

# 1. Introducción a los conjuntos numéricos

## 1.1. Construcciones

**Nota 1.** Las definiciones y construcciones de los conjuntos numéricos estándares aquí no se dan de una forma muy rigurosa. Su construcción es más propia de una asignatura de fundamentos matemáticos, y ahora mismo me da mucha pereza escribir todo. En este documento solo nos preocupará la construcción de los números reales, que haremos en la sección de sucesiones.

Sea  $\mathbb{N}$  un conjunto con un elemento que denominamos 1. Ahora, para todo elemento  $n$  de  $\mathbb{N}$  añadimos a  $\mathbb{N}$  el sucesor,  $S(n)$  o  $n + 1$ . Esto da un conjunto infinito, los **números naturales**. Generalmente, que 0 esté dentro de  $\mathbb{N}$  es una cuestión de comodidad. Aquí nos será mucho más cómodo que los números naturales empiecen en 1.

En este conjunto tenemos el principio de inducción:

**Axioma 1** (Principio de inducción en  $\mathbb{N}$ ). Sea  $S \subseteq \mathbb{N}$ . Si  $S$  satisface las siguientes 2 condiciones, entonces  $S = \mathbb{N}$ :

- $1 \in S$
- $\forall n \in S \ n + 1 \in S$

Este principio es muy útil para probar cosas sobre  $\mathbb{N}$ , por ejemplo la forma cerrada de una sucesión. En  $\mathbb{N}$  también podemos definir algo denominado **orden total**, que es una relación binaria  $\leq$  que sigue los siguientes axiomas:

**Axioma 2** (Axiomas de orden total).  $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$

1.  $a \leq a$  (Reflexividad)
2.  $a \leq b$  y  $b \leq c$  implica  $a \leq c$  (Transitividad)
3.  $a \leq b$  y  $b \leq a$  implica  $a = b$  (Antisimetría)
4.  $a \leq b$  o  $b \leq a$  (Totalidad o principio de tricotomía)

Cuando tenemos un orden parcial o total definido sobre un conjunto, podemos hablar de cotas y máximos y mínimos:

**Definición 1.** Sea  $S \subseteq X$  donde  $X$  es un conjunto con un orden parcial o total  $\leq$ .  $S$  es...

- **Acotado superiormente** si  $\exists r \in X$  tal que  $x \leq r \ \forall x \in S$ .
- **Acotado inferiormente** si  $\exists r \in X$  tal que  $r \leq x \ \forall x \in S$ .

Y decimos que un elemento  $r \in S$  es...

- Un **máximo** si  $\forall x \in S \ x \leq r$ .
- Un **mínimo** si  $\forall x \in S \ r \leq x$ .

Con este orden total definido, podemos reformular el principio de inducción como:

**Axioma 3** (Principio de buena ordenación en  $\mathbb{N}$ ).  $\forall S \subseteq \mathbb{N} \ S \neq \emptyset, \exists n \in S \mid \forall x \in S, n \leq x$ . Es decir, todo subconjunto de los números naturales tiene mínimo.

Estas dos formulaciones son equivalentes. Los números naturales además cumplen los siguientes axiomas algebraicos:

**Axioma 4** (Axiomas de semianillo unitario ordenado).  $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$ :

1.  $(a + b) + c = a + (b + c)$  (Asociatividad de la suma)
2.  $a + b = b + a$  (Conmutatividad de la suma)
3.  $(a * b) * c = a * (b * c)$  (Asociatividad de la multiplicación)
4.  $a * b = b * a$  (Conmutatividad de la multiplicación)
5.  $a * (b + c) = a * b + a * c$  (Distributividad de la multiplicación sobre la suma)
6.  $\exists 1 \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, 1 * n = n$  (Elemento neutro del producto)
7.  $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$  (Compatibilidad del orden con la suma)

8. Si  $c \geq 0$  (que es trivial en  $\mathbb{N}$ ), entonces  $a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$  (Compatibilidad del orden con el producto)

Estos axiomas son particularmente débiles. Por ejemplo, para la ecuación  $x + 2 = 4$  obviamente  $x = 2$ , pero no existe ninguna forma de probarlo fácilmente, cuando la existencia de inversos para cada número ayudaría inmensamente. Además, ecuaciones como  $x + 4 = 2$  no tienen solución en  $\mathbb{N}$ . Por eso definimos un nuevo conjunto denominado  $\mathbb{Z}$ , los **números enteros**:

**Definición 2** (Números enteros).  $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$  donde 0 denota la identidad para la suma y  $-n$  el inverso para la suma de  $n$ .

Estos números, además de los Axiomas 4, cumplen los siguientes axiomas:

**Axioma 5** (Axiomas adicionales para  $\mathbb{Z}$ ).

1.  $\exists 0 \in \mathbb{Z} \mid \forall n \in \mathbb{N}, 0 + n = n$  (Elemento neutro de la suma)
2.  $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists -n \in \mathbb{Z} \mid n + (-n) = 0$  (Existencia del elemento inverso para la suma)

Con estos axiomas, se dice que  $(\mathbb{Z}, +)$  es un grupo conmutativo y que  $(\mathbb{Z}, +, *)$  es un anillo conmutativo. A cambio de estos axiomas algebraicos, perdemos el principio de inducción en los números enteros y la existencia de un elemento mínimo, pero mantenemos una versión del principio de buena ordenación:

**Axioma 6** (Principio de buena ordenación de subconjuntos minorados de  $\mathbb{Z}$ ).  $\forall S \subseteq \mathbb{Z} \ S \neq \emptyset$  si  $\exists n \in \mathbb{Z} \mid \forall x \in S, n \leq x$  entonces  $\exists m \in S \mid \forall x \in S, m \leq x$ . Es decir, todo subconjunto no vacío con cota inferior tiene un elemento mínimo.

Este axioma para  $\mathbb{Z}$  implica el Axioma 3 para los naturales. El conjunto de los números enteros aún tiene unos cuantos problemas. Por ejemplo, es imposible resolver la ecuación  $2x = 1$  para  $x \in \mathbb{Z}$ . Por eso, podemos definir otro conjunto de números contruidos sobre los números enteros, los **números racionales**, denotados por  $\mathbb{Q}$ :

**Definición 3** (Números racionales).  $\mathbb{Q} = \{p/q, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$

Aparte de cumplir los Axiomas 4 y 5,  $\mathbb{Q}$  cumple:

**Axioma 7** (Axioma algebraico adicional para  $\mathbb{Q}$ ).

1.  $\forall q \in \mathbb{Q} \ q \neq 0, \exists 1/q \in \mathbb{Q} \mid q * (1/q) = 1$  (Existencia del inverso de elementos no nulos para el producto)

Esto hace de  $\mathbb{Q}$  un cuerpo conmutativo.  $\mathbb{Q}$  no tiene ni principio de buena ordenación, ni de buena ordenación de subconjuntos minorados (por ejemplo, el conjunto  $S = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Q}$  esta acotado inferiormente pero no tiene mínimo). Esto nos quita una vía de demostrar, pero "quitamos" más agujeros que existían en los números enteros:

**Teorema 1** (Densidad de  $\mathbb{Q}$ ).  $\forall a, b \in \mathbb{Q} \ a \neq b, \exists r \in \mathbb{Q} \mid a < r < b$ . Es decir, entre dos números racionales distintos siempre vamos a poder encontrar otro número racional. De hecho, vamos a poder encontrar infinitos aplicando el teorema cuantas veces como queramos.

*Demostración.* Dados  $a < b \in \mathbb{Q}$ :  $a = (a + a)/2 < (a + b)/2 < (b + b)/2 = b$ .  $(a + b)/2$  es el número que buscamos.  $\square$

De este teorema podemos deducir que no existe una función sucesora en  $\mathbb{Q}$ , y por tanto no tenemos alternativa a inducción. Pero este teorema no es suficiente para que  $\mathbb{Q}$  sea el conjunto numérico perfecto para hacer análisis. Aún existen agujeros, como demuestra el siguiente ejemplo:

**Proposición 1.** No existe ningún  $a \in \mathbb{Q}$  tal que  $a^2 = 2$ .

*Demostración.* Supongamos que  $\exists a \in \mathbb{Q}$  tal que  $a^2 = 2$ . Al ser un número racional, lo podemos escribir de la forma  $\frac{p}{q}$  con  $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$  y  $\gcd(p, q) = 1$  (donde  $\gcd$  denota el máximo común divisor). Por tanto, tenemos la expresión  $\frac{p^2}{q^2} = 2$ , de donde deducimos que  $p^2 = 2q^2$  y debido a que 2 es un número primo, que  $2 \mid p$  o más concretamente  $p = 2k$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ . Substituyendo otra vez obtenemos  $4k^2 = 2q^2$  y deducimos  $2k^2 = q^2$ , que de forma similar nos deja ver que  $q$  es también múltiplo de 2. Pero inicialmente hemos asumido que el máximo común divisor de  $p$  y  $q$  es  $1 < 2$  y no mayor o igual a 2, por lo cual hemos encontrado una contradicción y la proposición es cierta.  $\square$

Esto es problemático, ya que intuitivamente deberíamos de poder encontrar un valor que cumpla  $a^2 = 2$ . Para poder arreglar este problema necesitamos una definición primero:

**Definición 4** (Supremo e ínfimo). Sea  $A$  un subconjunto numérico acotado superiormente. Si existe la mínima cota superior (es decir, un número  $\omega$  que sea cota superior del conjunto y tal que cualquier otra cota superior  $\alpha$  sea  $\omega \leq \alpha$ ) esta será única y la llamaremos **supremo**. Dualmente, a la máxima cota inferior en un subconjunto acotado inferiormente la llamaremos **ínfimo**. Se denotan  $\sup A$  y  $\inf A$ .

La definición parece ajena al ejemplo de "agujero" que hemos dado en la *Proposición 1*, pero es la más general que engloba todos los casos que necesitamos. El subconjunto  $A \subseteq \mathbb{Q}$  definido como  $A = \{a \in \mathbb{Q} \mid a^2 \leq 2\}$  está acotado superiormente por 2 y es posible demostrar que si existiera un supremo, este número sería tal que su cuadrado fuera igual a 2, pero en  $\mathbb{Q}$  no existe. Por tanto, podemos pensar que "añadiendo todos los supremos" completaríamos  $\mathbb{Q}$ . Este es el procedimiento que seguimos:

**Axioma 8** (Axioma del supremo). Todo subconjunto acotado superiormente tiene supremo.

**Definición 5** (Números reales). Al conjunto  $\mathbb{R}$  con  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$  y que cumpla el Axioma 8 lo llamamos los **números reales**.

Este conjunto no es único, pero si es único bajo isomorfismos, que viene a decir que cualesquiera dos conjuntos con estas propiedades tienen la misma estructura y por tanto no hace falta distinguirlos. En una sección posterior, nos centraremos en la construcción de los números reales: lo que hemos dado aquí es solo una definición axiomática.

## 1.2. Los números reales

Empezamos el estudio de los números reales introduciendo algunos conceptos.

**Definición 6.** El conjunto de los **irracionales** es  $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Es decir, los números reales que no se pueden expresar como cociente de dos números enteros.

De esta definición podemos ver que un número real tiene que ser racional o irracional, pero no puede ser los dos a la vez. Esto implica que los racionales e irracionales forman una partición de los números reales.

**Definición 7** (Valor absoluto). Dado  $x \in \mathbb{R}$  definimos el **valor absoluto** como:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

El valor absoluto es de los conceptos mas fundamentales del análisis real. Geométricamente, si dibujamos el valor  $x \in \mathbb{R}$  en la recta real, el valor absoluto da la longitud del segmento que va desde  $x$  hasta 0 y la distancia entre dos números reales en la recta real viene dada por  $d(x, y) = |x - y|$ .

**Proposición 2** (Propiedades del valor absoluto).  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  tenemos:

1.  $||a|| = |a|$
2.  $|-a| = |a|$
3.  $|ab| = |a||b|$
4. La desigualdad triangular:  $|a + b| \leq |a| + |b|$
5. La desigualdad triangular inversa:  $||a| - |b|| \leq |a - b|$
6. Si  $a \neq 0$  entonces  $|\frac{1}{a}| = \frac{1}{|a|}$

La desigualdad triangular se usa mucho. Vamos a ver una caracterización del supremo e ínfimo:

**Proposición 3** (Caracterización del supremo). Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$ .

1. El supremo de  $A$  existe si y solo si existe un número  $\omega \in \mathbb{R}$  que sea cota superior de  $A$  tal que  $\forall \varepsilon > 0$  exista  $x \in A$  tal que  $x > \omega - \varepsilon$ . En este caso  $\sup A = \omega$ .
2. El ínfimo de  $A$  existe si y solo si existe un número  $\alpha \in \mathbb{R}$  que sea cota inferior de  $A$  tal que  $\forall \varepsilon > 0$  exista  $x \in A$  tal que  $x < \alpha + \varepsilon$ . En este caso  $\inf A = \alpha$ .

Cuando estudiemos sucesiones, nos será muy útil tener herramientas para relacionar los números naturales con los números reales.

**Teorema 2** (Propiedad arquimediana).  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  tales que  $x > 0 \exists n \in \mathbb{N}$  con  $nx > y$ .

Podemos entender el teorema así: si tenemos una longitud muy pequeña siempre vamos a juntar muchas de ellas para poder formar una longitud grande. Este teorema nos va a servir para demostrar dos corolarios que son intuitivamente verdad:

**Corolario 1.** El conjunto de los números naturales no está acotado superiormente.

**Corolario 2.** Todo subconjunto no vacío de los números naturales que esté acotado superiormente tiene máximo y mínimo.

**Corolario 3.** Todo subconjunto finito de los números reales está acotado y tiene máximo y mínimo.

**Teorema 3** (Existencia de la parte entera).  $\forall x \in \mathbb{R}$  existe un único  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $k \leq x < k + 1$ .

**Definición 8** (Parte entera). Dado  $x \in \mathbb{R}$  definimos la **parte entera** como:

$$\lfloor x \rfloor = \sup\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\} \quad (2)$$

Por el teorema anterior, este supremo siempre existe. También definimos la **parte fraccionaria**:

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \quad (3)$$

Estos dos no son tan útiles como el valor absoluto.

**Definición 9** (Potencias enteras). Sea  $x \in \mathbb{R}$  y  $n \in \mathbb{Z}$ . Definimos la **potencia  $n$ -ésima** de  $x$  de forma inductiva, y la denotamos por  $x^n$ , como:

$$x^n = \begin{cases} x * x^{n-1} & \text{si } n > 1 \\ x & \text{si } n = 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \text{ y } x \neq 0 \\ \frac{1}{x^n} & \text{si } n < 0 \text{ y } x \neq 0 \end{cases} \quad (4)$$

Si  $x = 0$  y  $n \leq 0$  entonces la potencia queda indefinida. Al número  $n$  se le llama **exponente**.

Es posible extender esta definición a los números racionales e irracionales, pero se necesitan herramientas más fuertes para fundamentarlos. Por ahora damos los teoremas:

**Teorema 4** (Existencia de la raíz cuadrada). Sea  $a \in \mathbb{R}$  mayor o igual que 0. Entonces existe un único  $x \in \mathbb{R}$  mayor o igual que 0 tal que  $x^2 = a$ .

**Teorema 5** (Existencia de raíces). Sea  $a \in \mathbb{R}$  cualquiera.

1. Para todo  $n \in \mathbb{N}$  impar existe un único  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $x^n = a$ .
2. Si  $a \geq 0$  entonces para todo  $n \in \mathbb{N}$  par (recordamos que  $\mathbb{N}$  no tiene el 0 en nuestra definición) existe un único  $x \in \mathbb{R}$  con  $x \geq 0$  tal que  $x^n = a$ .

En cualquier caso, al número  $x$  lo llamaremos la **raíz  $n$ -ésima** de  $a$  y lo denotaremos por  $\sqrt[n]{a}$  o  $a^{\frac{1}{n}}$ .

**Proposición 4** (Potencias racionales). Sean  $x \in \mathbb{R}$ ,  $q \in \mathbb{Q}$  y  $n, m \in \mathbb{Z}$  tales que  $q = \frac{n}{m}$ . Cuando las siguientes expresiones son válidas, tenemos:

$$(x^n)^{\frac{1}{m}} = (x^{\frac{1}{m}})^n \quad (5)$$

y este número lo denotaremos por  $x^{\frac{n}{m}}$  o  $x^q$ . (TODO: Falta ver que está bien definido)

**Proposición 5** (Propiedades de las potencias). TODO

**Proposición 6** (Binomio de Newton). Sean  $x, y \in \mathbb{R}$  y  $n \in \mathbb{N}$  entonces:

$$(x + y)^n = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} x^m y^{n-m} \quad (6)$$

Las potencias de exponente real tienen una definición más complicada. Por conveniencia, definimos las sucesiones aquí:

**Definición 10.** Una **sucesión** es una aplicación  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Por comodidad, la imagen de  $n \in \mathbb{N}$  se denota por  $a_n$  y para la sucesión en sí usaremos  $\{a_n\}_n$ . El conjunto  $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$  es el conjunto **imagen**.

Introducir las sucesiones aquí nos va a permitir establecer algunos ejemplos de inducción:

**Ejemplo 1** (Números triangulares). Definimos la sucesión  $\{T_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$  mediante la fórmula  $T_n = \sigma_{k=1}^n k$ . Estos son los **números triangulares**. El objetivo es establecer una expresión cerrada para la sucesión.

## 2. Sucesiones de números reales

**Definición 11.** Decimos que una sucesión  $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$  es:

- **Eventual creciente** si  $\exists N \in \mathbb{N}$  tal que  $a_m \geq a_n$ ,  $\forall m > n \geq N$  con  $n$  y  $m$  naturales.
- **Eventual estrictamente creciente** si  $\exists N \in \mathbb{N}$  tal que  $a_m > a_n$ ,  $\forall m > n \geq N$  con  $n$  y  $m$  naturales.
- **Eventual decreciente** si  $\exists N \in \mathbb{N}$  tal que  $a_m \leq a_n$ ,  $\forall m > n \geq N$  con  $n$  y  $m$  naturales.
- **Eventual estrictamente decreciente** si  $\exists N \in \mathbb{N}$  tal que  $a_m < a_n$ ,  $\forall m > n \geq N$  con  $n$  y  $m$  naturales.

En cualquier caso decimos que la sucesión es **eventual monótona**. Si  $N = 1$  en cualquiera de estos casos, entonces quitamos "eventual".

Nos interesa estudiar el comportamiento de la sucesión cuando  $n$  se hace grande, es decir *eventualmente*. Veremos que el comportamiento de  $a_n$  cercano a  $n = 1$  no importa en lo que a límite se refiere, solo el comportamiento eventual. En los teoremas de sucesiones monótonas que hagamos generalmente no usaremos la monotonía eventual, sino la monotonía desde  $n = 1$  pero también serán válidos para la eventual con pocas modificaciones.

**Definición 12.** Sea  $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$  una sucesión de números reales. Decimos que  $a_n$  está **acotada inferiormente** si existe un  $A \in \mathbb{R}$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene  $a_n \geq A$ . Análogamente, se dice que está **acotada superiormente** si existe un  $B \in \mathbb{R}$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene  $a_n \leq B$ . Se dice que está **acotada** si lo está superiormente e inferiormente.

### 2.1. Convergencia y cálculo de límites

**Definición 13.** Sea  $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$  una sucesión de números reales. Decimos que  $a_n$  **converge** a  $L$  y lo denotamos como  $a_n \rightarrow_n L$  si y solo si  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_n - L| < \varepsilon$  para todo  $n$  tal que  $n \geq N$ .

Esta definición se le conoce como definición  $\delta - \varepsilon$ .

**Proposición 7** (Unicidad del límite). Sean  $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$  convergente a  $L_1$  y  $L_2$ . Entonces  $L_1 = L_2$ .

*Demostración.* Supongamos que  $L_1$  y  $L_2$  son dos límites de la sucesión  $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ . Por tanto, dado un  $\varepsilon > 0$ , existe un  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_n - L_1| < \varepsilon/2$  y  $|a_n - L_2| < \varepsilon/2$   $\forall n > N$  con  $N = \max\{n_1, n_2\}$ , donde  $n_1$  y  $n_2$  son  $N$  dado de la definición del límite para  $L_1$  y  $L_2$ . Sumando ambas desigualdades y usando la desigualdad triangular, tenemos:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} > |a_n - L_1| + |a_n - L_2| = |a_n - L_1| + |-a_n + L_2| \\ &\geq |a_n - L_1 - a_n + L_2| = |L_2 - L_1| \end{aligned}$$

Como  $\varepsilon$  es un número arbitrario mayor que 0, si asumimos que  $|L_2 - L_1| \neq 0$ , siempre vamos a poder encontrar un valor de  $\varepsilon$  (por ejemplo,  $\varepsilon = \frac{|L_2 - L_1|}{2} > 0$ ) mayor a 0 que contradiga  $\varepsilon > |L_2 - L_1|$ . Por tanto,  $|L_2 - L_1| = 0$  y  $L_2 = L_1$ .  $\square$

**Definición 14.** Sabiendo que una sucesión convergente  $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$  converge a un único valor  $L$ , llamamos a este valor **límite de la sucesión**  $a_n$ , y lo denotamos como  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$  o de manera resumida  $\lim_n a_n = L$ .

**Ejemplo 2.** Consideramos la sucesión  $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$  de término general  $a_n = \frac{1}{n}$ . Sea  $\varepsilon > 0$ . Por la propiedad arquimediana existe un  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $N\varepsilon > 1 \Rightarrow \varepsilon > \frac{1}{N}$ . Si  $n > N$  entonces  $|\frac{1}{n} - 0| < \frac{1}{N} < \varepsilon$ . Por tanto  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ .

**Proposición 8.** Sea  $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$  una sucesión de números reales. Si  $\{a_n\}_n$  converge, entonces es acotada.

*Demostración.* Supongamos que  $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$  es una sucesión que converge a  $L \in \mathbb{R}$ . Por la definición de convergencia existirá un  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq N$  entonces  $|a_n - L| < 1$  (haciendo  $\varepsilon = 1$ ). Podemos asegurar que  $N > 1$  (si tuviéramos que  $N = 1$  simplemente dejaríamos  $N = 2$ ). Desarrollando el valor absoluto tenemos:

$$L - 1 < a_n < L + 1 \quad (7)$$

para todo  $n \geq N$ . Consideramos entonces los conjuntos  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{N-1}, L + 1\}$  y  $B = \{a_1, a_2, \dots, a_{N-1}, L - 1\}$ . Como ambos conjuntos son finitos, podemos asegurar que existe el máximo de  $A$  y el mínimo de  $B$ . Sean  $\alpha = \min B$  y  $\omega = \max A$ . Entonces:

1. Si  $n \in \mathbb{N}$  es tal que  $1 \leq n < N$  entonces  $a_n \in A$  y  $a_n \in B$  y por tanto  $\alpha \leq a_n \leq \omega$ .
2. Si  $n \in \mathbb{N}$  es tal que  $n \geq N$  entonces por (7) tenemos  $\alpha \leq L - 1 \leq a_n \leq L + 1 \leq \omega$  y así  $\alpha \leq a_n \leq \omega$  por la transitividad del orden.

Como todo número natural es menor, igual o mayor que  $N$  (principio de la tricotomía) tenemos que  $\alpha \leq a_n \leq \omega$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y por tanto la sucesión  $\{a_n\}_n$  está acotada.  $\square$

**Definición 15.** Si  $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$  no converge a ningún valor  $L \in \mathbb{R}$ , podemos decir que  $a_n$  es:

- **Divergente a  $+\infty$**  si  $\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n > M \forall n > N$ .
- **Divergente a  $-\infty$**  si  $\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n < M \forall n > N$ .
- **Oscilante** si no converge ni diverge.

**Definición 16** (Subsucesión). Sea  $\{n_k\}_k \subseteq \mathbb{N}$  una sucesión estrictamente creciente de números naturales y  $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$  una sucesión cualquiera de números reales. Una **subsucesión de  $a_n$**  es una sucesión de la forma  $\{a_{n_k}\}_k \subseteq \mathbb{R}$ .

**Teorema 6** (Aritmética de límites). Sean  $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$  y  $\{b_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$  dos sucesiones cualesquiera convergentes a  $L_a$  y  $L_b$  respectivamente. Entonces:

- Si  $r \in \mathbb{R}$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r a_n = r L_a$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + b_n = L_a + L_b$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = L_a L_b$
- Si  $b_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$  y  $L_b \neq 0$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L_a}{L_b}$

**Ejemplo 3.** 1. La sucesión  $a_n = \frac{1}{n}$  converge a 0 y es monótona decreciente. Además, toda subsucesión converge a 0.

2. La sucesión  $a_n = n^3$  diverge a  $+\infty$  y es monótona creciente.

3. La sucesión

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad (8)$$

es oscilante. Además, la subsucesión  $\{a_{2n}\}_n$  converge a 1 y  $\{a_{2n+1}\}_n$  converge a -1.

4. Las sucesiones  $a_n = n$  y  $b_n = -n$  divergen pero la sucesión  $c_n = a_n + b_n$  converge a 0.

El comportamiento de las subsucesiones de una sucesión dada en relación a su convergencia es muy importante. Vemos unos resultados.

**Proposición 9.** Sea  $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$  una sucesión de números reales. Entonces converge si y solo si cada una de sus subsucesiones converge al mismo número.

**Corolario 4.** Sea  $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$  una sucesión de números reales.

1. Si existe una subsucesión de  $\{a_n\}_n$  que no converge, entonces  $\{a_n\}_n$  no converge.
2. Si existen dos subsucesiones que converjan a dos valores distintos entonces  $\{a_n\}_n$  no converge.

Este corolario es muy útil para demostrar que algunas sucesiones no convergen. Ahora vamos a ver más resultados para poder saber cuando converge una sucesión y a qué converge.

**Teorema 7** (Convergencia de las sucesiones monótonas). Sea  $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$  una sucesión de números reales, entonces:

1. Si  $\{a_n\}_n$  es creciente, entonces converge si y solo si es acotada superiormente.
2. Si  $\{a_n\}_n$  es decreciente, entonces converge si y solo si es acotada inferiormente.

Este es un ejemplo de teorema donde podríamos cambiar las suposiciones de creciente y decreciente por sus respectivas suposiciones eventuales. Esto cambiaría la demostración y el método de obtener el límite un poco.

**Teorema 8** (Orden de los límites y teorema del sandwich). Sean  $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ ,  $\{b_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$  y  $\{c_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$  tres sucesiones de números reales tales que  $a_n \leq b_n \leq c_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Si  $a_n \rightarrow_n A$ ,  $b_n \rightarrow_n B$  y  $c_n \rightarrow_n C$  entonces  $A \leq B \leq C$ .
2. Si  $a_n \rightarrow_n A$  y  $c_n \rightarrow_n C$  y además  $A = C$  entonces  $\{b_n\}_n$  converge a  $A$ .

**Teorema 9** (Criterio de Cauchy o de la raíz).

**Teorema 10** (Criterio de Stolz).

**Teorema 11** (Criterio de la media aritmética). Sea  $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$  una sucesión de números reales que converja a  $L \in \mathbb{R}$ . Entonces la sucesión  $\{A_n = \frac{\sum_{m=1}^n a_m}{n}\}_n$  converge a  $L$ . (TODO: Poner este tipo de fórmulas en una nueva línea)

**Teorema 12** (Criterio de la media geométrica).

Finalmente, podemos constatar una relación del ínfimo y supremo con las sucesiones:

**Teorema 13** (Teorema de alcance). Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$ .

1. Si  $\exists \sup A$  entonces existe una sucesión de elementos de  $A$  que converge a  $\sup A$ .
2. Análogamente, si  $\exists \inf A$  entonces existe una sucesión de elementos de  $A$  que converge a  $\inf A$ .

## 2.2. Sucesiones de Cauchy y completitud

**Definición 17.** Sea  $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$  una sucesión. Decimos que es una **sucesión de Cauchy** si para todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $m, n \in \mathbb{N}$  son números naturales mayores o iguales que  $N$  se tiene  $|a_n - a_m| < \varepsilon$ .

El objetivo de esta definición es tener una propiedad equivalente a la convergencia sin necesitar de saber el límite de una sucesión. Este hecho es muy importante:

**Teorema 14** (Completitud de  $\mathbb{R}$ ). Sea  $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$  una sucesión. Entonces  $\{a_n\}_n$  converge si y solo si es de Cauchy.

El resultado importante aquí es que una sucesión de Cauchy converge, y en algunos textos esto es lo que se llama completitud. La completitud se puede generalizar a espacios métricos generales, y podemos hablar de *completitud* en subconjuntos de  $\mathbb{R}$ :

**Ejemplo 4** (Los racionales no son completos). Sea  $A \subseteq \mathbb{Q}$  definido como  $A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$ . Entonces  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$  es el supremo de este conjunto en los reales, y por tanto existirá una sucesión de elementos de  $A$  que converge a  $\sqrt{2}$ , vamos a llamarla  $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{Q}$ . En los reales la sucesión converge, y por el teorema de completitud es de Cauchy. Como es de Cauchy en los reales entonces es de Cauchy en los racionales, pero como converge a  $\sqrt{2}$  y este número es irracional al existir un único límite para toda sucesión convergente, concluimos que no converge en  $\mathbb{Q}$ .

Con este concepto ya podemos hacer una construcción de los números reales.

**Proposición 10** (Construcción del conjunto de los números reales). Sea  $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$  el conjunto de todas las sucesiones de números racionales, y sea  $A \subseteq \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$  el subconjunto (que es no vacío) de todas las sucesiones de Cauchy en los racionales. Definimos sobre este conjunto la relación  $\sim$  de la siguiente manera:  $\{x_n\}_n \sim \{y_n\}_n$  si y solo si para todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq N$  entonces  $|x_n - y_n| < \varepsilon$  (es decir si y solo si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n - y_n = 0$ ). Esta es una relación de equivalencia y el conjunto  $\frac{\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}}{\sim}$  es no numerable.

## 2.3. Puntos de acumulación

**Definición 18** (Punto de acumulación). Sea  $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$  una sucesión de números reales. Si existe una subsucesión que converge a un número  $L \in \mathbb{R}$  entonces  $L$  se dice que es un **punto de acumulación**.

**Teorema 15** (De Bolzano-Weierstrass). Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.

**Definición 19** (Límites superior e inferior). Sea  $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$  una sucesión de números reales.

1. Si  $\{a_n\}_n$  está acotada superiormente definimos el **límite superior** como  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup\{a_m : m > n\}$ . Si  $\{a_n\}_n$  no está acotada superiormente lo definimos como  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$
2. Análogamente, si  $\{a_n\}_n$  está acotada inferiormente definimos el **límite inferior** como  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf\{a_m : m > n\}$ . Si  $\{a_n\}_n$  no está acotada inferiormente lo definimos como  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$

Intuitivamente, el límite inferior y límite superior nos dicen el intervalo al que converge la sucesión:

**Proposición 11.** Sea  $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$  una sucesión. Entonces para todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $m \geq N$  entonces  $a_m \in [\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n - \varepsilon, \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n + \varepsilon]$ .

Si la sucesión no es acotada, sustituimos alguno de los límites del intervalo por  $+\infty$  o  $-\infty$ . Con esta proposición podemos demostrar otra caracterización de la convergencia de soluciones:

**Teorema 16.** Sea  $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$  una sucesión. Entonces  $\{a_n\}_n$  converge si y solo si  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$ . En tal caso  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$ .

Los límites inferior y superior nos permiten hacer una pequeña extensión del teorema (15):

**Proposición 12.** 1. El límite inferior y superior de una sucesión son puntos de acumulación de la misma.

2. Toda sucesión acotada tiene un punto de acumulación. Además es no convergente si y solo si es oscilante si y solo si tiene dos o más puntos de acumulación.

**Ejemplo 5.** La sucesión  $\{a_n = \{\sqrt{n}\}\}_n$  tiene por lo menos dos puntos de acumulación:

1. Consideramos la subsucesión  $b_m = a_{m^2}$ , vemos que  $b_m = \{\sqrt{m^2}\} = \{m\} = 0$  y como es constante converge a 0.
2. Consideramos  $c_m = a_{m^2-1}$ . Primero constatamos la siguiente desigualdad:

$$\sqrt{m+1} - \sqrt{m-1} \geq \frac{1}{\sqrt{m+1}} \quad (9)$$

Que se puede comprobar fácilmente simplificando. Ahora notamos que si  $m \geq 1$  entonces:

$$m = \sqrt{m^2} > \sqrt{m^2 - 1} \geq \sqrt{m^2 - 2m + 1} = \sqrt{(m-1)^2} = m-1$$

Y por tanto  $\lfloor \sqrt{m^2 - 1} \rfloor = m-1$ , así tenemos que

$$\begin{aligned} 1 &\geq c_m = \{\sqrt{m^2 - 1}\} = \sqrt{m^2 - 1} - \lfloor \sqrt{m^2 - 1} \rfloor = \\ &\sqrt{m^2 - 1} - (m-1) = \sqrt{m-1}(\sqrt{m+1} - \sqrt{m-1}) \geq \frac{\sqrt{m-1}}{\sqrt{m+1}} = \sqrt{1 - \frac{2}{m+1}} \end{aligned}$$

Y por el teorema del sandwich la subsucesión  $c_m$  converge a 1.

Como  $a_n$  tiene por lo menos dos puntos de acumulación y  $0 \leq a_n < 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  por la proposición anterior  $\{a_n\}_n$  es oscilante.

**Proposición 13.** Si una sucesión tiene por lo menos un punto de acumulación entonces no puede diverger.

**Ejemplo 6.** La sucesión  $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$  definida por:

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si existe } m \in \mathbb{N} \text{ con } n = 3m \\ 1 & \text{si existe } m \in \mathbb{N} \text{ con } n = 3m + 1 \\ n & \text{si existe } m \in \mathbb{N} \text{ con } n = 3m + 2 \end{cases} \quad (10)$$

tiene 0 y 1 como puntos de acumulación, es oscilante pero no es acotada.

**Ejemplo 7** (Una sucesión con infinitos puntos de acumulación). Vamos a construir una sucesión que tenga como conjunto de puntos de acumulación todos los números naturales. Es posible usar esta sucesión para poder construir otra tal que el conjunto de puntos de acumulación sean todos los reales, pero la construcción es algo más ortopédica y la demostración mas engorrosa. El objetivo es construir la siguiente sucesión: 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4... , para esto usamos los números triangulares. Sea  $\{b_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$  la sucesión de los números triangulares más uno, es decir  $b_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Sabemos que esta sucesión es estrictamente creciente y que  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = 2$  (por comodidad añadimos el término cero). Definimos la sucesión  $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$  como:

$$a_n = n - b_{m-1} + 1 \text{ para } m \in \mathbb{N} \text{ tal que } b_{m-1} \leq n \leq b_m.$$

Para cualquier  $n \in \mathbb{N}$  existe un único  $m \in \mathbb{N}$  que satisfaga la igualdad, así que está bien definida. (TODO: Terminar demostración)

Los límites superior e inferior no tienen mucho interés práctico. Sirven por ejemplo para obtener refinamientos de teoremas como el criterio de Stolz.



## 2.4. El número $e$

# 3. Introducción a la topología de los números reales

El objetivo de introducir conceptos topológicos aquí es proporcionar la idea de estar infinitamente cerca y estar lejos de un conjunto.

**Definición 20.** 1. Un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}$  se dice **abierto** si y solo si para todo  $a \in A$  existe un  $\varepsilon > 0$  tal que  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq A$ .  
2. Un conjunto  $C \subseteq \mathbb{R}$  se dice **cerrado** si y solo si el complementario  $\mathbb{R} \setminus C$  es abierto.

Un conjunto abierto es tal que todo punto no esté infinitamente cerca del complementario. Así, un conjunto cerrado es aquel en el que todo punto fuera de él está “lejos”.

**Ejemplo 8.**  $\mathbb{R}$ , el conjunto vacío y todo intervalo abierto son conjuntos abiertos.

**Definición 21** (Puntos especiales de un conjunto). Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$  un conjunto cualquiera.

1. Un punto  $x \in A$  se dice **punto interior** si y solo si existe un  $\varepsilon > 0$  tal que  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A$ .
2. Un punto  $x \in \mathbb{R}$  se dice **punto límite** si y solo si existe una sucesión  $\{a_n\}_n \subseteq A$  que converge a  $x$ .
3. Un punto  $x \in \mathbb{R}$  se dice **punto de acumulación** si y solo si existe una sucesión  $\{a_n\}_n \subseteq A$  que converge a  $x$  tal que  $a_n \neq x$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
4. Un punto límite de  $A$  que no es de acumulación se dice **punto aislado**.
5. Se dice que  $A$  es un **entorno** de un punto  $x \in A$  si y solo si  $x$  es un punto interior de  $A$ .

**Proposición 14.** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$  un conjunto cualquiera. Entonces siempre existe un menor conjunto cerrado que contiene a  $A$  y un mayor conjunto abierto contenido en  $A$ .

Podemos usar esta proposición para estas definiciones:

**Definición 22** (Conjuntos asociados). Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$  un conjunto cualquiera.

1. Definimos la **cerradura** de  $A$  como el menor conjunto cerrado que contiene a  $A$  y lo denotamos por  $Cl(A)$ .
2. Definimos el **interior** de  $A$  como el mayor conjunto abierto contenido en  $A$  y lo denotamos por  $Int(A)$ .
3. Definimos la **frontera** de  $A$  como el conjunto  $Fr(A) = Cl(A) \setminus Int(A)$ .

**Proposición 15.** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$  un conjunto cualquiera.

1.  $Cl(A)$  es igual a la intersección de todos los cerrados que contienen a  $A$  y también al conjunto de todos los puntos límite de  $A$ .
2.  $Int(A)$  es igual a la unión de todos los abiertos contenidos en  $A$  y también al conjunto de todos los puntos interiores de  $A$ .

**Proposición 16.** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$  un conjunto cualquiera.

1.  $A$  es abierto si y solo si  $A = Int(A)$ .
2.  $A$  es cerrado si y solo si  $A = Cl(A)$ .

**Proposición 17.** 1. La unión arbitraria de conjuntos abiertos es abierta.

2. La intersección finita de conjuntos abiertos es abierta.
3. La intersección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrada.
4. La unión finita de conjuntos cerrados es cerrada.

Hay un corolario importante del teorema de Bolzano-Weierstrass para sucesiones:

**Teorema 17.** Todo conjunto infinito y acotado tiene por lo menos un punto de acumulación.

**Nota 2.** Los términos introducidos aquí reciben múltiples definiciones, nombres y notaciones distintas dependiendo de que libros y apuntes se miren. Otras notaciones incluyen  $\bar{A}$  para la cerradura,  $\dot{A}$  para el interior y  $\partial A$  para la frontera. La cerradura también se llama clausura o adherencia, y la frontera se le puede llamar borde también. Generalmente, para las distintas definiciones se suele presentar una como “la definición” y las otras como teoremas de equivalencia, que es lo que he hecho aquí.

**Definición 23.** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$  y  $\mathcal{A}$  una familia de subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}$ . Decimos que  $\mathcal{A}$  **cubre** o que es un **cubrimiento por abiertos** de  $A$  si y solo si la unión de todos los conjuntos de  $\mathcal{A}$  contiene a  $A$ .

**Definición 24.** Un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}$  se dice **compacto** si y solo si de todo cubrimiento por abiertos de  $A$  se puede obtener una subfamilia (llamada **subrecubrimiento**) de cardinal finito que sigue cubriendo  $A$ .

**Teorema 18** (Heine-Borel). Un subconjunto de  $\mathbb{R}$  es compacto si y solo si es acotado y cerrado.

## 4. Funciones, límites y continuidad

## 5. Derivabilidad de funciones reales

## 6. Integrabilidad de funciones reales

### 6.1. Cálculo de primitivas

### 6.2. La integral de Riemann y Darboux

### 6.3. Teoremas fundamentales

### 6.4. Integrabilidad impropia

## 7. Series numéricas

### 7.1. Series de términos no negativos

### 7.2. Series de términos arbitrarios

## 8. Series funcionales y de potencias

### 8.1. Sucesiones y series de funciones

### 8.2. Convergencia uniforme

### 8.3. Series de potencias y Taylor