Tratamiento informal.

Definición 1. Una **variable aleatoria** X es una aplicación de un espacio muestral a los números reales. El rango de tal aplicación se denota por R_X.

Definición 2 (Axiomática de Kolmogorov)**.** Una función $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ con $\mathcal{A}$ una σ-álgebra de Ω se dice **función de probabilidad** si satisface:

1. $P(S) \geq 0$ para todo $S \in \mathcal{A}$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Si $\{S_n\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq \mathcal{A}$ son tales que $S_i \cap S_j = \emptyset$ para todo i, j distintos, entonces:

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n).$$

Nota 1. Una σ-álgebra de un conjunto Ω es una famila de subconjuntos de Ω que está cerrada bajo tomar complementos, uniones numerables y que contiene al total Ω.

Definición 3. Una variable aleatoria se llama **discreta** si su rango es numerable.

1. Variables aleatorias discretas

Dada una variable aleatoria discreta X, denotamos por $P(X = x)$ o $p(x)$ la probabilidad de que X sea igual a x.

Definición 4. La **función de distribución**:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{\substack{y \in R_X \\ y \leq x}} P(X = y)$$

Definición 5. La **esperanza** de $g(X)$:

$$E(g(X)) = \sum_{x \in R_X} g(x) P(X = x)$$

Definición 6. La **varianza** de X:

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Teorema 1. *Para una variable aleatoria discreta X y $a, b \in \mathbb{R}$:*

$$E(aX + b) = aE(X) + b \qquad Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

y si g_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son n funciones de X entonces:

$$E(\sum_{k=1}^{n} g_i(X)) = \sum_{k=1}^{n} E(g_i(X)).$$

Definición 7. El **momento** de orden k centrado en a como $E((X - a)^k)$.

Definición 8. La **función generatriz de momentos** $m_X(t) = E(e^{tx})$. Puede que no exista para algunas variables discretas.

Teorema 2.
- *Dos variables aleatorias discretas tales que existan sus funciones generatrices tienen la misma función probabilidad si y solo si tienen la misma función generatriz de momentos.*
- *Para todo $k \in \mathbb{N}$ distinto de cero:*

$$(\frac{\partial^k}{\partial t^k} m_X)(0) = E(X^k) \tag{1}$$

Distribución notable 1 (De Bernoulli)**.** X = número de éxitos en una realización de un experimento binomial $\sim$ Bn$(1, p)$. p es la probabilidad de éxito.

- $p(x) = p^x (1 - p)^x$

- $E(x) = p$
- $Var(X) = p(1-p)$
- $m_X(t) = 1 - p + pe^t$

Distribución notable 2 (Geométrica)**.** X = número de realizaciones hasta el primer éxito en un experimento binomial $\sim$ G(p).
p es la probabilidad de éxito.

- $p(x) = p(1-p)^{x-1}$
- $E(x) = \frac{1}{p}$
- $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$
- $m_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$

Distribución notable 3 (Binomial)**.** X = número de éxitos tras n realizaciones en un experimento binomial $\sim$ Bn(n, p).

Distribución notable 4 (Binomial negativa)**.** X = número de realizaciones hasta obtener el r-ésimo éxito en un experimento binomia BN(r, p).

Distribución notable 5 (Hipergeométrica)**.** X = número de éxitos en n realizaciones en un experimento hipergeométrioca $\sim$ H(M, N, n).
N es el tamaño de la población.
M el número de individuos que se consideran éxito.

Distribución notable 6 (De Poisson)**.** X = número de acontecimientos en un intervalo de amplitud t $\sim$ P(λt).
λ es la media de acontecimientos por una unidad de tiempo.

2. Variables aleatorias continuas

Dada una variable aleatoria no discreta X, no siempre podemos hablar de la probabilidad puntual. Construimos la teoría usando la función de distribución.

Definición 9. Una variable aleatoria no discreta X es **continua** si su función de distribución $F(x)$ es continua.

En esta sección asumiremos que X es continua.

Definición 10. La **función de densidad**:

$$f(x) = (\frac{\partial F}{\partial t})(x).$$

La función de densidad cumple la función de la probabilidad $p(x)$ en la sección anterior. Recordamos que una función de distribución es una función de probabilidad y por tanto tiene que satisfacer la axiomática de Kolmogorov, aunque para la función de distribución no existen parejas de sucesos no triviales que no intersequen.

Definición 11. La **esperanza** de $g(X)$:

$$E(g(X)) = \int_{x \in R_X} g(x) f(x) dx$$

Definición 12. La **varianza** de X:

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Todo lo de la sección anterior sobre esperanza y varianza es válido para variables aleatorias continuas.

Distribución notable 7 (Normal)**.** $X \sim$ N(μ, σ^2)

La distribución normal no tiene función de distribución en forma cerrada con funciones elementales. Se usan tablas para su cálculo. Estas tablas vienen generalmente para normales *tipificadas*, es decir para N($0, 1$).

Teorema 3.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \textit{ si y solo si } Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

La normal se puede usar para aproximar distribuciones Poisson y binomiales discretas.

Teorema 4.

$$X \sim \mathrm{Bn}(n,p) \Rightarrow X \approx \mathrm{N}(np, np(1-p))$$
$$Y \sim P(\lambda) \Rightarrow Y \approx \mathrm{N}(\lambda, \lambda)$$

Definición 13. La función **gamma**:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Distribución notable 8 (Gamma)**.** $X \sim \mathrm{Gm}(\alpha, \beta)$.

Distribución notable 9 (Chi cuadrado)**.** $X \sim \chi^2_{(n)} = \mathrm{Gm}(\frac{n}{2}, 2)$.

Distribución notable 10 (Exponencial)**.** $X \sim \mathrm{Exp}(\beta) = \mathrm{Gm}(1, \beta)$.

Teorema 5.

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\lambda^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} = \sum_{x=0}^{\alpha-1} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

Teorema 6. *En un proceso de Poisson, son equivalentes:*

- *Número de acontecimientos en un intervalo de amplitud* $t \sim \mathrm{P}(\lambda t)$.
- *Tiempo entre dos acontecimientos consecutivos* $\sim \mathrm{Exp}(\frac{1}{\lambda})$.
- *Tiempo hasta el n-ésimo acontecimiento* $\sim \mathrm{Gm}(n, \frac{1}{\lambda})$.

3. Vectores aleatorios

4. Distribuciones muestrales

Definición 14. Una **muestra aleatoria** es un conjunto de variables aleatorias que siguen la misma distribución.

Definición 15. Un **estadístico** es una función de las variables aleatorias que componen una muestra.

Supongamos que tenemos una población de individuos, y queremos saber cierta característica de todos ellos. El objetivo es conocer una aproximación examinando un subconjunto pequeño de individuos (una muestra). Tratamos con distribuciones normales

Teorema 7 (Media)**.** *Sea* X_i *para* $i = 1, 2, \ldots, n$ *una muestra aleatoria de tamaño* n*, con* $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ *para todo* i*. Entonces*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n}).$$

El sumatorio es la media de la muestra y se denota por $\overline{X}$.

Teorema 8. *Sea* X_i *para* $i = 1, 2, \ldots, n$ *una muestra aleatoria de tamaño* n*, con* $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ *para todo* i*. Entonces*

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2_{(n)}.$$

Teorema 9 (Varianza)**.** *Sea* X_i *para* $i = 1, 2, \ldots, n$ *una muestra aleatoria de tamaño* n*, con* $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ *para todo* i*. Sea* $\overline{X}$ *la media muestral y* S^2 *la varianza muestral. Entonces*

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \overline{X}}{\sigma} \right) \sim \chi^2_{(n-1)}$$

Distribución notable 11 (t de Student)**.** Sea $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ e Y una variable aleatoria que sigue una distribución χ_v^2 independiente de Z. Entonces:

$$\frac{Z\sqrt{v}}{\sqrt{Y}} \sim t_{(v)}$$

la v son los grados de libertad de la t de Student.

Distribución notable 12 (F de Snedecor)**.** Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes que siguen distribuciones chi-cuadrado $\chi^2_{(v)}$ y $\chi^2_{(b)}$ respectivamente. Entonces:

$$\frac{X_1}{X_2} \sim F_{(v;b)}.$$

La distribución F es la F de Snedecor con v grados de libertad en el numerador y b grados de libertad en el denominador.