1. Introducción a los conjuntos numéricos

1.1. Construcciones

Nota 1. *Las definiciones y construcciones de los conjuntos numéricos estándares aquí no se dan de una forma muy rigurosa. Su construcción es más propia de una asignatura de fundamentos matemáticos, y ahora mismo me da mucha pereza escribir todo. Aquí solo nos preocupará la construcción de los números reales.*

Sea $\mathbb{N}$ un conjunto con un elemento que denominamos 1. Ahora, para todo elemento n de $\mathbb{N}$ añadimos a $\mathbb{N}$ el sucesor, $S(n)$ o $n+1$. Esto da un conjunto infinito, los **números naturales**. En este conjunto tenemos el principio de inducción:

Axioma 1 (Principio de inducción en $\mathbb{N}$). *Sea $S \subseteq \mathbb{N}$. Si S satisface las siguientes 2 condiciones, entonces $S = \mathbb{N}$:*

- $1 \in S$
- $\forall n \in S \; n+1 \in S$

Este principio es muy útil para probar cosas sobre $\mathbb{N}$, por ejemplo la forma cerrada de una sucesión. En $\mathbb{N}$ también podemos definir algo denominado **orden total**, que es una relación binaria $\leq$ que sigue los siguientes axiomas:

Axioma 2 (Axiomas de orden total). $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$

1. $a \leq a$ *(Reflexividad)*
2. $a \leq b$ *y* $b \leq c$ *implica* $a \leq c$ *(Transitivdad)*
3. $a \leq b$ *y* $b \leq a$ *implica* $a = b$ *(Antisimetría)*
4. $a \leq b$ *o* $b \leq a$ *(Totalidad)*

Cuando tenemos un orden parcial o total definido sobre un conjunto, podemos hablar de cotas y máximos y mínimos:

Definición 1. *Sea $S \subseteq X$ donde X es un conjunto con un orden parcial o total $\leq$. S es...*

- ***Acotado superiormente*** *si $\exists r \in X$ tal que $x \leq r \; \forall x \in S$.*
- ***Acotado inferiormente*** *si $\exists r \in X$ tal que $r \leq x \; \forall x \in S$.*

Y decimos que un elemento $r \in S$ es...

- *Un **máximo** si $\forall x \in S \; x \leq r$.*
- *Un **mínimo** si $\forall x \in S \; r \leq x$.*

Con este orden total definido, podemos reformular el principio de inducción como:

Axioma 3 (Principio de buena ordenación en $\mathbb{N}$). $\forall S \subseteq \mathbb{N} \; S \neq \emptyset, \exists n \in S \mid \forall x \in S, n \leq x$. *Es decir, todo subconjunto de los números naturales tiene mínimo.*

Estas dos formulaciones son equivalentes. Los números naturales además cumplen los siguientes axiomas algebraicos:

Axioma 4 (Axiomas de semianillo unitario ordenado). $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$*:*

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$ *(Asociatividad de la suma)*
2. $a+b = b+a$ *(Conmutatividad de la suma)*
3. $(a*b)*c = a*(b*c)$ *(Asociatividad de la multiplicación)*
4. $a*b = b*a$ *(Conmutatividad de la multiplicación)*
5. $a*(b+c) = a*b+a*c$ *(Distributividad de la multiplicación sobre la suma)*
6. $\exists \; 1 \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, 1*n = n$ *(Elemento neutro del producto)*
7. $a \leq b \;\Rightarrow\; a+c \leq b+c$ *(Compatibilidad del orden con la suma)*
8. *Si* $c \geq 0$ *(que es trivial en $\mathbb{N}$), entonces* $a \leq b \;\Rightarrow\; ac \leq bc$ *(Compatibilidad del orden con el producto)*

Estos axiomas son particularmente débiles. Por ejemplo, para la ecuación $x + 2 = 4$ obviamente $x = 2$, pero no existe ninguna forma de probarlo fácilmente, cuando la existencia de inversos para cada número ayudaría inmensamente. Además, ecuaciones como $x + 4 = 2$ no tienen solución en $\mathbb{N}$. Por eso definimos un nuevo conjunto denominado $\mathbb{Z}$, los **números enteros**:

Definición 2 (Números enteros)**.** $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n\ \forall n \in \mathbb{N}\}$ *donde* 0 *denota la identidad para la suma y* $-n$ *el inverso para la suma de* n*.*

Estos números, ademas de los *Axiomas 4*, cumplen los siguientes axiomas:

Axioma 5 (Axiomas adicionales para $\mathbb{Z}$)**.**

1. $\exists\ 0 \in \mathbb{Z} \mid \forall n \in \mathbb{N}, 0 + n = n$ *(Elemento neutro de la suma)*

2. $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists -n \in F \mid n + (-n) = 0$ *(Existencia del elemento inverso para la suma)*

Con estos axiomas, se dice que $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo conmutativo y que $(\mathbb{Z}, +, *)$ es un anillo conmutativo. A cambio de estos axiomas algebraicos, perdemos el principio de inducción en los números enteros y la existencia de un elemento mínimo, pero mantenemos una versión del principio de buena ordenación:

Axioma 6 (Principio de buena ordenación de subconjuntos minorados de $\mathbb{Z}$)**.** $\forall S \subseteq \mathbb{Z}\ S \neq \emptyset$ *si* $\exists n \in \mathbb{Z} \mid \forall x \in S, n \leq x$ *entonces* $\exists m \in S \mid \forall x \in S, m \leq x$*. Es decir, todo subconjunto no vacío con cota inferior tiene un elemento mínimo.*

Este axioma para $\mathbb{Z}$ implica el *Axioma 3* para los naturales. El conjunto de los números enteros aún tiene unos cuantos problemas. Por ejemplo, es imposible resolver la ecuación $2x = 1$ para $x \in \mathbb{Z}$. Por eso, podemos definir otro conjunto de números construidos sobre los números enteros, los **números racionales**, denotados por $\mathbb{Q}$:

Definición 3 (Números racionales)**.** $\mathbb{Q} = \{p/q, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$

Aparte de cumplir los *Axiomas 4 y 5*, $\mathbb{Q}$ cumple:

Axioma 7 (Axioma algebraico adicional para $\mathbb{Q}$)**.**

1. $\forall q \in \mathbb{Q}\ q \neq 0, \exists\ 1/q \in \mathbb{Q} \mid q * (1/q) = 1$ *(Existencia del inverso de elementos no nulos para el producto)*

Esto hace de $\mathbb{Q}$ un cuerpo conmutativo. $\mathbb{Q}$ no tiene ni principio de buena ordenación, ni de buena ordenación de subconjuntos minorados (por ejemplo, el conjunto $S = \{1/n\ \forall n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Q}$ esta acotado inferiormente pero no tiene mínimo). Esto nos quita una vía de demostrar, pero "quitamos"más agujeros que existían en los números enteros:

Teorema 1 (Densidad de $\mathbb{Q}$)**.** $\forall a, b \in \mathbb{Q}\ a \neq b,\ \exists r \in \mathbb{Q} \mid a < r < b$*. Es decir, entre dos números racionales distintos siempre vamos a poder encontrar otro número racional. De hecho, vamos a poder encontrar infinitos aplicando el teorema cuantas veces como queramos.*

Demostración. Dados $a < b \in \mathbb{Q}$: $a = (a + a)/2 < (a + b)/2 < (b + b)/2 = b$. $(a + b)/2$ es el número que buscamos. □

De este teorema podemos deducir que no existe una función sucesora en $\mathbb{Q}$, y por tanto no tenemos alternativa a inducción. Pero este teorema no es suficiente para que $\mathbb{Q}$ sea el conjunto numérico perfecto para hacer análisis. Aún existen agujeros, como demuestra el siguiente ejemplo:

Proposición 1. *No existe ningún* $a \in \mathbb{Q}$ *tal que* $a^2 = 2$*.*

Demostración. Supongamos que $\exists a \in \mathbb{Q}$ tal que $a^2 = 2$. Al ser un número racional, lo podemos escribir de la forma $\frac{p}{q}$ con $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ y $\gcd(p, q) = 1$ (donde gcd denota el máximo común divisor). Por tanto, tenemos la expresión $\frac{p^2}{q^2} = 2$, de donde deducimos que $p^2 = 2q^2$ y debido a que 2 es un número primo, que $2|p$ o más concretamente $p = 2k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Substituyendo otra vez obtenemos $4k^2 = 2q^2$ y deducimos $2k^2 = q^2$, que de forma similar nos deja ver que q es también múltiplo de 2. Pero inicialmente hemos asumido que el máximo común divisor de p y q es $1 < 2$ y no mayor o igual a 2, por lo cual hemos encontrado una contradicción y la proposición es cierta. □

Esto es problemático, ya que intuitivamente deberíamos de poder encontrar un valor que cumpla $a^2 = 2$. Para poder arreglar este problema necesitamos una definición primero:

Definición 4 (Supremo e ínfimo)**.** *Sea* A *un subconjunto numérico acotado superiormente. Si existe la mínima cota superior (es decir, un número* ω *que sea cota superior del conjunto y tal que cualquier otra cota superior* α *sea* $\omega \leq \alpha$*) esta será única y la llamaremos* ***supremo****. Dualmente, a la máxima cota inferior en un subconjunto acotado inferiormente la llamaremos* ***ínfimo****. Se denotan* $\sup A$ *y* $\inf A$*.*

La definición parece ajena al ejemplo de "agujero" que hemos dado en la *Proposición 1*, pero es la más general que engloba todos los casos que necesitamos. El subconjunto $A \subseteq \mathbb{Q}$ definido como $A = \{a \in \mathbb{Q} \mid a^2 \leq 2\}$ esta acotado superiormente por 2 y es posible demostrar que si existiera un supremo, este número sería tal que su cuadrado fuera igual a 2, pero en $\mathbb{Q}$ no existe. Por tanto, podemos pensar que "añadiendo todos los supremos" completaríamos $\mathbb{Q}$. Este es el procedimiento que seguimos:

Axioma 8 (Axioma del supremo)**.** *Todo subconjunto acotado superiormente tiene supremo.*

Definición 5 (Números reales)**.** *Al conjunto $\mathbb{R}$ con $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ y que cumpla el Axioma 8 lo llamamos los* ***números reales****.*

Este conjunto no es único, pero si es único bajo isomorfismos, que viene a decir que cualesquiera dos conjuntos con estas propiedades tienen la misma estructura y por tanto no hace falta distinguirlos. En una sección posterior, nos centraremos en la construcción de los números reales: lo que hemos dado aquí es solo una definición axiomática.

1.2. Los números reales

Empezamos el estudio de los números reales introduciendo algunos conceptos.

Definición 6. *El conjunto de los* ***irracionales*** *es $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Es decir, los números reales que no se pueden expresar como cociente de dos números enteros.*

De esta definición podemos ver que un número real tiene que ser racional o irracional, pero no puede ser los dos a la vez. Esto implica que los racionales e irracionales forman una partición de los números reales.

Definición 7 (Valor absoluto)**.** *Dado $x \in \mathbb{R}$ definimos el* ***valor absoluto*** *como:*

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases} \tag{1}$$

El valor absoluto es de los conceptos mas fundamentales del análisis real. Geométricamente, si dibujamos el valor $x \in \mathbb{R}$ en la recta real, el valor absoluto da la longitud del segmento que va desde x hasta 0 y la distancia entre dos números reales en la recta real viene dada por $d(x, y) = |x - y|$.

Proposición 2 (Propiedades del valor absoluto)**.** *$\forall a, b \in \mathbb{R}$ tenemos:*

1. $||a|| = |a|$
2. $|-a| = |a|$
3. $|ab| = |a||b|$
4. *La desigualdad triangular:* $|a + b| \leq |a| + |b|$
5. *La desigualdad triangular inversa:* $||a| - |b|| \leq |a - b|$
6. *Si $a \neq 0$ entonces* $|\frac{1}{a}| = \frac{1}{|a|}$

La desigualdad triangular se usa mucho. Vamos a ver una caracterización del supremo e ínfimo:

Proposición 3 (Caracterización del supremo)**.** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$.*

1. *El supremo de A existe si y solo sí existe un número $\omega \in \mathbb{R}$ que sea cota superior de A tal que $\forall \varepsilon > 0$ exista $x \in A$ tal que $x > \omega - \varepsilon$. En este caso* $\sup A = \omega$.
2. *El ínfimo de A existe si y solo sí existe un número $\alpha \in \mathbb{R}$ que sea cota inferior de A tal que $\forall \varepsilon > 0$ exista $x \in A$ tal que $x < \alpha - \varepsilon$. En este caso* $\inf A = \alpha$.

Cuando estudiemos sucesiones, nos será muy útil tener herramientas para relacionar los números naturales con los números reales.

Teorema 2 (Propiedad arquimediana)**.** *$\forall x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$ con $nx > y$.*

Podemos entender el teorema así: si tenemos una longitud muy pequeña siempre vamos a juntar muchas de ellas para poder formar una longitud grande. Este teorema nos va a servir para demostrar dos corolarios que son intuitivamente verdad:

Corolario 1. *El conjunto de los números naturales no está acotado superiormente.*

Corolario 2. *Todo subconjunto no vacío de los números naturales que esté acotado superiormente tiene máximo y mínimo.*

Teorema 3 (Existencia de la parte entera)**.** $\forall x \in \mathbb{R}$ *existe un único* $k \in \mathbb{Z}$ *tal que* $k \leq x \leq k+1$.

Definición 8 (Parte entera)**.** *Dado* $x \in \mathbb{R}$ *definimos la **parte entera** como:*

$$[x] = \sup\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\} \tag{2}$$

*Por el teorema anterior, este supremo siempre existe. También definimos la **parte fraccionaria** :*

$$\{x\} = x - [x] \tag{3}$$

Estos dos no son tan útiles como el valor absoluto.

Definición 9 (Potencias enteras)**.** *Sea* $x \in \mathbb{R}$ *y* $n \in \mathbb{Z}$*. Definimos la **potencia n-ésima** de* x *de forma inductiva, y la denotamos por* x^n*, como:*

$$x^n = \begin{cases} x * x^{n-1} \ si \ n > 1 \\ x \ si \ n = 1 \\ 1 \ si \ n = 0 \ y \ x \neq 0 \\ \frac{1}{x^n} \ si \ n < 0 \ y \ x \neq 0 \end{cases} \tag{4}$$

Si $x = 0$ *y* $n \leq 0$ *entonces la potencia queda indefinida. Al número* n *se le llama **exponente**.*

Podemos intentar extender esta definición a todo número racional, y conservar algunas propiedades.

Teorema 4 (Existencia de raíces)**.** *Sea* $a \in \mathbb{R}$ *cualquiera.*

1. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$ *impar existe un único* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $x^n = a$.
2. *Si* $a \geq 0$ *entonces para todo* $n \in \mathbb{N}$ *par (recordamos que* $\mathbb{N}$ *no tiene el* 0 *en nuestra definición) existe un único* $x \in \mathbb{R}$ *con* $x \geq 0$ *tal que* $x^n = a$.

En cualquier caso, al número x *lo llamaremos la **raíz n-ésima** de* a *y lo denotaremos por* $\sqrt[n]{a}$ *o* $a^{\frac{1}{n}}$.

Proposición 4 (Potencias racionales)**.** *Sean* $x \in \mathbb{R}$*,* $q \in \mathbb{Q}$ *y* $n, m \in \mathbb{Z}$ *tales que* $q = \frac{n}{m}$*. Cuando las siguientes expresiones son válidas, tenemos:*

$$(x^n)^{\frac{1}{m}} = (x^{\frac{1}{m}})^n \tag{5}$$

y este número lo denotaremos por $x^{\frac{n}{m}}$ *o* x^q*. (TODO: Falta ver que está bien definido)*

Proposición 5 (Propiedades de las potencias)**.** *TODO*

Proposición 6 (Binomio de Newton)**.** *Sean* $x, y \in \mathbb{R}$ *y* $n \in \mathbb{N}$ *entonces:*

$$(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m y^{n-m} \tag{6}$$

Las potencias de exponente real tienen una definición más complicada.

2. Sucesiones de números reales

Definición 10. *Una **sucesión** es una aplicación $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. El conjunto $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ es el conjunto imagen. Decimos que la sucesión $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ es:*

- ***Eventual creciente** si $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $a_m \geq a_n,\ \forall m > n \geq N$ con n y m naturales.*
- ***Eventual estrictamente creciente** si $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $a_m > a_n,\ \forall m > n \geq N$ con n y m naturales.*
- ***Eventual decreciente** si $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $a_m \leq a_n,\ \forall m > n \geq N$ con n y m naturales.*
- ***Eventual estrictamente decreciente** si $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $a_m < a_n,\ \forall m > n \geq N$ con n y m naturales.*

*En cualquier caso decimos que la sucesión es **eventual monótona**. Si $N = 1$ en cualquiera de estos casos, entonces quitamos "eventual".*

Nos interesa estudiar el comportamiento de la sucesión cuando n se hace grande, es decir *eventualmente*. Veremos que el comportamiento de a_n cercano a $n = 1$ no importa en lo que a límite se refiere, solo el comportamiento eventual. En los teoremas de sucesiones monótonas que hagamos generalmente no usaremos la monotonía eventual, sino la monotonía desde $n = 1$ pero también serán válidos para la eventual con pocas modificaciones.

Definición 11. *Sea $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión de números reales. Decimos que a_n **converge** a L y lo denotamos como $a_n \to_n L$ si y solo si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L| < \varepsilon$ para todo n tal que $n \geq N$.*

Esta definición se le conoce como definición $\delta - \varepsilon$.

Proposición 7 (Unicidad del límite)**.** *Sean $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ convergente a L_1 y L_2. Entonces $L_1 = L_2$.*

Demostración. Supongamos que L_1 y L_2 son dos límites de la sucesión $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$. Por tanto, dado un $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L_1| < \varepsilon/2$ y $|a_n - L_2| < \varepsilon/2 \ \ \forall n > N$ con $N = max\{n_1, n_2\}$, donde n_1 y n_2 son N dado de la definición del límite para L_1 y L_2. Sumando ambas desigualdades y usando la desigualdad triangular, tenemos:

$$\begin{aligned} \varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} > |a_n - L_1| + |a_n - L_2| &= |a_n - L_1| + |-a_n + L_2| \\ &\geq |a_n - L_1 - a_n + L_2| = |L_2 - L_1| \end{aligned}$$

Como ε es un número arbitrario mayor que 0, si asumimos que $|L_2 - L_1| \neq 0$, siempre vamos a poder encontrar un valor de ε (por ejemplo, $\varepsilon = \frac{|L_2 - L_1|}{2} > 0$) mayor a 0 que contradiga $\varepsilon > |L_2 - L_1|$. Por tanto, $|L_2 - L_1| = 0$ y $L_2 = L_1$. □

Definición 12. *Sabiendo que una sucesión $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ converge a un único valor L, llamamos a este valor **límite de la sucesión** a_n, y lo denotamos como $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$ o de manera resumida $\lim_n a_n = L$.*

Definición 13. *Si $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ no converge a ningún valor $L \in \mathbb{R}$, podemos decir que a_n es:*

- ***Divergente a** $+\infty$ si $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > M\ \forall n > N$.*
- ***Divergente a** $-\infty$ si $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < M\ \forall n > N$.*
- ***Oscilante** si no converge ni diverge.*

Definición 14. *Sea $\{n_k\}_k \subseteq \mathbb{N}$ una sucesión estrictamente creciente de números naturales y $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión cualquiera de números reales. Una **subsucesión de** a_n es una sucesión de la forma $\{a_{n_k}\}_k \subseteq \mathbb{R}$.*

Teorema 5 (Aritmética de límites)**.** *Sean $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ y $\{b_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ dos sucesiones cualesquiera convergentes a L_a y L_b respectivamente. Entonces:*

- *Si $r \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{n\to+\infty} ra_n = rL_a$*
- $\lim_{n\to+\infty} a_n + b_n = L_a + L_b$
- $\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = L_a L_b$
- *Si $b_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L_a}{L_b}$*

Ejemplo 1. *1. La sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ converge a 0 y es monótona decreciente.*

2. La sucesión $a_n = n^3$ diverge a $+\infty$ y es monótona creciente.

3. *La sucesión*

$$a_n = \begin{cases} 1 \; si \; n \; es \; par \\ -1 \; si \; n \; es \; impar \end{cases} \tag{7}$$

es oscilante.

4. *Las sucesiones* $a_n = n$ *y* $b_n = -n$ *divergen pero la sucesión* $c_n = a_n + b_n$ *converge a* 0.

3. Funciones, límites y continuidad

4. Derivabilidad de funciones reales