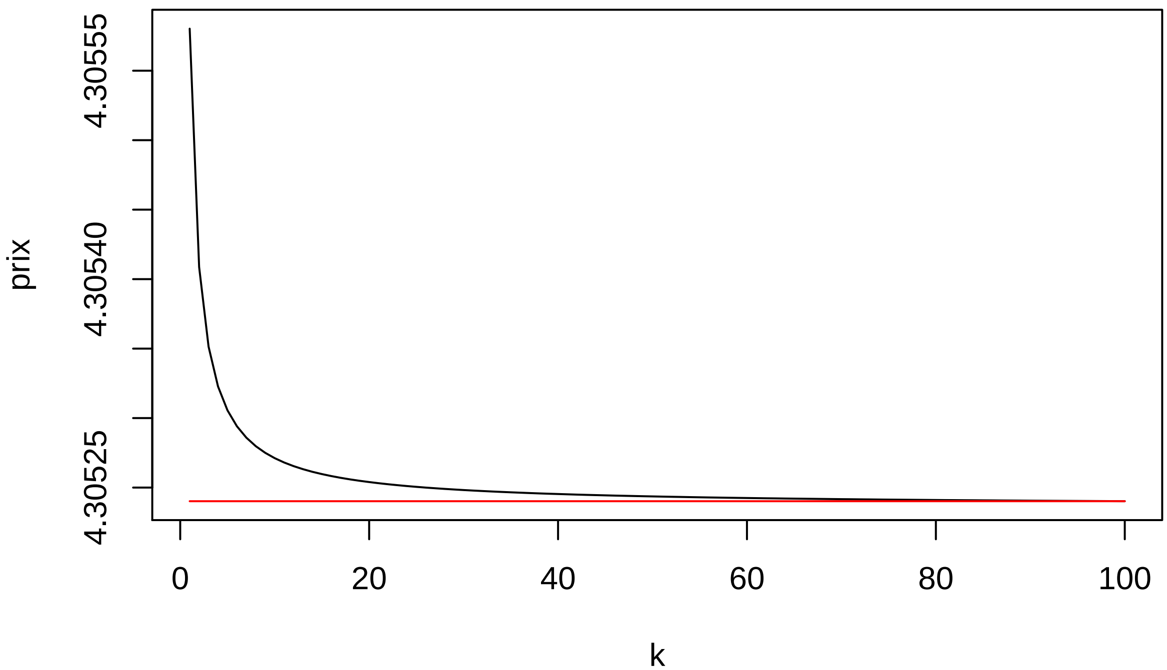


On remarque que plus T augmente à s fixé, plus le prix augmente. De plus, plus s augmente à T fixé, plus le prix diminue jusqu'à un prix proche de 0 et continue à diminuer.

3 Convergence des prix

3.0.1 Question 19

On trace le prix en utilisant la fonction price2 d'une option qui paye $max(100 - S_T, 0)$, $s = 100$, $\sigma = 0.2$, $r = 0.04$, $T = 1$ avec $N = 10k$ pour $1 \leq k \leq 100$, on y ajoute aussi le droite du prix donné par la fonction put:



4 EDP de Black-Scholes

Dans cette partie, on considèrera le problème suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} + rS\frac{\partial P}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} = rP,\ (t, S_t) \in [0, T] \times [0, L],\ T > 0 \\ P(T, s) = max(K - s, 0)\ , \forall s \in [0, L] \\ P(t, 0) = Ke^{r(t-T)}\ , \forall t \in [0, T] \\ P(t, L) = 0\ , \forall t \in [0, T] \end{cases}$$

En plus on pose que $\Delta T = \frac{T}{N}$ et $\Delta s = \frac{L}{M+1}$ puis

$$t_n = n\Delta T \ \ \forall n \in \{0, ..., N\} \tag{8}$$

$$s_i = i\Delta s \ \ \forall i \in \{0, ..., M + 1\} \tag{9}$$

4.1 Différences finies explicites

Pour tout $(n,i) \in \{0,...,N-1\} \times \{1,...,M\}$, on approche les dérivées partielles intervenant dans l'EDP dans schéma explicite avec $P(t_n, s_i)$ remplacé par $P_{n,i}$

$$\frac{\partial P_{n,i}}{\partial t} \approx \frac{1}{\Delta T}(P_{n,i} - P_{n-1,i}) \tag{10}$$

$$\frac{\partial P_{n,i}}{\partial S} \approx \frac{1}{\Delta s}(P_{n,i} - P_{n,i-1}) \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 P_{n,i}}{\partial S^2} \approx \frac{1}{\Delta s^2}(P_{n,i+1} - 2P_{n,i} + P_{n,i-1}) \tag{12}$$

donc d'après (8)(9)(10)(11)(12), pour $P_{n,i}$ on obtient la formule

$$P_{n-1,i} = ((\frac{\sigma^2 i^2}{2} - ri)\Delta T)P_{n,i-1} + (1 + (ri - \sigma^2 i^2 - r)\Delta T)P_{n,i} + \frac{\sigma^2 i^2 \Delta T}{2} P_{n,i+1}$$

on pose que $P_n = (P_{n,1}, ..., P_{n,M})^t \in \mathbb{R}^M$ donc on peut obtenir

$$P_{n-1} = AP_n \ \forall n \in [1, N]$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_{M-1} & b_{M-1} & c_{M-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_M & b_M \end{bmatrix}$$

d'où

$$a_i = (\frac{\sigma^2 i^2}{2} - ri)\Delta T$$

$$b_i = 1 + (ri - \sigma^2 i^2 - r)\Delta T$$

$$c_i = \frac{\sigma^2 i^2 \Delta T}{2}$$

En plus pour $i = 1$ et $i = M$ on a

$$P_{n-1,1} = (\frac{\sigma^2}{2} - r)\Delta T P_{n,0} + (1 + (r - \sigma^2 - r)\Delta T)P_{n,1} + \frac{\sigma^2 \Delta T}{2} P_{n,2}$$

$$P_{n-1,M} = (\frac{\sigma^2 M^2}{2} - rM)\Delta T P_{n,M-1} + (1 + (rM - \sigma^2 M^2 - r)\Delta T)P_{n,M} + \frac{\sigma^2 \Delta T M^2}{2} P_{n,L}$$

Sachant qu'on a deux conditions de bords

$$P(t, 0) = Ke^{r(t-T)} \ \forall t \in [0, T]$$

$$P(t,L)=0\ \forall t\in[0,T]$$

donc on a

$$P_{C_n}=\begin{bmatrix}(\frac{\sigma^2}{2}-r)\Delta TKe^{r(t_n-T)}\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

et la condition initiale

$$P_N=max(K-s,0)\ \forall s\in[0,L]$$

donc finalement on a les formules de recurrences

$$\begin{cases}P_{n-1}=AP_n+P_{C_n}\ \forall n\in[0,...,N]\\P_{C_n}=\begin{bmatrix}(\frac{\sigma^2}{2}-r)\Delta TKe^{r(t_n-T)}\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\forall n\in[0,...,N]\\P_N=max(K-s,0)\ \forall s\in[0,L]\end{cases}$$

4.2 Différences finies implicites

Pour tout $(n,i)\in\{0,...,N-1\}\times\{1,...,M\}$, on approche les dérivées partielles intervenant dans l'EDP dans schéma implicite avec $P(t_n,s_i)$ remplacé par $P_{n,i}$

$$\frac{\partial P_{n,i}}{\partial t}\approx\frac{1}{\Delta T}(P_{n+1,i}-P_{n,i})\tag{13}$$

$$\frac{\partial P_{n,i}}{\partial S}\approx\frac{1}{\Delta s}(P_{n,i}-P_{n,i-1})\tag{14}$$

$$\frac{\partial^2 P_{n,i}}{\partial S^2}\approx\frac{1}{\Delta s^2}(P_{n,i+1}-2P_{n,i}+P_{n,i-1})\tag{15}$$

donc d'après (8)(9)(13)(14)(15), pour $P_{n,i}$ on obtient la formule

$$(-\Delta T(\frac{\sigma^2 i^2}{2}-ri))P_{n,i-1}+(1-(ri-\sigma^2i^2-r)\Delta T)P_{n,i}-\frac{\sigma^2i^2\Delta T}{2}P_{n,i+1}=P_{n+1,i}$$

on pose que $P_n=(P_{n,0},...,P_{n,M+1})^t$ donc on peut obtenir

$$AP_n+P_{C_n}=P_{n+1}$$

avec

$$A=\begin{bmatrix}b_1&c_1&0&\cdots&\cdots&0\\a_2&b_2&c_2&0&\cdots&0\\0&a_3&b_3&c_3&\cdots&0\\\vdots&0&\ddots&\ddots&\ddots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&a_{M-1}&b_{M-1}&c_{M-1}\\0&0&0&\cdots&a_M&b_M\end{bmatrix}$$

d'où

$$a_i = -\Delta T(\frac{\sigma^2 i^2}{2} - ri)$$
$$b_i = 1 - (ri - \sigma^2 i^2 - r)\Delta T$$
$$c_i = -\frac{\sigma^2 i^2 \Delta T}{2}$$

En plus pour $i = 1$ et $i = M$ on a

$$P_{n+1,1} = (r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta T P_{n,0} + (1 + \sigma^2 \Delta T)P_{n,1} - \frac{\sigma^2 \Delta T}{2} P_{n,2}$$

$$P_{n+1,M} = (rM - \frac{\sigma^2 M^2}{2})\Delta T P_{n,M-1} + (1 - (rM - \sigma^2 M^2 - r)\Delta T)P_{n,M} - \frac{\sigma^2 M^2 \Delta T}{2} P_{n,L}$$

Sachant qu'on a deux conditions de bords

$$P(t, 0) = Ke^{r(t-T)}\ \forall t \in [0, T]$$

$$P(t, L) = 0\ \forall t \in [0, T]$$

donc on a

$$P_{C_n} = \begin{bmatrix} (r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta T K e^{r(t_n - T)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

et la condition initiale

$$P_N = max(K - s, 0)\ \forall s \in [0, L]$$

donc finalement on a les formules de recurrences

$$\begin{cases} P_n = A^{-1}(P_{n+1} - P_{C_n})\ \forall n \in [0, ..., N] \\ P_{C_n} = \begin{bmatrix} (\frac{\sigma^2}{2} - r)\Delta T K e^{r(t_n - T)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \forall n \in [0, ..., N] \\ P_N = max(K - s, 0)\ \forall s \in [0, L] \end{cases}$$

4.3 Méthode de Crank-Nicholson

Pour tout $(n, i) \in \{0, ..., N-1\} \times \{1, ..., M\}$, on approche les dérivées partielles intervenant dans l'EDP dans schéma implicite avec $P(t_n, s_i)$ remplacé par $P_{n,i}$

$$\frac{\partial P_{n,i}}{\partial t} \approx \frac{1}{\Delta T}(P_{n+1,i} - P_{n,i}) \tag{16}$$

$$\frac{\partial P_{n,i}}{\partial S} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{P_{n+1,i+1} - P_{n+1,i-1}}{2\Delta s} + \frac{P_{n,i+1} - P_{n,i-1}}{2\Delta s}\right) \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2 P_{n,i}}{\partial S^2} \approx \frac{1}{2(\Delta s)^2}((P_{n+1,i+1} - 2P_{n+1,i} + P_{n+1,i-1}) + (P_{n,i+1} - 2P_{n,i} + P_{n,i-1})) \tag{18}$$

donc d'après (8)(9)(16)(17)(18), pour $P_{n,i}$ on obtient la formule

$$(\frac{\sigma^2 i^2}{4} - \frac{ri}{4})P_{n,i-1} + (-\frac{1}{\Delta T} - \frac{\sigma^2 i^2}{2} - r)P_{n,i} + (\frac{\sigma^2 i^2}{4} + \frac{ri}{4})P_{n,i+1} =$$

$$(\frac{ri}{4} - \frac{\sigma^2 i^2}{4})P_{n+1,i-1} + (\frac{\sigma^2 i^2}{2} - \frac{1}{\Delta T})P_{n+1,i} + (-\frac{\sigma^2 i^2}{4} - \frac{ri}{4})P_{n+1,i+1}$$

on pose que $P_n = (P_{n,0}, ..., P_{n,M+1})^t$ donc on peut obtenir

$$AP_n = BP_{n+1}$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_{M-1} & b_{M-1} & c_{M-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_M & b_M \end{bmatrix} \; et \; B = \begin{bmatrix} e_1 & f_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ d_2 & e_2 & f_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_3 & e_3 & f_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & d_{M-1} & e_{M-1} & f_{M-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_M & e_M \end{bmatrix}$$

d'où

$$\begin{cases} a_i = \frac{\sigma^2 i^2}{4} - \frac{ri}{4} \\ b_i = -\frac{1}{\Delta T} - \frac{\sigma^2 i^2}{2} - r \\ c_i = \frac{\sigma^2 i^2}{4} + \frac{ri}{4} \\ d_i = \frac{ri}{4} - \frac{\sigma^2 i^2}{4} \\ e_i = \frac{\sigma^2 i^2}{2} - \frac{1}{\Delta T} \\ f_i = -\frac{\sigma^2 i^2}{4} - \frac{ri}{4} \end{cases}$$

En plus pour $i = 1$ et $i = M$ on a

$$(\frac{\sigma^2}{4} - \frac{r}{4})P_{n,0} + (-\frac{1}{\Delta T} - \frac{\sigma^2}{2} - r)P_{n,1} + (\frac{\sigma^2}{4} + \frac{r}{4})P_{n,2} =$$

$$(\frac{r}{4} - \frac{\sigma^2}{4})P_{n+1,0} + (\frac{\sigma^2}{2} - \frac{1}{\Delta T})P_{n+1,1} + (-\frac{\sigma^2}{4} - \frac{r}{4})P_{n+1,2}$$

$$(\frac{\sigma^2 M^2}{4} - \frac{rM}{4})P_{n,M-1} + (-\frac{1}{\Delta T} - \frac{\sigma^2 M^2}{2} - r)P_{n,M} + (\frac{\sigma^2 M^2}{4} + \frac{rM}{4})P_{n,L} =$$

$$(\frac{rM}{4} - \frac{\sigma^2 M^2}{4})P_{n+1,M-1} + (\frac{\sigma^2 M^2}{2} - \frac{1}{\Delta T})P_{n+1,M} + (-\frac{\sigma^2 M^2}{4} - \frac{rM}{4})P_{n+1,L}$$

Sachant qu'on a deux conditions de bords

$$P(t,0) = Ke^{r(t-T)} \; \forall t \in [0,T]$$

$$P(t,L) = 0 \; \forall t \in [0,T]$$

donc on a

$$P_{C_{n1}} = \begin{bmatrix} (\frac{r}{4} - \frac{\sigma^2}{4})Ke^{r(t_n - T)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad et \quad P_{C_{n2}} = \begin{bmatrix} (\frac{\sigma^2}{4} - \frac{r}{4})Ke^{r(t_{n+1} - T)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

et la condition initiale

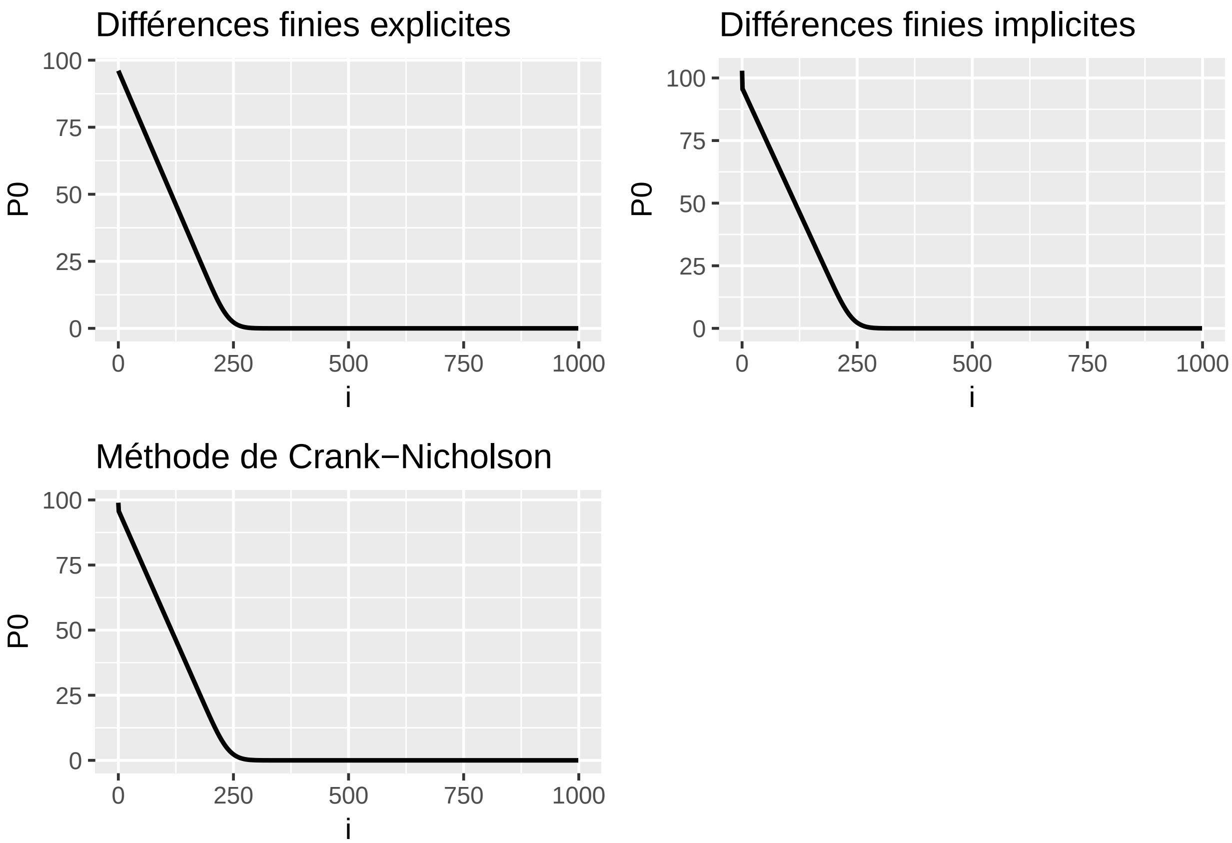
$$P_N = max(K - s, 0) \; \forall s \in [0, L]$$

donc finalement on a les formules de recurrences

$$\begin{cases} P_n = A^{-1}(BP_{n+1} + P_{C_{n2}} - P_{C_{n1}}) \; \forall n \in [0, ..., N] \\ P_{C_{n1}} = \begin{bmatrix} (\frac{r}{4} - \frac{\sigma^2}{4})Ke^{r(t_n - T)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} P_{C_{n2}} = \begin{bmatrix} (\frac{\sigma^2}{4} - \frac{r}{4})Ke^{r(t_{n+1} - T)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \; \forall n \in [0, ..., N] \\ P_N = max(K - s, 0) \; \forall s \in [0, L] \end{cases}$$

4.4 Les solutions et les erreurs

EN considérant la condition CFL, il faut qu'on mette la valeur de N beaucoup plus grande que celle de M, donc on prend $N = 10000$ et on obtient des résolutions numériques



La formule pour calculer les erreurs relatives

$$\delta_{\alpha_r} = \frac{valeur\ calcule - valeur\ theorique}{|valeur\ theorique|}$$