1. Introducción a los conjuntos numéricos

Sea $\mathbb{N}$ un conjunto con un elemento que denominamos 1. Ahora, para todo elemento n de $\mathbb{N}$ añadimos a $\mathbb{N}$ el sucesor, $S(n)$ o $n+1$. Esto da un conjunto infinito, los **números naturales**. En este conjunto tenemos el principio de inducción:

Axioma 1 (Principio de inducción en $\mathbb{N}$)**.** *Sea $S \subseteq \mathbb{N}$. Si S satisface las siguientes 2 condiciones, entonces $S = \mathbb{N}$:*

- $1 \in S$
- $\forall n \in S \; n+1 \in S$

Este principio es muy útil para probar cosas sobre $\mathbb{N}$, por ejemplo la forma cerrada de una sucesión. En $\mathbb{N}$ también podemos definir algo denominado **orden total**, que es una relación binaria $\leq$ que sigue los siguientes axiomas:

Axioma 2 (Axiomas de orden total)**.** $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$

1. *$a \leq a$ (Reflexividad)*
2. *$a \leq b$ y $b \leq c$ implica $a \leq c$ (Transitivdad)*
3. *$a \leq b$ y $b \leq a$ implica $a = b$ (Antisimetría)*
4. *$a \leq b$ o $b \leq a$ (Totalidad)*

Con este orden total definido, podemos reformular el principio de inducción como:

Axioma 3 (Principio de buena ordenación en $\mathbb{N}$)**.** $\forall S \subseteq \mathbb{N} \; S \neq \emptyset, \exists n \in S \mid \forall x \in S, n \leq x$. *Es decir, todo subconjunto de los números naturales tiene mínimo.*

Estas dos formulaciones son equivalentes. Los números naturales además cumplen los siguientes axiomas algebraicos:

Axioma 4 (Axiomas de semianillo unitario ordenado)**.** $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$*:*

1. *$(a+b)+c = a+(b+c)$ (Asociatividad de la suma)*
2. *$a+b = b+a$ (Conmutatividad de la suma)*
3. *$(a*b)*c = a*(b*c)$ (Asociatividad de la multiplicación)*
4. *$a*b = b*a$ (Conmutatividad de la multiplicación)*
5. *$a*(b+c) = a*b + a*c$ (Distributividad de la multiplicación sobre la suma)*
6. *$\exists \; 1 \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, 1*n = n$ (Elemento neutro del producto)*
7. *$a \leq b \;\Rightarrow\; a+c \leq b+c$ (Compatibilidad del orden con la suma)*
8. *Si $c \geq 0$ (que es trivial en $\mathbb{N}$), entonces $a \leq b \;\Rightarrow\; ac \leq bc$ (Compatibilidad del orden con el producto)*

Estos axiomas son particularmente débiles. Por ejemplo, para la ecuación $x+2=4$ obviamente $x=2$, pero no existe ninguna forma de probarlo fácilmente, cuando la existencia de inversos para cada número ayudaría inmensamente. Además, ecuaciones como $x+4=2$ no tienen solución en $\mathbb{N}$. Por eso definimos un nuevo conjunto denominado $\mathbb{Z}$, los **números enteros**:

Definición 1 (Números enteros)**.** $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n \; \forall n \in \mathbb{N}\}$ *donde 0 denota la identidad para la suma y $-n$ el inverso para la suma de n.*

Estos números, ademas de los *Axiomas 4*, cumplen los siguientes axiomas:

Axioma 5 (Axiomas adicionales para $\mathbb{Z}$)**.**

1. *$\exists \; 0 \in \mathbb{Z} \mid \forall n \in \mathbb{N}, 0+n = n$ (Elemento neutro de la suma)*
2. *$\forall n \in \mathbb{Z}, \exists -n \in F \mid n+(-n) = 0$ (Existencia del elemento inverso para la suma)*

Con estos axiomas, se dice que $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo conmutativo y que $(\mathbb{Z}, +, *)$ es un anillo conmutativo. A cambio de estos axiomas algebraicos, perdemos el principio de inducción en los números enteros, pero mantenemos una versión del principio de buena ordenación:

Axioma 6 (Principio de buena ordenación de subconjuntos minorados de $\mathbb{Z}$)**.** $\forall S \subseteq \mathbb{Z} \; S \neq \emptyset$ *si* $\exists n \in \mathbb{Z} \mid \forall x \in S, n \leq x$ *entonces* $\exists m \in S \mid \forall x \in S, m \leq x$. *Es decir, todo subconjunto no vacío con cota inferior tiene un elemento mínimo.*

Este axioma para $\mathbb{Z}$ implica el *Axioma 3* para los naturales. El conjunto de los números enteros aún tiene unos cuantos problemas. Por ejemplo, es imposible resolver la ecuación $2x = 1$ para $x \in \mathbb{Z}$. Por eso, podemos definir otro conjunto de números construidos sobre los números enteros, los **números racionales**, denotados por $\mathbb{Q}$:

Definición 2 (Números racionales)**.** $\mathbb{Q} = \{p/q, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$

Aparte de cumplir los *Axiomas 4 y 5*, $\mathbb{Q}$ cumple:

Axioma 7 (Axioma algebraico adicional para $\mathbb{Q}$)**.**

1. $\forall q \in \mathbb{Q}\ q \neq 0, \exists\ 1/q \in \mathbb{Q} \mid q * (1/q) = 1$ *(Existencia del inverso de elementos no nulos para el producto)*

Esto hace de $\mathbb{Q}$ un cuerpo conmutativo. $\mathbb{Q}$ no tiene ni principio de buena ordenación, ni de buena ordenación de subconjuntos minorados (por ejemplo, el conjunto $S = \{1/n\ \forall n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Q}$ esta acotado inferiormente pero no tiene mínimo). Esto nos quita una vía de demostrar, pero "quitamos"más agujeros que existían en los números enteros:

Teorema 1 (Densidad de $\mathbb{Q}$)**.** $\forall a, b \in \mathbb{Q}\ a \neq b,\ \exists r \in \mathbb{Q} \mid a < r < b$. *Es decir, entre dos números racionales distintos siempre vamos a poder encontrar otro número racional. De hecho, vamos a poder encontrar infinitos aplicando el teorema cuantas veces como queramos.*

Demostración. Dados $a < b \in \mathbb{Q}$: $a = (a + a)/2 < (a + b)/2 < (b + b)/2 = b$. $(a + b)/2$ es el número que buscamos. □

De este teorema podemos deducir que no existe una función sucesora en $\mathbb{Q}$, y por tanto no tenemos alternativa a inducción. Pero este teorema no es suficiente para que $\mathbb{Q}$ sea el conjunto numérico perfecto para hacer análisis. Aún existen agujeros, como demuestra el siguiente ejemplo:

Proposición 1. *No existe ningún* $a \in \mathbb{Q}$ *tal que* $a^2 = 2$.

Demostración. Supongamos que $\exists a \in \mathbb{Q}$ tal que $a^2 = 2$. Al ser un número racional, lo podemos escribir de la forma $\frac{p}{q}$ con $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ y $\gcd(p, q) = 1$ (donde gcd denota el máximo común divisor). Por tanto, tenemos la expresión $\frac{p^2}{q^2} = 2$, de donde deducimos que $p^2 = 2q^2$ y debido a que 2 es un número primo, que $2|p$ o más concretamente $p = 2k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Substituyendo otra vez obtenemos $4k^2 = 2q^2$ y deducimos $2k^2 = q^2$, que de forma similar nos deja ver que q es también múltiplo de 2. Pero inicialmente hemos asumido que el máximo común divisor de p y q es $1 < 2$ y no mayor o igual a 2, por lo cual hemos encontrado una contradicción y la proposición es cierta. □

Esto es problemático, ya que intuitivamente deberíamos de poder encontrar un valor que cumpla $a^2 = 2$. Para poder arreglar este problema necesitamos una definición primero:

Definición 3 (Supremo e ínfimo)**.** *Sea* A *un subconjunto numérico acotado superiormente. Si existe la mínima cota superior (es decir, un número* ω *que sea cota superior del conjunto y tal que cualquier otra cota superior* α *sea* $\omega \leq \alpha$*) esta será única y la llamaremos* ***supremo****. Dualmente, a la máxima cota inferior en un subconjunto acotado inferiormente la llamaremos* ***ínfimo****. Se denotan* $\sup A$ *y* $\inf A$.

La definición parece ajena al ejemplo de "agujero" que hemos dado en la *Proposición 1*, pero es la más general que engloba todos los casos que necesitamos. El subconjunto $A \subseteq \mathbb{Q}$ definido como $A = \{a \in \mathbb{Q} \mid a^2 \leq 2\}$ esta acotado superiormente por 2 y es posible demostrar que si existiera un supremo, este número sería tal que su cuadrado fuera igual a 2, pero en $\mathbb{Q}$ no existe. Por tanto, podemos pensar que "añadiendo todos los supremos" completaríamos $\mathbb{Q}$. Este es el procedimiento que seguimos:

Axioma 8 (Axioma del supremo)**.** *Todo subconjunto acotado superiormente tiene supremo.*

Definición 4 (Números reales)**.** *Al conjunto* $\mathbb{R}$ *con* $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ *y que cumpla el Axioma 8 lo llamamos los* ***números reales****.*

Este conjunto no es único, pero si es único bajo isomorfismos, que viene a decir que cualesquiera dos conjuntos con estas propiedades tienen la misma estructura y por tanto no hace falta distinguirlos.

2. Sucesiones de números reales

3. Funciones, límites y continuidad

4. Derivabilidad de funciones reales