1. Sucesiones

Definición 1. *Una **sucesión** es una aplicación $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. El conjunto $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ es el conjunto imagen. Decimos que la sucesión $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ es:*

- ***Eventual creciente*** *si $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $a_m \geq a_n,\ \forall m > n \geq N$ con n y m naturales.*
- ***Eventual estrictamente creciente*** *si $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $a_m > a_n,\ \forall m > n \geq N$ con n y m naturales.*
- ***Eventual decreciente*** *si $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $a_m \leq a_n,\ \forall m > n \geq N$ con n y m naturales.*
- ***Eventual estrictamente decreciente*** *si $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $a_m < a_n,\ \forall m > n \geq N$ con n y m naturales.*

Si $N = 1$ en cualquiera de estos casos, entonces quitamos "eventual".

Nos interesa estudiar el comportamiento de la sucesión cuando n se hace grande, es decir *eventualmente*. Veremos que el comportamiento de a_n cercano a $n = 1$ no importa en lo que a límite se refiere, solo el comportamiento eventual.

Definición 2. *Sea $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión de números reales. Decimos que a_n **converge** a L y lo denotamos como $a_n \to_n L$ si y solo si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L| < \varepsilon$ para todo n tal que $n \geq N$.*

Proposición 1 (Unicidad del límite)**.** *Sean $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ convergente a L_1 y L_2. Entonces $L_1 = L_2$.*

Demostración. Supongamos que L_1 y L_2 son dos límites de la sucesión $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$. Por tanto, dado un $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L_1| < \varepsilon/2$ y $|a_n - L_2| < \varepsilon/2 \ \ \forall n > N$ con $N = max\{n_1, n_2\}$, donde n_1 y n_2 son N dado de la definición del límite para L_1 y L_2. Sumando ambas desigualdades y usando la desigualdad triangular, tenemos:

$$\begin{aligned} \varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} > |a_n - L_1| + |a_n - L_2| &= |a_n - L_1| + |-a_n + L_2| \\ &\geq |a_n - L_1 - a_n + L_2| = |L_2 - L_1| \end{aligned}$$

Como ε es un número arbitrario mayor que 0, si asumimos que $|L_2 - L_1| \neq 0$, siempre vamos a poder encontrar un valor de ε (por ejemplo, $\varepsilon = \frac{|L_2 - L_1|}{2} > 0$) mayor a 0 que contradiga $\varepsilon > |L_2 - L_1|$. Por tanto, $|L_2 - L_1| = 0$ y $L_2 = L_1$. □

Definición 3. *Sabiendo que una sucesión $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ converge a un único valor L, llamamos a este valor **límite de la sucesión** a_n, y lo denotamos como $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$ o de manera resumida $\lim_n a_n = L$.*

Definición 4. *Si $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ no converge a ningún valor $L \in \mathbb{R}$, podemos decir que a_n es:*

- ***Divergente a*** *$+\infty$ si $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > M\ \forall n > N$.*
- ***Divergente a*** *$-\infty$ si $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < M\ \forall n > N$.*
- ***Oscilante*** *si no converge ni diverge.*

Definición 5. *Sea $\{n_k\}_k \subseteq \mathbb{N}$ una sucesión estrictamente creciente de números naturales y $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión cualquiera de números reales. Una **subsucesión de** a_n es una sucesión de la forma $\{a_{n_k}\}_k \subseteq \mathbb{R}$.*

Teorema 1 (Aritmética de límites)**.** *Sean $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ y $\{b_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ dos sucesiones cualesquiera convergentes a L_a y L_b respectivamente. Entonces:*

- *Si $r \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{n\to+\infty} ra_n = rL_a$*
- $\lim_{n\to+\infty} a_n + b_n = L_a + L_b$
- $\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = L_a L_b$
- *Si $b_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L_a}{L_b}$*

Demostración. Para el lector. □

Teorema 2 (Teorema de Bolzano)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Si $f(a)f(b) < 0$, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Teorema 3 (Teorema de Weierstrass de los valores extremos)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Entonces $\exists\ max_{[a,b]}f$ y $\exists\ min_{[a,b]}f$*

Teorema 4 (Teorema de Rolle)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f(a) = f(b)$ entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Teorema 5 (Teorema del valor medio)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Si $c \in (min_{[a,b]}f, max_{[a,b]}f)$, entonces $\exists d \in [a, b]$ tal que $f(d) = c$.*