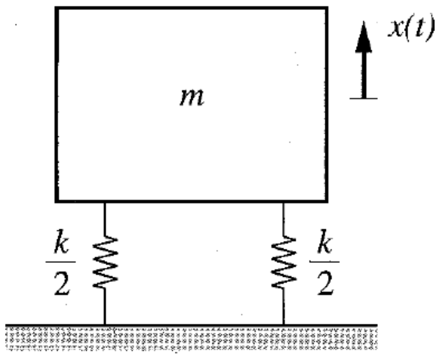
רשימת נושאים:

1. דרגת חופש אחת
   1.1. רטט חופשי
      1.1.1. מערכת לא מרוסנת
      1.1.2. מערכת מרוסנת
      1.1.3. חישוב מקדם ריסון
   1.2. רטט מאולץ (תנאי התחלה מאופסים)
      1.2.1. עירור כוח הרמוני
         1.2.1.1. עירור מהצורה $F_{(t)} = kA\cos\left(\omega t\right)$
         1.2.1.2. עירור מהצורה $F_{(t)} = kAe^{i\omega t}$
      1.2.2. עירור בסיס הרמוני- $y_{(t)} = A \cdot e^{i\omega t}$
         יישום לדג': מכשירי מדידה- $y_{(t)} = Y_0 \cos\left(\omega t\right)$
      1.2.3. עירור מחזורי
         תזכורת- טור פורייה
      1.2.4. עירור כללי
         1.2.4.1. תגובה להלם
         1.2.4.2. תגובה למדרגה
         1.2.4.3. תגובה לרמפה
         1.2.4.4. קונבולוציה
2. מספר סופי של דרגות חופש
   2.1. הערות חשובות וסימונים
   2.2. שתי דרגות חופש
      2.2.1. רטט חופשי ללא ריסון
      2.2.2. רטט מאולץ
      2.2.3. מרסן תנודות דינמי
3. מערכות רציפות:
   3.1. סימונים
   3.2. מיתר מתוח / מוט / ציר
      3.2.1. ניסוח משוואת השדה
      3.2.2. פיתרון משוואה הומוגנית ($f_{(x,t)} = 0$) ותנאי שפה הומוגניים
      3.2.3. פתרון משוואה לא הומוגנית ותנאי שפה הומוגניים
      3.2.4. תיקון תנאי שפה לא הומוגניים
      3.2.5. אנלוגיה למקרים נוספים
      3.2.6. תנאי שפה לדוגמה
   3.3. קורות אוילר ברנולי
      3.3.1. ניסוח המשוואה
      3.3.2. פתרון משוואה הומוגנית
      3.3.3. תנאי שפה לדוגמא
      3.3.4. פתרונות לדוגמא

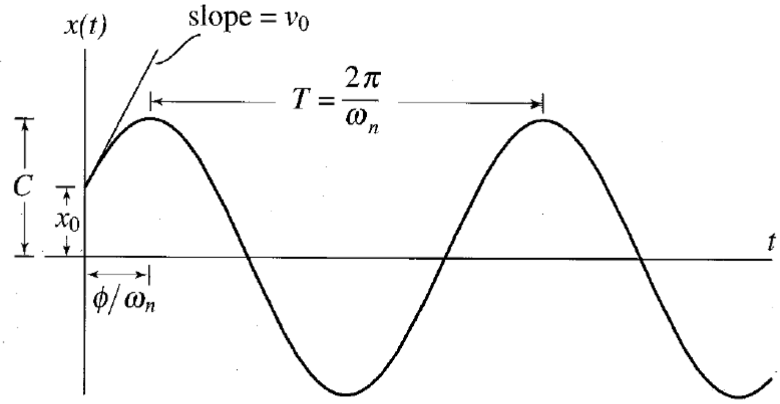
1. דרגת חופש אחת :

1.1. רטט חופשי :

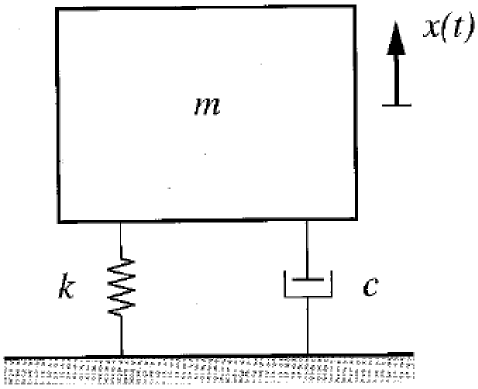
1.1.1. מערכת לא מרוסנת :

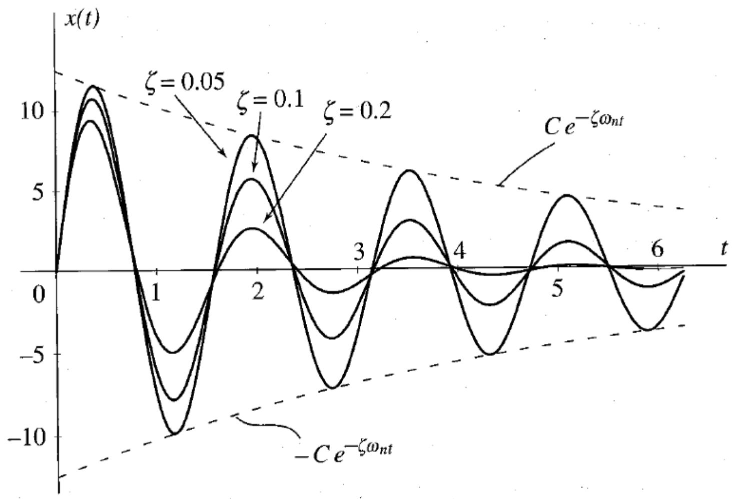


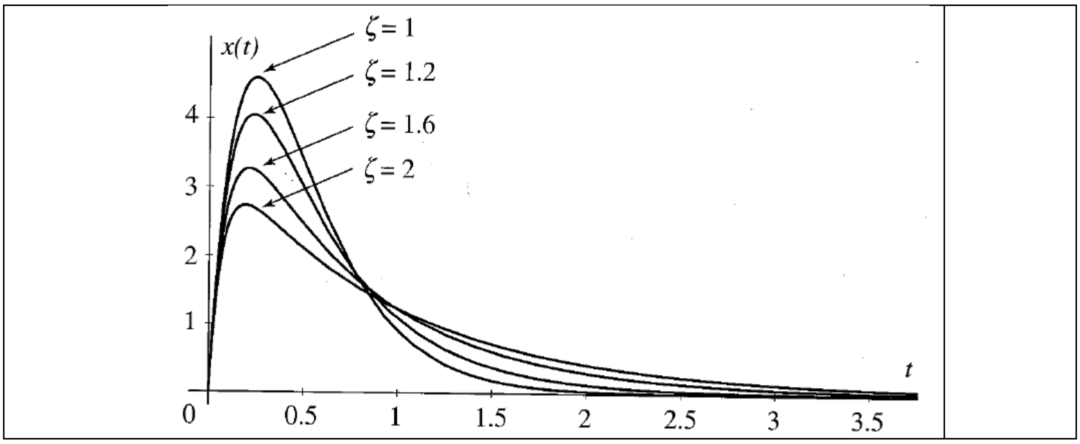
משוואת תנועה ותנאי התחלה	$m\ddot{x}_{(t)} + kx_{(t)} = 0$ $x_{(0)} = x_0 \;\; ; \;\; \dot{x}_{(0)} = v_0$
הגדרת תדירות טבעית	$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$
פתרון כללי	$x_{(t)} = A \cdot e^{i\omega_n t} + B \cdot e^{-i\omega_n t}$
הצגה ראשונה	$x_{(t)} = C \cdot \cos(\omega_n t - \phi)$ $C = \sqrt{{x_0}^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2} \;\; ; \;\; \phi = \tan^{-1}\left(\frac{v_0}{x_0 \omega_n}\right)$
הצגה נוספת	$x_{(t)} = x_0 \cos(\omega_n t) + \frac{v_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t)$



1.1.2. מערכת מרוסנת :



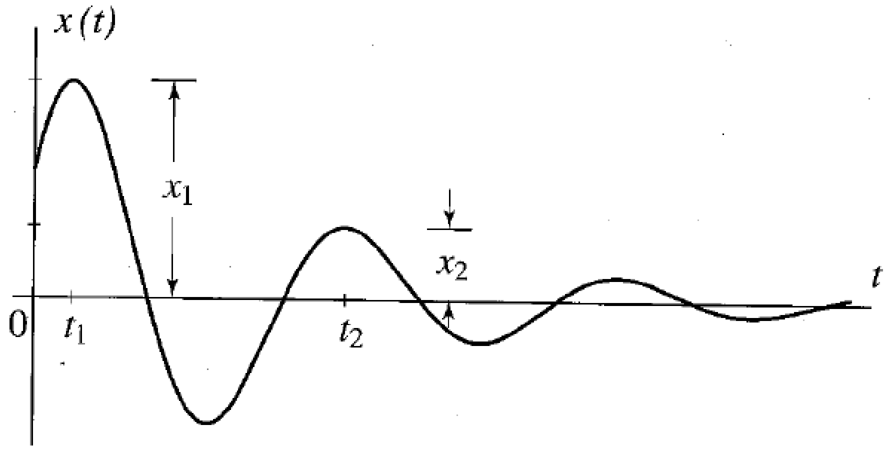
משוואת תנועה ותנאי התחלה		$m\ddot{x}_{(t)}+c\dot{x}_{(t)}+kx_{(t)}=0$ $x_{(0)}=x_0\ ;\ \dot{x}_{(0)}=v_0$
הגדרת תדירות טבעית ומקדם ריסון ויסקוזי		$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}\ ;\ \zeta=\frac{c}{2m\omega_n}$
פתרון כללי		$x_{(t)}=A\cdot e^{s_1t}+B\cdot e^{s_2t}$ $s_{\frac{1}{2}}=-\zeta\omega_n\pm\sqrt{\zeta^2-1}\,\omega_n$
מערכת בתת-ריסון $0<\zeta<1$	תדירות מרוסנת	$\omega_d=\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n$
	הצגה ראשונה	$x_{(t)}=C\cdot e^{-\zeta\omega_nt}\cos\left(\omega_dt-\phi\right)$ $C=\sqrt{x_0{}^2+\left(\frac{\zeta\omega_nx_0+v_0}{\omega_d}\right)^2}\ ;\ \phi=\tan^{-1}\left(\frac{\zeta\omega_nx_0+v_0}{x_0\omega_d}\right)$
	הצגה נוספת	$x_{(t)}=e^{-\zeta\omega_nt}\left(x_0\cos\left(\omega_dt\right)+\frac{\zeta\omega_nx_0+v_0}{\omega_d}\sin\left(\omega_dt\right)\right)$
		
מערכת בריסון יתר	פתרון כללי	$x_{(t)}=e^{-\zeta\omega_nt}\left(x_0\cosh\left(\sqrt{\zeta^2-1}\,\omega_nt\right)+\frac{\zeta\omega_nx_0+v_0}{\sqrt{\zeta^2-1}\,\omega_n}\sinh\left(\sqrt{\zeta^2-1}\,\omega_nt\right)\right)$
	כאשר $\zeta=1$	$x_{(t)}=e^{-\zeta\omega_nt}\left[x_0+\left(\omega_nx_0+v_0\right)t\right]$



1.1.3. חישוב מקדם ריסון :

בעזרת מדידה של $x_{(t_1)}, x_{(t_2)}$ כך ש- $t_2 = t_1 + T$ ו- $T = \frac{2\pi}{\omega_d}$ ניתן לחלץ את מקדם הריסון

<u>במצב של תת-ריסון</u> :

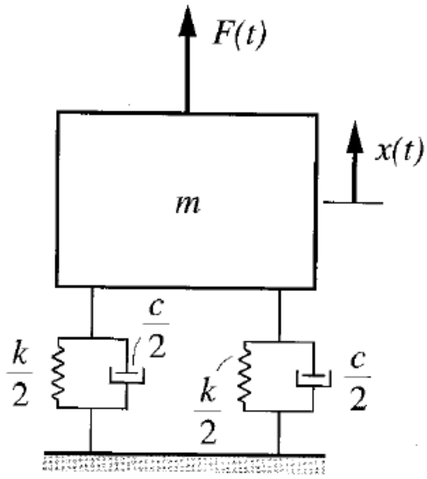


$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_{(t_1)}}{x_{(t_2)}} = \frac{C \cdot e^{-\zeta\omega_n t_1}\cos\left(\omega_d t_1 - \phi\right)}{C \cdot e^{-\zeta\omega_n t_2}\cos\left(\omega_d t_2 - \phi\right)} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t_1}\cos\left(\omega_d t_1 - \phi\right)}{e^{-\zeta\omega_n (t_1+T)}\cos\left(\omega_d\left(t_1 + T\right) - \phi\right)} = e^{\zeta\omega_n T} = e^{\zeta\omega_n \cdot \frac{2\pi}{\omega_d}} = e^{\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$\delta = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \zeta = \left.\frac{\delta}{\sqrt{\left(2\pi\right)^2 + \delta^2}}\right|_{\zeta \ll 1} \approx \frac{\delta}{2\pi}$$

1.2. רטט מאולץ (תנאי התחלה מאופסים) :

1.2.1. עירור כוח הרמוני :



1.2.1.1. עירור מהצורה $F_{(t)} = kA\cos\left(\omega t\right)$:

משוואת תנועה	$\ddot{x}_{(t)} + 2\zeta\omega_n\dot{x}_{(t)} + \omega_n{}^2 x_{(t)} = \omega_n{}^2 A\cos\left(\omega t\right)$
פתרון	$x_{(t)} = \dfrac{A}{\left[1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(\dfrac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}\left\{\dfrac{2\zeta\omega}{\omega_n}\cdot\sin\left(\omega t\right)+\left[1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]\cdot\cos\left(\omega t\right)\right\}$
הצגה נוספת	$x_{(t)} = X\cos\left(\omega t-\phi\right)$ $X = X_{(\omega)} = \dfrac{A}{\left[1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(\dfrac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}$ $\phi = \phi_{(\omega)} = \tan^{-1}\left(\dfrac{2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right)$

1.2.1.2. עירור מהצורה $F_{(t)} = kAe^{i\omega t}$:

משוואת תנועה	$\ddot{x}_{(t)} + 2\zeta\omega_n\dot{x}_{(t)} + \omega_n{}^2 x_{(t)} = \omega_n{}^2 Ae^{i\omega t}$
צורת פתרון	$x_{(t)} = X_{(i\omega)}\cdot e^{i\omega t}$
הצבה במשוואה	$Z_{(i\omega)}X_{(i\omega)}e^{i\omega t} = \omega_n{}^2 Ae^{i\omega t}$ $Z_{(i\omega)} = \left(i\omega\right)^2 + \left(i\omega\right)2\zeta\omega_n + \omega_n{}^2$
פתרון	$X_{(i\omega)} = \dfrac{\omega_n{}^2 A}{Z_{(i\omega)}} = \dfrac{A}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + i2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}}$ $G_{(i\omega)} = \dfrac{X_{(i\omega)}}{A} = \dfrac{1}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + i2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}}$ $x_{(t)} = AG_{(i\omega)}\cdot e^{i\omega t}$

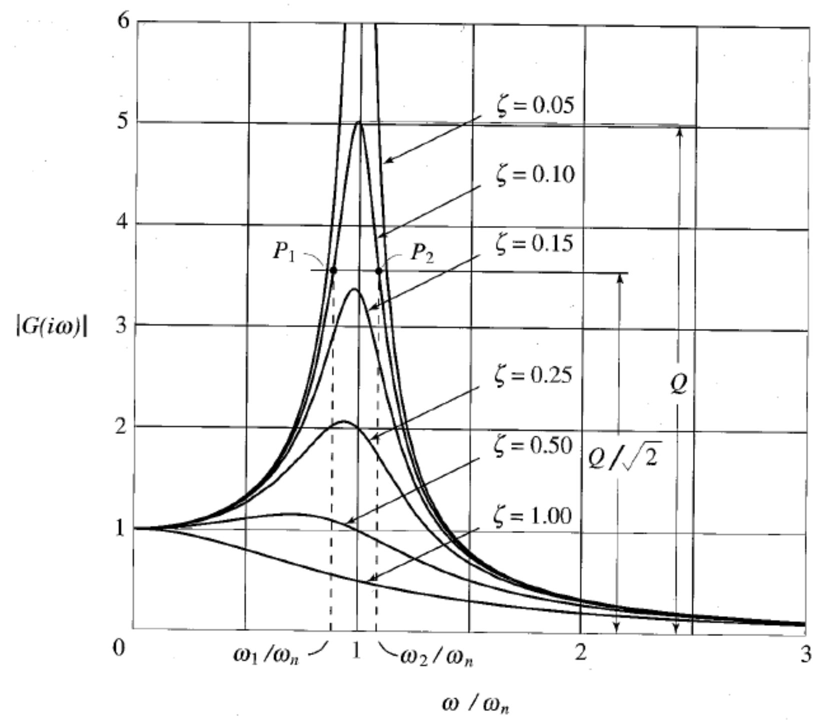
תמסורת המערכת

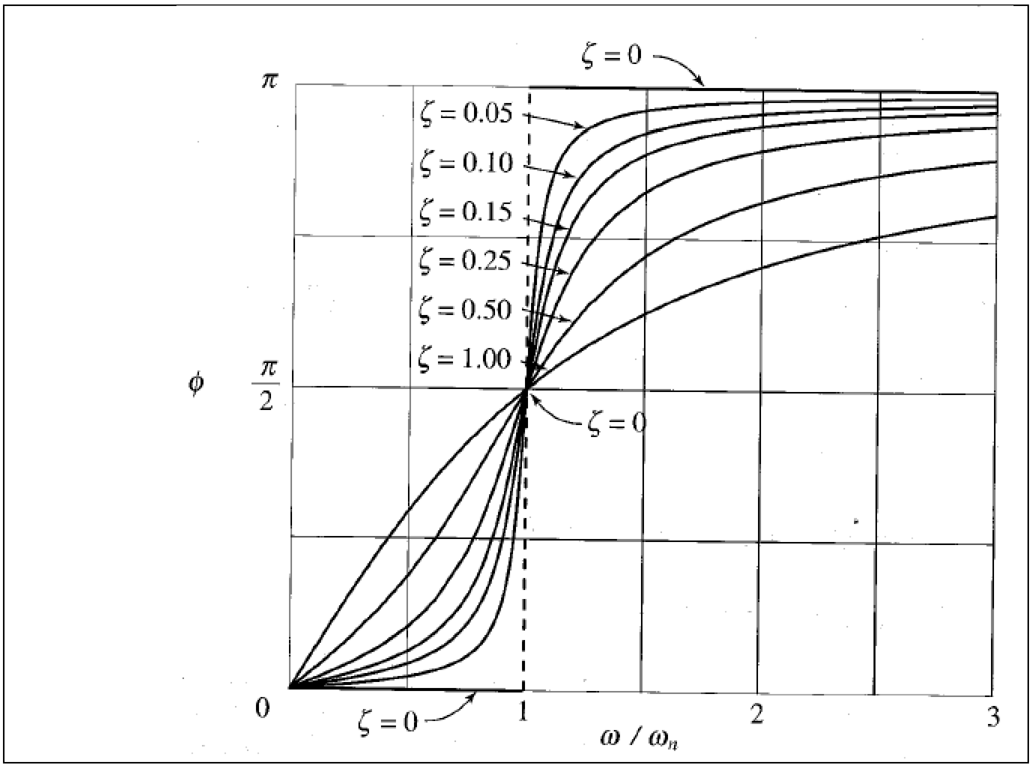
$$G_{(i\omega)}=\left|G_{(i\omega)}\right|\cdot e^{-i\phi_{(\omega)}}$$

$$\left|G_{(i\omega)}\right|=\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

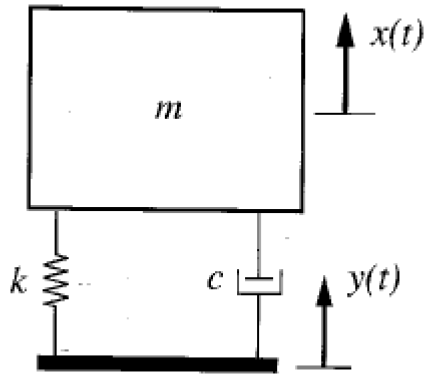
$$\phi_{(\omega)}=\tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right)$$

$$\left|G_{(i\omega)}\right|_{\max}\equiv Q=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}\cong\frac{1}{2\zeta}$$





1.2.2. עירור בסיס הרמוני- $y_{(t)} = A \cdot e^{i\omega t}$:



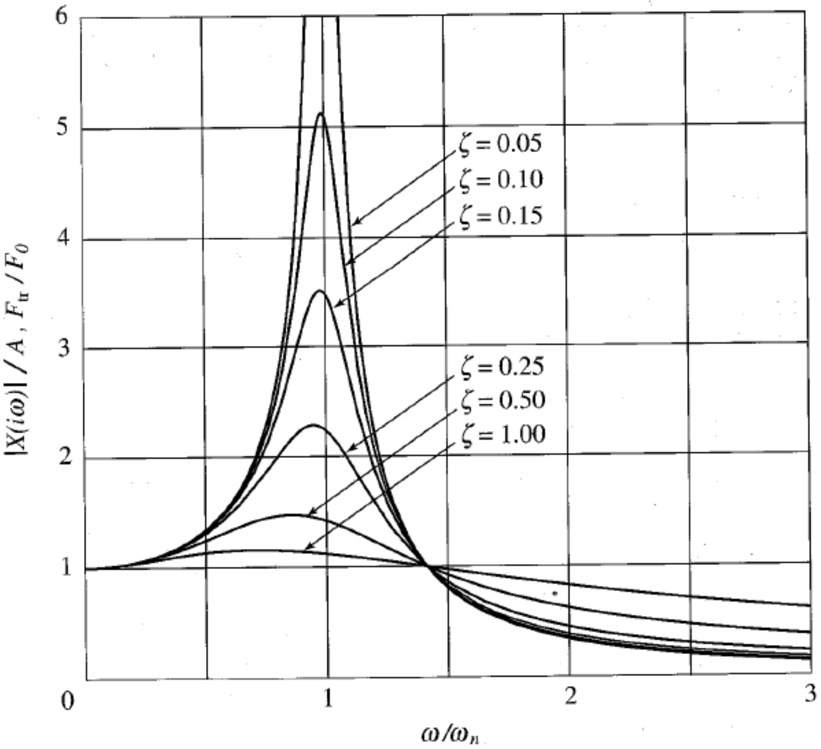
משוואת תנועה	$\ddot{x}_{(t)} + 2\zeta\omega_n \dot{x}_{(t)} + \omega_n{}^2 x_{(t)} = 2\zeta\omega_n \dot{y}_{(t)} + \omega_n{}^2 y_{(t)}$
צורת פתרון	$x_{(t)} = X_{(i\omega)} \cdot e^{i\omega t}$
פתרון	$X_{(i\omega)} = \dfrac{1 + i2\zeta \dfrac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + i2\zeta \dfrac{\omega}{\omega_n}} A$ $G_{(i\omega)} = \dfrac{1}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + i2\zeta \dfrac{\omega}{\omega_n}}$ $x_{(t)} = A\left(1 + i2\zeta \dfrac{\omega}{\omega_n}\right) G_{(i\omega)} \cdot e^{i\omega t}$

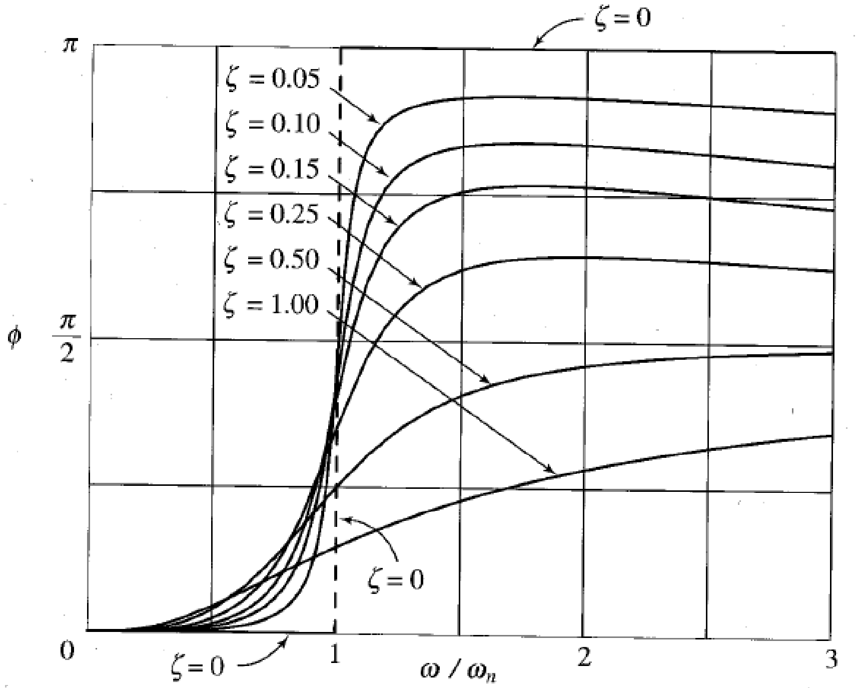
תמסורת המערכת

$$X_{(i\omega)} = \left| X_{(i\omega)} \right| \cdot e^{-i\phi_{(\omega)}}$$

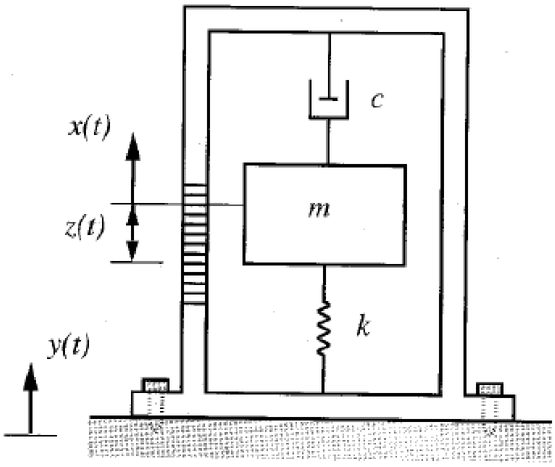
$$\left| X_{(i\omega)} \right| = \sqrt{\frac{1+\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}} = \sqrt{1+\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}\left| G_{(i\omega)} \right| A$$

$$\phi_{(\omega)} = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^3}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right)$$





יישום לדג׳: מכשירי מדידה- $y_{(t)} = Y_0 \cos\left(\omega t\right)$

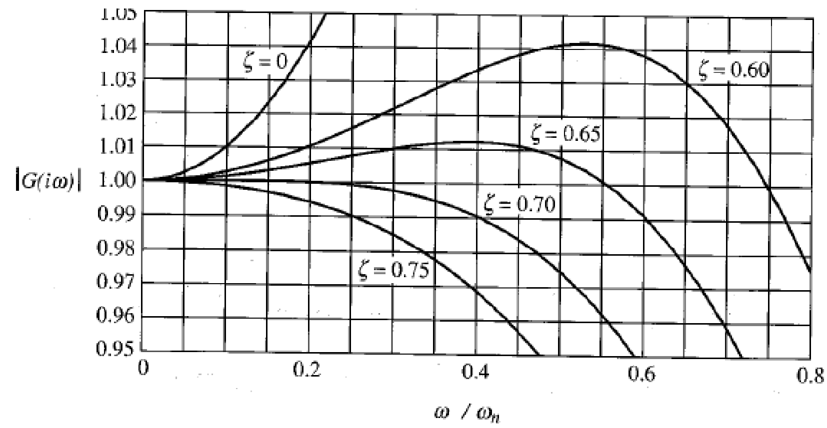


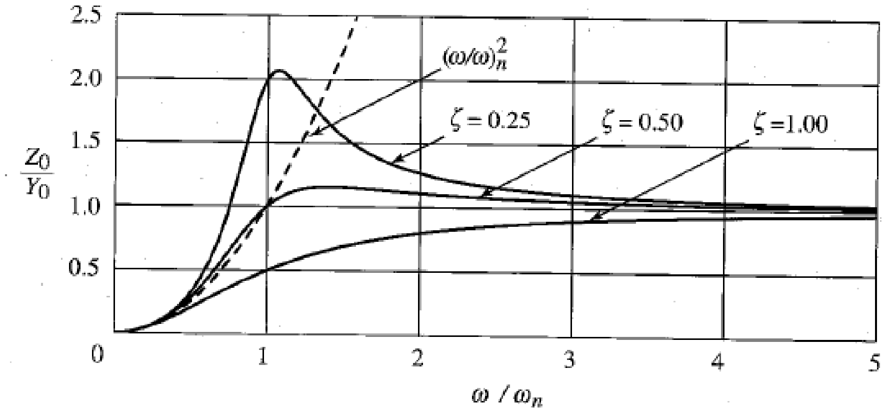
$x_{(t)} = y_{(t)} + z_{(t)}$ $\ddot{z}_{(t)} + 2\zeta\omega_n \dot{z}_{(t)} + \omega_n{}^2 z_{(t)} = -\ddot{y}_{(t)}$	משוואת תנועה

פתרון	$z_{(t)} = Z_0 \cos\left(\omega t - \phi\right)$ $Z_{0(i\omega)} = Y_0 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \left\|G_{(i\omega)}\right\|$ $G_{(i\omega)} = \frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + i2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}$ $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right)$

מד תאוצה: כאשר $\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1$ מתקיים: $\left|G_{(i\omega)}\right| \simeq 1$ ואז מתקיים: $Z_0 \simeq Y_0 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$, תאוצת הבסיס שקולה ל- $Y_0\omega^2$ מתקבל קשר פרופורציונלי בין Z_0 לתאוצה. תקפות הקירוב תלויה בריסון של המערכת.

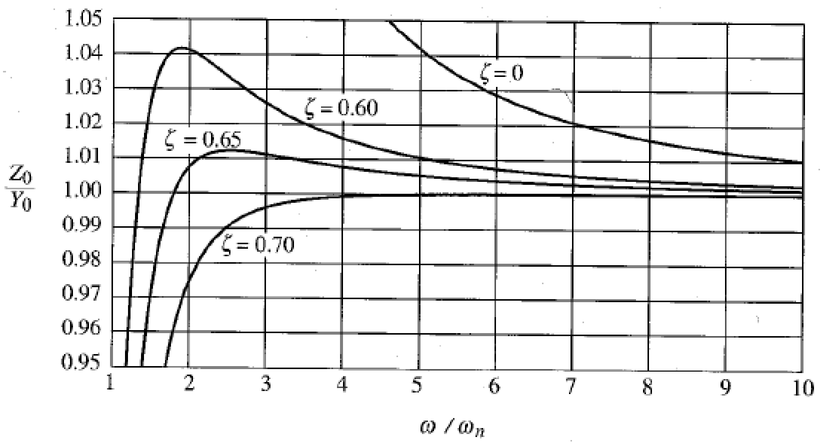
בבניית מד תאוצה נבחר תדירות טבעית גבוהה יותר מהתדרים שאנחנו רוצים למדוד





מד מיקום: כאשר $\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1$ מתקיים: $\left|G_{(i\omega)}\right| \simeq 1$ ואז מתקיים: $\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$ $Z_0 \simeq Y_0$, התלות בריסון המערכת חלשה יחסית.

בבניית מד מיקום נבחר תדירות טבעית נמוכה יותר מהתדירות שאנחנו רוצים למדוד.



1.2.3. עירור מחזורי:

תזכורת- טור פורייה:

פונקציה מחזורית $f_{(t)}$ (המקיימת $f_{(t)} = f_{(t+T)}$) מגדירים את טור פורייה המתאים לה:

$$f_{(t)} \simeq \frac{1}{2}a_0 + \sum_{p=1}^{\infty} a_p \cos\left(p\omega_0 t\right) + \sum_{p=1}^{\infty} b_p \sin\left(p\omega_0 t\right)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_p = \frac{2}{T}\int_0^T f_{(t)} \cos\left(p\omega_0 t\right) dt \quad p = 0,1,2...$$

$$b_p = \frac{2}{T}\int_0^T f_{(t)} \sin\left(p\omega_0 t\right) dt \quad p = 1,2...$$

הצגה שקולה:

$$f_{(t)} \simeq \frac{1}{2}A_0 + \mathrm{Re}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} A_p\, e^{ip\omega_0 t}\right\}$$

$$A_p = \frac{2}{T}\int_0^T f_{(t)}\, e^{-ip\omega_0 t}\, dt \quad p = 0,1,2...$$

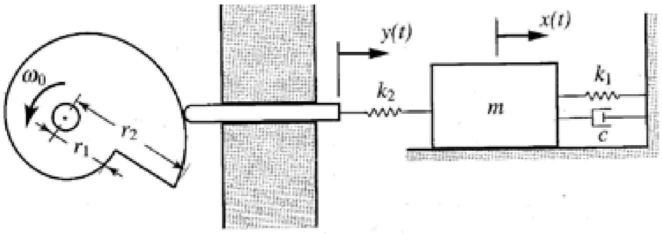
תכונות:

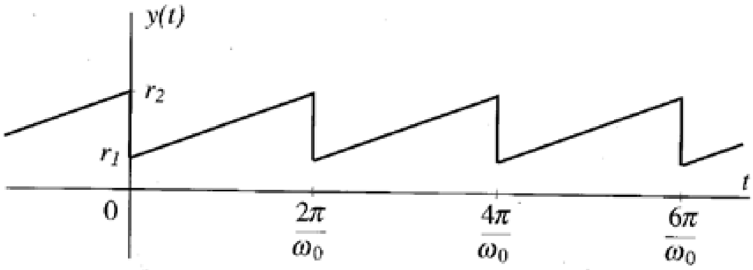
א. פונקציה זוגית- $f_{(t)} = f_{(-t)} \Rightarrow b_p \equiv 0$

ב. פונקציה אי זוגית- $f_{(t)} = -f_{(-t)} \Rightarrow a_p \equiv 0$

תגובה לעירור מחזורי:

לדג':





ניתן להציג את העירור כטור פורייה :

$$y_{(t)} \simeq \frac{1}{2}Y_0 + \mathrm{Re}\left\{\sum_{p=1}^{\infty} Y_p\, e^{ip\omega_0 t}\right\}$$

הפתרון מצורת העירור :

$$x_{(t)} \simeq \frac{1}{2}X_0 + \mathrm{Re}\left\{\sum_{p=1}^{\infty} X_p\, e^{ip\omega_0 t}\right\}$$

ניתן לכתוב את משוואת התנועה לכל הרמוניה המרכיבה את הטורים :

$$\left(ip\omega_0\right)^2 X_p + \left(in\omega_0\right)2\zeta\omega_n X_p + \omega_n^{\,2} X_p = \omega_n^{\,2} Y_p \qquad p = 0,1,2...$$

$$G_p = \frac{X_p}{Y_p} = \frac{1}{1-\left(\frac{p\omega_0}{\omega_n}\right)^2 + i2\zeta\frac{p\omega_0}{\omega_n}} = \left|G_p\right| e^{-i\phi}$$

$$\left|G_p\right| = \frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{p\omega_0}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta\frac{p\omega_0}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\frac{p\omega_0}{\omega_n}}{1-\left(\frac{p\omega_0}{\omega_n}\right)^2}\right)$$

פתרון :

$$x_{(t)} \simeq \frac{1}{2}Y_0 + \mathrm{Re}\left\{\sum_{p=1}^{\infty} G_p Y_p\, e^{ip\omega_0 t}\right\} = \frac{1}{2}Y_0 + \mathrm{Re}\left\{\sum_{p=1}^{\infty} \left|G_p\right| Y_p\, e^{i\left(p\omega_0 t-\phi\right)}\right\}$$

כקירוב לפתרון יילקחו איברים בודדים של טור התגובה, על פי המבחן הבא :

$X_n{}^2 < 0.1 \cdot \sum_{p=1}^{n-1} X_p{}^2$ - n הוא מספר האיברים.

1.2.4. עירור כללי:

1.2.4.1. תגובה להלם:

פונקציית הלם מוגדרת באופן הבא:

$$\delta_{(t-t_0)} = 0 \;\; for \;\; t \neq t_0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{(t-t_0)} dt = 1$$

תכונת הדגימה:

$$f_{(t_0)} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(t)} \delta_{(t-t_0)} dt$$

נסמן ב- $g_{(t)}$ את התגובה להלם, ניתן להראות שקילות בין המערכות הבאות:

$$\begin{Bmatrix} m\ddot{g}_{(t)} + c\dot{g}_{(t)} + kg_{(t)} = \delta_{(t)} \\ g_{\left(0^-\right)} = 0 \;,\; \dot{g}_{\left(0^-\right)} = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} m\dot{g}_{(t)} + c\dot{g}_{(t)} + kg_{(t)} = 0 \\ g_{\left(0^+\right)} = 0 \;,\; \dot{g}_{\left(0^+\right)} = \dfrac{1}{m} \end{Bmatrix}$$

כלומר, עירור הלם משפיע על תנאי ההתחלה של המערכת ההומוגנית. במקרה של מערכת בתת-ריסון ניתן להציב את תנאי ההתחלה בפתרון ידוע ולקבל:

$$g_{(t)} = \begin{cases} \dfrac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_d t} \sin\left(\omega_d t\right) & for \;\; t > 0 \\ 0 & for \;\; t < 0 \end{cases}$$

1.2.4.2. תגובה למדרגה:

פונקציית מדרגה מוגדרת באופן הבא:

$$u_{(t-t_0)} = \begin{cases} 1 & for \;\; t > t_0 \\ 0 & for \;\; t < t_0 \end{cases}$$

קשר אינטגרלי ודיפרנציאלי לפונקציית הלם:

$$u_{(t-t_0)} = \int_{-\infty}^{t} \delta_{(\tau-t_0)} d\tau \qquad \delta_{(\tau-t_0)} = \frac{du_{(t-t_0)}}{dt}$$

נסמן ב- $a_{(t)}$ את התגובה למדרגה, מלינאריות המערכת ניתן להראות שמתקיים:

$$a_{(t)} = \int_{-\infty}^{t} g_{(\tau)} d\tau = \frac{1}{k}\left[1 - e^{-\zeta\omega_d t}\left(\cos\left(\omega_d t\right) + \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}\sin\left(\omega_d t\right)\right)\right] u_{(t)}$$

1.2.4.3. תגובה לרמפה:

פונקציית רמפה מוגדרת באופן הבא:

$$r_{(t-t_0)} = \left(t - t_0\right) u_{(t-t_0)}$$

קשר אינטגרלי ודיפרנציאלי לפונקציית מדרגה:

$$r_{(t-t_0)} = \int_{-\infty}^{t} u_{(\tau-t_0)} d\tau \qquad u_{(\tau-t_0)} = \frac{dr_{(t-t_0)}}{dt}$$

נסמן ב- $\Upsilon_{(t)}$ את התגובה למדרגה, מלינאריות המערכת ניתן להראות שמתקיים:

$$\Upsilon_{(t)} = \int_{-\infty}^{t} a_{(\tau)} d\tau$$

1.2.4.4. קונבולוציה :

הגדרת הקונבולוציה :

$$f_{(t)} * g_{(t)} \equiv \int_{0}^{\infty} f_{(\tau)} g_{(t-\tau)} d\tau = \int_{0}^{\infty} f_{(t-\tau)} g_{(\tau)} d\tau$$

בהינתן עירור כללי $f_{(t)}$ למערכת :

$$m\ddot{x}_{(t)} + c\dot{x}_{(t)} + kx_{(t)} = f_{(t)}$$

ותגובת המערכת להלם $g_{(t)}$ הפתרון מתקבל על ידי קונבולוציה :

$$x_{(t)} = f_{(t)} * g_{(t)}$$

2. מספר סופי של דרגות חופש :

2.1. הערות חשובות וסימונים :

א. יש לבחור ולסמן מערכת צירים לבעיה.

ב. יש להגדיר קואורדינטה (מיקום/זווית) לכל דרגת חופש בבעיה.

ג. משוואות התנועה ייכתבו בכיוון החיובי של מערכת הצירים ולא בהכרח בכיוון גדילת הקואורדינטה.

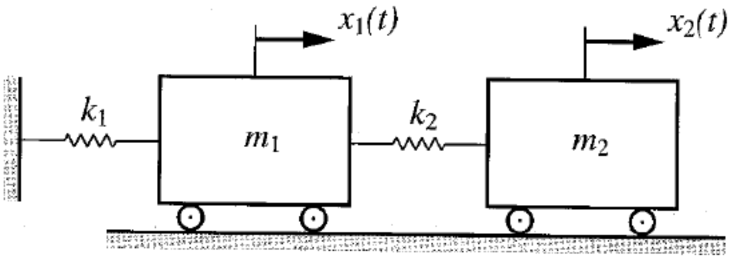
ד. על מנת לנתח את הכוחות הפועלים על כל מסה יש לבצע הזזה קטנה שלה מנקודת שיווי המשקל בעוד ששאר המסות נשארות נייחות.

סימונים :

וקטור עמודה	$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
מטריצה	$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$
מטריצה הופכית	$\underline{\underline{M}}^{-1}$
דטרמיננטה	$\det\left(\underline{\underline{M}}\right) = \left\|\underline{\underline{M}}\right\|$

2.2. שתי דרגות חופש :

2.2.1. רטט חופשי ללא ריסון :



משוואות תנועה (סקלארית)	$\begin{cases} m_1\ddot{x}_{1_{(t)}} = -k_1 x_{1_{(t)}} - k_2\left(x_{1_{(t)}} - x_{2_{(t)}}\right) \\ m_2\ddot{x}_{2_{(t)}} = -k_2\left(x_{2_{(t)}} - x_{1_{(t)}}\right) \\ x_{1_{(0)}} = x_{1_0} \qquad \dot{x}_{1_{(0)}} = \dot{x}_{1_0} \\ x_{2_{(0)}} = x_{2_0} \qquad \dot{x}_{2_{(0)}} = \dot{x}_{2_0} \end{cases}$
הגדרת מטריצת מסה (אינרציה)	$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$

הגדרת מטריצת קשיחות	$\underline{\underline{K}}=\begin{pmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix}$
הגדרת וקטור מיקום (דרגות החופש)	$\underline{x}_{(t)}=\begin{pmatrix} x_{1_{(t)}} \\ x_{2_{(t)}} \end{pmatrix}$
משוואת התנועה (וקטורית)	$\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{x}}_{(t)}+\underline{\underline{K}}\,\underline{x}_{(t)}=\underline{0}$
הגדרת מטריצת ייצוג של המערכת	$\underline{\underline{K}}^*=\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{K}}=\underline{\underline{P}}^{-1}\underline{\underline{DP}}$
מטריצת ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים *** קצת שונה מההצגה בכיתה***	$\underline{\underline{D}}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{\underline{P}}=\begin{pmatrix} \vert & \vert \\ \underline{v}_1 & \underline{v}_2 \\ \vert & \vert \end{pmatrix}$ $\quad \underline{\underline{K}}^*\underline{v}_i=\lambda_i\underline{v}_i$
הגדרת קואורדינטה טבעית	$\underline{\eta}_{(t)}=\underline{\underline{P}}\,\underline{x}_{(t)}$
הצבה במשוואה	$\underline{\ddot{\eta}}_{(t)}+\underline{\underline{D}}\,\underline{\eta}_{(t)}=\underline{0}$
פתרון בקואורדינטה טבעית	$\eta_{i_{(t)}}=C_i\cos\left(\omega_i t-\phi_i\right) \qquad \omega_i^2=\lambda_i$
התמרת תנאי ההתחלה לקואורדינטות	$\underline{\eta}_0=\underline{\underline{P}}\,\underline{x}_0$ $\underline{\dot{\eta}}_0=\underline{\underline{P}}\,\underline{\dot{x}}_0$

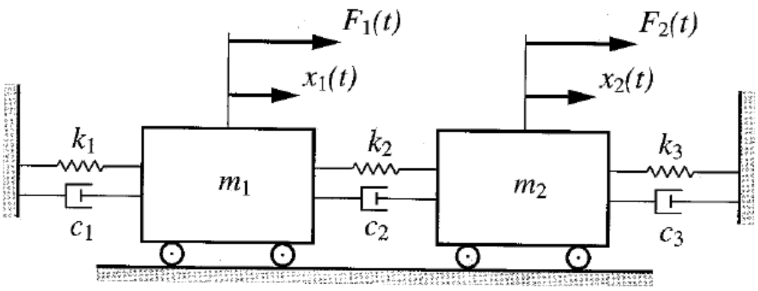
הערות לדרך הפתרון:

א. וקטור הקואורדינטות (במקרה זה וקטור מיקומים) נלקח כווקטור עמודה ובהתאם לכך נכתבו המשוואות הווקטוריות.

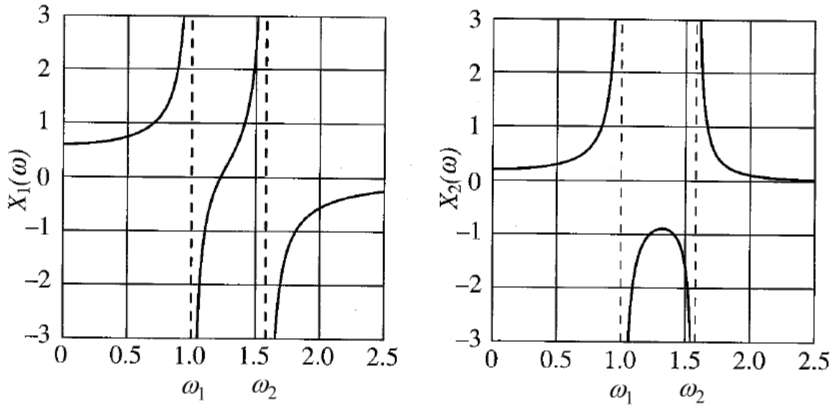
ב. המטריצה המלכסנת ($\underline{\underline{P}}$) מוגדרת כעמודות של ווקטורים עצמיים (מודים) ולכל מוד מתאים תדר טבעי, הפתרון הוא סופרפוזיציה של מודים בהתאם לתנאי ההתחלה כך שייתכן ואחד מהמודים לא יופעל

ג. הווקטורים העצמיים יחידים עד כדי קבוע, נהוג להגדיר אותם בנורמת יחידה- $\langle v,v\rangle=1$.

2.2.2. רטט מאולץ:

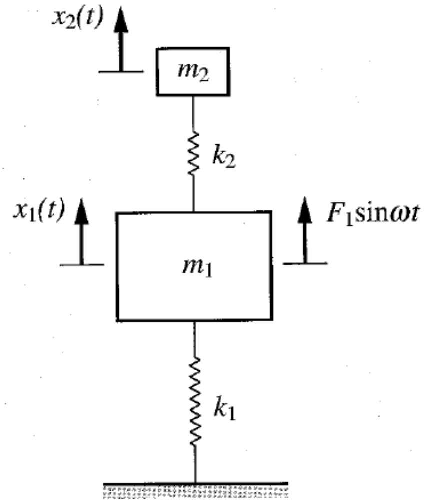


משוואת תנועה ווקטורית	$\begin{cases} \underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{x}}_{(t)}+\underline{\underline{C}}\,\underline{\dot{x}}_{(t)}+\underline{\underline{K}}\,\underline{x}_{(t)}=\underline{F}_{(t)} \\ \underline{x}_{(0)}=\underline{x}_0 \\ \underline{\dot{x}}_{(0)}=\underline{\dot{x}}_0 \end{cases}$
צורת העירור	$\underline{F}_{(t)}=\underline{F}_0\cdot e^{i\omega t}$
צורת הפתרון	$\underline{x}_{(t)}=\underline{X}\cdot e^{i\omega t}$
הגדרת מטריצת האימפדנס	$\underline{\underline{Z}}_{(\omega)}=-\omega^2\underline{\underline{M}}+i\omega\underline{\underline{C}}+\underline{\underline{K}}$
פתרון המערכת	$\underline{X}=\underline{\underline{Z}}^{-1}\underline{F}_0$



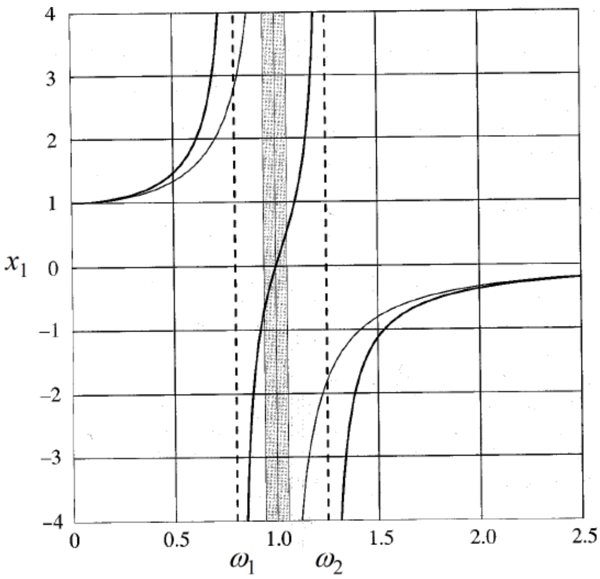
כאשר תדר העירור זהה לאחד מהתדרים הטבעיים של המערכת התגובה אינסופית.

2.2.3. מרסן תנודות דינמי:



המטרה היא לבחור $k_{2_{(\omega)}}$ כך שהתגובה של המסה הראשית (במקרה זה m_1) לעירור בתדר מסוים תתאפס.

מטריצת אינפדנס	$\underline{\underline{Z}}=-\omega^2\underline{\underline{M}}+\underline{\underline{K}}=\begin{pmatrix} k_1+k_2-\omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2-\omega^2 m_2 \end{pmatrix}$
התגובה של m_1	$x_{1_{(t)}}=\dfrac{\left\lvert\begin{pmatrix} F_1\sin(\omega t) & -k_2 \\ 0 & k_2-\omega^2 m_2 \end{pmatrix}\right\rvert}{\lvert\underline{\underline{Z}}\rvert}=\dfrac{\left(k_2-\omega^2 m_2\right)\cdot F_1\sin(\omega t)}{\lvert\underline{\underline{Z}}\rvert}$
בחירת קשיחות הקפיץ	$k_2=\omega^2 m_2$



בחירה מתאימה של קשיחות הקפיץ תאפס את התגובה לתדר מסוים, על מנת לקבל תגובה אפסית לטווח תדרים יש לדרוש שהשיפוע סביב נקודת האפס יהיה קטן ככל האפשר,

כלומר- $\omega_1 \ll \omega_2$, על מנת לקיים תנאי זה יש לבחור מסות שיקיימו- $m_1 \simeq m_2$, דבר שאינו יעיל אנרגטית.

3. מערכות רציפות:

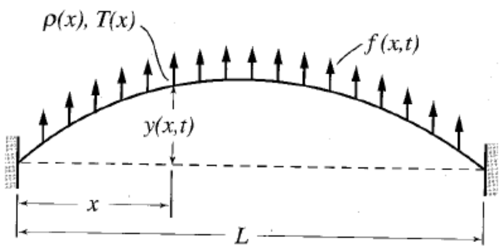
3.1. סימונים:

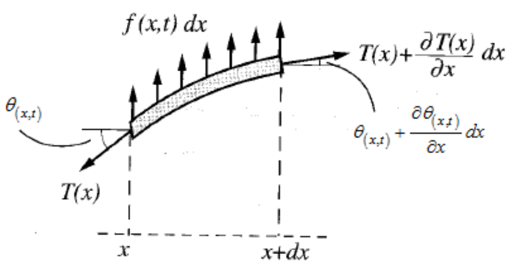
נגזרת בזמן: $\dfrac{\partial^2 y_{(x,t)}}{\partial t^2} = \ddot{y}_{(x,t)}$

נגזרת במיקום: $\dfrac{\partial^2 y_{(x,t)}}{\partial x^2} = y''_{(x,t)}$

3.2. מיתר מתוח / מוט / ציר:

3.2.1. ניסוח משוואת השדה:





$\rho_{(x)}$ -מסה ליחידת אורך, $f_{(x,t)}$ -כוח ליחידת אורך

הנחת תזוזות קטנות	$\cos(\theta) \simeq 1 \qquad \lvert\theta\rvert \ll 1 \Rightarrow \sin(\theta) \simeq \tan(\theta) \simeq \theta$

משוואת תנועה על חלק אינפיניטסימלי כללי	$\begin{cases} \left(T_{(x)}+\frac{\partial T_{(x)}}{\partial x}dx\right)\cdot\cos\left(\theta_{(x,t)}+\frac{\partial\theta_{(x,t)}}{\partial x}dx\right)-T_{(x)}\cdot\cos\left(\theta_{(x,t)}\right)=0 \\ \left(T_{(x)}+\frac{\partial T_{(x)}}{\partial x}dx\right)\cdot\sin\left(\theta_{(x,t)}+\frac{\partial\theta_{(x,t)}}{\partial x}dx\right)+f_{(x,t)}\cdot dx-T_{(x)}\cdot\sin\left(\theta_{(x,t)}\right)=\rho_{(x)}\cdot dx\frac{\partial^2 y_{(x,t)}}{\partial t^2} \end{cases}$
הגדרת הזווית	$\theta_{(x,t)}=\frac{\partial y_{(x,t)}}{\partial x}$
פיתרון בכיוון x	$\frac{\partial T_{(x)}}{\partial x}=0\Rightarrow T_{(x)}=T_0$
פיתוח בכיוון y - משוואת השדה	$T_0 y''_{(x,t)}+f_{(x,t)}=\rho_{(x)}\ddot{y}_{(x,t)}$

3.2.2. פיתרון משוואה הומוגנית ($f_{(x,t)}=0$) ותנאי שפה הומוגניים :

הפתרון נעשה על ידי הפרדת משתנים ובחירת פתרון תונד בזמן (בהנחת צפיפות אחידה) :

$$y_{(x,t)}=X_{(x)}T_{(t)}$$
$$T_{(t)}=\cos\left(\omega t-\phi\right)$$
$$X_{(x)}=A\sin\left(\beta x\right)+B\cos\left(\beta x\right)$$
$$\beta^2=\frac{\rho_0}{T_0}\omega^2$$

לרוב יתקבל טור של מכפלות, עם תלות בתנאי השפה, עבור תנאי השפה $y_{(0,t)}=y_{(l,t)}=0$ מתקבל :

$$y_{(x,t)}=\sum_{r=1}^{\infty}A_{(r)}\cos\left(\frac{\pi r}{l}\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}t-\phi_{(r)}\right)\sin\left(\frac{\pi r}{l}x\right)$$

את $A_{(r)},\phi_{(r)}$ ניתן לחלץ מתוך תנאי ההתחלה, על ידי פיתוח שני התנאים לטור פונקציות עצמיות מתאים (למשל לפי הדוגמא לעיל) :

$$\begin{cases} y_{(x,0)}=g_{(x)}=\sum_{r=1}^{\infty}g_{(r)}\sin\left(\frac{\pi r}{l}x\right) \\ \dot{y}_{(x,0)}=h_{(x)}=\sum_{r=1}^{\infty}h_{(r)}\sin\left(\frac{\pi r}{l}x\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_{(r)}=A_{(r)}\cos\left(\phi_{(r)}\right) \\ h_{(r)}=A_{(r)}\frac{\pi r}{l}\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}\cos\left(\phi_{(r)}\right) \end{cases}$$

** פיתוח לטור פונקציות עצמיות זהה לטור פורייה רק עם פונקציות בסיס שונות. נוח לעבוד עם מערכת אורתונורמלית ולכן כדאי לנרמל את הפונקציות העצמיות

3.2.3. פתרון משוואה לא הומוגנית ותנאי שפה הומוגניים :

במקרה והכוח המפולג אינו אפס, יש להתחיל לפתור את הבעיה בכיוון x , למצוא פונקציות עצמיות ולפתח את הכוח המפולג לטור פונקציות עצמיות ולהמשיך בכיוון t .

3.2.4. תיקון תנאי שפה לא הומוגניים :

עבור תנאי השפה : $\begin{matrix} y_{(0,t)}=u_{(t)} \\ y_{(l,t)}=v_{(t)} \end{matrix}$ מגדירים פונקציית עזר :

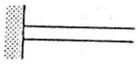
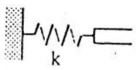
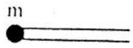
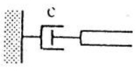
$$y_{(x,t)}=\tilde{y}_{(x,t)}+u_{(t)}+\frac{v_{(t)}-u_{(t)}}{l}x$$

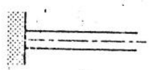
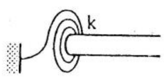
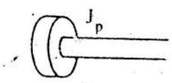
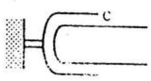
לאחר תיקון זה תנאי השפה של $\tilde{y}_{(x,t)}$ ייהפכו להומוגניים, יש לקוות ש $u_{(t)}$, $v_{(t)}$ הן לכל היותר ביטויים לינאריים אחרת המשוואה תהפוך ללא הומוגנית.

3.2.5. אנלוגיה למקרים נוספים :

	String	Rod	Shaft
Displacement	Transverse: $y(x,t)$	Axial: $u(x,t)$	Angular: $\theta(x,t)$
Inertia per Unit Length	Mass: $\rho(x)$	Mass: $m(x)$	Mass Polar Moment of Inertia: $I(x)$
Stiffness	Tension: $T(x)$	Axial: $EA(x)$ E = modulus of elasticity $A(x)$ = cross-sectional area	Torsional: $GJ(x)$ G = shear modulus $J(x)$ = polar moment of inertia of cross-sectional area
Load per Unit Length	Force: $f(x,t)$	Force: $f(x,t)$	Torque: $m(x,t)$

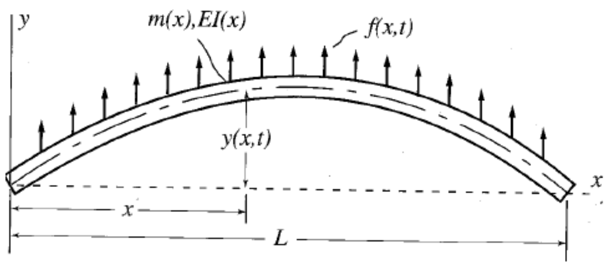
3.2.6. תנאי שפה לדוגמה :

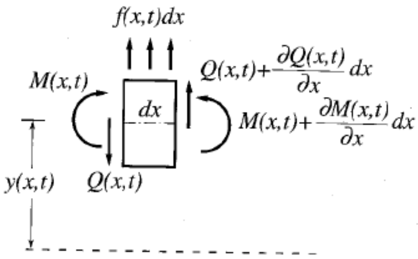
Case		Boundary condition left, $x = 0$	Boundary condition right, $x = l$
Free end		$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$
Fixed end		$u(0,t) = 0$	$u(l,t) = 0$
End spring		$AE\frac{\partial u}{\partial x} = ku$	$AE\frac{\partial u}{\partial x} = -ku$
End mass		$AE\frac{\partial u}{\partial x} = m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$	$AE\frac{\partial u}{\partial x} = -m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$
End damper		$AE\frac{\partial u}{\partial x} = c\frac{\partial u}{\partial t}$	$AE\frac{\partial u}{\partial x} = -c\frac{\partial u}{\partial t}$

Case		Boundary condition left, $x = 0$	Boundary condition right, $x = l$
Fixed end		$\theta(0,t) = 0$	$\theta(l,t) = 0$
Free end		$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$
Torsional spring		$I_pG\frac{\partial \theta}{\partial x} = k\theta$	$I_pG\frac{\partial \theta}{\partial x} = -k\theta$
Inertia J_p		$I_pG\frac{\partial \theta}{\partial x} = J_p\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$	$I_pG\frac{\partial \theta}{\partial x} = -J_p\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$
Torsional damper		$I_pG\frac{\partial \theta}{\partial x} = c\frac{\partial \theta}{\partial t}$	$I_pG\frac{\partial \theta}{\partial x} = -c\frac{\partial \theta}{\partial t}$

3.3. קורות אוילר ברנולי :

3.3.1. ניסוח המשוואה :





משוואת כוחות	$\begin{cases} \left(M_{(x,t)}+\frac{\partial M_{(x,t)}}{\partial x}dx\right)-M_{(x,t)}+\left(Q_{(x,t)}+\frac{\partial Q_{(x,t)}}{\partial x}dx\right)dx+f_{(x,t)}dx\frac{dx}{2}=0 \\ \left(Q_{(x,t)}+\frac{\partial Q_{(x,t)}}{\partial x}dx\right)-Q_{(x,t)}+f_{(x,t)}dx=m_{(x)}\cdot dx\frac{\partial^2 y_{(x,t)}}{\partial t^2} \end{cases}$
קשר דיפרנציאלי בין מומנט לגזירה	$Q_{(x,t)}=-\frac{\partial M_{(x,t)}}{\partial x}$
קשר בין עקמומיות למומנט	$M_{(x,t)}=E_{(x)}I_{(x)}\frac{\partial^2 y_{(x,t)}}{\partial x^2}$
משוואת הקורה	$-\frac{\partial}{\partial x}\left[E_{(x)}I_{(x)}\frac{\partial^2 y_{(x,t)}}{\partial x^2}\right]+f_{(x,t)}=m_{(x)}\frac{\partial^2 y_{(x,t)}}{\partial t^2}$
במקרה של קורה אחידה	$m\ddot{y}_{(x,t)}+EIy''''_{(x,t)}=f_{(x,t)}$

3.3.2. פתרון משוואה הומוגנית:

פתרון החלק ההומוגני נעשה על ידי הפרדת משתנים ובחירת פתרון תונד בזמן:

$$y_{(x,t)}=X_{(x)}T_{(t)}$$

$$T_{(t)}=\cos\left(\omega t-\phi\right)$$

$$X_{(x)}=A\sin\left(\beta x\right)+B\cos\left(\beta x\right)+C\sinh\left(\beta x\right)+D\cosh\left(\beta x\right)$$

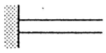
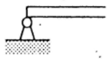
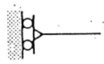
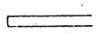
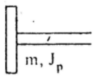
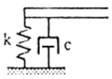
$$\beta^4=\frac{m}{EI}\omega^2$$

לרוב יתקבל טור של מכפלות, עם תלות בתנאי השפה, עבור תנאי השפה $y_{(0,t)}=y_{(l,t)}=y''_{(0,t)}=y''_{(l,t)}=0$ מתקבל:

$$y_{(x,t)}=\sum_{r=1}^{\infty}A_{(r)}\cos\left(\frac{EI}{m}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^2 t-\phi_{(r)}\right)\sin\left(\frac{\pi r}{l}x\right)$$

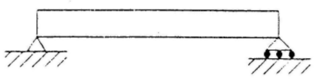
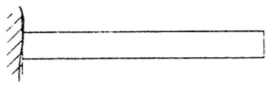
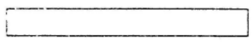
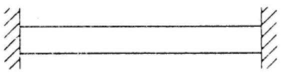
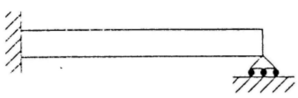
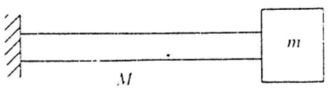
מציאת הקבועים הנותרים תעשה על ידי שימוש בתנאי ההתחלה באותה טכניקה כמו תיל מתוח.

3.3.3. תנאי שפה לדוגמא:

Case		Boundary condition left, at $x = 0$	Boundary condition right, at $x = l$
Clamped (deflection, slope = 0)		$y(0, t) = 0$ $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$	$y(l, t) = 0$ $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$
Pinned (deflection, moment = 0)		$y(0, t) = 0$ $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$	$y(l, t) = 0$ $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$
Sliding (slope, shear = 0)		$\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$	$\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$
Free (moment, shear = 0)		$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$	$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$
Mass m and moment of inertia J_p		$EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -J_p\frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2}$ $EI\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = -m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$	$EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = J_p\frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2}$ $EI\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$
Damper c and spring k		$EI\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = -ky - c\frac{\partial y}{\partial t}$ $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$	$EI\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = ky + c\frac{\partial y}{\partial t}$ $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$

3.3.4. פתרונות לדוגמא:

$$\left(\eta = \sqrt{\frac{\omega}{c}},\ c = \sqrt{\frac{EI_z}{\rho A}},\ A_j = \text{constant}\right)$$

Boundary conditions	Frequency equation	Mode shapes
 Simply Supported	$\sin \eta l = 0$ $\omega_j = \frac{j^2\pi^2 c}{l^2}$	$\phi_j = A_j \sin \eta_j x$
 Cantilever Beam	$\cos \eta l \cosh \eta l = -1$ $\eta_j l \approx (j - \frac{1}{2})\pi$ $\omega_j = \eta_j^2 c$	$\phi_j(x) = A_j[\sin \eta_j x - \sinh \eta_j x + D_j(\cos \eta_j x - \cosh \eta_j x)]$ $D_j = \frac{\cos \eta_j l + \cosh \eta_j l}{\sin \eta_j l - \sinh \eta_j l}$
 Free-Free	$\cos \eta l \cosh \eta l = 1$	$\phi_j(x) = A_j[\sinh \eta_j x + \sin \eta_j x + D_j(\cosh \eta_j x + \cos \eta_j x)]$ $D_j = -\frac{\cosh \eta_j l - \cos \eta_j l}{\sinh \eta_j l + \sin \eta_j l}$
 Clamped-Clamped	$\cos \eta l \cosh \eta l = 1$	$\phi_j(x) = A_j[\sin \eta_j x - \sinh \eta_j x + D_j(\cos \eta_j x - \cosh \eta_j x)]$ $D_j = -\frac{\cosh \eta_j l - \cos \eta_j l}{\sin \eta_j l + \sinh \eta_j l}$
 Fixed-Simply Supported	$\tanh \eta l \cot \eta l = 1$	$\phi_j(x) = A_j[\sinh \eta_j x - \sin \eta_j x + D_j(\cosh \eta_j x - \cos \eta_j x)]$ $D_j = -\frac{\sinh \eta_j l - \sin \eta_j l}{\cosh \eta_j l - \cos \eta_j l}$
 Fixed-Mass	$\eta l \frac{\cosh \eta l \sin \eta l - \sinh \eta l \cos \eta l}{\cosh \eta l \cos \eta l + 1} = \frac{M}{m}$	$\phi_j(x) = A_j[\sinh \eta_j x - \sin \eta_j x + D_j(\cosh \eta_j x - \cos \eta_j x)]$ $D_j = -\frac{\sinh \eta_j l + \sin \eta_j l}{\cosh \eta_j l + \cos \eta_j l}$