



۱. (۱۰٪) [تخمین] تخمین بیشینه شباهت (Maximum Likelihood) متغیر λ در توابع توزیع زیر (پواسون و نمایی) را برای تعداد N نمونه از داده‌ها بدست آورید.

توزیع پواسون	$p_x(k) = P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$
توزیع نمایی	$f_x(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$

۲. (۱۵٪) [تابع چگالی احتمال] فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x - a & 1 \leq x < 2 \\ -\frac{1}{3}x - b & 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & O.W \end{cases}$$

- الف) مقادیر a و b را طوری بیابید که $f_x(x)$ یک تابع چگالی احتمال باشد.
- ب) $F_x(x)$ را محاسبه کنید و نشان دهید که $F_x(x)$ خواص یک تابع چگالی تجمعی را دارد.
- ج) $P(X = 3)$ را محاسبه کنید.
- د) $P(1.5 \leq X < 4)$ را بیابید.
- هـ) $P(1.5 \leq X < 4 | X \geq 3)$ را بیابید.

۳. (۱۰٪) [قانون بیز] در یک سیستم بازشناسی ارقام گسسته فارسی ۰ تا ۹، پس از آموزش (Training) متوجه شده‌ایم ارقام هفت و هشت دارای سیگنال‌های نسبتاً شبیه به هم هستند به طوری که سیگنال آزمون (Test) رقم هفت به احتمال ۵۰٪ به عنوان عدد هفت و به احتمال



۵۰٪ به عنوان عدد هشت توسط سیستم تشخیص داده می شود. همچنین، سیگنال آزمون مربوط به رقم هشت، به احتمال ۳۰٪ به عنوان هفت و به احتمال ۷۰٪ به عنوان عدد هشت قابل تشخیص است. یک سیگنال ناشناس وارد سیستم می شود، احتمال تشخیص صحیح اعداد هفت و هشت به ترتیب چقدر است؟ فرض کنید سایر ارقام صحیح تشخیص داده می شوند و احتمال رخداد سیگنال ورودی برای همه اعداد یکسان باشد.

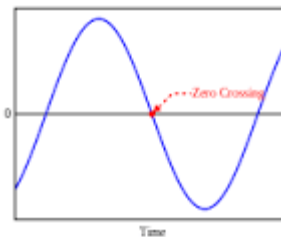
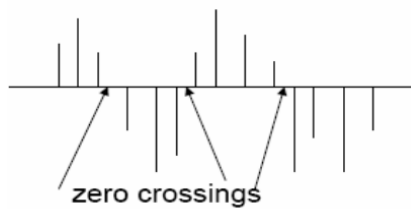
۴. (۲۵٪) [پایاده سازی: تابع توزیع برای سیگنال گفتار] در این تمرین می خواهیم برای چند نمونه سیگنال گفتار تابع توزیع رسم کنیم. بدین منظور، ابتدا با استفاده از داده های آموزش (Train) ارائه شده به همراه این تمرین، برای اعداد "یک"، "پنج" و "هشت"، برای هر سیگنال ویژگی های بیان شده در زیر را استخراج کنید و برای این ویژگی ها هیستوگرام و تابع توزیع گاوسی برازش شده به این داده ها را رسم کنید. برای رسم تابع توزیع کفایت پارامترهای آن (میانگین و واریانس) را با تخمین بیشینه شباهت (ML) محاسبه کنید و در رابطه توزیع گاوسی قرار دهید. داده های ارائه شده برای این تمرین دارای نرخ نمونه برداری 8KHz و 16Bit به صورت یک کاناله (Mono) هستند.

الف) هیستوگرام و توزیع گاوسی را برای حالتی که توان (Power) سیگنال ها (میانگین مجذور نمونه ها) را به عنوان ویژگی هر نمونه سیگنال استفاده کنید رسم کنید. این کار را برای سه عدد بیان شده انجام دهید و از کل داده های آموزش آن اعداد استفاده کنید.

ب) یکی از ویژگی های مورد استفاده در پردازش گفتار و موسیقی نرخ عبور از صفر (ZCR: zero-crossing rate) است که بیانگر تعداد بارهایی است که سیگنال تغییر علامت داده است (مقدار نمونه های آن از مثبت به منفی یا برعکس تغییر کرده است) (شکل های زیر). نحوه محاسبه این معیار برای سیگنال $x[n]$ با طول N به صورت زیر است.



$$ZCR = \sum_{n=1}^N |Sign(x[n]) - Sign(x[n-1])|; \quad Sign(x[n]) = \begin{cases} 1 & \text{if } x[n] \geq 0 \\ -1 & \text{if } x[n] < 0 \end{cases}$$



برای هر کدام از سیگنال‌های سه عدد بیان شده، مقدار نرخ عبور از صفر را نیز حساب کرده و مقدار آن را به عنوان یک ویژگی در نظر بگیرید. هیستوگرام و تابع توزیع را برای این حالت نیز رسم کنید.

ج) از مقایسه مقادیر بدست آمده بدست برای نرخ عبور از صفر و توان سه عدد چه اطلاعاتی می‌توان بدست آورد؟ برداشت خود را تشریح کنید.

۵. (۲۵+۴۰٪) [پیاده‌سازی: تشخیص اعداد انگلیسی با شبکه عصبی] از شبکه عصبی پس‌انتشار خطا (MLP) برای تشخیص اعداد انگلیسی صفر تا نه استفاده کنید. برای این کار از دادگان صوتی سوال قبل استفاده کنید و برای پیاده‌سازی شبکه عصبی می‌توانید از ابزارهای آماده بهره بگیرید (در متلب از newff برای ایجاد شبکه، از train برای آموزش آن و از sim برای تست شبکه استفاده کنید). ساختار شبکه عصبی را ثابت در نظر بگیرید؛ تعداد نرون‌های ورودی را برابر با تعداد کل ویژگی‌های فایل، تعداد نرون‌های میانی را تقریباً نصف تعداد نرون‌های ورودی و تعداد نرون‌های خروجی را به تعداد دسته‌ها (۱۰ دسته) در نظر بگیرید. مقدار نرخ یادگیری را 0.1 قرار دهید. از داده آموزش برای آموزش شبکه و از داده آزمون برای تست شبکه استفاده کنید.

الف) هر فایل را به ده قسمت مساوی تقسیم کرده (نیازی به هم اندازه کردن فایل‌ها



نیست) و برای هر قسمت مقدار توان را محاسبه کنید تا برای هر فایل یک بردار ویژگی ده بعدی بدست آید (ده نرون ورودی). دقت تشخیص را برای دو مجموعه آموزش و آزمون به صورت جداگانه محاسبه کنید.

ب) قسمت الف را تکرار کنید با این تفاوت که هر فایل را به ۵۰ قسمت مساوی تقسیم کنید. مشاهده خود را از مقایسه نتایج با قسمت الف بیان کنید.

ج) برای هر کدام از ۵۰ قسمت هر سیگنال در بخش ب، مقدار نرخ عبور از صفر را نیز حساب کرده و مقدار آن را به عنوان یک ویژگی به بردار ویژگی سیگنال اضافه کنید. در این حالت تعداد ویژگی‌های هر سیگنال به ۱۰۰ ویژگی می‌رسد. شبکه را با این ویژگی‌های جدید آموزش داده و دقت را روی مجموعه آزمون بدست آوردید. تحلیل خود را از نتیجه حاصل در مقایسه با سایر نتایج پیشین بنویسید.

[**نمره اضافی ۲۵٪**] در صورت پیاده‌سازی الگوریتم آموزش MLP توسط خود شما، ۲۵٪

(معادل ۵ نمره) به نمرات اضافه می‌شود.