博弈论之古诺模型推导

Semester:2024-2025　　By:Econ

September 25, 2024

一、模型假设

(1) 市场中的多个寡头厂商（之后出现的厂商默认为寡头）生产和销售同质产品，并追求利润最大化

(2) 厂商同时做出产量决策，产品的价格依赖于生产的产品总量

(3) 厂商之间无勾结行为，每个厂商都根据其他厂商的产出水平确定自己的产量

(4) 厂商实力无差异，即最后不同厂商的均衡产量均相等

二、符号说明

符号	意义
P	产品价格
Q	市场总供给
π_i	厂商 i 的利润
q_i	厂商 i 的产量
q^*	厂商的均衡产量
c_i	厂商 i 的单位产品成本

三、模型建立及求解

(1) 目标函数：利润最大化

其中, 利润 = 产品价格 × 产量-单位成本 × 产量

$$\max_i \quad \pi_i = P \cdot q_i - c_i \cdot q_i$$

(2) 约束条件 (n 为厂商数量)

$$s.t. \begin{cases} P = a - bQ & a, b > 0 \\ Q = \sum_{i=1}^{n} q_i \\ q_1^* = q_2^* = ... = q_n^* \end{cases}$$

(3) 求解过程

$$\because \pi_i = (a - bQ - c_i) \cdot q_i$$

$$\pi_i = [a - c_i - b(q_1 + q_2 + ... + q_n)] \cdot q_i$$

$$\therefore \frac{d\pi_i}{dq_i} = (-bq_i) + (a - c_i - b\sum_{i=1}^{n} q_i) = 0$$

PS：求最值，必要条件为导数等于零，至于怎么求导的，这里是直接左导右不导 + 左不导右导，也可以分配律去掉括号，对含 q_i 的式子逐一求导

$$又 \because q_1^* = q_2^* = ... = q_n^*$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} q_i^* = nq^*$$

$$\therefore a - c_i = b(n+1)q^*$$

有 n 个厂商时，均衡产量为 $q^* = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{a - c_i}{b}$

(4) 结论：n 个寡头厂商的均衡产量为 $q^* = \frac{1}{n+1} \cdot Q^{'}$

$$其中\ Q^{'} = \frac{a - c_i}{b}$$