

记大圆的圆心坐标为  $(x_0, y_0)$ , 第一台摄像机  $m_1$  与圆心连线与  $x$  轴夹角为  $\theta$ , 则  $m_1$  坐标为  $(x_0 + 50\cos \theta, y_0 + 50\sin \theta)$ , 设为  $(x_1, y_1)$ , 则过  $m_1$  所作的椭圆的两条切线与椭圆的切点的连线方程为:

$$\frac{x_1x}{l^2} + \frac{y_1y}{k^2} = 1$$

联立方程组

$$\begin{cases} \frac{x_1x}{l^2} + \frac{y_1y}{k^2} = 1 \\ \frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{k^2} = 1 \end{cases}$$

利用 *MATLAB* 求解得到由  $m_1$  作切线得到的两个切点  $T_1(x_2, y_2)$ 、 $T_2(x_3, y_3)$ . 由弦长公式, 得到割线  $T_1T_2$  的长度  $L$ :

$$L^2 = (1 + \frac{k^4x_1^2}{l^4y_1^2})(x_2 - x_3)^2 \quad (1)$$

进一步, 利用直角三角形  $T_1T_2T_3$  的各边关系, 得到  $T_1T_3$  即摄像机拍到的线段  $a$  的表达式为:

$$\begin{aligned} a &= L \cdot |\cos(\phi - \theta - \frac{\pi}{2})| \\ &= L \cdot |\sin(\phi - \theta)| \end{aligned} \quad (2)$$

其中,  $\phi = \arctan(-\frac{k^2x_1}{l^2y_1})$ , 为割线  $T_1T_2$  与  $x$  轴正方向的夹角。

下面考虑照片上所反映的线段的端点偏离圆心  $O$  的程度 (由端点到圆心的较短距离衡量)。由于  $O(x_0, y_0)$ , 作  $Om_1$  的延长线与  $T_1T_3$  交于点  $Q$ , 则  $QT_1$  为照片上所反映的线段的端点  $T_1$  到圆心  $O$  的距离。下面考虑  $QT_1$  的长度:

$OQ$  的直线方程为:

$$y - y_0 = \tan \theta (x - x_0)$$

$T_1Q$  的直线方程为:

$$\cos \theta (x - x_2) + \sin \theta (y - y_2) = 0$$

故而两条直线的交点  $Q(x_4, y_4)$  坐标为

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{\cos \theta x_2 - \sin \theta y_0 + \sin \theta \tan \theta x_0 + \sin \theta y_2}{\cos \theta + \sin \theta \tan \theta} \\ y_4 &= \frac{\sin \theta x_2 - \sin \theta x_0 + \cos \theta y_0 + \sin \theta \tan \theta y_2}{\cos \theta + \sin \theta \tan \theta} \end{aligned} \quad (3)$$

故而

$$T_1Q = \sqrt{(x_4 - x_2)^2 + (y_4 - y_2)^2}$$

同理可以得到另一个端点  $T_2$  偏离圆心的距离  $T_2R = \sqrt{(x_5 - x_3)^2 + (y_5 - y_3)^2}$ , 其中  $R$  的垂点  $(x_5, y_5)$  为:

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{\cos \theta x_3 - \sin \theta y_0 + \sin \theta \tan \theta x_0 + \sin \theta y_3}{\cos \theta + \sin \theta \tan \theta} \\ y_4 &= \frac{\sin \theta x_3 - \sin \theta x_0 + \cos \theta y_0 + \sin \theta \tan \theta y_3}{\cos \theta + \sin \theta \tan \theta} \end{aligned} \quad (4)$$

取二者中较小值作为观测到的线段的端点偏离圆心  $O$  的程度, 即

$$d_1 = \min\{T_1Q, T_2R\}$$

同时考虑  $m_2$  与  $m_3$  观测到的线段长度以及偏离程度, 将上式中  $\theta$  分别替换为  $\theta + \frac{\pi}{3}$  以及  $\theta + \frac{2\pi}{3}$  可以得到  $b$ 、 $c$  以及  $d_2$ 、 $d_3$  的表达式。