由于三台摄像机被等距地放置在直径为 $1m$ 的圆周上，故而确定一台摄像机在圆周上的位置，即可确定剩余两台摄像机的位置。假设摄像机 m_1 与圆心的连线 l_1 与 x 轴正半轴的夹角分别为 $\theta(0 \le \theta \le \frac{2\pi}{3})$，则另外两台摄像机与 x 轴正半轴的夹角为 $\theta + \frac{\pi}{3}$ 与 $\theta + \frac{2\pi}{3}$.

首先考虑 $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ 且 $\theta + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2}$ 且 $\theta + \frac{2\pi}{3} \neq \frac{3\pi}{2}$ 则

$$l_1 : y = tan\theta \cdot x$$

假设所求椭圆长半轴与短半轴长分别为 l、k，则对于椭圆上任意一点 $(x_0, y_0)(y_0 \neq 0)$，过 (x_0, y_0) 且与椭圆相切的直线 l_0 的方程为

$$l_0 : \frac{x_0 x}{l^2} + \frac{y_0 y}{k^2} = 1$$

则 l_0 的斜率为 $-\frac{x_0 k^2}{y_0 l^2}$.

设与 l_1 平行且与椭圆相交的直线分别为 l_2、l_3，它们与椭圆的切点分别为 (x_2, y_2)、(x_3, y_3), 则由 l_1 与 l_2、l_3 的斜率相等可得：

$$tan\theta = -\frac{x_2 k^2}{y_2 l^2} = -\frac{x_3 k^2}{y_3 l^2} \tag{1}$$

由于 (x_2, y_2)、(x_3, y_3) 为椭圆上两点，满足方程

$$\begin{gathered} \frac{x_2^2}{l^2} + \frac{y_2^2}{k^2} = 1 \\ \frac{x_3^2}{l^2} + \frac{y_3^2}{k^2} = 1 \end{gathered} \tag{2}$$

由 (1)(2) 两式可得：

$$\begin{cases} x_2^2 = x_3^2 = \dfrac{l^4 tan^2\theta}{l^2 tan^2\theta + k^2} \\ y_2^2 = y_3^2 = \dfrac{k^4}{l^2 tan^2\theta + k^2} \end{cases} \tag{3}$$

由 l_2 的直线方程为

$$l_2 : \frac{x_2 x}{l^2} + \frac{y_2 y}{k^2} = 1$$

得 l_2 与 l_3 直线之间的距离 (即为 (x_3, y_3) 到 l_2 的距离)d_1 满足：

$$\begin{aligned} d_1^2 &= \frac{|\frac{x_2 x_3}{l^2} + \frac{y_2 y_3}{k^2} - 1|^2}{\frac{x_2^2}{l^4} + \frac{y_2^2}{k^4}} \\ &= \frac{|-\frac{x_2^2}{l^2} - \frac{y_2^2}{k^2} - 1|^2}{\frac{x_2^2}{l^4} + \frac{y_2^2}{k^4}} \\ &= \frac{4}{\frac{x_2^2}{l^4} + \frac{y_2^2}{k^4}} \end{aligned}$$

将 (3) 代入可得：

$$d_1^2 = \frac{4(l^2 tan^2\theta + k^2)}{1 + tan^2\theta}$$

由于 d 即为摄像机所得的线段长度，故而得到三个方程：

$$\begin{cases} a = 2\sqrt{\dfrac{l^2 tan^2\theta + k^2}{1 + tan^2\theta}} \\ b = 2\sqrt{\dfrac{l^2 tan^2(\theta + \frac{\pi}{3}) + k^2}{1 + tan^2(\theta + \frac{\pi}{3})}} \\ c = 2\sqrt{\dfrac{l^2 tan^2(\theta + \frac{2\pi}{3}) + k^2}{1 + tan^2(\theta + \frac{2\pi}{3})}} \end{cases} \tag{4}$$

再考虑 $\theta=\frac{\pi}{2}$，显然有：

$$\begin{cases} a=2l \\ b=\sqrt{l^2+3k^2} \\ c=\sqrt{l^2+3k^2} \end{cases} \tag{5}$$

再考虑 $\theta=\frac{\pi}{6}$，显然有：

$$\begin{cases} a=\sqrt{l^2+3k^2} \\ b=2l \\ c=\sqrt{l^2+3k^2} \end{cases} \tag{6}$$

最后考虑 $\theta=\frac{5\pi}{6}$，显然有：

$$\begin{cases} a=\sqrt{l^2+3k^2} \\ b=\sqrt{l^2+3k^2} \\ c=2l \end{cases} \tag{7}$$

综上所述：当 a,b,c 互不相等时，可利用 (4) 进行求解，而 a,b,c 中存在两个值相等时，可视相等情况分别利用 (5)(6)(7) 求解。

下利用 $Matlab$ 中 $vpasolve$ 函数对方程进行求解:$vpasolve$ 函数可以求得代数方程式的数值解。对于含有 m 个未知数 $[x_1,x_2,...,x_m]$ 与 n 个等式方程组 $[eq_1,eq_2,...,eq_n]$,函数 $vpasolve([eq_1,...,eq_n],[x_1,...,x_m],X_0)$ 可以返回方程的数值解，其中 X_0 为未知数的初值或者数值解所在的区间。

在 $Matlab$ 中执行以下命令：

Algorithm 1 通过 a,b,c 求解椭圆面积 S 的算法

Input: a,b,c
Output: S

if $(a=b\wedge b<\frac{c}{2})\vee(a=c\wedge a<\frac{b}{2})\vee(b=c\wedge b<\frac{a}{2})$ **then**
    return -1;
end if
if $a=b\wedge b=c$ **then**
    $S=\frac{a^2\pi}{4}$;
    return S
end if
if $a=b\wedge b\neq c$ **then**
    $l=\frac{c}{2}$;
    $k=\sqrt{\frac{b^2-l^2}{3}}$;
    $S=lk\pi$;
    return S;
end if
if $a=c\wedge b\neq c$ **then**
    $l=\frac{b}{2}$;
    $k=\sqrt{\frac{a^2-l^2}{3}}$;
    $S=lk\pi$;
    return S;
end if
if $b=c\wedge a\neq c$ **then**

$l = \frac{a}{2}$;

$k = \sqrt{\frac{b^2-l^2}{3}}$;

$S = lk\pi$;

return S;

end if

if $a \neq b \wedge b \neq c \wedge c \neq a$ **then**

solve equations

$a = 2\sqrt{\frac{l^2tan^2\theta+k^2}{1+tan^2\theta}}$

$b = 2\sqrt{\frac{l^2tan^2(\theta+\frac{\pi}{3})+k^2}{1+tan^2(\theta+\frac{\pi}{3})}}$

$c = 2\sqrt{\frac{l^2tan^2(\theta+\frac{2\pi}{3})+k^2}{1+tan^2(\theta+\frac{2\pi}{3})}}$

if l *is not a real number* or k *is not a real number* **then**

return -1;

else

$S = lk\pi$;

return S;

end if

end if

通过该程序即可由输入 a、b、c 得到面积 S 的数值解, 无解时返回 -1。

下面考虑在 $Matlab$ 中使用 $solve$ 函数求得 l, k, θ 的显式解：$solve$ 函数与 $vpasolve$ 函数的用法与功能类似，$solve$ 函数还能模拟人工运算求得函数的公式解。

在 $Matlab$ 中尝试使用 $solve$ 函数求解方程 (4)，未得到显式解。

再考虑所拍摄的物体为直线或圆的情况：

1) 所拍摄物体为线段

保持上述公式推导不变，取 $k = 0$，则可得到

$$\begin{cases} a = 2lsin\ \theta \\ b = 2l|sin(\theta + \dfrac{\pi}{3})| \\ c = 2l|sin(\theta + \dfrac{2\pi}{3})| \end{cases} \tag{8}$$

若 $\theta \in [0, \frac{\pi}{3})$, 此时 b、c 满足关系式：

$$\begin{cases} b + c = 2\sqrt{3}\ lcos\ \theta \\ b - c = 2lsin\ \theta = a \end{cases}$$

利用 a、b、c 表示 l、θ 得：

$$\begin{cases} l^2 = \dfrac{(b+c)^2 + 3a^2}{12} \\ sin^2\theta = \dfrac{3(b-c)^2}{3a^2 + (b+c)^2} \end{cases}$$

回代入 (8) 得

$$a = b - c$$

若 $\theta \in [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$, 此时 b、c 满足关系式：

$$\begin{cases} b + c = 2lsin\ \theta = a \\ b - c = 2\sqrt{3}\ lcos\ \theta \end{cases}$$

利用 a、b、c 表示 l、θ 得：

$$\begin{cases} l^2 = \dfrac{(b-c)^2 + 3a^2}{12} \\ sin^2\theta = \dfrac{3a^2}{3a^2 + (b-c)^2} \end{cases}$$

回代入 (8) 得

$$a = b + c$$

2) 所拍摄物体为圆