

1. Introducción a los conjuntos numéricos

1.1. Construcciones

Nota 1. Las definiciones y construcciones de los conjuntos numéricos estándares aquí no se dan de una forma muy rigurosa. Su construcción es más propia de una asignatura de fundamentos matemáticos, y ahora mismo me da mucha pereza escribir todo. En este documento solo nos preocupará la construcción de los números reales, que haremos en la sección de sucesiones.

Sea \mathbb{N} un conjunto con un elemento que denominamos 1. Ahora, para todo elemento n de \mathbb{N} añadimos a \mathbb{N} el sucesor, $S(n)$ o $n + 1$. Esto da un conjunto infinito, los **números naturales**. Generalmente, que 0 esté dentro de \mathbb{N} es una cuestión de comodidad. Aquí nos será mucho más cómodo que los números naturales empiecen en 1.

En este conjunto tenemos el principio de inducción:

Axioma 1 (Principio de inducción en \mathbb{N}). Sea $S \subseteq \mathbb{N}$. Si S satisface las siguientes 2 condiciones, entonces $S = \mathbb{N}$:

- $1 \in S$
- $\forall n \in S \quad n + 1 \in S$

Este principio es muy útil para probar cosas sobre \mathbb{N} , por ejemplo la forma cerrada de una sucesión. En \mathbb{N} también podemos definir algo denominado **orden total**, que es una relación binaria \leq que sigue los siguientes axiomas:

Axioma 2 (Axiomas de orden total). $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$

1. $a \leq a$ (*Reflexividad*)
2. $a \leq b$ y $b \leq c$ implica $a \leq c$ (*Transitividad*)
3. $a \leq b$ y $b \leq a$ implica $a = b$ (*Antisimetría*)
4. $a \leq b$ o $b \leq a$ (*Totalidad o principio de tricotomía*)

Cuando tenemos un orden parcial o total definido sobre un conjunto, podemos hablar de cotas y máximos y mínimos:

Definición 1. Sea $S \subseteq X$ donde X es un conjunto con un orden parcial o total \leq . S es...

- **Acotado superiormente** si $\exists r \in X$ tal que $x \leq r \quad \forall x \in S$.
- **Acotado inferiormente** si $\exists r \in X$ tal que $r \leq x \quad \forall x \in S$.

Y decimos que un elemento $r \in S$ es...

- **Un máximo** si $\forall x \in S \quad x \leq r$.
- **Un mínimo** si $\forall x \in S \quad r \leq x$.

Con este orden total definido, podemos reformular el principio de inducción como:

Axioma 3 (Principio de buena ordenación en \mathbb{N}). $\forall S \subseteq \mathbb{N} \quad S \neq \emptyset, \exists n \in S \mid \forall x \in S, n \leq x$. Es decir, todo subconjunto de los números naturales tiene mínimo.

Estas dos formulaciones son equivalentes. Los números naturales además cumplen los siguientes axiomas algebraicos:

Axioma 4 (Axiomas de semianillo unitario ordenado). $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$:

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (*Asociatividad de la suma*)
2. $a + b = b + a$ (*Commutatividad de la suma*)
3. $(a * b) * c = a * (b * c)$ (*Asociatividad de la multiplicación*)
4. $a * b = b * a$ (*Commutatividad de la multiplicación*)
5. $a * (b + c) = a * b + a * c$ (*Distributividad de la multiplicación sobre la suma*)
6. $\exists 1 \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, 1 * n = n$ (*Elemento neutro del producto*)
7. $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$ (*Compatibilidad del orden con la suma*)

8. Si $c \geq 0$ (que es trivial en \mathbb{N}), entonces $a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$ (Compatibilidad del orden con el producto)

Estos axiomas son particularmente débiles. Por ejemplo, para la ecuación $x + 2 = 4$ obviamente $x = 2$, pero no existe ninguna forma de probarlo fácilmente, cuando la existencia de inversos para cada número ayudaría inmensamente. Además, ecuaciones como $x + 4 = 2$ no tienen solución en \mathbb{N} . Por eso definimos un nuevo conjunto denominado \mathbb{Z} , los **números enteros**:

Definición 2 (Números enteros). $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n \ \forall n \in \mathbb{N}\}$ donde 0 denota la identidad para la suma y $-n$ el inverso para la suma de n .

Estos números, ademas de los *Axiomas 4*, cumplen los siguientes axiomas:

Axioma 5 (Axiomas adicionales para \mathbb{Z}).

1. $\exists 0 \in \mathbb{Z} \mid \forall n \in \mathbb{N}, 0 + n = n$ (*Elemento neutro de la suma*)
2. $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists -n \in \mathbb{Z} \mid n + (-n) = 0$ (*Existencia del elemento inverso para la suma*)

Con estos axiomas, se dice que $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo conmutativo y que $(\mathbb{Z}, +, *)$ es un anillo conmutativo. A cambio de estos axiomas algebraicos, perdemos el principio de inducción en los números enteros y la existencia de un elemento mínimo, pero mantenemos una versión del principio de buena ordenación:

Axioma 6 (Principio de buena ordenación de subconjuntos minorados de \mathbb{Z}). $\forall S \subseteq \mathbb{Z} \ S \neq \emptyset \text{ si } \exists n \in \mathbb{Z} \mid \forall x \in S, n \leq x \text{ entonces } \exists m \in S \mid \forall x \in S, m \leq x$. Es decir, todo subconjunto no vacío con cota inferior tiene un elemento mínimo.

Este axioma para \mathbb{Z} implica el *Axioma 3* para los naturales. El conjunto de los números enteros aún tiene unos cuantos problemas. Por ejemplo, es imposible resolver la ecuación $2x = 1$ para $x \in \mathbb{Z}$. Por eso, podemos definir otro conjunto de números construidos sobre los números enteros, los **números racionales**, denotados por \mathbb{Q} :

Definición 3 (Números racionales). $\mathbb{Q} = \{p/q, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$

Aparte de cumplir los *Axiomas 4* y *5*, \mathbb{Q} cumple:

Axioma 7 (Axioma algebraico adicional para \mathbb{Q}).

1. $\forall q \in \mathbb{Q} \ q \neq 0, \exists 1/q \in \mathbb{Q} \mid q * (1/q) = 1$ (*Existencia del inverso de elementos no nulos para el producto*)

Esto hace de \mathbb{Q} un cuerpo conmutativo. \mathbb{Q} no tiene ni principio de buena ordenación, ni de buena ordenación de subconjuntos minorados (por ejemplo, el conjunto $S = \{1/n \ \forall n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Q}$ esta acotado inferiormente pero no tiene mínimo). Esto nos quita una vía de demostrar, pero "quitamos" más agujeros que existían en los números enteros:

Teorema 1 (Densidad de \mathbb{Q}). $\forall a, b \in \mathbb{Q} \ a \neq b, \exists r \in \mathbb{Q} \mid a < r < b$. Es decir, entre dos números racionales distintos siempre vamos a poder encontrar otro número racional. De hecho, vamos a poder encontrar infinitos aplicando el teorema cuantas veces como queramos.

Demostración. Dados $a < b \in \mathbb{Q}$: $a = (a + a)/2 < (a + b)/2 < (b + b)/2 = b$. $(a + b)/2$ es el número que buscamos. \square

De este teorema podemos deducir que no existe una función sucesora en \mathbb{Q} , y por tanto no tenemos alternativa a inducción. Pero este teorema no es suficiente para que \mathbb{Q} sea el conjunto numérico perfecto para hacer análisis. Aún existen agujeros, como demuestra el siguiente ejemplo:

Proposición 1. No existe ningún $a \in \mathbb{Q}$ tal que $a^2 = 2$.

Demostración. Supongamos que $\exists a \in \mathbb{Q}$ tal que $a^2 = 2$. Al ser un número racional, lo podemos escribir de la forma $\frac{p}{q}$ con $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ y $\gcd(p, q) = 1$ (donde \gcd denota el máximo común divisor). Por tanto, tenemos la expresión $\frac{p^2}{q^2} = 2$, de donde deducimos que $p^2 = 2q^2$ y debido a que 2 es un número primo, que $2|p$ o más concretamente $p = 2k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Substituyendo otra vez obtenemos $4k^2 = 2q^2$ y deducimos $2k^2 = q^2$, que de forma similar nos deja ver que q es también múltiplo de 2. Pero inicialmente hemos asumido que el máximo común divisor de p y q es 1 < 2 y no mayor o igual a 2, por lo cual hemos encontrado una contradicción y la proposición es cierta. \square

Esto es problemático, ya que intuitivamente deberíamos de poder encontrar un valor que cumpla $a^2 = 2$. Para poder arreglar este problema necesitamos una definición primero:

Definición 4 (Supremo e ínfimo). *Sea A un subconjunto numérico acotado superiormente. Si existe la mínima cota superior (es decir, un número ω que sea cota superior del conjunto y tal que cualquier otra cota superior α sea $\omega \leq \alpha$) esta será única y la llamaremos **supremo**. Dualmente, a la máxima cota inferior en un subconjunto acotado inferiormente la llamaremos **ínfimo**. Se denotan $\sup A$ y $\inf A$.*

La definición parece ajena al ejemplo de "agujero" que hemos dado en la *Proposición 1*, pero es la más general que engloba todos los casos que necesitamos. El subconjunto $A \subseteq \mathbb{Q}$ definido como $A = \{a \in \mathbb{Q} \mid a^2 \leq 2\}$ esta acotado superiormente por 2 y es posible demostrar que si existiera un supremo, este número sería tal que su cuadrado fuera igual a 2, pero en \mathbb{Q} no existe. Por tanto, podemos pensar que "añadiendo todos los supremos" completaríamos \mathbb{Q} . Este es el procedimiento que seguimos:

Axioma 8 (Axioma del supremo). *Todo subconjunto acotado superiormente tiene supremo.*

Definición 5 (Números reales). *Al conjunto \mathbb{R} con $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ y que cumpla el Axioma 8 lo llamamos los **números reales**.*

Este conjunto no es único, pero si es único bajo isomorfismos, que viene a decir que cualesquiera dos conjuntos con estas propiedades tienen la misma estructura y por tanto no hace falta distinguirlos. Aquí no hemos dado una construcción de los números reales, lo que hemos dado aquí es solo una definición axiomática. Es decir, estamos asumiendo que existe un conjunto con estas características.

1.2. Los números reales

Empezamos el estudio de los números reales introduciendo algunos conceptos.

Definición 6. *El conjunto de los **irracionales** es $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Es decir, los números reales que no se pueden expresar como cociente de dos números enteros.*

De esta definición podemos ver que un número real tiene que ser racional o irracional, pero no puede ser los dos a la vez. Esto implica que los racionales e irracionales forman una partición de los números reales.

Definición 7 (Valor absoluto). *Dado $x \in \mathbb{R}$ definimos el **valor absoluto** como:*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

El valor absoluto es de los conceptos mas fundamentales del análisis real. Geométricamente, si dibujamos el valor $x \in \mathbb{R}$ en la recta real, el valor absoluto da la longitud del segmento que va desde x hasta 0 y la distancia entre dos números reales en la recta real viene dada por $d(x, y) = |x - y|$.

Proposición 2 (Propiedades del valor absoluto). *$\forall a, b \in \mathbb{R}$ tenemos:*

1. $\|a\| = |a|$
2. $| - a | = |a|$
3. $|ab| = |a||b|$
4. *La desigualdad triangular:* $|a + b| \leq |a| + |b|$
5. *La desigualdad triangular inversa:* $\|a| - |b|| \leq |a - b|$
6. *Si $a \neq 0$ entonces* $|\frac{1}{a}| = \frac{1}{|a|}$

La desigualdad triangular se usa mucho. Vamos a ver una caracterización del supremo e ínfimo:

Proposición 3 (Caracterización del supremo). *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$.*

1. *El supremo de A existe si y solo sí existe un número $\omega \in \mathbb{R}$ que sea cota superior de A tal que $\forall \varepsilon > 0$ existe $x \in A$ tal que $x > \omega - \varepsilon$. En este caso $\sup A = \omega$.*
2. *El ínfimo de A existe si y solo sí existe un número $\alpha \in \mathbb{R}$ que sea cota inferior de A tal que $\forall \varepsilon > 0$ existe $x \in A$ tal que $x < \alpha - \varepsilon$. En este caso $\inf A = \alpha$.*

Demostración. TODO: Añadir espacio

Vamos a hacer la demostración en el caso del supremo, el caso del ínfimo es igual pero cambiando la dirección de las desigualdades.

$\Rightarrow)$ Supongamos que existe el supremo de A , y sea $\omega = \sup A$. Si $\varepsilon > 0$ entonces $\omega - \varepsilon$ no será cota superior de A (ya que el supremo es la mínima cota superior) y por tanto existirá $x \in A$ tal que $x > \omega - \varepsilon$. Además, ω es una cota superior de A , y así es el número que buscamos.

$\Leftarrow)$ Tal ω es una cota superior por hipótesis, veamos que es la mínima. Sea α una cota superior distinta de ω , y supongamos que $\alpha < \omega$. Sea $\varepsilon = \omega - \alpha > 0$. Por hipótesis existirá un $x \in A$ tal que $x > \omega - \varepsilon = \alpha$, que contradice que α sea cota superior de A . Esto también demuestra la unicidad del número que satisface las condiciones de ω (el supremo es único) y la última parte del enunciado. \square

Cuando estudiemos sucesiones, nos será muy útil tener herramientas para relacionar los números naturales con los números reales.

Teorema 2 (Propiedad arquimediana). $\forall x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x > 0 \exists n \in \mathbb{N}$ con $nx > y$.

Demostración. Procedemos por contradicción. Supongamos que existen x, y reales con $x > 0$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $nx \leq y$. Consideramos el conjunto $A = \{nx \mid n \in \mathbb{N}\}$ que no es vacío (ya que \mathbb{N} no es vacío) y es acotado superiormente (por hipótesis). Por el axioma del supremo, existe el supremo de A . Sea $\alpha = \sup A$. Por la proposición anterior, tomando $\varepsilon = x > 0$ tendremos que existirá un $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > \alpha - \varepsilon = \alpha - x$, que implica $(n+1)x > \alpha$ pero como $n+1 \in \mathbb{N}$ se tiene $(n+1)x \in A$ y así α no sería una cota superior de A , que contradice la definición de supremo. \square

Podemos entender el teorema así: si tenemos una longitud muy pequeña siempre vamos a juntar muchas de ellas para poder formar una longitud grande. Este teorema y la proposición anterior nos van a servir para demostrar corolarios que son intuitivamente verdad:

Corolario 1. *El conjunto de los números naturales no está acotado superiormente.*

Demostración. Si \mathbb{N} tuviera una cota superior, aplicando la propiedad arquimediana con $x = 1$ e y la cota superior tendríamos un número natural mayor que la cota superior, contradicción. \square

Es importante notar lo que estamos demostrando: como subconjunto de \mathbb{R} , \mathbb{N} no está acotado superiormente. Si quisieramos demostrar que \mathbb{N} no está acotado en los \mathbb{N} , simplemente notaríamos que $n+1 > n$. Esta distinción es importante, ya que vamos a trabajar con números reales la mayoría del tiempo.

TODO: Es necesario el corolario siguiente? Ponerlo con el otro corolario

Corolario 2. *Todo subconjunto no vacío de los números naturales que esté acotado superiormente tiene máximo y mínimo.*

Demostración. Sea A un subconjunto no vacío de números naturales. Tiene mínimo por el principio de inducción, y al estar acotado superiormente y no ser vacío existe el supremo que llamamos ω . Si $\omega \notin A$ tendríamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existiría un $x_n \in A$ tal que $\omega > x_n > \omega - \frac{1}{n}$. Considerando x_{n+1} y x_n en la desigualdad anterior llegamos a que $|x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{n}$ y por tanto $x_{n+1} = x_n = x \in \mathbb{N}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (ya que $|x_{n+1} - x_n|$ será un número natural o 0, pero ningún número natural es menor a 1 por construcción). Como $x > \omega - \frac{1}{n}$ para todo n se puede ver que $x \geq \omega$, pero también $\omega > x$, contradicción. \square

Corolario 3. *Un subconjunto no vacío de números naturales es finito si y solo si está acotado si y solo si tiene máximo.*

Demostración. Es obvio que si se tiene un máximo entonces un subconjunto es acotado. Si un conjunto es acotado, por el corolario anterior tiene máximo. Esto demuestra la segunda doble implicación. Demostramos la primera doble implicación.

$\Rightarrow)$ Demostramos que un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ no vacío tiene máximo mediante inducción sobre el número de elementos del conjunto. Si tal conjunto tiene un único elemento, trivialmente ese elemento es el máximo. Supongamos entonces que todo subconjunto de n elementos tiene máximo, y sea A_{n+1} un conjunto con $n+1$ elementos. Escogiendo un elemento $a \in A_{n+1}$ tenemos $A_{n+1} = \{a\} \cup A_n$ con A_n un conjunto de n elementos, que por hipótesis tiene un máximo a_n . Entonces existen dos casos: $a_n > a$ y $a_n < a$. En el primero, a_n es el máximo de A_{n+1} y en el segundo a es el máximo de A_{n+1} por la transitividad del orden. En cualquier caso hemos encontrado el máximo de A_{n+1} .

$\Leftarrow)$ Si A es tal conjunto, por ser acotado $\exists \omega \in \mathbb{R}$ cota superior de A . Aplicando la propiedad arquimediana con $x = 1, y = \omega$ encontramos que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ con $n_0 > \omega$, lo que implica que n_0 es cota superior de A , y además que $A \subseteq \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ y } n_0 \geq n\}$, siendo este último conjunto finito y por tanto A es finito. \square

Corolario 4. *Todo subconjunto finito no vacío de los números reales está acotado y tiene máximo y mínimo.*

Demostración. Demostramos el enunciado solo para el máximo, el mínimo se demuestra igual. Procedemos por inducción sobre el número n de elementos del conjunto. El caso $n = 1$ es trivial. Supongamos que el enunciado es cierto para conjuntos con un número de elementos igual a n , y sea A_{n+1} un conjunto con $|A_{n+1}| = n + 1$. Sea a un elemento cualquiera de A_{n+1} , y tenemos $A_{n+1} = \{a\} \cup A_n$ con A_n un conjunto de n elementos. Por hipótesis tendrá un máximo b , y por la ley de tricotomía se tiene $a > b$ o $a < b$ (no se puede tener $a = b$ ya que son distintos). En el primer caso a es el máximo de A_{n+1} y en el segundo b es el máximo de A_n \square

Corolario 5. Un subconjunto no vacío de números enteros está acotado superiormente (resp. inferiormente) si y solo si tiene máximo (resp. mínimo).

Teorema 3 (Existencia de la parte entera). $\forall x \in \mathbb{R}$ existe un único $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k \leq x < k + 1$.

Demostración. Sea $A = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$. Es un conjunto acotado superiormente y es no vacío por la propiedad arquimediana (tomando $y' = -x$ y $x' = 1$). Por tanto, tiene un máximo que llamamos n . Como $n + 1 > n$ y n es el supremo de A , $n + 1 \notin A$ lo que implica $n + 1 > x$. n es el número que buscamos. \square

Definición 8 (Parte entera). Dado $x \in \mathbb{R}$ definimos la **parte entera** como:

$$\lfloor x \rfloor = \sup\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\} \quad (2)$$

Por el teorema anterior, este supremo siempre existe. También definimos la **parte fraccionaria**:

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \quad (3)$$

Estos dos no son tan útiles como el valor absoluto.

Definición 9 (Potencias enteras). Sea $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$. Definimos la **potencia n -ésima** de x de forma inductiva, y la denotamos por x^n , como:

$$x^n = \begin{cases} x * x^{n-1} & \text{si } n > 1 \\ x & \text{si } n = 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \text{ y } x \neq 0 \\ \frac{1}{x^n} & \text{si } n < 0 \text{ y } x \neq 0 \end{cases} \quad (4)$$

Si $x = 0$ y $n \leq 0$ entonces la potencia queda indefinida. Al número n se le llama **exponente**.

Es posible extender la definición de exponente a los números racionales e irracionales, pero se necesitan herramientas más fuertes para fundamentarlos. Esto lo veremos cuando introduzcamos las funciones, por ahora solo trabajaremos con las potencias racionales cuyo numerador sea 1:

Teorema 4 (Existencia de la raíz cuadrada). Sea $a \in \mathbb{R}$ mayor o igual que 0. Entonces existe un único $x \in \mathbb{R}$ mayor o igual que 0 tal que $x^2 = a$.

Teorema 5 (Existencia de raíces). Sea $a \in \mathbb{R}$ cualquiera.

1. Para todo $n \in \mathbb{N}$ impar existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^n = a$.

2. Si $a \geq 0$ entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ par (recordamos que \mathbb{N} no tiene el 0 en nuestra definición) existe un único $x \in \mathbb{R}$ con $x \geq 0$ tal que $x^n = a$.

En cualquier caso, al número x lo llamaremos la **raíz n -ésima** de a y lo denotaremos por $\sqrt[n]{a}$ o $a^{\frac{1}{n}}$.

Proposición 4 (Binomio de Newton). Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces:

$$(x + y)^n = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} x^m y^{n-m} \quad (5)$$

Por conveniencia, definimos las sucesiones aquí:

Definición 10. Una **sucesión** es una aplicación $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Por comodidad, la imagen de $n \in \mathbb{N}$ se denota por a_n y para la sucesión en sí usaremos $\{a_n\}_n$. El conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ es el conjunto **imagen**.

Introducir las sucesiones aquí nos va a permitir establecer algunos ejemplos de inducción:

Ejemplo 1 (Números triangulares). Definimos la sucesión $\{T_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ mediante la fórmula $T_n = \sum_{k=1}^n k$. Estos son los **números triangulares**. El objetivo es establecer una expresión cerrada para la sucesión. Para ello, vamos a intentar encontrar una posible fórmula cerrada y después usamos inducción para demostrarla. Primero notamos que

$$T_n - T_{n-1} = n \quad (6)$$

para todo $n > 1$. Veamos que también vamos a tener

$$T_n + T_{n-1} = n^2 \quad (7)$$

mediante un dibujo:

En vista de esto, podemos sumar (6) y (7) para obtener

$$2T_n = n^2 + n$$

y finalmente

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (8)$$

Esta igualdad es la que vamos a demostrar por inducción. Primero vemos que (8) se cumple para $n = 1$:

$$T_1 = \sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1 * 2}{2} = \frac{1(1+1)}{2}.$$

Ahora, suponemos que la expresión (8) es válida para un natural $n \geq 1$, y veamos que

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} k = (n+1) + \sum_{k=1}^n k \\ &= (n+1) + T_n \\ &= (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= (n+1)\left(1 + \frac{n}{2}\right) \\ &= (n+1)\frac{2+n}{2} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

que es la expresión (8) con $n + 1$, y por tanto queda demostrado.

2. Sucesiones de números reales

Definición 11. Decimos que una sucesión $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ es:

- **Eventual creciente** si $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $a_m \geq a_n, \forall m > n \geq N$ con n y m naturales.
- **Eventual estrictamente creciente** si $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $a_m > a_n, \forall m > n \geq N$ con n y m naturales.
- **Eventual decreciente** si $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $a_m \leq a_n, \forall m > n \geq N$ con n y m naturales.
- **Eventual estrictamente decreciente** si $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $a_m < a_n, \forall m > n \geq N$ con n y m naturales.

En cualquier caso decimos que la sucesión es **eventual monótona**. Si $N = 1$ en cualquiera de estos casos, entonces quitamos "eventual".

Nos interesa estudiar el comportamiento de la sucesión cuando n se hace grande, es decir *eventualmente*. Veremos que el comportamiento de a_n cercano a $n = 1$ no importa en lo que a límite se refiere, solo el comportamiento eventual. En los teoremas de sucesiones monótonas que hagamos generalmente no usaremos la monotonía eventual, sino la monotonía desde $n = 1$ pero también serán válidos para la eventual con pocas modificaciones.

Definición 12. Sea $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión de números reales. Decimos que a_n está **acotada inferiormente** si existe un $A \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $a_n \geq A$. Análogamente, se dice que está **acotada superiormente** si existe un $B \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $a_n \leq B$. Se dice que está **acotada** si lo está superiormente e inferiormente.

2.1. Convergencia

Definición 13. Sea $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión de números reales. Decimos que a_n **converge** a L y lo denotamos como $a_n \rightarrow_n L$ si y solo si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L| < \varepsilon$ para todo n tal que $n \geq N$.

Esta definición se le conoce como definición $\delta - \varepsilon$.

Proposición 5 (Unicidad del límite). Sean $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ convergente a L_1 y L_2 . Entonces $L_1 = L_2$.

Demostración. Supongamos que L_1 y L_2 son dos límites de la sucesión $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$. Por tanto, dado un $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L_1| < \varepsilon/2$ y $|a_n - L_2| < \varepsilon/2 \quad \forall n > N$ con $N = \max\{n_1, n_2\}$, donde n_1 y n_2 son N dado de la definición del límite para L_1 y L_2 . Sumando ambas desigualdades y usando la desigualdad triangular, tenemos:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} > |a_n - L_1| + |a_n - L_2| = |a_n - L_1| + |-a_n + L_2| \\ &\geq |a_n - L_1 - a_n + L_2| = |L_2 - L_1| \end{aligned}$$

Como ε es un número arbitrario mayor que 0, si asumimos que $|L_2 - L_1| \neq 0$, siempre vamos a poder encontrar un valor de ε (por ejemplo, $\varepsilon = \frac{|L_2 - L_1|}{2} > 0$) mayor a 0 que contradiga $\varepsilon > |L_2 - L_1|$. Por tanto, $|L_2 - L_1| = 0$ y $L_2 = L_1$. \square

Definición 14. Sabiendo que una sucesión convergente $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ converge a un único valor L , llamamos a este valor **límite de la sucesión** a_n , y lo denotamos como $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$ o de manera resumida $\lim_n a_n = L$.

Ejemplo 2. Consideramos la sucesión $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ de término general $a_n = \frac{1}{n}$. Sea $\varepsilon > 0$. Por la propiedad arquimediana existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $N\varepsilon > 1 \Rightarrow \varepsilon > |\frac{1}{N}|$. Si $n > N$ entonces $|\frac{1}{n} - 0| < |\frac{1}{N}| < \varepsilon$. Por tanto $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Proposición 6. Sea $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión de números reales. Si $\{a_n\}_n$ converge, entonces es acotada.

Demostración. Supongamos que $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ es una sucesión que converge a $L \in \mathbb{R}$. Por la definición de convergencia existirá un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $|a_n - L| < 1$ (haciendo $\varepsilon = 1$). Podemos asegurar que $N > 1$ (si tuviéramos que $N = 1$ simplemente dejaríamos $N = 2$). Desarrollando el valor absoluto tenemos:

$$L - 1 < a_n < L + 1 \tag{9}$$

para todo $n \geq N$. Consideramos entonces los conjuntos $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{N-1}, L + 1\}$ y $B = \{a_1, a_2, \dots, a_{N-1}, L - 1\}$. Como ambos conjuntos son finitos, podemos asegurar que existe el máximo de A y el mínimo de B . Sean $\alpha = \min B$ y $\omega = \max A$. Entonces:

1. Si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $1 \leq n < N$ entonces $a_n \in A$ y $a_n \in B$ y por tanto $\alpha \leq a_n \leq \omega$.
2. Si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $n \geq N$ entonces por (9) tenemos $\alpha \leq L - 1 \leq a_n \leq L + 1 \leq \omega$ y así $\alpha \leq a_n \leq \omega$ por la transitividad del orden.

Como todo número natural es menor, igual o mayor que N (principio de la tricotomía) tenemos que $\alpha \leq a_n \leq \omega$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por tanto la sucesión $\{a_n\}_n$ está acotada. \square

Definición 15. Si $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ no converge a ningún valor $L \in \mathbb{R}$, podemos decir que a_n es:

- **Divergente a $+\infty$** si $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > M \ \forall n > N$.
- **Divergente a $-\infty$** si $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < M \ \forall n > N$.
- **Oscilante** si no converge ni diverge.

Definición 16 (Subsucesión). Sea $\{n_k\}_k \subseteq \mathbb{N}$ una sucesión estrictamente creciente de números naturales y $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión cualquiera de números reales. Una **subsucesión de a_n** es una sucesión de la forma $\{a_{n_k}\}_k \subseteq \mathbb{R}$.

Teorema 6 (Aritmética de límites). Sean $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ y $\{b_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ dos sucesiones cualesquiera convergentes a L_a y L_b respectivamente. Entonces:

- Si $r \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{n \rightarrow +\infty} r a_n = r L_a$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + b_n = L_a + L_b$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = L_a L_b$
- Si $b_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ y $L_b \neq 0$, entonces $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L_a}{L_b}$

Ejemplo 3. 1. La sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ converge a 0 y es monótona decreciente. Además, toda subsucesión converge a 0.

2. La sucesión $a_n = n^3$ diverge a $+\infty$ y es monótona creciente.

3. La sucesión

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad (10)$$

es oscilante. Además, la subsucesión $\{a_{2n}\}_n$ converge a 1 y $\{a_{2n+1}\}_n$ converge a -1.

4. Las sucesiones $a_n = n$ y $b_n = -n$ divergen pero la sucesión $c_n = a_n + b_n$ converge a 0.

El comportamiento de las subsucesiones de una sucesión dada en relación a su convergencia es muy importante. Vemos unos resultados.

Proposición 7. Sea $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión de números reales. Entonces converge si y solo si cada una de sus subsucesiones converge al mismo número.

Corolario 6. Sea $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión de números reales.

1. Si existe una subsucesión de $\{a_n\}_n$ que no converge, entonces $\{a_n\}_n$ no converge.
2. Si existen dos subsucesiones que converjan a dos valores distintos entonces $\{a_n\}_n$ no converge.

Este corolario es muy útil para demostrar que algunas sucesiones no convergen. Ahora vamos a ver más resultados para poder saber cuando converge una sucesión y a qué converge.

Teorema 7 (Convergencia de las sucesiones monótonas). Sea $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión de números reales, entonces:

1. Si $\{a_n\}_n$ es creciente, entonces converge si y solo si es acotada superiormente.
2. Si $\{a_n\}_n$ es decreciente, entonces converge si y solo si es acotada inferiormente.

Este es un ejemplo de teorema donde podríamos cambiar las suposiciones de creciente y decreciente por sus respectivas suposiciones eventuales. Esto cambiaría la demostración y el método de obtener el límite un poco.

Teorema 8 (Orden de los límites y teorema del sandwich). Sean $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$, $\{b_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ y $\{c_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ tres sucesiones de números reales tales que $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

1. Si $a_n \rightarrow_n A$, $b_n \rightarrow_n B$ y $c_n \rightarrow_n C$ entonces $A \leq B \leq C$.
2. Si $a_n \rightarrow_n A$ y $c_n \rightarrow_n C$ y además $A = C$ entonces $\{b_n\}_n$ converge a A .

Finalmente, podemos constatar una relación del ínfimo y supremo con las sucesiones:

Teorema 9 (Teorema de alcance). Sea $A \subseteq \mathbb{R}$.

1. Si $\exists \sup A$ entonces existe una sucesión de elementos de A que converge a $\sup A$.
2. Análogamente, si $\exists \inf A$ entonces existe una sucesión de elementos de A que converge a $\inf A$.

2.2. Puntos de acumulación

Definición 17 (Punto de acumulación). *Sea $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión de números reales. Si existe una subsucesión que converge a un número $L \in \mathbb{R}$ entonces L se dice que es un **punto de acumulación**.*

Teorema 10 (De Bolzano-Weierstrass). *Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.*

Definición 18 (Límites superior e inferior). *Sea $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión de números reales.*

1. *Si $\{a_n\}_n$ está acotada superiormente definimos el **límite superior** como $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup\{a_m : m > n\}$. Si $\{a_n\}_n$ no está acotada superiormente lo definimos como $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$*
2. *Análogamente, si $\{a_n\}_n$ está acotada inferiormente definimos el **límite inferior** como $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf\{a_m : m > n\}$. Si $\{a_n\}_n$ no está acotada inferiormente lo definimos como $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$*

Intuitivamente, el límite inferior y límite superior nos dicen el intervalo al que converge la sucesión:

Proposición 8. *Sea $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq N$ entonces $a_m \in [\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n - \varepsilon, \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n + \varepsilon]$.*

Si la sucesión no es acotada, substituimos alguno de los límites del intervalo por $+\infty$ o $-\infty$. Con esta proposición podemos demostrar otra caracterización de la convergencia de soluciones:

Teorema 11. *Sea $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión. Entonces $\{a_n\}_n$ converge si y solo si $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$. En tal caso $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$.*

Los límites inferior y superior nos permiten hacer una pequeña extensión del teorema (10):

Proposición 9. 1. *El límite inferior y superior de una sucesión son puntos de acumulación de la misma.*

2. *Toda sucesión acotada tiene un punto de acumulación. Además es no convergente si y solo si es oscilante si y solo si tiene dos o más puntos de acumulación.*

Ejemplo 4. *La sucesión $\{a_n = \{\sqrt{n}\}\}_n$ tiene por lo menos dos puntos de acumulación:*

1. *Consideramos la subsucesión $b_m = a_{m^2}$, vemos que $b_m = \{\sqrt{m^2}\} = \{m\} = 0$ y como es constante converge a 0.*
2. *Consideramos $c_m = a_{m^2-1}$. Primero constatamos la siguiente desigualdad:*

$$\sqrt{m+1} - \sqrt{m-1} \geq \frac{1}{\sqrt{m+1}} \quad (11)$$

Que se puede comprobar fácilmente simplificando. Ahora notamos que si $m \geq 1$ entonces:

$$m = \sqrt{m^2} > \sqrt{m^2 - 1} \geq \sqrt{m^2 - 2m + 1} = \sqrt{(m-1)^2} = m-1$$

Y por tanto $\lfloor \sqrt{m^2 - 1} \rfloor = m-1$, así tenemos que

$$\begin{aligned} 1 \geq c_m &= \{\sqrt{m^2 - 1}\} = \sqrt{m^2 - 1} - \lfloor \sqrt{m^2 - 1} \rfloor = \\ &\sqrt{m^2 - 1} - (m-1) = \sqrt{m-1}(\sqrt{m+1} - \sqrt{m-1}) \geq \frac{\sqrt{m-1}}{\sqrt{m+1}} = \sqrt{1 - \frac{2}{m+1}} \end{aligned}$$

Y por el teorema del sandwich la subsucesión c_m converge a 1.

Como a_n tiene por lo menos dos puntos de acumulación y $0 \leq a_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por la proposición anterior $\{a_n\}_n$ es oscilante.

Proposición 10. *Si una sucesión tiene por lo menos un punto de acumulación entonces no puede diverger.*

Ejemplo 5. *La sucesión $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ definida por:*

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si existe } m \in \mathbb{N} \text{ con } n = 3m \\ 1 & \text{si existe } m \in \mathbb{N} \text{ con } n = 3m + 1 \\ n & \text{si existe } m \in \mathbb{N} \text{ con } n = 3m + 2 \end{cases} \quad (12)$$

tiene 0 y 1 como puntos de acumulación, es oscilante pero no es acotada.

Ejemplo 6 (Una sucesión con infinitos puntos de acumulación). Vamos a construir una sucesión que tenga como conjunto de puntos de acumulación todos los números naturales. Es posible usar esta sucesión para poder construir otra tal que el conjunto de puntos de acumulación sean todos los reales, pero la construcción es algo más ortopédica y la demostración mas engorrosa. El objetivo es construir la siguiente sucesión: 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4..., para esto usamos los números triangulares. Sea $\{b_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ la sucesión de los números triangulares más uno, es decir $b_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sabemos que esta sucesión es estrictamente creciente y que $b_0 = 1$, $b_1 = 2$ (por comodidad añadimos el término cero). Definimos la sucesión $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ como:

$$a_n = n - b_{m-1} + 1 \text{ para } m \in \mathbb{N} \text{ tal que } b_{m-1} \leq n \leq b_m.$$

Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ existe un único $m \in \mathbb{N}$ que satisface la igualdad, así que está bien definida. (TODO: Terminar demostración)

Los límites superior e inferior no tienen mucho interés práctico. Sirven por ejemplo para obtener refinamientos de teoremas como el criterio de Stolz.

2.3. El número e

Definición 19. Definimos el número e como $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \frac{1}{m!}$.

Proposición 11. El límite en la definición del número e existe.

Proposición 12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \frac{1}{m!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$.

Proposición 13. El número e es irracional.

Resulta que e también es más que irracional, es *transcendental*. Esto es una cualidad meramente algebraica de demostración más complicada, que no trataremos aquí.

2.4. Sucesiones de Cauchy y completitud

Definición 20. Sea $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión. Decimos que es una **sucesión de Cauchy** si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \in \mathbb{N}$ son números naturales mayores o iguales que N se tiene $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

El objetivo de esta definición es tener una propiedad equivalente a la convergencia sin necesitar de saber el límite de una sucesión. Este hecho es muy importante:

Teorema 12 (Completitud de \mathbb{R}). Sea $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión. Entonces $\{a_n\}_n$ converge si y solo si es de Cauchy.

El resultado importante aquí es que una sucesión de Cauchy converge, y en algunos textos esto es lo que se llama completitud. La completitud se puede generalizar a espacios métricos generales, y podemos hablar de *completitud* en subconjuntos de \mathbb{R} :

Ejemplo 7 (Los racionales no son completos). Sea $A \subseteq \mathbb{Q}$ definido como $A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$. Entonces $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ es el supremo de este conjunto en los reales, y por tanto existirá una sucesión de elementos de A que converge a $\sqrt{2}$, vamos a llamarla $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{Q}$. En los reales la sucesión converge, y por el teorema de completitud es de Cauchy. Como es de Cauchy en los reales entonces es de Cauchy en los racionales, pero como converge a $\sqrt{2}$ y este número es irracional al existir un único límite para toda sucesión convergente, concluimos que no converge en \mathbb{Q} .

Podemos usar las sucesiones de Cauchy para hacer una construcción de los números reales.

2.5. Cálculo de límites

Ahora vamos a dar unos cuantos teoremas para calcular límites.

Teorema 13 (Criterio de Cauchy o de la raíz). Sea $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

con L finito. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

Teorema 14 (Criterio de Stolz).

Teorema 15 (Criterio de la media aritmética). *Sea $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión de números reales que converja a $L \in \mathbb{R}$. Entonces se tiene*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=1}^n a_m}{n} = L.$$

Teorema 16 (Criterio de la media geométrica). *Sea $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión de números reales que converja a $L \in \mathbb{R}$. Entonces se tiene*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{m=1}^n a_m} = L.$$

3. Introducción a la topología de los números reales

El objetivo de introducir conceptos topológicos aquí es proporcionar la idea de estar infinitamente cerca y estar lejos de un conjunto.

Definición 21. 1. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ se dice **abierto** si y solo si para todo $a \in A$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq A$.

2. Un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}$ se dice **cerrado** si y solo si el complementario $\mathbb{R} \setminus C$ es abierto.

Un conjunto abierto es tal que todo punto no esté infinitamente cerca del complementario. Así, un conjunto cerrado es aquel en el que todo punto fuera de él está “lejos”.

Ejemplo 8. \mathbb{R} , el conjunto vacío y todo intervalo abierto son conjuntos abiertos.

Definición 22 (Puntos especiales de un conjunto). Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto cualquiera.

1. Un punto $x \in A$ se dice **punto interior** si y solo si existe un $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A$.
2. Un punto $x \in \mathbb{R}$ se dice **punto límite** si y solo si existe una sucesión $\{a_n\}_n \subseteq A$ que converge a x .
3. Un punto $x \in \mathbb{R}$ se dice **punto de acumulación** si y solo si existe una sucesión $\{a_n\}_n \subseteq A$ que converge a x tal que $a_n \neq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
4. Un punto límite de A que no es de acumulación se dice **punto aislado**.
5. Se dice que A es un **entorno** de un punto $x \in A$ si y solo si x es un punto interior de A .

Proposición 14. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto cualquiera. Entonces siempre existe un menor conjunto cerrado que contiene a A y un mayor conjunto abierto contenido en A .

Podemos usar esta proposición para estas definiciones:

Definición 23 (Conjuntos asociados). Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto cualquiera.

1. Definimos la **cerradura** de A como el menor conjunto cerrado que contiene a A y lo denotamos por $Cl(A)$.
2. Definimos el **interior** de A como el mayor conjunto abierto contenido en A y lo denotamos por $Int(A)$.
3. Definimos la **frontera** de A como el conjunto $Fr(A) = Cl(A) \setminus Int(A)$.

Proposición 15. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto cualquiera.

1. $Cl(A)$ es igual a la intersección de todos los cerrados que contienen a A y también al conjunto de todos los puntos límite de A .
2. $Int(A)$ es igual a la unión de todos los abiertos contenidos en A y también al conjunto de todos los puntos interiores de A .

Proposición 16. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto cualquiera.

1. A es abierto si y solo si $A = Int(A)$.
2. A es cerrado si y solo si $A = Cl(A)$.

Proposición 17. 1. La unión arbitraria de conjuntos abiertos es abierta.

2. La intersección finita de conjuntos abiertos es abierta.
3. La intersección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrada.
4. La unión finita de conjuntos cerrados es cerrada.

Hay un corolario importante del teorema de Bolzano-Weierstrass para sucesiones:

Teorema 17. Todo conjunto infinito y acotado tiene por lo menos un punto de acumulación.

Nota 2. Los términos introducidos aquí reciben múltiples definiciones, nombres y notaciones distintas dependiendo de que libros y apuntes se miren. Otras notaciones incluyen \bar{A} para la cerradura, \mathring{A} para el interior y ∂A para la frontera. La cerradura también se llama clausura o adherencia, y la frontera se le puede llamar borde también. Generalmente, para las distintas definiciones se suele presentar una como “la definición” y las otras como teoremas de equivalencia, que es lo que he hecho aquí.

Definición 24. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y \mathcal{A} una familia de subconjuntos abiertos de \mathbb{R} . Decimos que \mathcal{A} **cubre** o que es un **cubrimiento por abiertos** de A si y solo si la unión de todos los conjuntos de \mathcal{A} contiene a A .

Definición 25. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ se dice **compacto** si y solo si de todo cubrimiento por abiertos de A se puede obtener una subfamilia (llamada **subrecubrimiento**) de cardinal finito que sigue cubriendo A .

Teorema 18 (Heine-Borel). *Un subconjunto de \mathbb{R} es compacto si y solo si es acotado y cerrado.*

4. Funciones, límites y continuidad

Definición 26 (Funciones). Una aplicación $f : A \rightarrow B$ con A y B subconjuntos de \mathbb{R} (preferentemente no vacíos) se llama **función real de una variable real** o simplemente **función**.

Hay muchos detalles sobre esta definición. Al conjunto A lo llamamos **dominio** y al conjunto B **codominio**. Si $C \subseteq \mathbb{R}$ el conjunto $f(C) = \{f(a) : a \in A \cap C\}$ se denomina conjunto **imagen de C** , el conjunto $f(A)$ se denomina simplemente **imagen**. Generalmente es mucho trabajo indicar siempre el dominio, codominio y definición de todas las funciones que usamos. Es por eso que nos tomamos la libertad de excluir ciertos componentes de la definición cuando hablamos de funciones, si pueden quedar claros. Por ejemplo:

Ejemplo 9 (Definiciones de funciones). 1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 \forall x \in \mathbb{R}$. En este ejemplo tenemos explícitamente el dominio y el codominio.

2. $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. Aquí no hemos incluido ni el dominio ni el codominio en la definición de la función. Por tanto, asumimos que el codominio es \mathbb{R} y que el dominio es donde la regla de definición sea válida, es decir donde $x^2 - 1 \geq 0$

3. $h(x) = \sqrt{-x^2 - 1}$. En este caso la regla dada no define una función ya que no es válida para ningún valor de x . Técnicamente, obtendríamos una aplicación con dominio vacío, pero introducir este tipo de funciones en la teoría no aporta nada relevante, así que se ignoran.

En la mayoría de ocasiones en nuestras definiciones asumiremos que el codominio es \mathbb{R} , y asumiremos tácitamente que podemos extenderlas a casos donde el codominio sean otros subconjuntos reales.

Espero que el lector haya visto ya algunas funciones importantes. Usando funciones ya dadas podemos construir nuevas funciones (esto es un hecho intuitivo):

Definición 27. Sean $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ con $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Definimos:

1. Si $A \cap B \neq \emptyset$, la suma $f + g : A \cap B \rightarrow \mathbb{R}$ por $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \forall x \in A \cap B$.
2. Si $A \cap B \neq \emptyset$, la multiplicación $fg : A \cap B \rightarrow \mathbb{R}$ por $(fg)(x) = f(x)g(x) \forall x \in A \cap B$.
3. El opuesto de f , $-f : A \rightarrow \mathbb{R}$ por $(-f)(x) = -f(x) \forall x \in A \cap B$.
4. $\frac{1}{f} : C \rightarrow \mathbb{R}$ donde $C = \{x \in A \mid f(x) \neq 0\}$ (si C no es vacío) por $(\frac{1}{f})(x) = \frac{1}{f(x)} \forall x \in A$.
5. Si $g(B) \cap A \neq \emptyset$, la composición $f \circ g : C \rightarrow \mathbb{R}$ donde $C = \{x \in B \mid g(x) \in A\}$ por $(f \circ g)(x) = f(g(x)) \forall x \in C$.

Lo importante de esta definición es la composición. Veremos que generalmente es más complicado tratar con composiciones de funciones que con sumas o multiplicaciones.

Al igual que las sucesiones, las funciones pueden estar acotadas o ser monótonas.

Definición 28 (Acotaciones). Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Decimos que:

1. f está **acotada superiormente** si existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq \alpha \forall x \in A$.
2. f está **acotada inferiormente** si existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq \alpha \forall x \in A$.
3. f está **acotada** si lo está superiormente e inferiormente.

Definición 29 (Monotonía de funciones). Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función.

1. f es **creciente** si $f(x) \leq f(y)$ para cualesquiera $x, y \in A$ tales que $x < y$.
2. f es **decreciente** si $f(x) \geq f(y)$ para cualesquiera $x, y \in A$ tales que $x < y$.

Si las desigualdades son estrictas, se tienen funciones **estrictamente crecientes** y **estrictamente decrecientes**. En cualquiera de estos casos, la función f se dice que es **monótona**.

Definición 30 (Máximos y mínimos). Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que

1. f tiene un **máximo global** en $a \in A$ si $f(a) \geq f(x)$ para todo $x \in A$ distinto de a .
2. f tiene un **mínimo global** en $a \in A$ si $f(a) \leq f(x)$ para todo $x \in A$ distinto de a .
3. f tiene un **máximo local** en $a \in A$ si existe un entorno E de a tal que $f(a) \geq f(x)$ para todo $x \in E$ distinto de a .

4. *f tiene un mínimo local en $a \in A$ si existe un entorno E de a tal que $f(a) \leq f(x)$ para todo $x \in E$ distinto de a .*

*Si las desigualdades son estrictas, añadimos el adjetivo **estricto** al final, por ejemplo máximo local estricto.*

Ejemplo 10. 1. La función $f(x) = x^2$ es decreciente en $(-\infty, 0]$ y creciente en $[0, +\infty]$. Además, esta acotada inferiormente pero no superiormente. En intervalos finitos está acotada.

2. La función $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$ no está acotada. Presenta en $x = 0$ una asíntota vertical.

3. La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \text{ o } x = 0 \\ p & \text{si } x \in \mathbb{Q}, x \neq 0, \text{ y } \exists p, q \in \mathbb{N} \text{ tales que } x = \frac{p}{q} \text{ y } \gcd(p, q) = 1 \\ -p & \text{si } x \in \mathbb{Q}, x \neq 0, \text{ y } \exists p, q \in \mathbb{N} \text{ tales que } x = \frac{-p}{q} \text{ y } \gcd(p, q) = 1 \end{cases}$$

está acotada inferiormente, pero no superiormente. Además, sobre todo intervalo acotado la función no es acotada superiormente.

El último ejemplo es "patológico": es una función definida en todo \mathbb{R} , que no está acotada en ningún intervalo acotado (que no sean un único punto) y no presenta ninguna asíntota en el sentido de la función $f(x) = \frac{1}{x}$. No tiene ningún interés más.

Presentamos ahora definiciones de la teoría de conjuntos:

Definición 31. Sea $f : A \rightarrow B$ con $A, B \subseteq \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es:

1. **Inyectiva**, si $f(x) = f(y)$ implica $x = y$ para todo $x, y \in A$.
2. **Suprayectiva** (o *suryectiva*), si $f(A) = B$.
3. **Biyectiva**, si es inyectiva y suprayectiva.

Ejemplo 11. 1. La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ no es inyectiva mientras que $g : [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$ sí que lo es.

Las funciones biyectivas son importantes, ya que son aquellas que como a cada elemento de la imagen le corresponde un elemento del dominio se pueden invertir:

Definición 32. Dada una aplicación $f : A \rightarrow B$ biyectiva definimos la **aplicación inversa** a la aplicación biyectiva $f^{-1} : B \rightarrow A$ dada por la regla $f^{-1}(b) = a$ si y solo si $f(a) = b$.

Demostración. Es necesario demostrar que esta regla define una aplicación biyectiva. Sea $b \in B$ cualquiera. Por ser f suprayectiva $\exists a \in A$ tal que $f(a) = b$ y por ser inyectiva si $a' \in A$ es otro elemento tal que $f(a') = f(a) = b$ entonces $a' = a$. Por tanto tal a es único y la regla define una aplicación. Ahora bien, si $a \in A$ entonces $f^{-1}(f(a)) = b$ por definición y por tanto f^{-1} es suprayectiva. Además, si $a = f^{-1}(b) = f^{-1}(b')$ para algunos $b, b' \in B$ y $a \in A$ entonces $f(a) = b' = b$ y por tanto f también es inyectiva. \square

También decimos que una aplicación biyectiva es inversible o invertible.

La mayoría de funciones que nos vamos a encontrar no van a ser biyectivas, pero serán especialmente importantes a la hora de hablar de cosas específicas como la regla de la cadena o el cambio de variable en integrales. En el caso que una función sea inyectiva, es posible "restringir" el codominio para obtener una aplicación biyectiva y por tanto inversible. En estos casos decimos que la aplicación original es inversible, y tomaremos su inversa como la inversa de la nueva aplicación. No llevaremos mucho cuidado con esta terminología.

Si una función no es inversible, aún podemos darle sentido a la notación f^{-1} :

Definición 33. Dada una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y un subconjunto $B \subseteq \mathbb{R}$ definimos la **preimagen** de B bajo f como el conjunto $f^{-1}(B) = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$.

Por último, dejamos más definiciones que son parcialmente importantes:

Definición 34. Dada una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definimos la **gráfica** de f como el conjunto $\text{graf } f = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Definición 35. Dada una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ decimos que es:

- **Par** si se cumple $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in A$ con $-x \in A$.
- **Impar** si se cumple $-f(x) = f(-x)$ para todo $x \in A$ con $-x \in A$.

Definición 36. Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice **periódica** si existe un $L \in \mathbb{R}$ tal que $f(x + L) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$, y L se denomina un **periodo** de la función. Si existe un mínimo L distinto de cero que cumpla lo anterior, se le llama **período fundamental**.

Ejemplo 12. ■ $x^2, \cos x, |x|$ son funciones pares, $x^3, \operatorname{sen} x, \frac{1}{x}$ son impares mientras que e^x no es ni par ni impar.

- Los ejemplos clásicos de funciones periódicas son las funciones constantes y las trigonométricas. En el primer caso no existen período fundamental, en el segundo por ejemplo para las funciones \sin y \cos el período fundamental es de 2π .

4.1. Límites

El concepto de límite formaliza la idea de acercarse. Para una función, podemos ver a qué valor se acerca al ir a infinito o cuando tiende a un punto. Esto significa que tenemos que tratar con distintos tipos de límites:

Definición 37. ■ Sea $f : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f **converge** a un valor $L \in \mathbb{R}$ en el infinito positivo si $\forall \varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $x > \delta$ se tiene $|f(x) - L| < \varepsilon$. Si en cambio ocurre que $\forall K \in \mathbb{R}$ existe un $\delta > 0$ tal que si $x > \delta$ se tiene $f(x) > K$ entonces decimos que f **diverge a $+\infty$** . Análogamente se pueden definir para el infinito negativo y para $-\infty$.

- Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y p un punto de acumulación de A . Decimos que f **converge** a un valor $L \in \mathbb{R}$ en p si $\forall \varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|x - p| < \delta$ se tiene $|f(x) - L| < \varepsilon$. Si en cambio ocurre que $\forall K \in \mathbb{R}$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|x - p| < \delta$ se tiene $f(x) > K$ entonces decimos que f **diverge a $+\infty$** en p . Análogamente se define para $-\infty$.
- Sea $f : (p, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f **converge por la derecha** a un valor $L \in \mathbb{R}$ en p si $\forall \varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in (p, p + \delta)$ se tiene $|f(x) - L| < \varepsilon$. Si en cambio ocurre que $\forall K \in \mathbb{R}$ existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in (p, p + \delta)$ se tiene $f(x) > K$ entonces decimos que f **diverge por la derecha a $+\infty$** en p . Análogamente se define para $-\infty$.
- Sea $f : (a, p) \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f **converge por la izquierda** a un valor $L \in \mathbb{R}$ en p si $\forall \varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in (p - \delta, p)$ se tiene $|f(x) - L| < \varepsilon$. Si en cambio ocurre que $\forall K \in \mathbb{R}$ existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in (p - \delta, p)$ se tiene $f(x) > K$ entonces decimos que f **diverge por la derecha a $+\infty$** en p . Análogamente se define para $-\infty$.

Existen muchas combinaciones posibles para cubrir todos los casos. Aquí hemos puesto las básicas. En el caso de la convergencia por la derecha e izquierda, los valores a los que converge la función se dicen **límites laterales**.

El primer paso en el estudio de límites es ver que efectivamente una función solo puede converger a un único valor. Por comodidad, solo enunciamos el resultado para límites no laterales en un punto. Para funciones en el infinito y límites laterales es similar.

Proposición 18. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y p punto de acumulación de A . Si f converge a L_1 y L_2 en p entonces no $L_1 = L_2$.

Definición 38. Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ converge en p punto de acumulación de A a un valor $L \in \mathbb{R}$ este valor es único y se denomina **límite** de la función f en p . Se denota por $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$.

Como hemos dicho, el límite formaliza la idea de que una función se acerque a un valor L conforme el input se acerca a otro valor p . Obviamente es necesario que nos podamos acercar a p , es por esto que pedimos que sea punto de acumulación del dominio. La definición de límite nos garantiza que da igual de qué forma nos acerquemos a p , que f siempre va a acercarse a L . El siguiente teorema especifica más esta idea:

Teorema 19 (Caracterización del límite por sucesiones). Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función y p un punto de acumulación de A . Entonces dado $L \in \mathbb{R}$ son equivalentes:

- $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$.
- Para toda sucesión $\{a_n\}_n$ tal que $a_n \neq p \ \forall n$ que converja a p se tiene $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = L$ (este último límite es de sucesiones).

Generalmente, el teorema anterior se usa para demostrar que algunos límites no existen:

Ejemplo 13. El límite de $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ conforme x tiende a 0 no existe. En efecto, tomando las siguientes sucesiones:

$$x_n = \frac{1}{2n\pi} \quad y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$$

se puede comprobar fácilmente que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ por lo que los límites $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = 1$ y el teorema anterior demuestran que no existe el límite.

Pero veremos que también se puede usar para demostrar la existencia de algunos límites. Es importante tener herramientas para poder calcular límites sin tener que recurrir a la definición.

Teorema 20 (Aritmética de los límites). *Sean $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que p sea un punto de acumulación de A y B , y supongamos que $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L_f$ y $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = L_g$. Entonces se cumple:*

- Si $a \in \mathbb{R}$ entonces $\lim_{x \rightarrow p} af(x) = aL_f$.
- $\lim_{x \rightarrow p} f(x) + g(x) = L_f + L_g$.
- $\lim_{x \rightarrow p} f(x)g(x) = L_f L_g$.
- Si $L_g \neq 0$ entonces $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_f}{L_g}$.

Teorema 21 (Orden de los límites). *Sean $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ y p un punto de acumulación de A . Supongamos que $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L_f$ y $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = L_g$.*

- Si $L_f < L_g$ entonces existe un entorno reducido U de p tal que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in U \cap A$. TODO: Hemos definido entorno reducido?
- Si $f(x) < g(x)$ para todo $x \in U \cap A$ en un entorno reducido U de p entonces $L_f \leq L_g$.

Teorema 22 (Regla del sandwich). *Sean $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$ y p un punto de acumulación de A , tales que se cumpla $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo $x \in A$ y $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} g(x) = L$, con L posiblemente infinito. Entonces $\exists \lim_{x \rightarrow p} h(x) = L$.*

Ejemplo 14. Calculamos el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{x + 3\sqrt{x}}.$$

Primero notamos que es igual a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{3}{2}} \sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{x} + 3}.$$

cuyo numerador vamos a demostrar que tiende a 0, y como su denominador tiende a 3 vamos a tener que el límite original vale 0. Como $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ se tiene $-1 \leq \sin(\frac{1}{x}) \leq 1$ y como la función solo está definida para $x \geq 0$ tendremos $-x^{\frac{3}{2}} \leq x^{\frac{3}{2}} \sin(\frac{1}{x}) \leq x^{\frac{3}{2}}$, y como el mayorando y el menorando tienden a 0 por la regla del sandwich $\exists \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{3}{2}} \sin(\frac{1}{x}) = 0$.

Otra herramienta poderosa para calcular límites que abre las puertas al campo del análisis asintótico son las equivalencias.

Definición 39. Sean $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ y p un punto interior de A . Se dice que f y g son **equivalentes** en p si existe una función $h : A \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface $\lim_{x \rightarrow p} h(x) = 1$ y $f(x) = g(x)h(x)$ para todo $x \in A \setminus \{p\}$. Lo denotamos por $f \sim_p g$.

Definición 40. Sean $f, g : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que f y g son **equivalentes en el infinito** positivo si existe una función $h : A \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$ y $f(x) = g(x)h(x)$ para todo $x \in (b, +\infty)$ con $b \geq a$. Lo denotamos por $f \sim_{+\infty} g$. También se definen análogamente para el infinito negativo.

Proposición 19. Sean $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ y p un punto interior de A . Supongamos que en un entorno reducido U de p se tiene $g(x) \neq 0$ para todo $x \in U \cap A$. Entonces son equivalentes:

- $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
- $f \sim_p g$.

Esta proposición permite una demostración más fácil de distintas equivalencias y da una mejor intuición que la definición. Podríamos tomar la definición de equivalencias como la equivalencia del teorema, pero estaríamos excluyendo el caso en el que ambas funciones tengan ceros en todo entorno reducido de p , y además haría de la relación de ser equivalente una relación no equivalente.

Proposición 20. ■ Las relaciones \sim_p y \sim_{∞} son relaciones binarias de equivalencia (RBE).

- Si $f_1 \sim_p g_1$ y $f_2 \sim_p g_2$ entonces $f_1 f_2 \sim_p g_1 g_2$.
- Si $f_1 \sim_p g_1$, $f_2 \sim_p g_2$ y f_2, g_2 no se anulan en un entorno reducido de p entonces $\frac{f_1}{f_2} \sim_p \frac{g_1}{g_2}$.
- TODO: Comp

Proposición 21 (Lista básica de equivalencias). *Se cumple:*

- $\sin(x) \sim_0 x$.
- $1 - \cos(x) \sim_0 \frac{x^2}{2}$.
- $\tan(x) \sim_0 x$.
- Si $a > 1$, $a^x - 1 \sim_0 x \log(a)$. En concreto $e^x - 1 \sim_0 x$.
- $\log(1 + x) \sim_0 x$.

Ahora podemos usarlas para calcular algunos límites.

Ejemplo 15. 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 - \cos(x))}{\sin^4(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \frac{x^2}{2}}{x^4} = \frac{1}{2}.$$

2. Sean a, b constantes reales y positivas. Si $a \geq b$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} b^x \frac{\frac{a^x}{b^x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log(\frac{a}{b})}{x} = \log(\frac{a}{b}).$$

Si $a < b$, dividimos por a^x en vez de b^x y terminamos obteniendo el mismo resultado.

Más concretamente, la proposición (19) es una forma más clara de ver que la tendencia de dos funciones equivalentes en un punto p (o en el infinito) alrededor de p es “la misma”. También existe notación para expresar que una función tiende a 0 más rápido que otra: TODO: Generalizarla al estilo de las equivalencias?

Definición 41. Supongamos que $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función definida en un intervalo abierto I , tal que $g(p) = 0$ en $p \in I$ y $g(x) \neq 0$ en un entorno reducido de p . Decimos que otra función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ con $p \in \text{Int}(A)$ es una **o pequeña** de g en p si

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

y en tal caso escribimos $f \in o_p(g)$, donde $o_p(g)$ es el conjunto de todas las funciones o pequeñas de g en p .

Generalmente, el punto p de la notación $o_p(g)$ se excluye en los casos en los que sea obvio de que punto se habla. También se suele realizar el siguiente abuso de notación, en vez de hablar de $o_p(g)$ como conjunto se trata como una “función”:

$$f(x) = o_p(g(x)).$$

Esto simplemente significa que f es igual a alguna función del conjunto $o_p(g(x))$.

Aunque hayamos introducido la definición con cierta generalidad, su mayor uso será en la sección de Taylor, considerando o pequeñas de funciones de la forma $(x - p)^n$ para $p \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Es por esto que introducimos algunas propiedades de estas o pequeñas aquí:

Proposición 22. Para toda pareja de naturales $m \leq n$:

$$o((x - p)^m) \subseteq o((x - p)^n).$$

Proposición 23. Para toda pareja de naturales $m \leq n$:

$$o((x - p)^m) + o((x - p)^n) = o((x - p)^m).$$

(Aquí la suma denota la suma estándar de conjuntos: $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.)

TODO: límites en un punto e infinito, laterales, caracterización por sucesiones, operaciones con límites, límite inferior y superior, límites de funciones monótonas, equivalencias, notación O y o, condición de Cauchy

4.2. Continuidad

Definición 42. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es **continua** en un punto $a \in A$ si y solo si se cumple una de estas dos condiciones:

1. a es un punto aislado de A .
2. a es un punto de acumulación de A y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Si f es continua en todo $p \in P \subseteq A$ se dice que f es continua en P , y si es continua en todo punto de su dominio simplemente se dice continua.

Definición 43. Decimos que una función $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es **continua de Lipschitz** si $\exists K \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y| \quad \forall x, y \in (a, b).$$

Proposición 24. Una función continua de Lipschitz es continua.

Demostración. Tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$ en la definición de continuidad. □

Proposición 25. Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es función continua en p y $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ también, entonces $f + g$, fg , $-f$ también lo son. Además, si $g(p) \neq 0$ entonces $\frac{f}{g}$ también lo es.

Demostración. Aplicar los resultados correspondientes a límites de funciones. En el caso que una de las funciones sea continua en p por ser p punto aislado del dominio, entonces p será punto aislado del dominio de $f + g$, fg y $\frac{f}{g}$ y así serán continuas. □

Proposición 26. Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ funciones continuas en $p \in A$ y $f(p)$ respectivamente. Entonces $g \circ f$ es continua en p .

Proposición 27. Una función $f : A \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ es continua si y solo si para todo abierto $U \subseteq \mathbb{R}$ el conjunto $f^{-1}(B \cap U)$ es abierto.

Proposición 28. Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y A es compacto entonces $f(A)$ es compacto.

Teorema 23 (Teorema de Weierstrass). Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y A es compacto entonces f alcanza su máximo y su mínimo en A .

Proposición 29 (Teorema de Bolzano). Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua tal que $f(a)f(b) < 0$ entonces $\exists x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = 0$.

Teorema 24 (Teorema de los valores intermedios). Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua entonces $f(A)$ es un intervalo.

Definición 44. Una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente continua si $\forall \varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in A$ se tiene que si $|x - y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Proposición 30. Una función continua de Lipschitz es uniformemente continua y una función uniformemente continua es continua.

Teorema 25 (Teorema de Borel). Una función continua definida en un conjunto compacto es uniformemente continua en tal conjunto.

TODO: funciones continuas monotonas, definiciones, continuidad lateral, operaciones, lipschitz, holder, uniformemente continua, teoremas del valor intermedio (bolzano), weierstrass, borel,

5. Derivabilidad de funciones reales

El objetivo elemental de la derivada es el estudio de como varia cierta función. TODO: Explicación

Definición 45. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $p \in A$ un punto interior de A . Decimos que f es **derivable** en p si y solo si existe el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

y en caso de que exista, el valor de tal límite se denomina **derivada** de f en el punto p y se denota $f'(p)$. Si f es derivable en todo punto de un conjunto $B \subseteq A$ se dice **derivable** en B y se define la **función derivada** como la función que en cada punto de B toma el valor de la derivada de f en ese punto. Tal función se denota por f' .

Ejemplo 16. $f(x) = x$ es derivable en todo \mathbb{R} y su derivada es igual a 1. En efecto, si $p \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{x - p}{x - p} = \lim_{x \rightarrow p} 1 = 1.$$

TODO: Derivadas de x^n , trigonometricas, exponenciales, logaritmos.

Una función derivable posee cierta “suavidad” que es más fuerte que una función continua:

Proposición 31. Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en $p \in A$ entonces f es continua en p .

Demostración. Como p es punto interior de A , es también punto de acumulación de A . Por eso

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} (x - p) + f(p) = f'(p) * 0 + f(p) = f(p)$$

implica que f es continua en p . □

Otra propiedad importante de las funciones derivables es que se pueden “aproximar” en cierto sentido por funciones más simples, las funciones afines, en cada punto. Esto no parece intuitivo de primeras (la noción de derivada solo parecía tener que ver con el cambio), y de hecho para funciones de varias variables (que no tratamos en este documento) esto no es cierto. Primero, tenemos que definir una noción adecuada de “ser aproximable por una función afín”.

Definición 46. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $p \in A$ un punto interior de A . Decimos que f es **diferenciable** en p si y solo si existe una función lineal T en un entorno de p tal que

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p) - T(x - p)}{x - p} = 0.$$

La función T se denomina **diferencial** de f en p .

Reescribiendo la definición obtenemos

$$f(x) = f(p) + T(x - p) + o_p(x - p)$$

lo que implica que cerca del punto p la función afín $f(p) + T(x - p)$ aproxima a $f(x)$ de forma que el resto de la aproximación tiende a 0 más rápido que $x - p$. Esto resulta ser equivalente a que la función f sea derivable en un punto p :

Proposición 32. Una función f es derivable en p si y solo si es diferenciable en p .

Esta forma de aproximar funciones es muy pobre, ya que solo nos sirve cerca de puntos donde sepamos el valor de la función y no tenemos una forma de acotar el error. La idea de aproximar funciones por funciones más simples se expande en la sección de desarrollos de Taylor, en los que se busca aproximar funciones por polinomios. Estas aproximaciones resultan ser más precisas que usar funciones afines.

Como es costumbre, relacionamos las operaciones aritméticas con el concepto de derivada.

Proposición 33. Sean $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ funciones, con $p \in A \cap B$ un punto interior de A y B . Si f y g son derivables en p , entonces las funciones $f + g$, fg y af para todo $a \in \mathbb{R}$ son derivables en p , además sus derivadas valiendo $f'(p) + g'(p)$, $f'(p)g(p) + f(p)g'(p)$ y $af'(p)$. Si $g'(p) \neq 0$ entonces $\frac{f}{g}$ es derivable en p , y su derivada vale $\frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{(g(p))^2}$.

Proposición 34 (Regla de la cadena). Sean $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ funciones, con p punto interior de B , $g(p)$ punto interior de A y además $g(B) \subseteq A$. Entonces la función $g \circ f$ es derivable en p y se tiene $(g \circ f)'(p) = g'(f(p))f'(p)$.

Estas proposiciones sirven para obtener derivadas de muchas funciones una vez se conocen unas pocas derivadas de funciones elementales:

Proposición 35 (Tabla de derivadas).

La derivada tiene una relación importante con los máximos y mínimos de una función.

Proposición 36. *Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función con un máximo (mínimo) local en p un punto interior de A . Si f es derivable en p entonces $f'(p) = 0$.*

Demostración. Hacemos la demostración para un máximo local en p . Como p es un máximo local de f , existirá un entorno intervalo $E = (p-\varepsilon, p+\varepsilon)$ para él que $f(p) \geq f(x)$ para todo $x \in E$. Esto implica que en este intervalo se tiene $f(p) - f(x) \geq 0$. Si $x_- \in E$ y $x_- < p$ se tiene $p - x_- \geq 0$ y por tanto $\frac{f(p) - f(x_-)}{p - x_-} \geq 0$ y por el orden de los límites $f'(p) \geq 0$. En cambio, si $x_+ \in E$ con $x_+ > p$ se tendrá $p - x_+ \leq 0$, por lo que $\frac{f(p) - f(x_+)}{p - x_+} \leq 0$ y así $f'(p) \leq 0$. Como tenemos $0 \geq f'(p) \geq 0$ por las propiedades del orden se tiene $f'(p) = 0$. \square

Esta relación se expande en la sección de comportamiento local. La hemos presentado aquí para poder hacer la demostración de los siguientes teoremas.

Teorema 26 (Teorema de Rolle). *Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Si se tiene $f(a) = f(b)$ entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demostración. Como f es continua en $[a, b]$, por el teorema de Weierstrass obtendrá su máximo y mínimo globales en el intervalo. Si alguno de estos está dentro de (a, b) entonces será un máximo o mínimo local, por lo que tendremos $f'(c) = 0$ con c el máximo o mínimo. Si ninguno está dentro de (a, b) es necesario que uno sea a y el otro b , pero al tener $f(a) = f(b)$ esto implica que la función es constante en $[a, b]$ y por tanto $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$. \square

Teorema 27 (Teorema del valor medio, o los incrementos finitos de Lagrange). *Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Entonces existirá $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demostración. Se define $g(x) = f(x) - x \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ y se observa que $g(a) = g(b)$. Aplicando el teorema de Rolle a g se obtiene el resultado. \square

Teorema 28 (Teorema de los incrementos finitos de Cauchy). *Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas en $[a, b]$, derivables en (a, b) y con $g(a) \neq g(b)$. Entonces existirá $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)).$$

Teorema 29 (Teorema de Darboux). *Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua y derivable en A con A un intervalo abierto. Si $a, b \in A$ con $a < b$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ es un valor entre $f'(a)$ y $f'(b)$ entonces existe un $c \in [a, b]$ tal que $f'(c) = \alpha$.*

5.1. Taylor I

Definición 47. *Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un entorno de x_0 . Decimos que un polinomio p_n de grado n es un desarrollo polinomial de f en x_0 si se tiene $f(x) - p_n(x) = o_{x_0}((x - x_0)^n)$.*

Proposición 37. *Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in \text{Int}(A)$. Si f es $n - 1$ veces derivable en p entonces son equivalentes:*

- $f(x) = o((x - x_0)^n)$.
- Existe la n -ésima derivada en x_0 y además $f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$.

Proposición 38. *Si f admite un desarrollo polinomial p_n de grado n en un punto x_0 entonces todo desarrollo polinomial de grado n en x_0 es igual a p_n .*

Demostración. TODO: Se puede hacer más claro

Sea q_n un desarrollo polinomial de f de grado n en x_0 . Aplicando el teorema anterior a $f(x) - q_n(x)$ obtenemos que $f^{(k)}(x_0) = q_n^{(k)}(x_0)$ para todo $k = 0, 1, \dots, n$. Si consideramos los $n + 1$ coeficientes del polinomio q_n como indeterminados obtenemos de $f^{(k)}(x_0) = q_n^{(k)}(x_0)$ un sistema de $n + 1$ ecuaciones lineales que son linealmente independientes entre sí, por tanto tal sistema es compatible determinado y tiene una única solución. \square

Teorema 30 (Teorema de Taylor). *Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función $n - 1$ veces derivable en un entorno de $x_0 \in \mathbb{R}$, con n -ésima derivada en x_0 . Entonces f admite un desarrollo polinomial de grado n en x_0*

$$f(x) = \sum_{m=0}^n \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x - x_0)^m + o_{x_0}((x - x_0)^n).$$

Tal polinomio se llama **polinomio de Taylor** de f en x_0 de grado n , y lo denotamos por $P_{n;x_0}(x)$.

Teorema 31 (Teoremas del resto). *Sea f una función $n + 1$ veces derivable en un entorno A de x_0 . Se tiene:*

- Para todo $x \in A$ existe un punto c entre x_0 y x tal que

$$f(x) - P_{n;x_0}(x) = f^{(n+1)}(c) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Esta fórmula recibe el nombre de resto de Lagrange.

- Para todo $x \in A$ existe un punto c entre x_0 y x tal que

$$f(x) - P_{n;x_0}(x) = f^{(n+1)}(c) \frac{(x - c)^n (x - x_0)}{n!}.$$

Esta fórmula recibe el nombre de resto de Cauchy.

TODO: Desarrollos de funciones resultantes de operaciones (sumas, multiplicaciones, derivadas, “integrales”, componer, dividir), equivalencias, ejemplos de desarrollos

5.2. Comportamiento local

El teorema de Taylor nos permite obtener una caracterización del comportamiento local de una función en lo que respecta al crecimiento y decrecimiento.

Corolario 7. *Sea f una función derivable $n - 1$ veces en un entorno E de un punto x_0 , tal que existe la derivada n -ésima en x_0 con n par. Supongamos que se cumple $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ y que $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Entonces si $f^{(n)}(x_0) < 0$ x_0 es un máximo local, y si $f^{(n)}(x_0) > 0$ x_0 es un mínimo local. Si n fuera impar, si $f^{(n)}(x_0) < 0$ f es localmente decreciente en x_0 y si $f^{(n)}(x_0) > 0$ f es localmente creciente en x_0 .*

Aunque este corolario sea todo lo que vayamos a necesitar, es importante dar dos resultados más pequeños que generalmente son suficientes.

Proposición 39. *Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en I y dos veces derivable en un punto $x_0 \in I$, tal que $f'(x_0) = 0$.*

- Si $f''(x_0) > 0$ entonces x_0 es un mínimo local.
- Si $f''(x_0) < 0$ entonces x_0 es un máximo local.

Definición 48. *Sea f una función derivable en x_0 . x_0 se dice **punto crítico** de f si $f'(x_0) = 0$.*

Proposición 40. *Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en (a, b) y continua en $[a, b]$.*

- Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces f es creciente en $[a, b]$.
- Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces f es decreciente en $[a, b]$.

TODO: Puntos críticos, crecimiento y decrecimiento, convexidad y concavidad

6. Integrabilidad de funciones reales

6.1. Cálculo de primitivas

6.2. La integral de Riemann y Darboux

6.3. Teoremas fundamentales

6.4. Integrabilidad impropia

6.5. Funciones beta y gamma

6.6. Integrales definidas no elementales

Es interesante que incluso en el caso que una función no tenga primitiva expresable con funciones elementales se puede dar un valor exacto a algunas integrales definidas. Generalmente, estas integrales se hacen todas de forma diferente y existen muchos trucos para calcularlas, aquí presentamos solo algunos.

Proposición 41 (Regla de King). *Si $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable entonces:*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a + b - x) dx.$$

Demostración. Aplicar la sustitución $u = a + b - x$. □

Ejemplo 17. Procedemos al cálculo de integrales de la forma

$$I = \int_a^b \frac{f(x)}{f(x) + f(a + b - x)} dx.$$

Por la regla de King

$$I = \int_a^b \frac{f(x)}{f(x) + f(a + b - x)} dx = \int_a^b \frac{f(a + b - x)}{f(x) + f(a + b - x)} dx.$$

Tomando dos veces I , una sustituyendo la primera expresión y después sustituyendo la segunda se obtiene

$$2I = \int_a^b \frac{f(x) + f(a + b - x)}{f(x) + f(a + b - x)} dx = \int_a^b 1 dx = a - b,$$

y finalmente

$$\int_a^b \frac{f(x)}{f(x) + f(a + b - x)} dx = \frac{a - b}{2}.$$

Por ejemplo, aplicando la fórmula obtendríamos

$$\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{\arctan(x) + \arctan(1-x)} dx = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 18.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\tan x) dx = 0$$

Ejemplo 19.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x) dx = \frac{-\pi}{2} \log(2)$$

Esta integral es bastante interesante y se puede calcular de muchas formas. La más elemental usa la regla de King, como detallamos ahora.

A parte de la sustitución de la regla de King, otras sustituciones son útiles.

Ejemplo 20.

$$\int_0^\infty \frac{\log(x)}{(1+x)^2} dx = 0$$

Otra técnica es la derivación bajo el signo integral

Ejemplo 21.

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} dx$$

Ejemplo 22.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log(\sin x))^2 dx$$

7. Series numéricas

7.1. Series de términos no negativos

7.2. Series de términos arbitrarios

8. Series funcionales y de potencias

8.1. Sucesiones y series de funciones

8.2. Convergencia uniforme

8.3. Series de potencias y Taylor II

9. Anexo: Funciones trigonométricas

La introducción de las funciones trigonométricas en estos apuntes no ha sido de una manera rigurosa. Se asume que el lector ha aprendido trigonometría anteriormente, y allí se definen de una forma geométrica. Si hablamos en términos formales, podemos introducir las funciones trigonométricas mediante sus series de Taylor:

Definición 49. *Las funciones **coseno** y **seno** se definen como*

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{(2n)}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{(2n+1)}$$

Ambas series convergen en todo \mathbb{R} . La función **tangente** se define como $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Aparte de estas, se definen la **secante**, **cosecante** y **cotangente** como $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$, $\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$ y $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$ respectivamente.

Otra forma de introducirlas es mediante ecuaciones diferenciales, pero no lo hacemos aquí ya que no hemos desarrollado la teoría.

Teorema 32 (Fórmula de Euler).

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

Con esta fórmula demostrar las siguientes identidades es fácil.

Proposición 42.

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \\ \sin(2\theta) &= 2 \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \tan(2\theta) &= \frac{2 \tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)} \\ \cos(3\theta) &= 4 \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta) \\ \sin(3\theta) &= -4 \sin^3(\theta) + 3 \sin(\theta)\end{aligned}$$

La identidad del ángulo triple tiene una consecuencia interesante: se puede usar para obtener una solución general a ecuaciones polinomiales de tercer grado.