Transformée en ondelettes

BEASSE Joseph, **CHIMBAULT** Thomas

ENSC - École Nationale Supérieure de Cognitique

E-mails:

- jbeasse@ensc.fr
- tchimbault@ensc.fr

14 décembre 2022

I. Introduction

Les signaux réels sont rarement enregistrés sans bruit parasite. Afin d'observer des phénomènes ou de simplement tirer des conclusions, il est impératif de reconstruire un signal sans bruit ou du moins, avec le bruit le moins parasite possible. Une stratégie est alors de filtrer les signaux obtenus afin de garder les seules informations pertinentes dans le cadre de l'expérience menée. Dans cette troisième séance de Travaux Pratiques encadrée par M. Pierrick Legrand, il est question de générer des signaux avec des bruits gaussiens et de déterminer une méthode de débruitage en exploitant la transformée en ondelette.

II. Démarche mise en place

Pour déterminer une méthode adéquate, il est nécessaire d'expérimenter sur un signal sinusoïdal artificiel. Une fois sa transformée en ondelette effectuée, il sera question de dégager des idées intéressantes pour construire une méthode générique et viable pour tout type de signal bruité.

III. Réalisation

A. Première expérimentation sur une sinusoïde

On souhaite étudier un signal sinusoïdal défini entre 0 et 1 seconde sur 2 puissance 12 points. Il est important de préciser que la puissance de 2 n'est pas anodine, cela permettra de réaliser la grille dyadique sans modification du signal.

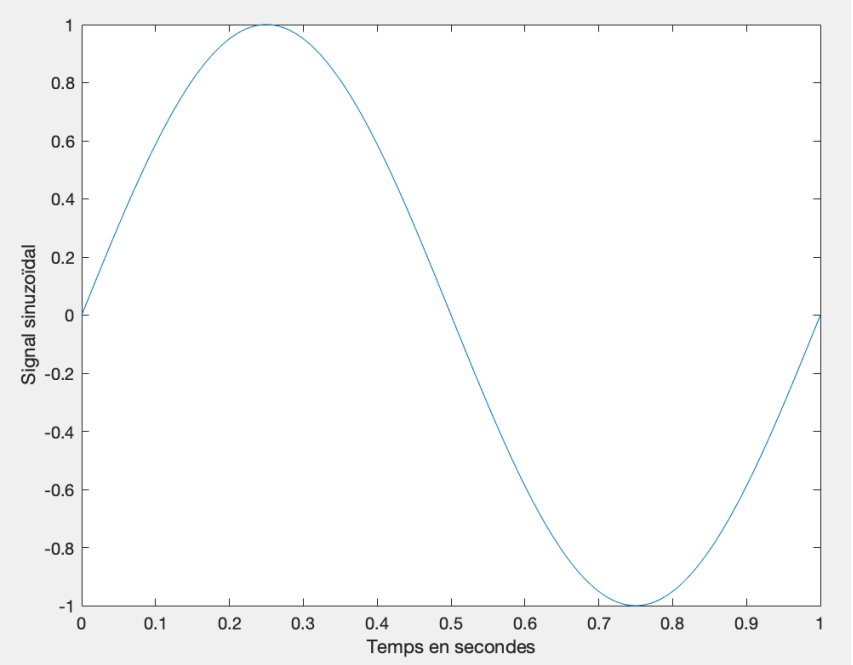

Figure 1. Signal sinusoïdal

Il est temps de bruiter le signal présenté en **Figure 1**. Pour ce faire, on définit un bruit blanc Gaussien d'écart-type 0.5 que l'on vient ajouter à notre signal sinusoidal initial.

```
% Définition du bruit blanc
Bruit = 0.5*randn(size(sinu));
Sig = sinu + Bruit;
```

Figure 2. Construction d'un signal bruité avec un bruit gaussien

Par cette opération, on obtient deux signaux bien distincts (*voir **Figure 3***) : celui en jaune est pur, celui représenté en noir est bruité.

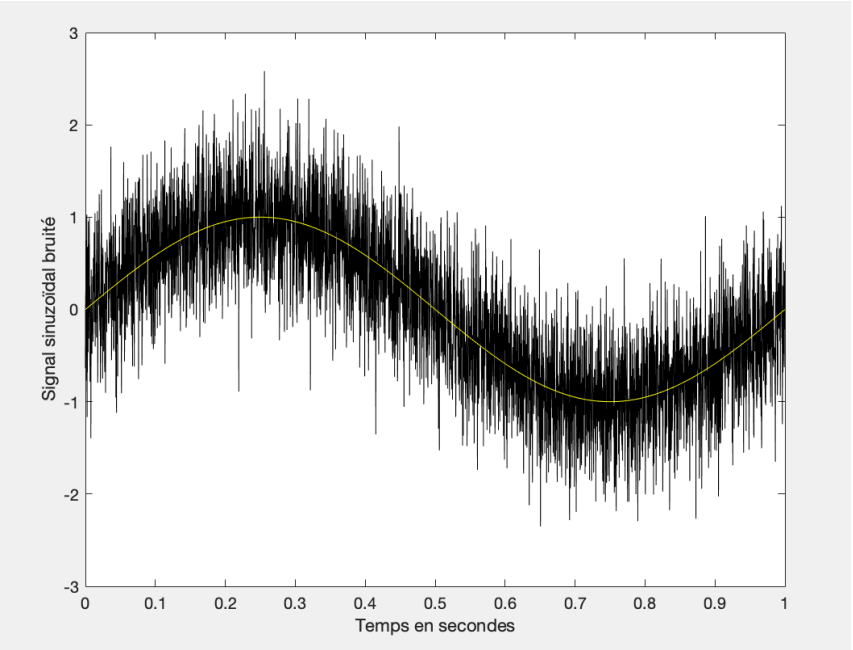

Figure 3. Superposition des deux signaux (pur et bruité)

L'exploitation de la transformée en ondelette est désormais envisageable. Calculons la transformée en ondelette de la sinusoïde originale.

```
% Transformée en ondelettes
Jmin = 1;
WTreg=perform_wavelet_transf(transpose(sinu),Jmin,1);
```

Figure 4. Calcul de la transformée en ondelette de la sinusoïde

En traçant *WTreg* en fonction *Jmin*, on obtient :

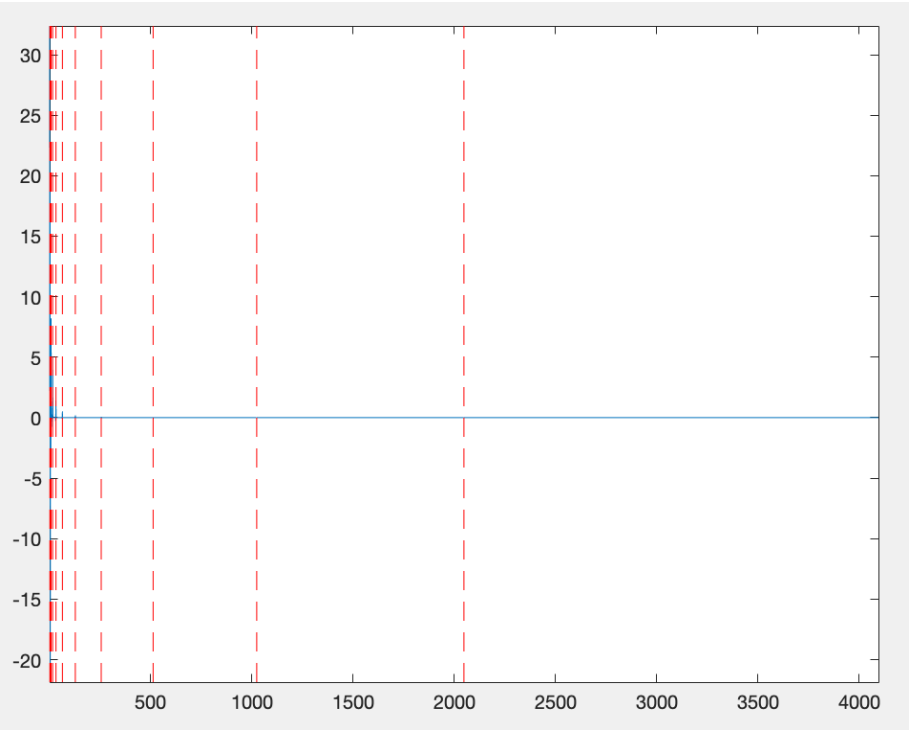

Figure 5. Représentation de la séparation des niveaux

Ce graphique est très intéressant. En effet, il correspond à une séparation des fréquences par les pointillés. Les hautes fréquences *(visibles à droite de la ligne en environ 2050)* sont repérables tout comme toutes les autres fréquences.

Maintenant, il est question de déterminer la grille dyadique associée à la **Figure 5.** Pour ce faire, il est important de garder en tête la distribution des fréquences visible ci-dessus. En effet, chaque segment de fréquences va correspondre à une ligne dans la grille dyadique.

```
function newMat = CreateDyad(n,sig)

    Jmin = 1;
    WTreg=perform_wavelet_transf(transpose(sig),Jmin,1);
    plot_wavelet(WTreg,Jmin)

    k = 1;
    matTO = zeros(n,n);
    for i = (1:n) % Parcourt chaque ligne
        for j = (1:2^(i-1))
            matTO(i,j) = WTreg(k);
            k = k + 1;
        end
    end

    % Création de la grille dyadiqe
    newMat = size(matTO);
    for i = 1:n
        num = 2^(i-1);
        for j = (0:num-1)
            debBloc = (2^(n-1))/(num)*j+1;
            finBloc = (2^(n-1))/(num)*(j+1);
            newMat(i,debBloc:finBloc)= matTO(i,j+1);
        end
    end

    imagesc(newMat)
    colormap('hsv')
    colorbar

end
```

Figure 6. Fonction générique pour la construction de grille dyadique

Après avoir construit la fonction permettant de visualiser la grille dyadique associée à un signal en ondelette, il est possible d'observer celle appliquée aux signaux construits précédemment.

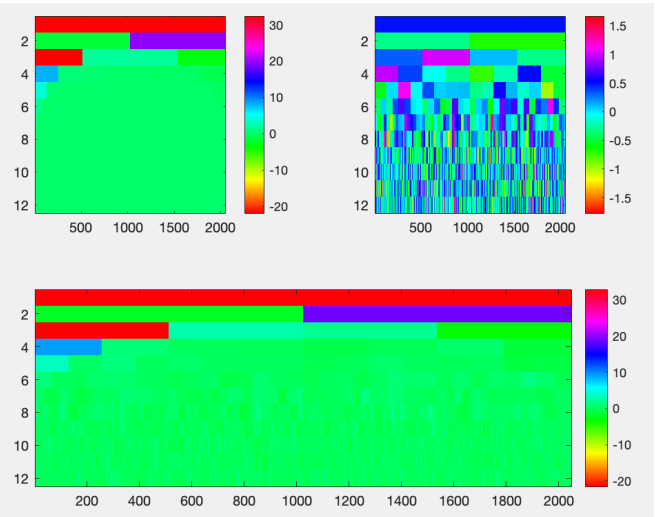

Figure 7. Grilles dyadiques du signal pur, du bruit et du signal bruité

Sur la **Figure 7** sont représentées les grilles dyadiques du signal sinusoïdal en haut à gauche, du bruit en haut à droite et du signal bruité en bas.
On peut remarquer que l'énergie émise par le bruit est significativement inférieure à celle du signal pour les premières composantes de la grille dyadiques.
Cependant le bruit a un impact sur les hautes fréquences (on remarque des bandes bleues pour les lignes 5 à 12 de la grille du signal bruité).

Ce cas d'étude permet de se poser des questions sur les techniques de débruitage. Notre première intuition a été d'exploiter la linéarité de l'intégrale présente dans le calcul de la transformée en ondelette. En effet, comme indiqué sur la figure suivante :

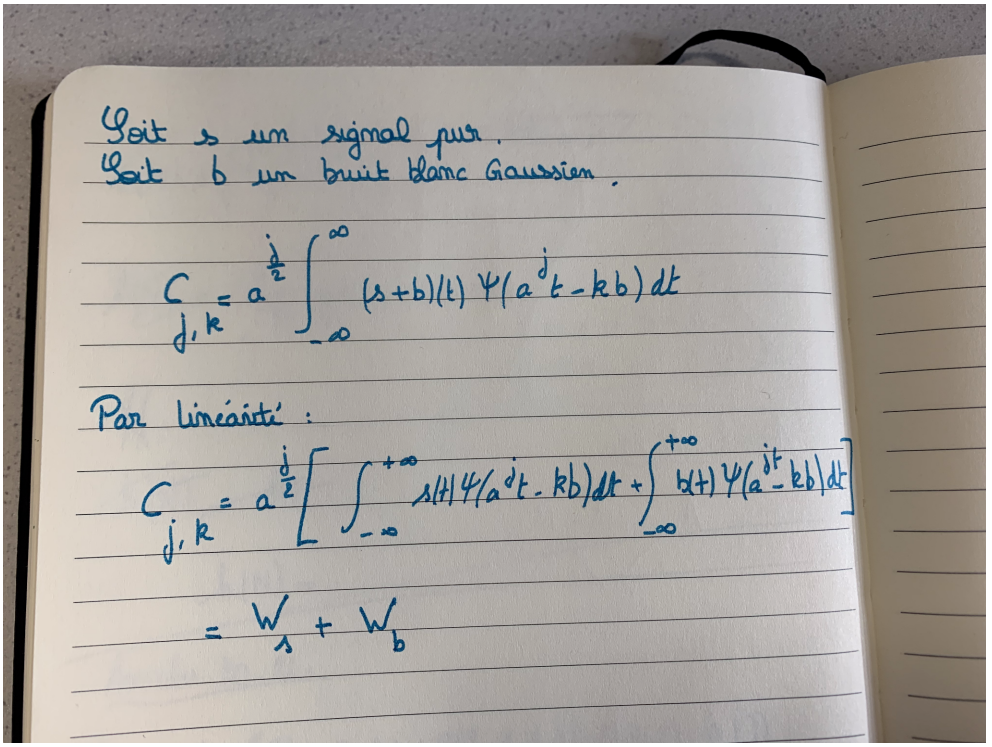

Figure 8. Première intuition pour le débruitage

Par linéarité de l'intégrale, les coefficients d'ondelette d'un signal réel sont égaux à la somme des coefficients avec ceux du bruit. Il serait donc pertinent de minimiser l'erreur quadratique moyenne entre les coefficients du signal réel et les coefficients d'un signal estimé. Cette intuition n'a pas été retenue.

Nous avons gardé la méthode suivante : on définit un seuil de valeurs dépendant de l'énergie du bruit afin que le signal reconstruit ne prenne pas en compte ces dernières. Prenons un seuil 2 fois supérieur à la valeur de l'écart type du signal sinusoïdal (amplitude). Il s'agit d'une valeur intuitée, l'objectif est de trouver un seuil potentiellement acceptable pour reconstruire proprement le signal sans bruit.
On obtient la figure n°8.

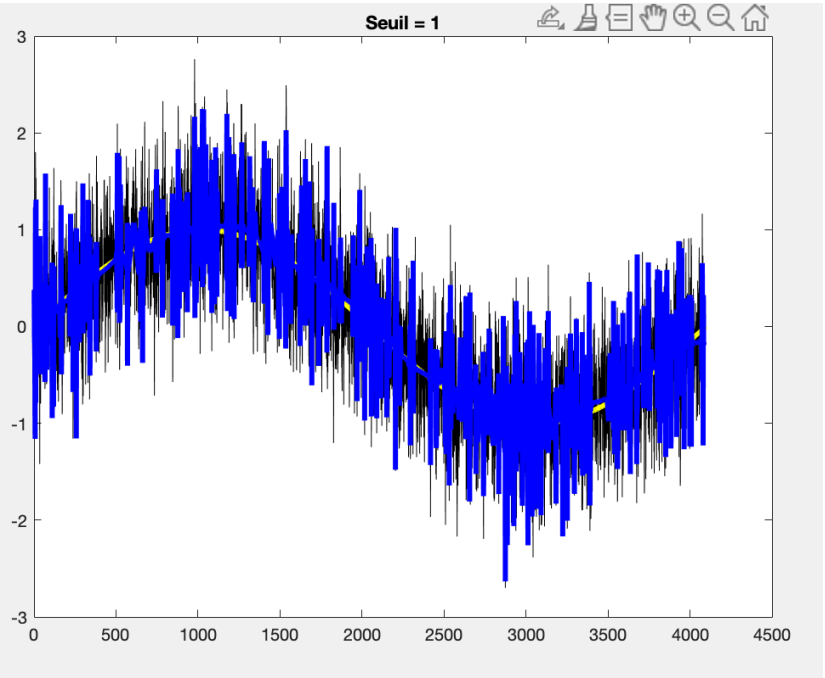

Figure 8. Représentation du signal débruité avec un seuil de 1 (bleu)

Sur cette figure, on remarque que le bruit a toujours un fort impact sur le signal, il faut alors augmenter le seuil. On double alors ce dernier et on observe le résultat:

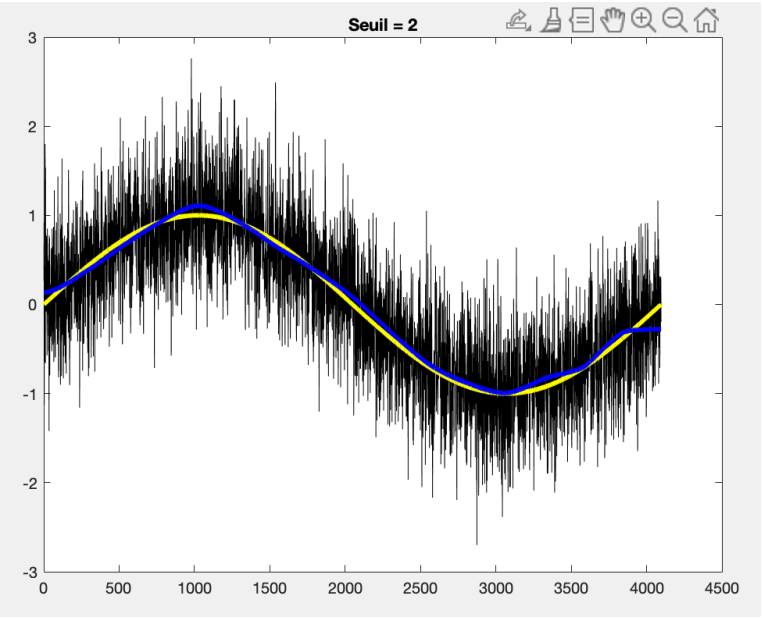

Figure 9. Représentation du signal débruité avec un seuil de 2 (bleu)

Le constat est le suivant, le signal débruité (en bleu) est proche de la sinusoïde (en jaune) cependant on remarque une perte d'informations vers la fin du signal (plateau). Le seuil est donc trop fort, il faut trouver un compromis entre ces 2 premiers résultats.

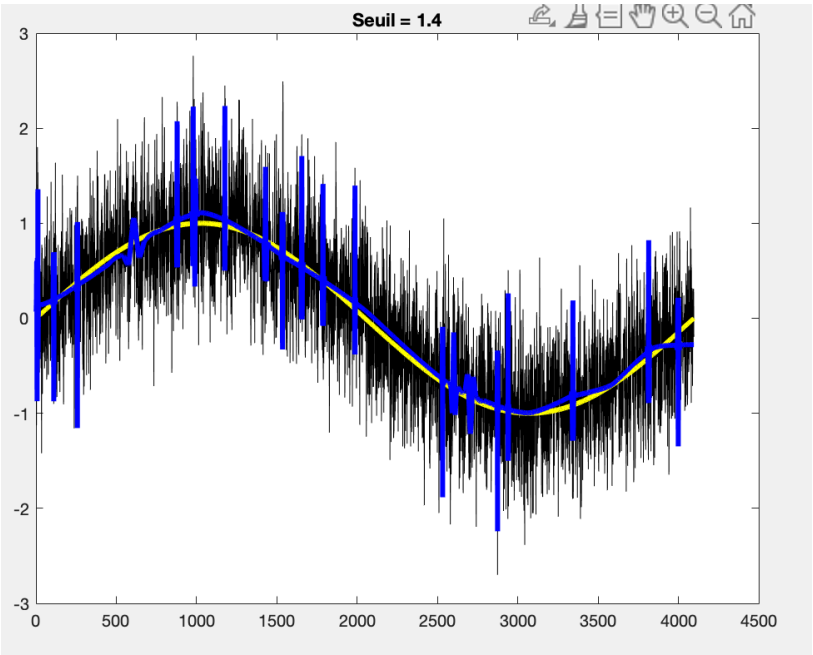

Figure 10. Représentation du signal débruité avec un seuil de 1.4 (bleu)

Le résultat présenté sur la figure 7 montre un signal sinuzöidal bruité mais moins bruité que le celui d'origine (en noir). On suppose alors que la valeur du seuil est proche de 1.4 soit, proche de la valeur maximale de l'énergie de la transformée en ondelettes du bruit. Il s'agit cependant d'un compromis, car il n'existe pas que des gros coefficients dans le signal, certains petits coefficients sont tout de même attaqués par le bruit même avec un seuil important.

```
% Seuillage et transformation inverse
thr = 2;    % Seuil
WTreg2=perform_wavelet_transf(transpose(Sig),Jmin,1);
ythard = wthresh(WTreg2,'h',thr);
invSig = perform_wavelet_transf(transpose(ythard),Jmin,-1);
```

Pour réaliser ce débruitage, on effectue un seuillage sur la transformée en ondelette du signal bruité. Puis on applique la transformée en ondelette inverse (qui est linéaire, par linéarité de l'intégrale, ici de la somme).

.

IV. Conclusion

L'étude des signaux fait partie intégrante de notre quotidien. Malheureusement l'acquisition d'un signal n'est jamais parfaite. Il existe différents types de bruits générés par les conditions environnantes lors de l'acquisition ou par le matériel.
Le traitement des signaux passe très souvent par l'étude de ces bruits, et plus particulièrement du débruitage de ces signaux.

Lors de ce travail pratique, on a étudié un cas simple du bruit gaussien d'un signal sinusoïdal, on a tout d'abord bruité ce signal, puis débruit. Lors de ces étapes, on a pu se rendre compte de la difficulté de l'opération. Plus les exigences de qualité sont élevées, plus il est difficile de s'approcher du signal réelle, une représentation proche mais faiblement bruitée est cependant obtenable assez facilement.