

1. Introducción a los conjuntos numéricos

1.1. Construcciones

Nota 1. Las definiciones y construcciones de los conjuntos numéricos estándares aquí no se dan de una forma muy rigurosa. Su construcción es más propia de una asignatura de fundamentos matemáticos, y ahora mismo me da mucha pereza escribir todo. En este documento solo nos preocupará la construcción de los números reales, que haremos en la sección de sucesiones.

Sea \mathbb{N} un conjunto con un elemento que denominamos 1. Ahora, para todo elemento n de \mathbb{N} añadimos a \mathbb{N} el sucesor, $S(n)$ o $n + 1$. Esto da un conjunto infinito, los **números naturales**. Generalmente, que 0 esté dentro de \mathbb{N} es una cuestión de comodidad. Aquí nos será mucho más cómodo que los números naturales empiecen en 1.

En este conjunto tenemos el principio de inducción:

Axioma 1 (Principio de inducción en \mathbb{N}). Sea $S \subseteq \mathbb{N}$. Si S satisface las siguientes 2 condiciones, entonces $S = \mathbb{N}$:

- $1 \in S$
- $\forall n \in S \ n + 1 \in S$

Este principio es muy útil para probar cosas sobre \mathbb{N} , por ejemplo la forma cerrada de una sucesión. En \mathbb{N} también podemos definir algo denominado **orden total**, que es una relación binaria \leq que sigue los siguientes axiomas:

Axioma 2 (Axiomas de orden total). $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$

1. $a \leq a$ (Reflexividad)
2. $a \leq b$ y $b \leq c$ implica $a \leq c$ (Transitividad)
3. $a \leq b$ y $b \leq a$ implica $a = b$ (Antisimetría)
4. $a \leq b$ o $b \leq a$ (Totalidad o principio de tricotomía)

Cuando tenemos un orden parcial o total definido sobre un conjunto, podemos hablar de cotas y máximos y mínimos:

Definición 1. Sea $S \subseteq X$ donde X es un conjunto con un orden parcial o total \leq . S es...

- **Acotado superiormente** si $\exists r \in X$ tal que $x \leq r \ \forall x \in S$.
- **Acotado inferiormente** si $\exists r \in X$ tal que $r \leq x \ \forall x \in S$.

Y decimos que un elemento $r \in S$ es...

- Un **máximo** si $\forall x \in S \ x \leq r$.
- Un **mínimo** si $\forall x \in S \ r \leq x$.

Con este orden total definido, podemos reformular el principio de inducción como:

Axioma 3 (Principio de buena ordenación en \mathbb{N}). $\forall S \subseteq \mathbb{N} \ S \neq \emptyset, \exists n \in S \mid \forall x \in S, n \leq x$. Es decir, todo subconjunto de los números naturales tiene mínimo.

Estas dos formulaciones son equivalentes. Los números naturales además cumplen los siguientes axiomas algebraicos:

Axioma 4 (Axiomas de semianillo unitario ordenado). $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$:

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (Asociatividad de la suma)
2. $a + b = b + a$ (Conmutatividad de la suma)
3. $(a * b) * c = a * (b * c)$ (Asociatividad de la multiplicación)
4. $a * b = b * a$ (Conmutatividad de la multiplicación)
5. $a * (b + c) = a * b + a * c$ (Distributividad de la multiplicación sobre la suma)
6. $\exists 1 \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, 1 * n = n$ (Elemento neutro del producto)
7. $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$ (Compatibilidad del orden con la suma)

8. Si $c \geq 0$ (que es trivial en \mathbb{N}), entonces $a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$ (Compatibilidad del orden con el producto)

Estos axiomas son particularmente débiles. Por ejemplo, para la ecuación $x + 2 = 4$ obviamente $x = 2$, pero no existe ninguna forma de probarlo fácilmente, cuando la existencia de inversos para cada número ayudaría inmensamente. Además, ecuaciones como $x + 4 = 2$ no tienen solución en \mathbb{N} . Por eso definimos un nuevo conjunto denominado \mathbb{Z} , los **números enteros**:

Definición 2 (Números enteros). $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$ donde 0 denota la identidad para la suma y $-n$ el inverso para la suma de n .

Estos números, además de los Axiomas 4, cumplen los siguientes axiomas:

Axioma 5 (Axiomas adicionales para \mathbb{Z}).

1. $\exists 0 \in \mathbb{Z} \mid \forall n \in \mathbb{N}, 0 + n = n$ (Elemento neutro de la suma)
2. $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists -n \in \mathbb{Z} \mid n + (-n) = 0$ (Existencia del elemento inverso para la suma)

Con estos axiomas, se dice que $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo conmutativo y que $(\mathbb{Z}, +, *)$ es un anillo conmutativo. A cambio de estos axiomas algebraicos, perdemos el principio de inducción en los números enteros y la existencia de un elemento mínimo, pero mantenemos una versión del principio de buena ordenación:

Axioma 6 (Principio de buena ordenación de subconjuntos minorados de \mathbb{Z}). $\forall S \subseteq \mathbb{Z} \ S \neq \emptyset$ si $\exists n \in \mathbb{Z} \mid \forall x \in S, n \leq x$ entonces $\exists m \in S \mid \forall x \in S, m \leq x$. Es decir, todo subconjunto no vacío con cota inferior tiene un elemento mínimo.

Este axioma para \mathbb{Z} implica el Axioma 3 para los naturales. El conjunto de los números enteros aún tiene unos cuantos problemas. Por ejemplo, es imposible resolver la ecuación $2x = 1$ para $x \in \mathbb{Z}$. Por eso, podemos definir otro conjunto de números contruidos sobre los números enteros, los **números racionales**, denotados por \mathbb{Q} :

Definición 3 (Números racionales). $\mathbb{Q} = \{p/q, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$

Aparte de cumplir los Axiomas 4 y 5, \mathbb{Q} cumple:

Axioma 7 (Axioma algebraico adicional para \mathbb{Q}).

1. $\forall q \in \mathbb{Q} \ q \neq 0, \exists 1/q \in \mathbb{Q} \mid q * (1/q) = 1$ (Existencia del inverso de elementos no nulos para el producto)

Esto hace de \mathbb{Q} un cuerpo conmutativo. \mathbb{Q} no tiene ni principio de buena ordenación, ni de buena ordenación de subconjuntos minorados (por ejemplo, el conjunto $S = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Q}$ esta acotado inferiormente pero no tiene mínimo). Esto nos quita una vía de demostrar, pero "quitamos" más agujeros que existían en los números enteros:

Teorema 1 (Densidad de \mathbb{Q}). $\forall a, b \in \mathbb{Q} \ a \neq b, \exists r \in \mathbb{Q} \mid a < r < b$. Es decir, entre dos números racionales distintos siempre vamos a poder encontrar otro número racional. De hecho, vamos a poder encontrar infinitos aplicando el teorema cuantas veces como queramos.

Demostración. Dados $a < b \in \mathbb{Q}$: $a = (a + a)/2 < (a + b)/2 < (b + b)/2 = b$. $(a + b)/2$ es el número que buscamos. \square

De este teorema podemos deducir que no existe una función sucesora en \mathbb{Q} , y por tanto no tenemos alternativa a inducción. Pero este teorema no es suficiente para que \mathbb{Q} sea el conjunto numérico perfecto para hacer análisis. Aún existen agujeros, como demuestra el siguiente ejemplo:

Proposición 1. No existe ningún $a \in \mathbb{Q}$ tal que $a^2 = 2$.

Demostración. Supongamos que $\exists a \in \mathbb{Q}$ tal que $a^2 = 2$. Al ser un número racional, lo podemos escribir de la forma $\frac{p}{q}$ con $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ y $\gcd(p, q) = 1$ (donde \gcd denota el máximo común divisor). Por tanto, tenemos la expresión $\frac{p^2}{q^2} = 2$, de donde deducimos que $p^2 = 2q^2$ y debido a que 2 es un número primo, que $2 \mid p$ o más concretamente $p = 2k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Substituyendo otra vez obtenemos $4k^2 = 2q^2$ y deducimos $2k^2 = q^2$, que de forma similar nos deja ver que q es también múltiplo de 2. Pero inicialmente hemos asumido que el máximo común divisor de p y q es $1 < 2$ y no mayor o igual a 2, por lo cual hemos encontrado una contradicción y la proposición es cierta. \square

Esto es problemático, ya que intuitivamente deberíamos de poder encontrar un valor que cumpla $a^2 = 2$. Para poder arreglar este problema necesitamos una definición primero:

Definición 4 (Supremo e ínfimo). Sea A un subconjunto numérico acotado superiormente. Si existe la mínima cota superior (es decir, un número ω que sea cota superior del conjunto y tal que cualquier otra cota superior α sea $\omega \leq \alpha$) esta será única y la llamaremos **supremo**. Dualmente, a la máxima cota inferior en un subconjunto acotado inferiormente la llamaremos **ínfimo**. Se denotan $\sup A$ y $\inf A$.

La definición parece ajena al ejemplo de "agujero" que hemos dado en la *Proposición 1*, pero es la más general que engloba todos los casos que necesitamos. El subconjunto $A \subseteq \mathbb{Q}$ definido como $A = \{a \in \mathbb{Q} \mid a^2 \leq 2\}$ está acotado superiormente por 2 y es posible demostrar que si existiera un supremo, este número sería tal que su cuadrado fuera igual a 2, pero en \mathbb{Q} no existe. Por tanto, podemos pensar que "añadiendo todos los supremos" completaríamos \mathbb{Q} . Este es el procedimiento que seguimos:

Axioma 8 (Axioma del supremo). Todo subconjunto acotado superiormente tiene supremo.

Definición 5 (Números reales). Al conjunto \mathbb{R} con $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ y que cumpla el Axioma 8 lo llamamos los **números reales**.

Este conjunto no es único, pero si es único bajo isomorfismos, que viene a decir que cualesquiera dos conjuntos con estas propiedades tienen la misma estructura y por tanto no hace falta distinguirlos. En una sección posterior, nos centraremos en la construcción de los números reales: lo que hemos dado aquí es solo una definición axiomática.

1.2. Los números reales

Empezamos el estudio de los números reales introduciendo algunos conceptos.

Definición 6. El conjunto de los **irracionales** es $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Es decir, los números reales que no se pueden expresar como cociente de dos números enteros.

De esta definición podemos ver que un número real tiene que ser racional o irracional, pero no puede ser los dos a la vez. Esto implica que los racionales e irracionales forman una partición de los números reales.

Definición 7 (Valor absoluto). Dado $x \in \mathbb{R}$ definimos el **valor absoluto** como:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

El valor absoluto es de los conceptos mas fundamentales del análisis real. Geométricamente, si dibujamos el valor $x \in \mathbb{R}$ en la recta real, el valor absoluto da la longitud del segmento que va desde x hasta 0 y la distancia entre dos números reales en la recta real viene dada por $d(x, y) = |x - y|$.

Proposición 2 (Propiedades del valor absoluto). $\forall a, b \in \mathbb{R}$ tenemos:

1. $||a|| = |a|$
2. $|-a| = |a|$
3. $|ab| = |a||b|$
4. La desigualdad triangular: $|a + b| \leq |a| + |b|$
5. La desigualdad triangular inversa: $||a| - |b|| \leq |a - b|$
6. Si $a \neq 0$ entonces $|\frac{1}{a}| = \frac{1}{|a|}$

La desigualdad triangular se usa mucho. Vamos a ver una caracterización del supremo e ínfimo:

Proposición 3 (Caracterización del supremo). Sea $A \subseteq \mathbb{R}$.

1. El supremo de A existe si y solo si existe un número $\omega \in \mathbb{R}$ que sea cota superior de A tal que $\forall \varepsilon > 0$ exista $x \in A$ tal que $x > \omega - \varepsilon$. En este caso $\sup A = \omega$.
2. El ínfimo de A existe si y solo si existe un número $\alpha \in \mathbb{R}$ que sea cota inferior de A tal que $\forall \varepsilon > 0$ exista $x \in A$ tal que $x < \alpha + \varepsilon$. En este caso $\inf A = \alpha$.

Cuando estudiemos sucesiones, nos será muy útil tener herramientas para relacionar los números naturales con los números reales.

Teorema 2 (Propiedad arquimediana). $\forall x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x > 0 \exists n \in \mathbb{N}$ con $nx > y$.

Podemos entender el teorema así: si tenemos una longitud muy pequeña siempre vamos a juntar muchas de ellas para poder formar una longitud grande. Este teorema nos va a servir para demostrar dos corolarios que son intuitivamente verdad:

Corolario 1. El conjunto de los números naturales no está acotado superiormente.

Corolario 2. Todo subconjunto no vacío de los números naturales que esté acotado superiormente tiene máximo y mínimo.

Corolario 3. Todo subconjunto finito de los números reales está acotado y tiene máximo y mínimo.

Teorema 3 (Existencia de la parte entera). $\forall x \in \mathbb{R}$ existe un único $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k \leq x \leq k + 1$.

Definición 8 (Parte entera). Dado $x \in \mathbb{R}$ definimos la **parte entera** como:

$$[x] = \sup\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\} \quad (2)$$

Por el teorema anterior, este supremo siempre existe. También definimos la **parte fraccionaria** :

$$\{x\} = x - [x] \quad (3)$$

Estos dos no son tan útiles como el valor absoluto.

Definición 9 (Potencias enteras). Sea $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$. Definimos la **potencia n -ésima** de x de forma inductiva, y la denotamos por x^n , como:

$$x^n = \begin{cases} x * x^{n-1} & \text{si } n > 1 \\ x & \text{si } n = 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \text{ y } x \neq 0 \\ \frac{1}{x^n} & \text{si } n < 0 \text{ y } x \neq 0 \end{cases} \quad (4)$$

Si $x = 0$ y $n \leq 0$ entonces la potencia queda indefinida. Al número n se le llama **exponente**.

Es posible extender esta definición a los números racionales e irracionales, pero se necesitan herramientas más fuertes para fundamentarlos. Por ahora damos los teoremas:

Teorema 4 (Existencia de la raíz cuadrada). Sea $a \in \mathbb{R}$ mayor o igual que 0. Entonces existe un único $x \in \mathbb{R}$ mayor o igual que 0 tal que $x^2 = a$.

Teorema 5 (Existencia de raíces). Sea $a \in \mathbb{R}$ cualquiera.

1. Para todo $n \in \mathbb{N}$ impar existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^n = a$.
2. Si $a \geq 0$ entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ par (recordamos que \mathbb{N} no tiene el 0 en nuestra definición) existe un único $x \in \mathbb{R}$ con $x \geq 0$ tal que $x^n = a$.

En cualquier caso, al número x lo llamaremos la **raíz n -ésima** de a y lo denotaremos por $\sqrt[n]{a}$ o $a^{\frac{1}{n}}$.

Proposición 4 (Potencias racionales). Sean $x \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{Q}$ y $n, m \in \mathbb{Z}$ tales que $q = \frac{n}{m}$. Cuando las siguientes expresiones son válidas, tenemos:

$$(x^n)^{\frac{1}{m}} = (x^{\frac{1}{m}})^n \quad (5)$$

y este número lo denotaremos por $x^{\frac{n}{m}}$ o x^q . (TODO: Falta ver que está bien definido)

Proposición 5 (Propiedades de las potencias). TODO

Proposición 6 (Binomio de Newton). Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces:

$$(x + y)^n = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} x^m y^{n-m} \quad (6)$$

Las potencias de exponente real tienen una definición más complicada.

2. Sucesiones de números reales

Definición 10. Una **sucesión** es una aplicación $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Por comodidad, la imagen de $n \in \mathbb{N}$ se denota por a_n y para la sucesión en sí usaremos $\{a_n\}_n$. El conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ es el conjunto **imagen**. Decimos que la sucesión $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ es:

- **Eventual creciente** si $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $a_m \geq a_n$, $\forall m > n \geq N$ con n y m naturales.
- **Eventual estrictamente creciente** si $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $a_m > a_n$, $\forall m > n \geq N$ con n y m naturales.
- **Eventual decreciente** si $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $a_m \leq a_n$, $\forall m > n \geq N$ con n y m naturales.
- **Eventual estrictamente decreciente** si $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $a_m < a_n$, $\forall m > n \geq N$ con n y m naturales.

En cualquier caso decimos que la sucesión es **eventual monótona**. Si $N = 1$ en cualquiera de estos casos, entonces quitamos "eventual".

Nos interesa estudiar el comportamiento de la sucesión cuando n se hace grande, es decir *eventualmente*. Veremos que el comportamiento de a_n cercano a $n = 1$ no importa en lo que a límite se refiere, solo el comportamiento eventual. En los teoremas de sucesiones monótonas que hagamos generalmente no usaremos la monotonía eventual, sino la monotonía desde $n = 1$ pero también serán válidos para la eventual con pocas modificaciones.

Definición 11. Sea $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión de números reales. Decimos que a_n está **acotada inferiormente** si existe un $A \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $a_n \geq A$. Análogamente, se dice que está **acotada superiormente** si existe un $B \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $a_n \leq B$. Se dice que está **acotada** si lo está superiormente e inferiormente.

2.1. Convergencia y cálculo de límites

Definición 12. Sea $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión de números reales. Decimos que a_n **converge** a L y lo denotamos como $a_n \rightarrow_n L$ si y solo si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L| < \varepsilon$ para todo n tal que $n \geq N$.

Esta definición se le conoce como definición $\delta - \varepsilon$.

Proposición 7 (Unicidad del límite). Sean $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ convergente a L_1 y L_2 . Entonces $L_1 = L_2$.

Demostración. Supongamos que L_1 y L_2 son dos límites de la sucesión $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$. Por tanto, dado un $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L_1| < \varepsilon/2$ y $|a_n - L_2| < \varepsilon/2$ $\forall n > N$ con $N = \max\{n_1, n_2\}$, donde n_1 y n_2 son N dado de la definición del límite para L_1 y L_2 . Sumando ambas desigualdades y usando la desigualdad triangular, tenemos:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} > |a_n - L_1| + |a_n - L_2| = |a_n - L_1| + |-a_n + L_2| \\ &\geq |a_n - L_1 - a_n + L_2| = |L_2 - L_1| \end{aligned}$$

Como ε es un número arbitrario mayor que 0, si asumimos que $|L_2 - L_1| \neq 0$, siempre vamos a poder encontrar un valor de ε (por ejemplo, $\varepsilon = \frac{|L_2 - L_1|}{2} > 0$) mayor a 0 que contradiga $\varepsilon > |L_2 - L_1|$. Por tanto, $|L_2 - L_1| = 0$ y $L_2 = L_1$. \square

Definición 13. Sabiendo que una sucesión convergente $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ converge a un único valor L , llamamos a este valor **límite de la sucesión** a_n , y lo denotamos como $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$ o de manera resumida $\lim_n a_n = L$.

Proposición 8. Sea $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión de números reales. Si $\{a_n\}_n$ converge, entonces es acotada.

Demostración. Supongamos que $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ es una sucesión que converge a $L \in \mathbb{R}$. Por la definición de convergencia existirá un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $|a_n - L| < 1$ (haciendo $\varepsilon = 1$). Podemos asegurar que $N > 1$ (si tuviéramos que $N = 1$ simplemente dejaríamos $N = 2$). Desarrollando el valor absoluto tenemos:

$$L - 1 < a_n < L + 1 \tag{7}$$

para todo $n \geq N$. Consideramos entonces los conjuntos $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{N-1}, L + 1\}$ y $B = \{a_1, a_2, \dots, a_{N-1}, L - 1\}$. Como ambos conjuntos son finitos, podemos asegurar que existe el máximo de A y el mínimo de B . Sean $\alpha = \min B$ y $\omega = \max A$. Entonces:

1. Si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $1 \leq n < N$ entonces $a_n \in A$ y $a_n \in B$ y por tanto $\alpha \leq a_n \leq \omega$.
2. Si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $n \geq N$ entonces por (7) tenemos $\alpha \leq L - 1 \leq a_n \leq L + 1 \leq \omega$ y así $\alpha \leq a_n \leq \omega$ por la transitividad del orden.

Como todo número natural es menor, igual o mayor que N (principio de la tricotomía) tenemos que $\alpha \leq a_n \leq \omega$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por tanto la sucesión $\{a_n\}_n$ está acotada. \square

Definición 14. Si $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ no converge a ningún valor $L \in \mathbb{R}$, podemos decir que a_n es:

- **Divergente a $+\infty$** si $\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > M \forall n > N$.
- **Divergente a $-\infty$** si $\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < M \forall n > N$.
- **Oscilante** si no converge ni diverge.

Definición 15 (Subsucesión). Sea $\{n_k\}_k \subseteq \mathbb{N}$ una sucesión estrictamente creciente de números naturales y $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión cualquiera de números reales. Una **subsucesión de a_n** es una sucesión de la forma $\{a_{n_k}\}_k \subseteq \mathbb{R}$.

Teorema 6 (Aritmética de límites). Sean $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ y $\{b_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ dos sucesiones cualesquiera convergentes a L_a y L_b respectivamente. Entonces:

- Si $r \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{n \rightarrow +\infty} r a_n = r L_a$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + b_n = L_a + L_b$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = L_a L_b$
- Si $b_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L_a}{L_b}$

Ejemplo 1. 1. La sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ converge a 0 y es monótona decreciente. Además, toda subsucesión converge a 0.

2. La sucesión $a_n = n^3$ diverge a $+\infty$ y es monótona creciente.

3. La sucesión

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad (8)$$

es oscilante. Además, la subsucesión $\{a_{2n}\}_n$ converge a 1 y $\{a_{2n+1}\}_n$ converge a -1.

4. Las sucesiones $a_n = n$ y $b_n = -n$ divergen pero la sucesión $c_n = a_n + b_n$ converge a 0.

El comportamiento de las subsucesiones de una sucesión dada en relación a su convergencia es muy importante. Vemos unos resultados.

Proposición 9. Sea $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión de números reales. Entonces converge si y solo si cada una de sus subsucesiones converge al mismo número.

Corolario 4. Sea $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión de números reales.

1. Si existe una subsucesión de $\{a_n\}_n$ que no converge, entonces $\{a_n\}_n$ no converge.
2. Si existen dos subsucesiones que converjan a dos valores distintos entonces $\{a_n\}_n$ no converge.

Este corolario es muy útil para demostrar que algunas sucesiones no convergen. Ahora vamos a ver más resultados para poder saber cuando converge una sucesión y a qué converge.

Teorema 7 (Convergencia de las sucesiones monótonas). Sea $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión de números reales, entonces:

1. Si $\{a_n\}_n$ es creciente, entonces converge si y solo si es acotada superiormente.
2. Si $\{a_n\}_n$ es decreciente, entonces converge si y solo si es acotada inferiormente.

Este es un ejemplo de teorema donde podríamos cambiar las suposiciones de creciente y decreciente por sus respectivas suposiciones eventuales. Esto cambiaría la demostración y el método de obtener el límite un poco.

Teorema 8 (Orden de los límites y teorema del sandwich). Sean $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$, $\{b_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ y $\{c_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ tres sucesiones de números reales tales que $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

1. Si $a_n \rightarrow_n A$, $b_n \rightarrow_n B$ y $c_n \rightarrow_n C$ entonces $A \leq B \leq C$.
2. Si $a_n \rightarrow_n A$ y $c_n \rightarrow_n C$ y además $A = C$ entonces $\{b_n\}_n$ converge a A .

Teorema 9 (Criterio de Cauchy o de la raíz).

Teorema 10 (Criterio de Stolz).

Teorema 11 (Criterio de la media aritmética). Sea $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión de números reales que converja a $L \in \mathbb{R}$. Entonces la sucesión $\{A_n = \frac{\sum_{m=1}^n a_m}{n}\}_n$ converge a L . (TODO: Poner este tipo de fórmulas en una nueva línea)

Teorema 12 (Criterio de la media geométrica).

Finalmente, podemos constatar una relación del ínfimo y supremo con las sucesiones:

Teorema 13 (Teorema de alcance). Sea $A \subseteq \mathbb{R}$.

1. Si $\exists \sup A$ entonces existe una sucesión de elementos de A que converge a $\sup A$.
2. Análogamente, si $\exists \inf A$ entonces existe una sucesión de elementos de A que converge a $\inf A$.

2.2. Sucesiones de Cauchy y completitud

2.3. Puntos de acumulación

Definición 16 (Punto de acumulación). Sea $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión de números reales. Si existe una subsucesión que converge a un número $L \in \mathbb{R}$ entonces L se dice que es un **punto de acumulación**.

Teorema 14 (De Bolzano-Weierstrass). Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.

Definición 17 (Límites superior e inferior). Sea $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión de números reales.

1. Si $\{a_n\}_n$ está acotada superiormente definimos el **límite superior** como $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup\{a_m : m > n\}$. Si $\{a_n\}_n$ no está acotada superiormente lo definimos como $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$
2. Análogamente, si $\{a_n\}_n$ está acotada inferiormente definimos el **límite inferior** como $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf\{a_m : m > n\}$. Si $\{a_n\}_n$ no está acotada inferiormente lo definimos como $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$

Intuitivamente, el límite inferior y límite superior nos dicen el intervalo al que converge la sucesión:

Proposición 10. Sea $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión acotada. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq N$ entonces $a_m \in [\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n - \varepsilon, \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n + \varepsilon]$.

Los límites inferior y superior nos permiten hacer una pequeña extensión del teorema (14):

Proposición 11. 1. El límite inferior y superior de una sucesión son puntos de acumulación de la misma.
2. Toda sucesión acotada tiene un punto de acumulación. Además es no convergente si y solo si tiene dos o más puntos de acumulación.

Ejemplo 2 (Una sucesión con infinitos puntos de acumulación). Vamos a construir una sucesión que tenga como conjunto de puntos de acumulación todos los números racionales. Esta misma sucesión tiene como conjunto de puntos de acumulación todo \mathbb{R} , pero la demostración es más complicada, y usa la completitud de \mathbb{R} . Como los números racionales son numerables, existe una biyección $q_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$. Construimos la siguiente sucesión: (TODO: terminar)

- 2.4. El número e
- 3. Introducción a la topología de los números reales
 - 3.1. Conjuntos abiertos y cerrados
 - 3.2. Compacidad
- 4. Funciones, límites y continuidad
- 5. Derivabilidad de funciones reales
- 6. Integrabilidad de funciones reales
 - 6.1. Cálculo de primitivas
 - 6.2. La integral de Riemann y Darboux
 - 6.3. Teoremas fundamentales
 - 6.4. Integrabilidad impropia
- 7. Series numéricas
 - 7.1. Series de términos no negativos
 - 7.2. Series de términos arbitrarios
- 8. Series funcionales y de potencias
 - 8.1. Sucesiones y series de funciones
 - 8.2. Convergencia uniforme
 - 8.3. Series de potencias y Taylor