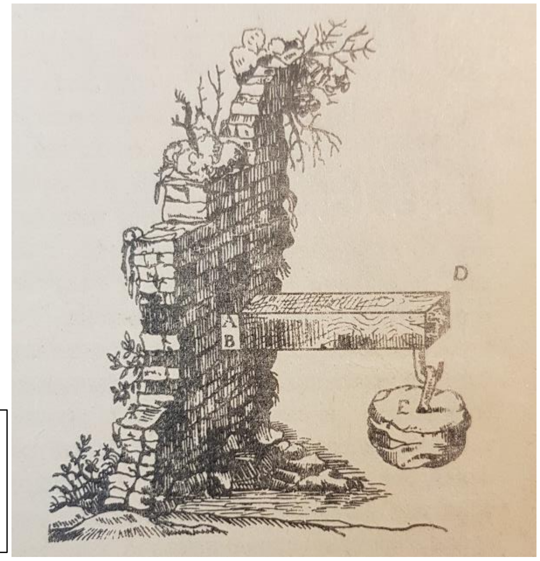
מכניקת מוצקים I

פרופ׳ סלבה קרילוב

שיעור 21, 2020

כפיפה של קורות

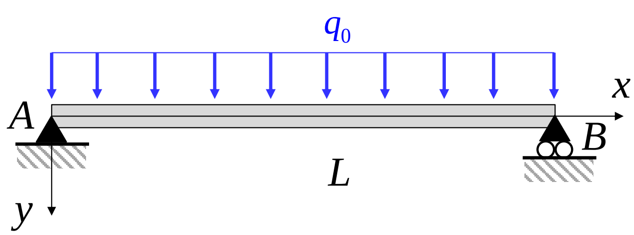


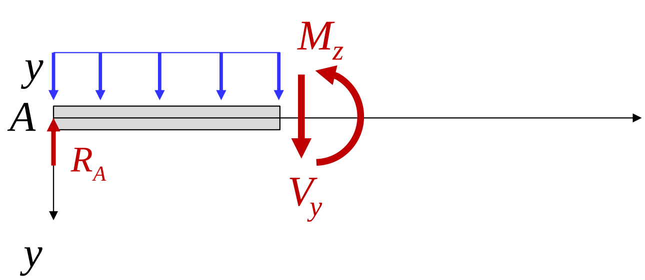
Galileo Galilei, "Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e i movimenti locali", 1638

קורה פרזמאטית במצב של כפיפה.

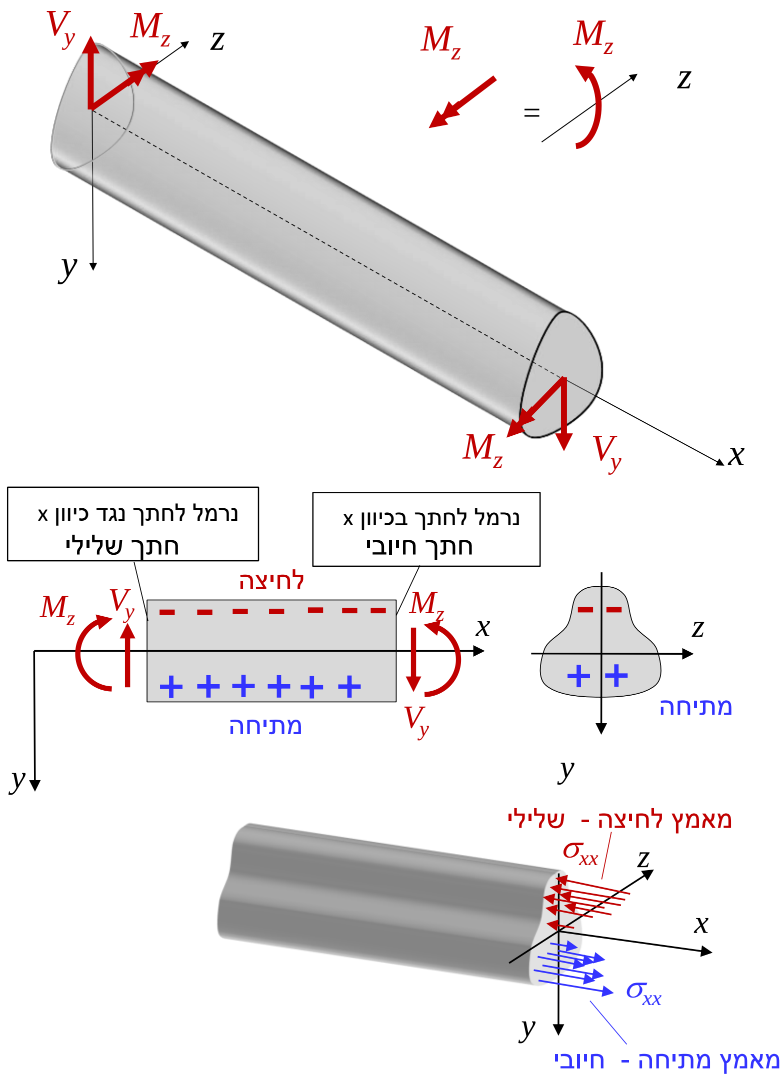
מערכת צירים והסכם סימנים

כל הכוחות החיצוניים פועלים **בכיוון y בלבד**. בין כל הרכיבים של הכוחות הפנימיים רק מומנט כפיפה M_z סביב ציר z וכוח גזירה V_y בכיוון y שונים מאפס.

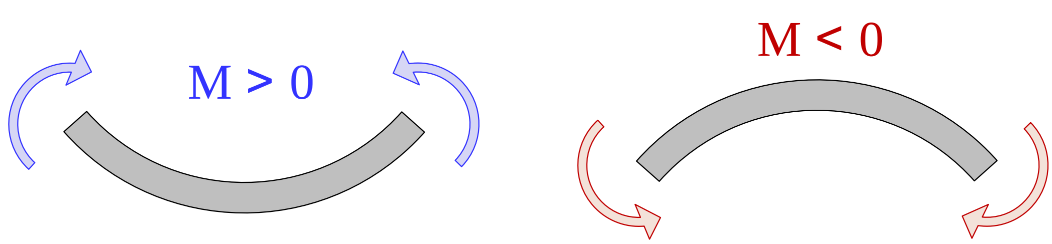




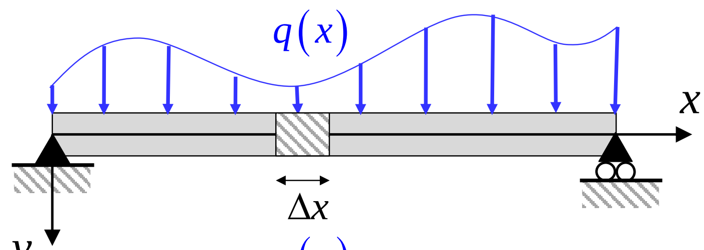
הסכם סימנים : הכיוון של המומנט M_z ושל כוח הגזירה V_y **ביחס לחתך**.

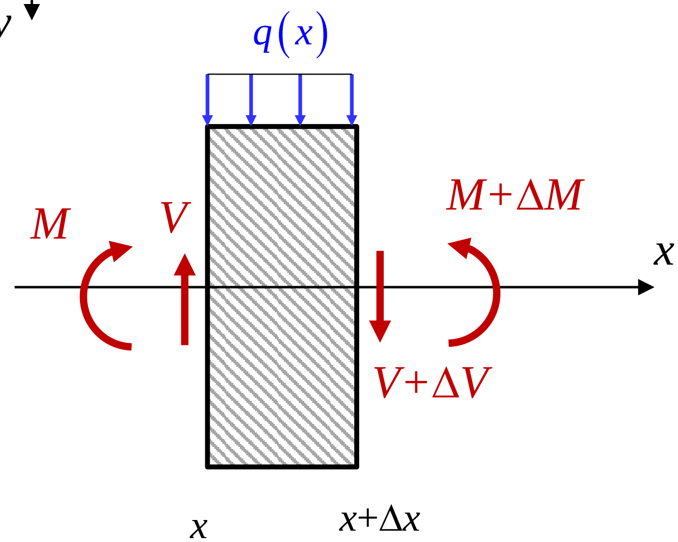


ההסכם זה עקבי עם הסכם סמנים של מאמצים : מאמץ מתיחה חיובי בחתך כאשר y חיובי



קשר דיפרנציאלי בין מומנט הכפיפה וכוח הגזירה. משוואה דיפרנציאלית של קורות בכפיפה.





$$\sum F_y = -V(x) + V(x+\Delta x) + q\Delta x = 0 \rightarrow \frac{V(x+\Delta x) - V(x)}{\Delta x} = -q(x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{V(x+\Delta x) - V(x)}{\Delta x}\right) = \frac{dV}{dx}$$

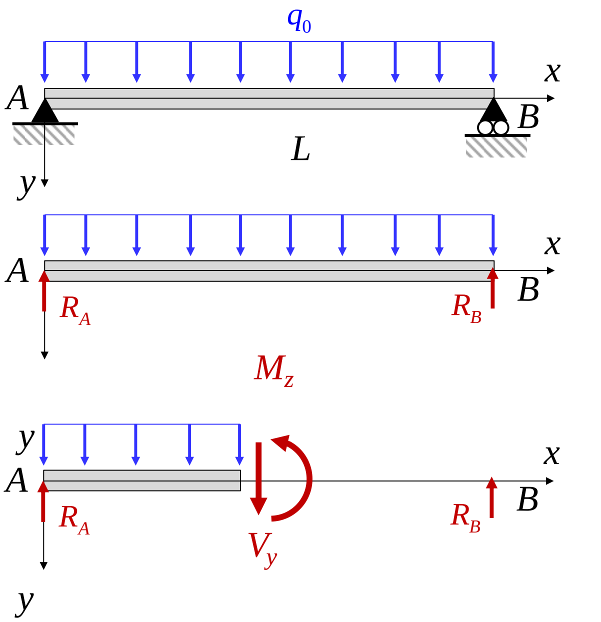
$$\frac{dV}{dx} = -q(x) \quad (1)$$

$$\sum M_z = V(x)\Delta x + M(x) - M(x+\Delta x) - q\frac{\Delta x^2}{2} = 0 \rightarrow \frac{M(x+\Delta x) - M(x)}{\Delta x} = V(x) - q\frac{\Delta x}{2} \approx V(x)$$

$$\frac{dM}{dx} = V(x) \quad (2)$$

From (1) and (2) $\boxed{\dfrac{d^2M}{dx^2} = -q(x)}$

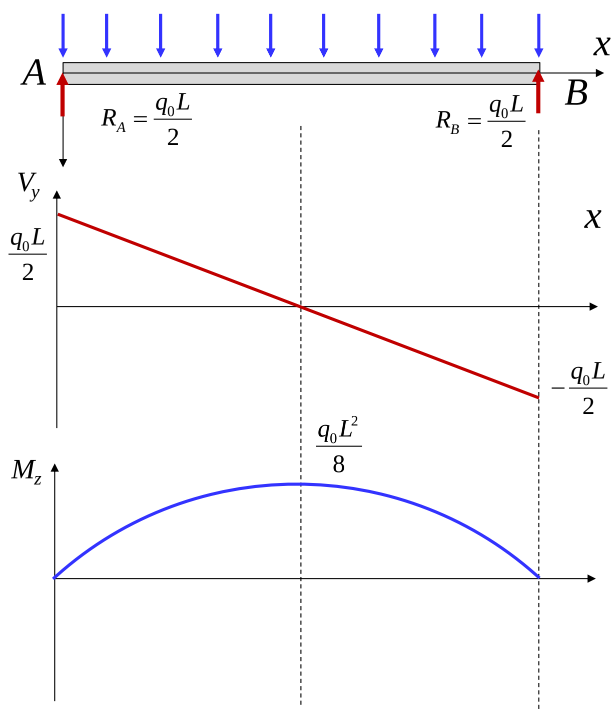
דגמה של ההתפלגות כוחות פנימיים



$$R_A = R_B = \frac{q_0 L}{2}$$

$$V_y = R_A - q_0 x = \frac{q_0}{2}\left(L - 2x\right)$$

$$M_Z = R_A x - \frac{q_0 x^2}{2} = \frac{q_0 x}{2}\left(L - x\right)$$



כפיפה טהורה (pure bending)

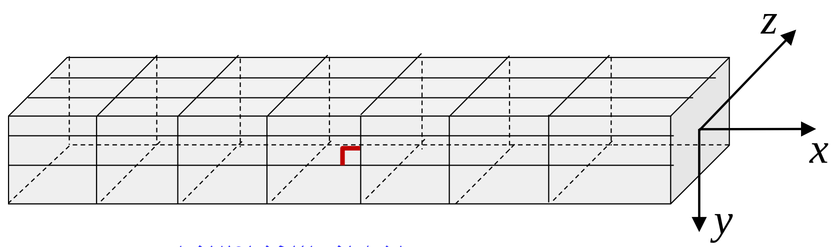
1. מישור xy הוא מישור הסימטריה של החתך
2. קורה פריזמתית – חתך לא תלוי ב- x
3. מצב של כפיפה טהורה - $M = \text{const},\ V=0$ (מומנט לא תלוי ב-x)

צורת הדפורמציה, עיבורים

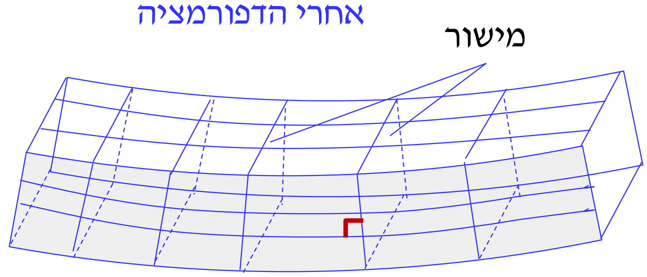
הנחות של המודל (Euler-Bernoulli beam theory~1750):

1. חתך שהיה מישורי ומאונך לציר של הקורה לפני הדפורמציה נשאר מישורי ומאונך לציר גם אחרי הדפורמציה
2. מאמצים בכיוון העובי והרוחב של הקורה הם אפס $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$

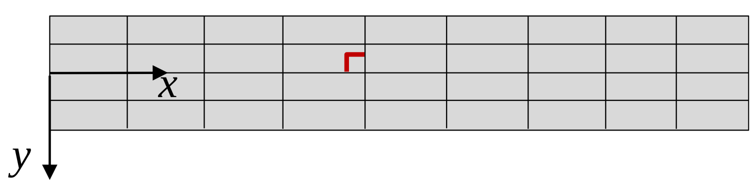
לפני הדפורמציה



אחרי הדפורמציה



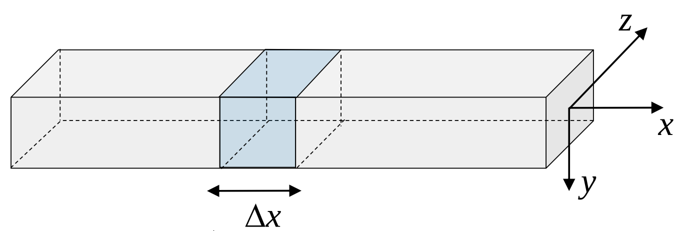
לפני הדפורמציה

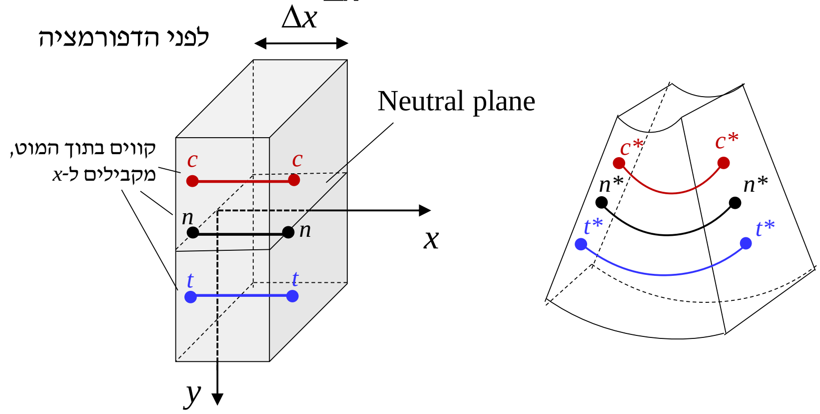


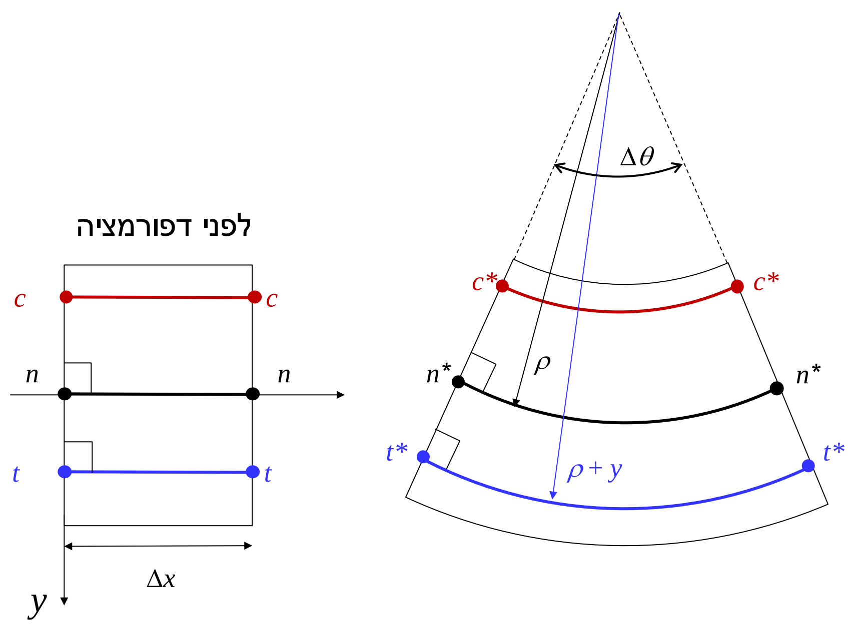
אחרי הדפורמציה

לקורה אחרי הדפורמציה יש צורה של קשת עם רדיוס קבוע

נבודד אלמנט של הקורה באורך Δx







לפני הדפורמציה

$$|nn| = |cc| = |tt| = \Delta x$$

אחרי הדפורמציה הקווים הם קשתות. קווים מסוימים יהיו במתיחה (t*t*), קווים אחרים בלחציה (c*c*). ישנם גם קווים שהאורך שלהם לא ישתנה (n*n*)

$$|n^*n^*| = \Delta x = \rho \Delta \theta$$

$$|t^*t^*| = (\rho + y)\Delta \theta$$

$$\varepsilon_{xx}(y)=\lim\left(\frac{|t^*t^*|-|tt|}{|tt|}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{(\rho+y)\Delta\theta-\Delta x}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta\theta\to 0}\left(\frac{(\rho+y)\Delta\theta-\rho\Delta\theta}{\rho\Delta\theta}\right)$$

$$\varepsilon_{xx}(y)=\frac{y}{\rho}$$

הקו t^*t^* הוא במתיחה, קו c^*c^* בלחציה. האורך של הקו n^*n^* לא משתנה – המישור הניטראלי (neutral axis, neutral plane)

חוק Hooke

$$\varepsilon_{xx}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{xx}-\nu\left(\sigma_{yy}+\sigma_{zz}\right)\right]$$

$$\varepsilon_{yy}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{yy}-\nu\left(\sigma_{xx}+\sigma_{zz}\right)\right]$$

$$\varepsilon_{yy}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{zz}-\nu\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}\right)\right]$$

לאור ההנחות $\sigma_{yy}=\sigma_{zz}=0$ נקבל

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\sigma_{xx}}{E}\to\sigma_{xx}=E\varepsilon_{xx}=\frac{Ey}{\rho}$$

$$\varepsilon_{yy}=\varepsilon_{yy}=-\frac{\nu\sigma_{xx}}{E}$$

מומנט וכוח פנימיים

$$M_z=M=\int_A y\sigma_{xx}dA=\int_A y\frac{Ey}{\rho}dA=\frac{E}{\rho}\int_A y^2dA=\frac{EI_{zz}}{\rho}$$

$$M=\frac{EI_{zz}}{\rho},$$

$I_{zz}=\int_A y^2dA$ - second moment of area

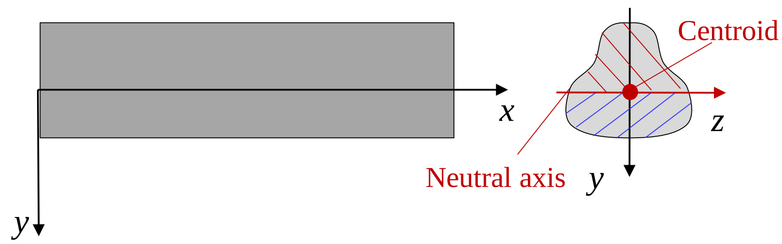
Rectangle $b\times d$: $\quad I=\dfrac{bd^3}{12}$

משקולי שיווי משקל כוח צירי צריך להיות אפס

$$F_x=\int_A\sigma_{xx}dA=\int_A E\varepsilon_{xx}dA=\int_A\frac{Ey}{\rho}dA=\frac{E}{\rho}\int_A ydA=\frac{EQ_z}{\rho}=\frac{EAy_C}{\rho}=0$$

$Q_z=\int_A ydA=Ay_C$ - first moment of area

ציר ניטראלי x הוא ציר מרכזי (עובר במרכז השטח של החתך)



קשר מאמץ-מומנט:

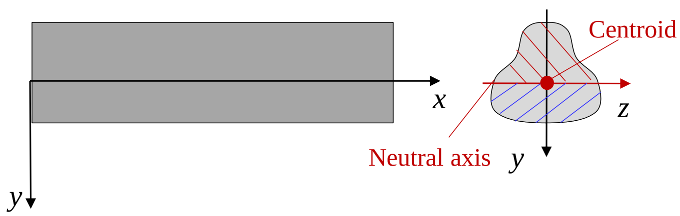
$$\left.\begin{aligned}\sigma_{xx} &= E\varepsilon_{xx} = \frac{Ey}{\rho} \\ M &= \frac{EI}{\rho}\end{aligned}\right\} \rightarrow \sigma_{xx} = \frac{My}{I}$$

מאמץ מרבי בחתך: $\left|\sigma_{xx}^{MAX}\right| = \frac{M\left|y^{MAX}\right|}{I} = \frac{M}{S}, \qquad S = \frac{I}{\left|y^{MAX}\right|} - \text{section modulus}$

שיעור 22, 2020

כפיפה טהורה – קשרים עיקריים

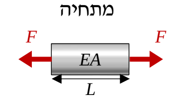
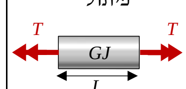
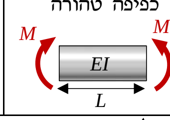
עיבורים: $\varepsilon_{xx} = \frac{y}{\rho}; \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\nu\varepsilon_{xx} = -\nu\frac{y}{\rho}; \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$



מומנט פנימי: $M = \frac{EI}{\rho}$ כוח צירי פנימי: $F = 0$

מאמץ מתיחה\לחיצה: $\sigma_{xx} = \frac{Ey}{\rho} = \frac{My}{I}$

סיכום - מוט במתיחה, מוט בפיתול, קורה בכפיפה

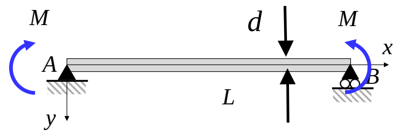
דפורמציה	רכיב של כוח\מומנט פנימי	עיבור (הנחה קינמאטית)	קשר מאמץ – כוח\מומנט פנימי (חוק Hooke)	קשר הזזה – כוח\מומנט פנימי
מתיחה 	כוח צירי F	$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx}$	$\sigma_{xx} = \frac{F}{A}$ - לא תלוי בנקודה בחתך	$\frac{du}{dx} = \frac{F}{EA}$
פיתול 	מומנט פיתול T	$\gamma_{x\theta} = 2\varepsilon_{x\theta} = r\frac{d\phi}{dx}$	$\tau_{x\theta} = \frac{Tr}{J}$ - תלוי בנקודה בחתך (תלוי ב-r) - לא תלוי בתכונות החומר	$\frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{GJ}$
כפיפה טהורה 	מומנט כפיפה M	$\varepsilon_{xx} = \frac{y}{\rho}$	$\sigma_{xx} = \frac{My}{I}$ -תלוי בנקודה בחתך (תלוי ב-y) -לא תלוי בתכונות החומר	$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$

מהלך הפיתוח:

1. צורת הדפורמציה, הנחות קינמאטיות
2. עיבור
3. חוק HOOKE, קשר בין עיבור למאמץ
4. רכיבי כוח\מומנט פנימי על ידי אינטגרציה של המאמץ בחתך
5. שיווי משקל, קשר בין כוח\מומנט פנימי והעיבור
6. מדדי הדפורמציה – התארכות, זווית פיתול, רדיוס עקמומיות

דוגמה 1.

נתונה קורה במצב של כפיפה טהורה תחת מומנט M.



חתך מלבני $b\times d$ (d הוא הגובה) כך ש- $d=6\ \text{cm}$, $b=2\ \text{cm}$. מודול אלסטיות ומאמץ המותר הם:
$E=200\ \text{GPa},\quad \sigma_{ALL}=120\ \text{MPa}$

יש למצוא את המומנט המותר.

פתרון:

$$\left|\sigma_{xx}^{MAX}\right|=\frac{M\left|y^{MAX}\right|}{I}=\sigma_{ALL}\rightarrow M_{ALL}=\frac{\sigma_{ALL}I}{y^{MAX}}$$

$$y^{MAX}=\frac{d}{2}=0.03\ \text{m},\quad I=\frac{bd^3}{12}$$

$$M_{ALL}=\left(\frac{\sigma_{ALL}2}{d}\right)\left(\frac{bd^3}{12}\right)=\frac{\sigma_{ALL}bd^2}{6}=1440\ \text{Nm}$$

$$R^{ALL}=\frac{EI}{M^{ALL}}=50\ \text{m}$$

.7

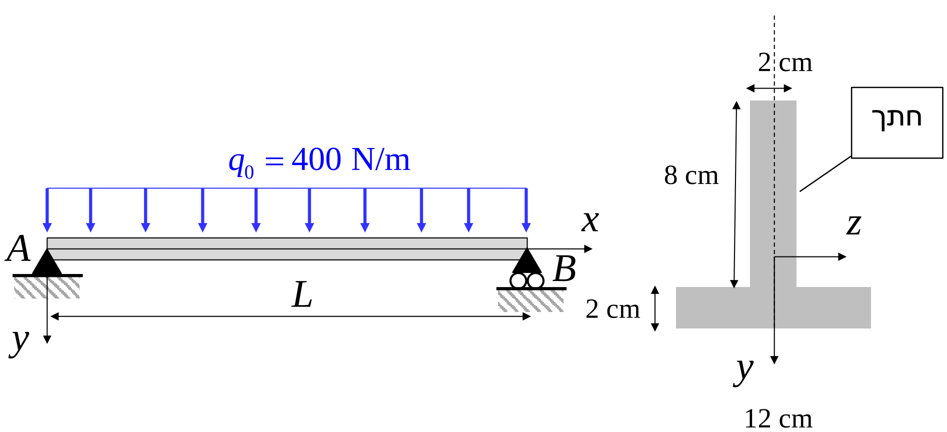
היפותזת Navier

ניתן לראות את הביטויים שפתחו עבור כפיפה טהורה כקירוב הנדסי עבור כפיפה לא טהורה של קורות תמירות (slender), כאשר $V\neq 0,\ M=M(x),\ \rho=\rho(x)$. **נמשיך להשתמש בביטויים**:

$$M(x)=\frac{EI}{\rho(x)},\quad \sigma_{xx}(x,y)=\frac{M(x)y}{I}$$

דוגמה 2.

נתונה קורה תחת כוח מפולג אחיד q_0

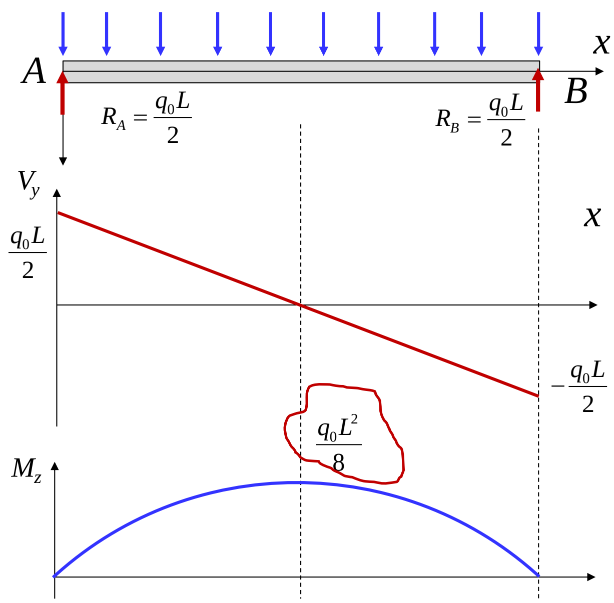


נתון:
$q_0 = 400$ N/m
$L = 4$ m
$\sigma_{ALL} = 25$ MPa

יש למצוא: σ_{MAX} compressive, σ_{MAX} tensile ולהסיק מסקנות לגבי החוזק של הקורה.

פתרון:

תזכורת: מצאנו קודם שהמומנט הוא חיובי לאורך כל הקורה. המומנט המקסימאלי ממוקם בנקודה האמצעית של הקורה $M_{MAX} = \frac{q_0 L^2}{8}$.

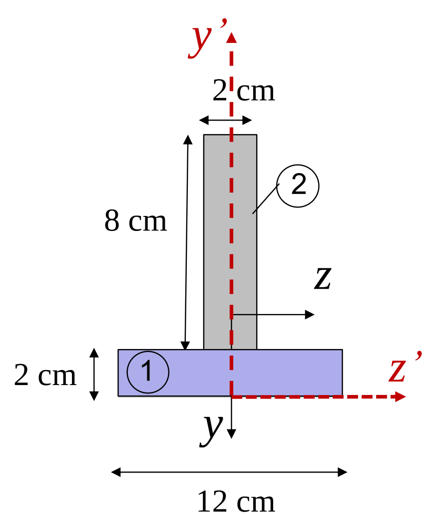


לכן המאמץ המתיחה המרבי והמאמץ הלחיצה המרבי ממוקמים גם הם בנקודה האמצעית של הקורה $x = L/2$

כדי למצוא את המאמץ נדרש ראשית למצוא את המיקום של **הציר הניטראלי**.

לצורך כך נגדיר צירים זמניים y', z' לצורך חישוב מרכז השטח.

נחלק את החתך לשני מלבנים – חלק 1 (flange) וחלק 2 (web)



קואורדינטה y' של מרכז השטח של החתך : $y'_C = \dfrac{\overbrace{2\times12\times1}^{Q^1_{z'}=A_1 y_{C1}} + \overbrace{8\times2\times(4+2)}^{Q^2_{z'}=A_2 y'_{C2}}}{\underbrace{2\times12}_{A_1}+\underbrace{8\times2}_{A_2}} = 3\text{ cm}$

המומנט השני של השטח **ביחס לציר המרכזי** z (שימוש בשטיינר)

$$I_{ZZ} = I_{zz1} + I_{zz2} = \underbrace{\frac{12\times2^3}{12} + (12\times2)\times2^2}_{\text{Flange}} + \underbrace{\frac{2\times8^3}{12} + (2\times8)\times3^2}_{\text{Web}} = \frac{1000}{3}\ \text{cm}^4 = \frac{1}{3}\times10^{-5}\ \text{m}^4$$

מאמץ מתיחה מרבי :

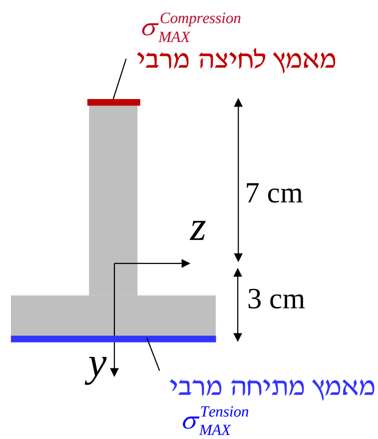
$$y_{MAX} = 3\text{ cm} = 0.03\text{ m}$$

$$\sigma^{TENSION}_{MAX} = \frac{M_{MAX}\,y_{MAX}}{I} = \frac{(400\times4^2/8)\,0.03}{(1/3)\times10^{-5}} = 7.2\text{ MPa} \quad \text{- Tension}$$

מאמץ לחיצה מרבי :

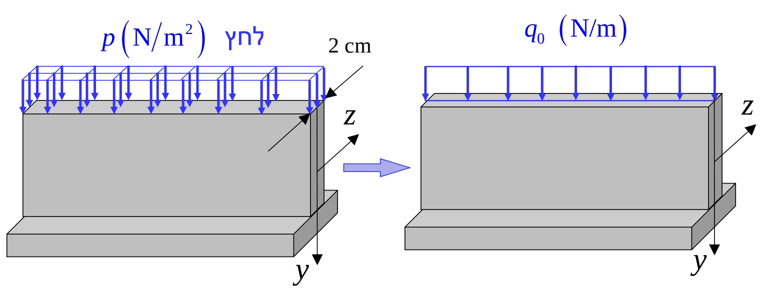
$$y_{MAX} = -7\text{ cm} = -\ 0.07\text{ m}$$

$$\sigma^{COMPRESSION}_{MAX} = \frac{M_{MAX}\,y_{MAX}}{I} = \frac{(400\times4^2/8)(-0.07)}{(1/3)\times10^{-5}} = -16.8\text{ MPa} \quad \text{- Compression}$$



* REMARK נחשב את המאמץ σ_{yy} ונשווה עם σ_{xx} . נניח שהכוח המפולג q_0 הוא תוצאה של הלחץ p שפועל על השפה העליונה של ה-WEB

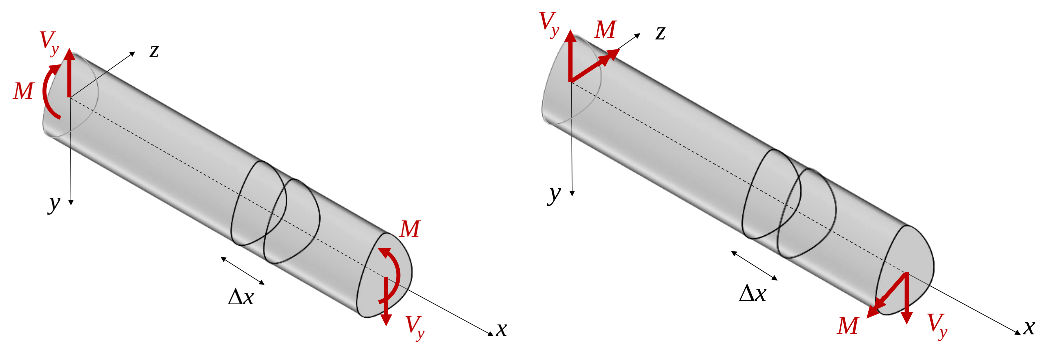
$$p = \frac{q_0}{0.02\text{ m}} = \frac{400\text{ N/m}}{0.02\text{ m}} = 20000\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 20\text{ kPa} \ll \sigma^{MAX}_{xx}$$

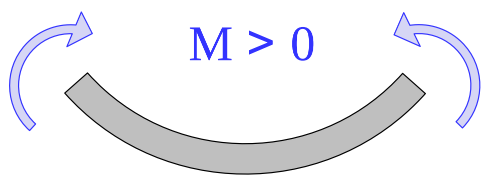


מאמץ גזירה

נתח את המקרה כאשר המומנט $M\left(x\right)$ הוא **פונקציה של x**. וכתוצאה מכך גם המאמץ הוא פונקציה של x

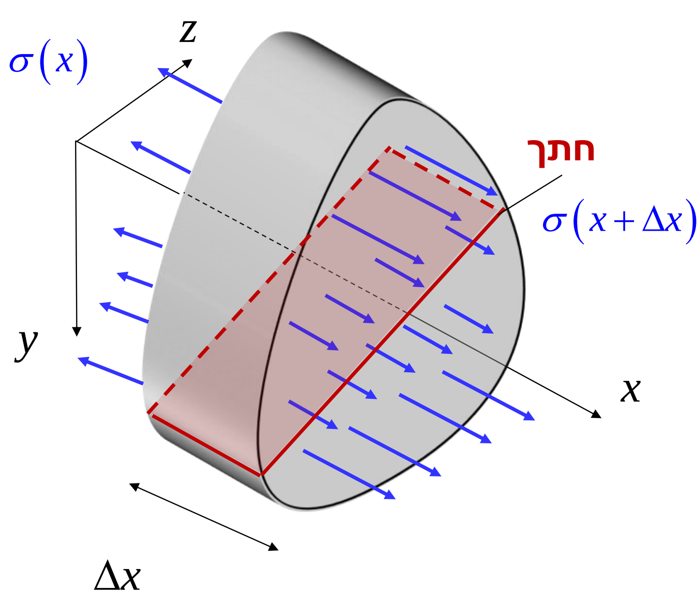
$\sigma_{xx}=\sigma_{xx}\left(x\right)$ וגם כוח הגזירה לא אפס, $V\neq 0$ (כיוון המומנט עקבי עם הסכם הסמנים של כפיפה).



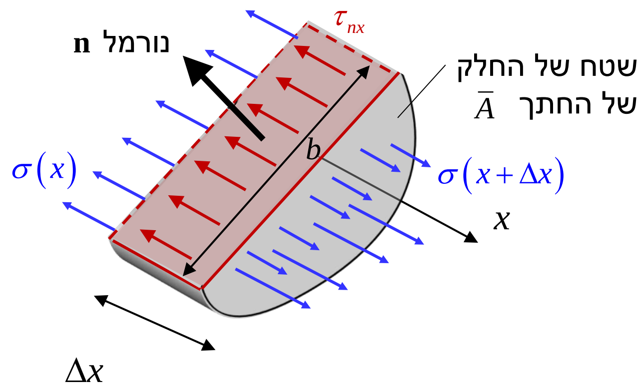


נחתוך את הקורה על ידי מישור שמאונך לציר x ונתבונן באלמנט אינפיניטסימאלי באורך Δx

נחתוך את האלמנט על ידי מישור שמקביל לציר x (אבל לא בהכרח מקביל ל z)



נצייר ד.ג.ח. ונקיים שיווי משקל של החלק התחתון



שיוויו משקל בכיוון x

$$\sum F_x = \int_{\bar{A}} \sigma_{xx}(x+\Delta x)\,d\bar{A} - \int_{\bar{A}} \sigma_{xx}(x)\,d\bar{A} - b\Delta x\bar{\tau}_{nx} = 0$$

$\bar{\tau}_{nx}$ - average shear stress over rge cut $b \times \Delta x$

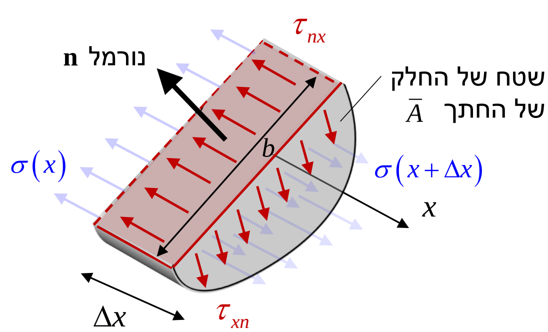
$$\bar{\tau}_{nx} = \frac{1}{b\Delta x}\left(\int_{\bar{A}} \sigma_{xx}(x+\Delta x)\,d\bar{A} - \int_{\bar{A}} \sigma_{xx}(x)\,d\bar{A}\right)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{M(x)y}{I}$$

$$\bar{\tau}_{nx} = \frac{1}{b\Delta x}\left(\int_{\bar{A}} \frac{M(x+\Delta x)y}{I}\,d\bar{A} - \int_{\bar{A}} \frac{M(x)y}{I}\,d\bar{A}\right) = \frac{1}{bI\Delta x}\left(M(x+\Delta x)\int_{\bar{A}} y\,d\bar{A} - M(x)\int_{\bar{A}} y\,d\bar{A}\right)$$

$$\bar{\tau}_{nx} = \frac{1}{bI}\left(\frac{M(x+\Delta x) - M(x)}{\Delta x}\right)\int_{\bar{A}} y\,d\bar{A} \quad \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} \quad \frac{VQ_z}{bI}$$

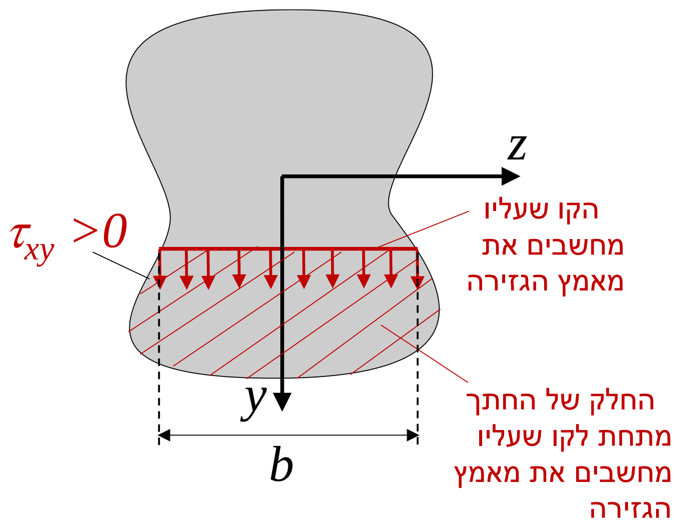
$$\tau = \frac{VQ_z}{bI_{zz}}$$



מאמץ גזורה מתקבל משיווי משקל בלבד!

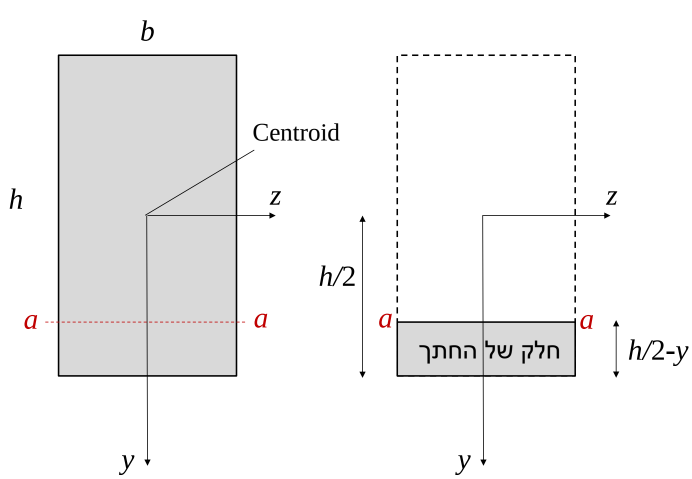
דגשים:

1. בנסחה של מאמץ הגזירה $\tau = \frac{VQ_z}{bI_{zz}}$ המומנט השני של השטח I_{zz} סביב הציר המרכזי z (שעובר ב centroid) הוא **של כל החתך** כך ש- $I_{zz} = \int_A y^2 dA$. המומנט הראשון של השטח Q_z הוא של **החלק של החתך** מתחת או מעל הקו שעליו מחשבים את מאמץ הגזירה כך ש- $Q_z = \int_{\bar{A}} y d\bar{A}$.
2. מאמץ הגזירה הוא **חיובי** כאשר הוא בכיוון לתוך החלק של החתך שעבורו חושב Q_z. התוצאה זאת היא עקבית עם הסכם הסמנים של המאמץ – במישור החיובי (עם נרמל x בציור למטה) מאמץ חיובי כאשר הוא בכיוון החיובי של הציר (ציר y בציור למטה)
3. המאמץ שמתקבל הוא **ממוצע** של המאמץ על הקו ברוחב b.



שיעור 23, 2021

דגמה 3. חישוב מאמץ גזירה בקורה עם חתך מלבני (המשך).



נתון: כוח גזירה V (נגיד שפתרנו את בעיית שיווי נשקל ומצאנו את V בחתך מסוים)

למצוא: התפלגות של מאמץ גזירה $\tau(y)$

פתרון:

$$\tau = \frac{VQ_z}{bI_{zz}}$$

כאן Q_z הוא המומנט הראשון של השטח של **חלק של החתך** סביב ציר z. ציר z עובר במרכז השטח של כל החתך (המרכז של המלבן)

$$I_{zz} = \frac{bh^3}{12}$$

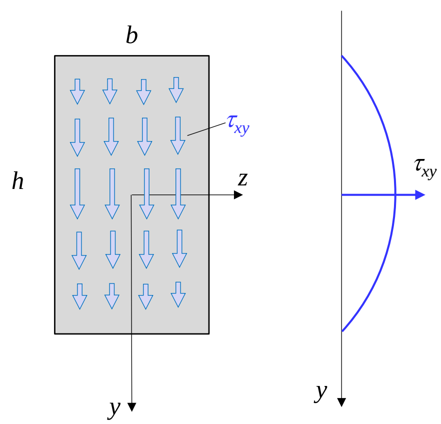
$$Q_z = \bar{A}\bar{y}_c = b\times\left(\frac{h}{2}-y\right)\times\left(y+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}-y\right)\right)$$

$$Q_z = b\times\left(\frac{h}{2}-y\right)\times\left(\frac{y}{2}+\frac{h}{4}\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)$$

$$\tau = \frac{V12}{b\times bh^3}\times\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right) = \frac{6V}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right) = \frac{3V}{2A}\left(1-\frac{4y^2}{h^2}\right)$$

Positive shear stress "flows" into the partial section area

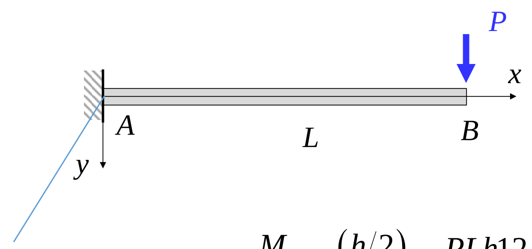
$$\tau = \frac{3}{2}\left(\frac{V}{A}\right)\left(1-\frac{4y^2}{h^2}\right)$$



הבנות:

1. מאמץ גזירה הוא פונקציה של y
2. מאמץ גזירה הוא אפס על השפה עליונה ותחתונה $\tau(h/2) = \tau(-h/2) = 0$
3. $\tau(y) > 0$ for $V>0$
4. $\tau_{MAX} = \tau(0) = \frac{3}{2}\left(\frac{V}{A}\right)$ - maximal at the neutral axis (centroid of the section)
5. מאמץ גזירה מרבי גדול יותר מהמאמץ הממוצע (הנדסי) $\tau_{MAX} > \frac{V}{A}$

*נשווה בין המאמץ מתיחה המרבי לבין המאמץ הגזירה המרבי בקורה עם חתך מלבני $b\times h$



$$M_{MAX}=PL,\quad \sigma_{MAX}=\frac{M_{MAX}\left(h/2\right)}{I}=\frac{PLh12}{2bh^3}=\frac{6PL}{bh^2}$$

$$V=P,\quad \left(\text{independent on } x\right)\quad \tau_{MAX}=\frac{3}{2}\frac{V}{A}=\frac{3P}{2bh}$$

$$\frac{\tau_{MAX}}{\sigma_{MAX}}=\left(\frac{3\cancel{P}}{2\cancel{b}\cancel{h}}\right)\left(\frac{\cancel{b}h^{\cancel{2}}}{6\cancel{P}L}\right)=\frac{h}{4L}\ll 1\ \text{ for } h\ll L$$

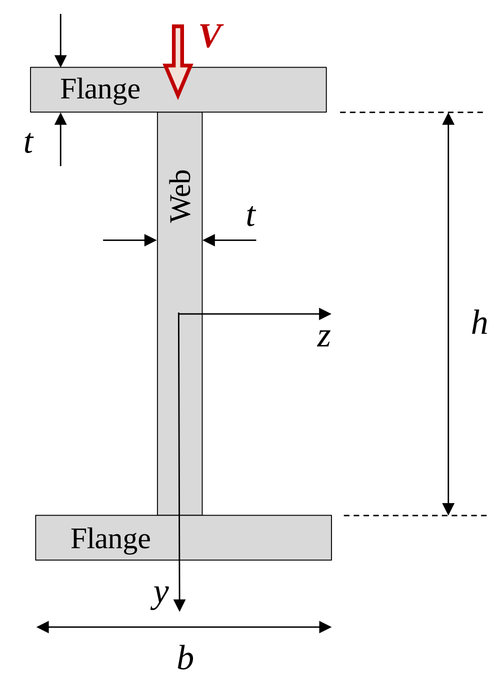
מאמץ גזירה יותר קטן ביחס למאמץ מתיחה בקורות תמירות.

דגמה4. חישוב מאמץ גזירה בקורה עם חתך דק דופן.

נתון: כוח גזירה V (נגיד שפתרנו את בעיית שיווי נשקל ומצאנו את V בחתך מסוים)

מומנט השטח השני I_{zz} (מומנט אינרציה) של כל החתך.

למצוא: התפלגות של מאמץ גזירה τ_{xy} ו- τ_{xz} בחתך (shear flow)

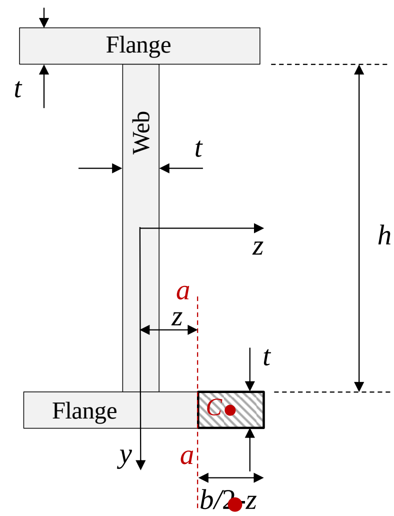


פתרון:

נסחה ג'נרית למאמץ הגזירה $\tau = \dfrac{VQ_z}{b_{CUT} I_{zz}}$

נבצע חתכים ג'נרים

- חתך **aa** ב-FLANGE



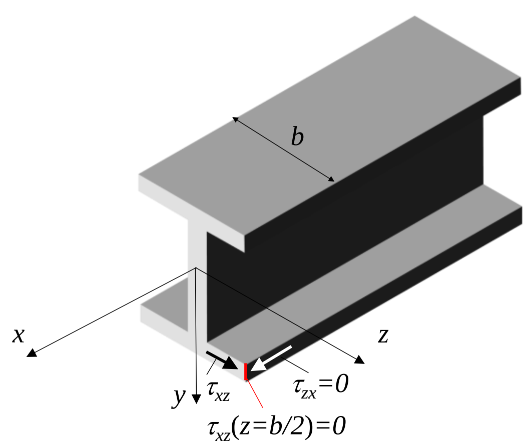
$$\tau_{xz} = \frac{VQ_z}{tI_{zz}}$$

$$Q_z = Ay_c = t\left(\frac{b}{2} - z\right)\left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right)$$

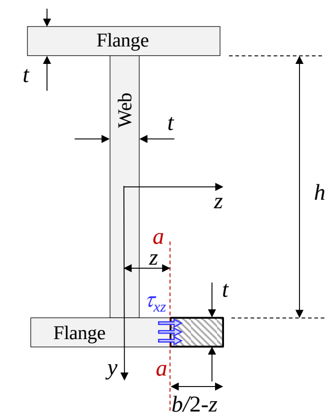
$$z = \frac{b}{2} \rightarrow Q_z = 0$$

$$z = \frac{t}{2} \rightarrow Q_z = t\left(\frac{b}{2} - \frac{t}{2}\right)\left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right) > 0$$

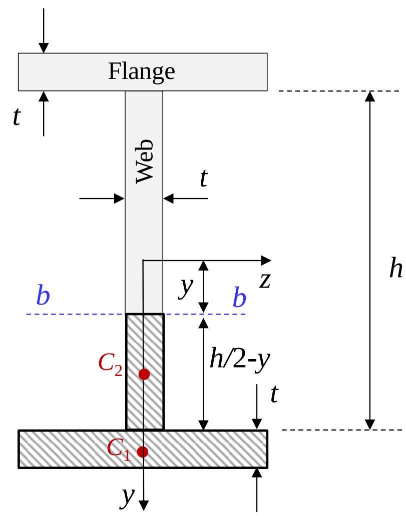
* נתן לראות שהמאמץ ב-flange $\tau_{xz} = 0$ at $z = b/2$ כי מאמץ הגזירה $\tau_{zx} = 0$ על הפאה הצדדית הוא אסם ו- τ_{xz} צריך להיות אפס כדי לקיים שוויון מאמצי גזירה מצומדים $\tau_{xz} = \tau_{zx}$



קבלנו τ_{xz} חיובי, לכן ה-flow של מאמץ הגזירה נכנס לחתך



- חתך **bb** ב-WEB



$$\tau_{xy} = \frac{VQ_z}{tI_{zz}}$$

$$Q_z = Ay_c = \underset{A_1}{tb}\left(\frac{h}{2}+\frac{t}{2}\right) + \underbrace{t\left(\frac{h}{2}-y\right)}_{A_2}\left(y+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}-y\right)\right) =$$

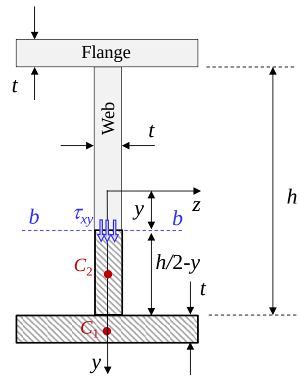
$$\frac{tb}{2}(h+t)+t\left(\frac{h}{2}-y\right)\left(\frac{y}{2}+\frac{h}{4}\right)$$

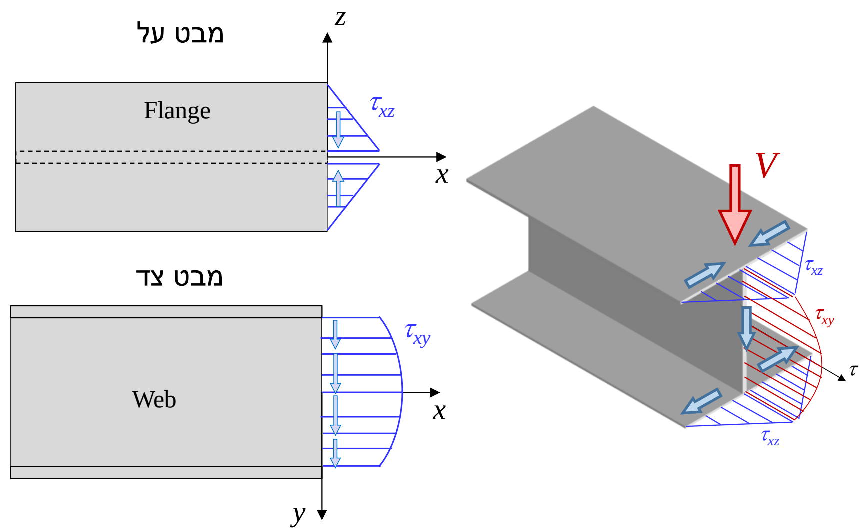
$$Q_z = \frac{t}{2}\left\{b(h+t)+\frac{h^2}{4}-y^2\right\}, \quad \tau_{xy} = \frac{V}{2I_{zz}}\left\{b(h+t)+\frac{h^2}{4}-y^2\right\}\text{-quadratic in } y$$

$$y=\frac{h}{2} \rightarrow Q_z = \frac{tb}{2}(h+t) \neq 0$$

$$y=0 \rightarrow Q_z = Q^{MAX} = \frac{tb}{2}\left\{(h+t)+\frac{h^2}{4b}\right\} > 0$$

ה-flow של מאמץ הגזירה נכנס לחתך



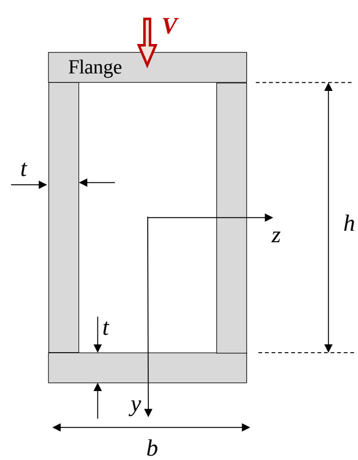


דגמה 5. חישוב מאמץ גזירה בקורה עם חתך דק דופן.

נתון: כוח גזירה V (נגיד שפתרנו את בעיית שיווי נשקל ומצאנו את V בחתך מסוים)

מומנט השטח השני I_{zz} (מומנט אינרציה) של כל החתך.

למצוא: התפלגות של מאמץ גזירה τ_{xy} ו- τ_{xz} בחתך (shear flow)

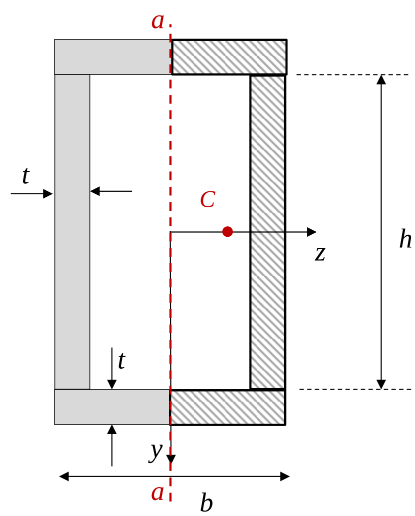


פתרון:

נסחה ג'נרית למאמץ הגזירה $\tau = \dfrac{VQ_z}{b_{CUT} I_{zz}}$

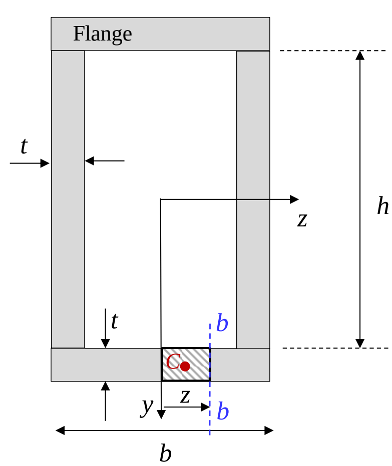
נבצע חתכים ג'נרים

- חתך **aa** ב-FLANGE



מאמץ ג τ_{xz} בחתך **aa** הוא אפס כמרכז השטח C של החלק של החתך נמצא על הציר z ו- $Q_z = 0$

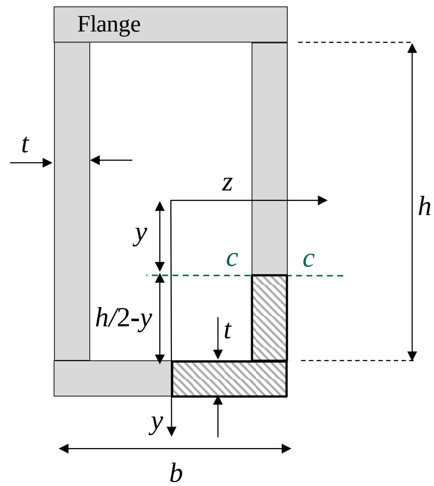
- חתך **bb** ב-FLANGE



$$\tau_{xz} = \frac{VQ_z}{tI_{zz}}$$

$$Q_z = Ay_c = tz\underbrace{\left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right)}_{y_C} > 0$$

ה-flow של מאמץ הגזירה נכנס לחתך

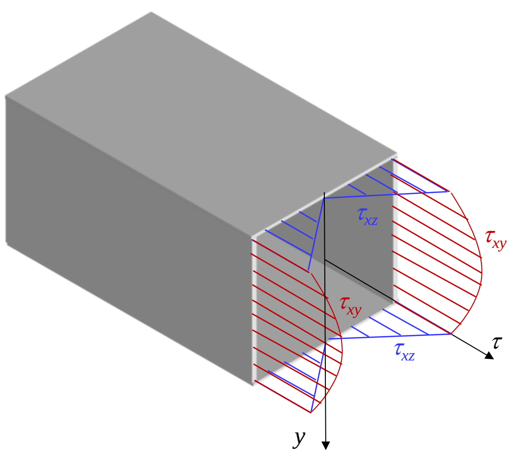


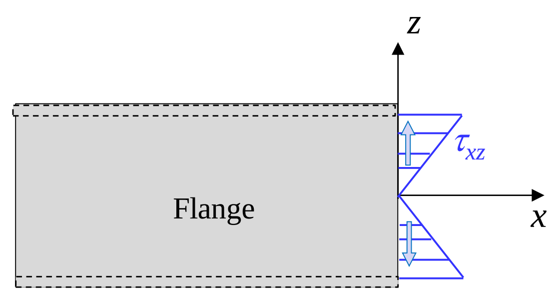
$$\tau_{xy} = \frac{VQ_z}{tI_{zz}}$$

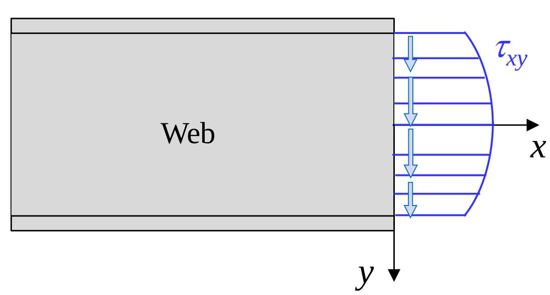
$$Q_z = t\frac{b}{2}\left(\frac{h}{2}+\frac{t}{2}\right)+t\left(\frac{h}{2}-y\right)\left(y+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}-y\right)\right)$$

$$Q_z = \frac{tb}{4}(h+t)+t\left(\frac{h}{2}-y\right)\left(\frac{h}{4}+\frac{y}{2}\right) = \frac{tb}{4}(h+t)+\frac{t}{2}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)$$

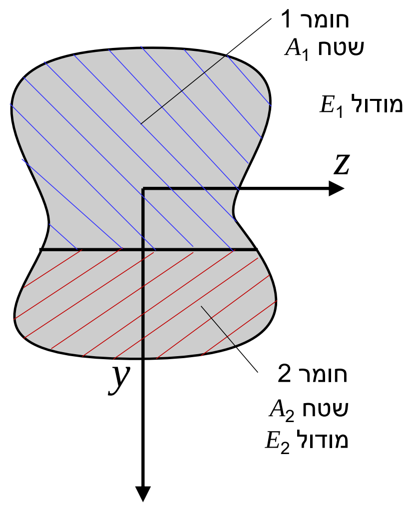
$$y=0, \quad Q_z = Q^{MAX} = \frac{tb}{4}(h+t)+\frac{th^2}{8}$$







Bimorph beams



הנחה של מישור נשאר מישו תקפה, לכן

$$\varepsilon_{xx} = \frac{y}{\rho} \quad \rightarrow \quad \sigma_{xx1} = E_1 \frac{y}{\rho}, \quad \sigma_{xx2} = E_2 \frac{y}{\rho}$$

מיקום **הציר הניטראלי** בקורה שעשויה משני חומרים שונה מהקורה שעשויה מחומר אחד.

נמצא את המיקום של הציר הניטראלי מי התנאי ש**הכוח הצירי** שקול צריך להיות **אפס** (נובע משווי משקל)

$$F_x = \int_A \sigma_{xx} dA = \int_{A_1} \sigma_{xx1} dA + \int_{A_2} \sigma_{xx2} dA = \int_{A_1} \frac{E_1 y}{\rho} dA + \int_{A_2} \frac{E_2 y}{\rho} dA =$$

$$\frac{1}{\rho}\left(E_1 \underbrace{\int_{A_1} y dA}_{Q_1} + E_2 \underbrace{\int_{A_2} y dA}_{Q_2} \right) = \frac{1}{\rho}\left(E_1 Q_1 + E_2 Q_2 \right) = 0$$

$$E_1 Q_1 + E_2 Q_2 = 0$$

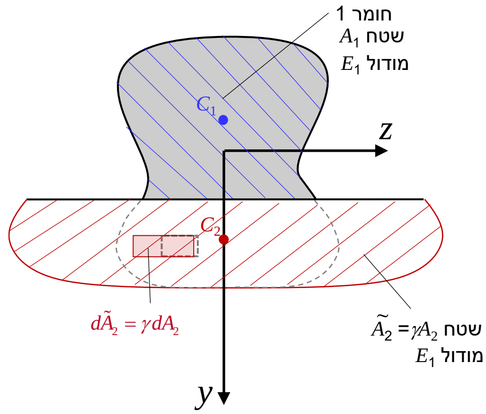
נסמן $\frac{E_2}{E_1} = \gamma$ ונניח (ללא פגיעה בכלליות) ש- $\gamma > 0$

$$E_1 \left(Q_1 + \gamma Q_2 \right) = 0$$

$$E_1 \left(y_{c1} A_1 + \gamma y_{c2} A_2 \right) = 0$$

$$\gamma Q_2 = \gamma \iint_{A_2} y dy dz = \iint_{A_2} y dy \left(\gamma dz \right)$$

משמעות – מחליפים שטח A_2 על ידי שטח אחר עם קואורדינטה z מרחבת בפקטור γ



קואורדינטות y_c של מרכז התת שטח לא משתנות.

$$y_{c1}A_1 + \gamma y_{c2}A_2 = 0 \;\text{ or }\; y_{c1}A_1 + y_{c2}\underbrace{\tilde{A}_2}_{\text{Stretched area}} = 0$$

מומנט

$$M = \int_A y\sigma_{xx}dA = \int_{A_1} y\sigma_{xx1}dA + \int_{A_2} y\sigma_{xx2}dA = \int_{A_1} \frac{E_1 y^2}{\rho}dA + \int_{A_2} \frac{E_2 y^2}{\rho}dA =$$

$$\frac{E_1}{\rho}\left(\int_{A_1} y^2 dA + \gamma\int_{A_2} y^2 dA\right) = \frac{E_1}{\rho}\left(I_1 + \gamma I_2\right)$$

$$\gamma I_2 = \gamma\int_{A_2} y^2 dA = \iint_{A_2} y^2 dy\left(\gamma dz\right)$$

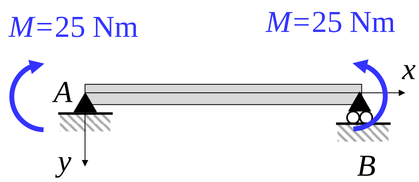
נסמן $I_1 + \gamma I_2 = \tilde{I}$ לכן

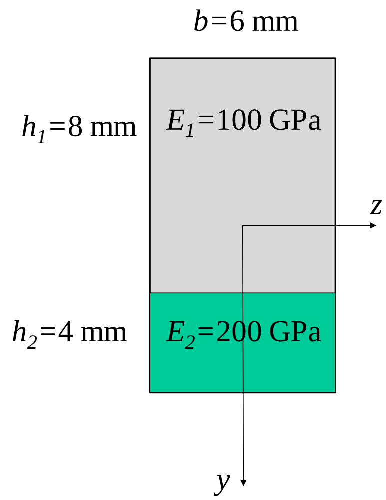
$$M = \frac{E_1\tilde{I}}{\rho}$$

מאמצים

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_{xx1} = E_1\dfrac{y}{\rho} \\ \sigma_{xx2} = E_2\dfrac{y}{\rho} \\ M = \dfrac{E_1\tilde{I}}{\rho} \to \dfrac{E_1}{\rho} = \dfrac{M}{\tilde{I}} \end{array}\right\} \to \sigma_{xx1} = \frac{My}{\tilde{I}},\ \sigma_{xx2} = \frac{\gamma My}{\tilde{I}}$$

דגמה 6.





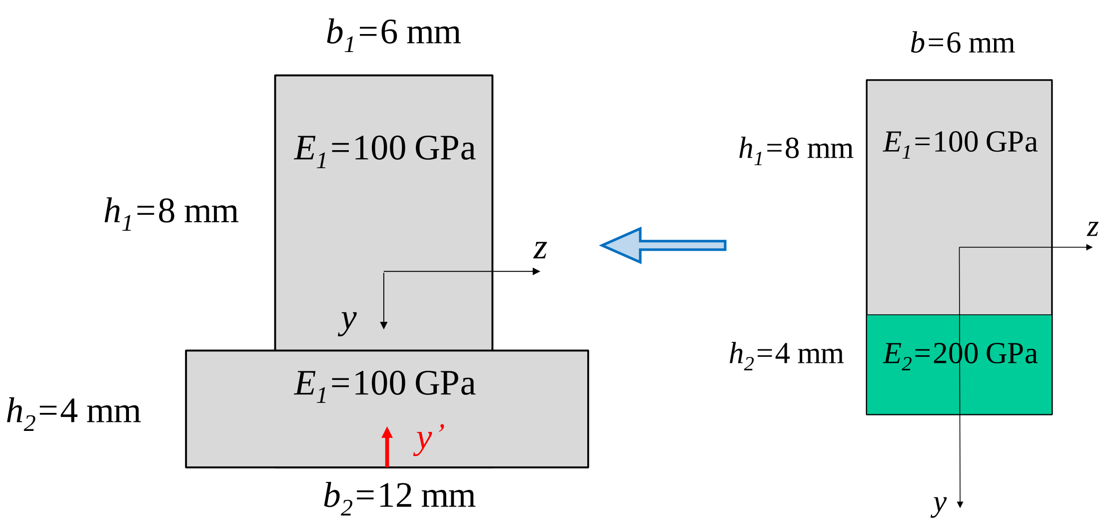
למצוא: מאמץ מרבי בכל אחד מהחומרים ומאמץ בממשק

פתרון

נחליף את החתך על ידי חתך אקוויוולנטי שעשוי מחומר 1

כאן היחס בין מודולים אלסטיים

$$\gamma = \frac{E_2}{E_1} = \frac{200\text{ GPa}}{100\text{ GPa}} = 2$$

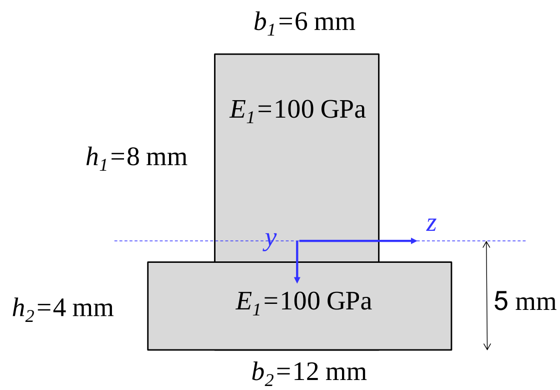


רק לצורך חישוב מיקום של הציר הניטרלי נגדיר ציר זמני y' כמו שמראה בציור

חישוב מרכז השטח (של הקואורדינטה y' של מרכז השטח):

Location (above the bottom face of the beam) of the neutral axis of the modified area

$$y'_c = \frac{A_1 y'_{c1} + \tilde{A}_2 y'_{c2}}{\tilde{A}} = \frac{6\times8\times8+12\times4\times2}{6\times8+4\times12} = 5 \text{ mm} = 0.005 \text{ m}$$



חישוב של מומנט השטח השני של החתך אקוויוולנטי ביחס לציר הניטרלי z

$$\tilde{I}_{zz} = I_{zz1} + A_1 y_{c1}^2 + \tilde{I}_{zz2} + \tilde{A}_2 y_{c2}^2$$ second moment of the modified area

$$\tilde{I}_{zz} = \frac{6\times8^3}{12} + (6\times8)\times3^2 + \frac{12\times4^3}{12} + (4\times12)\times3^2 = 1184\ mm^4 = 1.184\times10^{-9}\ m^4$$

רדיוס עקמומיות

$$\rho = \frac{E_1 \tilde{I}_{zz}}{M} = \frac{100\times10^9\times1.184\times10^{-9}}{25} = 4.73\ m$$

מאמצים

$$\sigma_{xx1}^{MAX} = \frac{My_1^{MAX}}{\tilde{I}_{zz}} = \frac{25\times(-0.07)}{1.184\times10^{-9}} = -148.3\times10^6\ Pa = -148.3\ MPA$$

$$\sigma_{xx2}^{MAX} = \frac{\gamma My_1^{MAX}}{\tilde{I}_{zz}} = \frac{2\times25\times0.05}{1.184\times10^{-9}} = 211.3\ MPA$$

מאמץ בממשק

$$\sigma_{xx1}^{INT} = \frac{My_1^{INT}}{\tilde{I}_{zz}} = \frac{25\times0.01}{1.184\times10^{-9}} = 21.11\ MPA$$

$$\sigma_{xx2}^{INT} = 2\sigma_{xx1}^{INT} = 42.22\ MPA$$