LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
ENDIMENSIONELL ANALYS
DELKURS B1
2012 – 10 – 26 kl 08 – 13

1. a) $e^{2x}+4e^x-5=0 \iff (e^x-1)(e^x+5)=0$ som medför att $e^x=1$ och alltså $x=0$.

b) För $x \leq 2$ blir ekvationen $-(x-2)-2x=0$ som ger en lösning $x=\frac{2}{3}$.
För $x>2$ blir ekvationen $(x-2)-2x=0$ som ger $x=-2$. Men $x=-2$ uppfyller inte villkoret $x>2$. Så är $x=-2$ en falsk lösning.

c) $\sin 2x=\cos x \iff \cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\cos x$.
Så gäller $\frac{\pi}{2}-2x=\pm x+2n\pi$, som medför att $x=\frac{\pi}{6}-\frac{2n\pi}{3}$ eller $x=\frac{\pi}{2}-2n\pi$.
Lösningarna är $x=\frac{\pi}{6}-\frac{2n\pi}{3}$ och $x=\frac{\pi}{2}-2n\pi$, där $n=0\pm 1,\pm 2,\ldots$.

2. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin(5x)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{1}{\frac{\sin(5x)}{5x}}\cdot\frac{2}{5}\right)=\frac{2}{5}$, ty $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}=1$ och $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{5x}=1$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x-2\ln x}{x^2+2e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2\ln x}{e^x}}{\frac{x^2}{e^x}+2}=\frac{1}{2}$, ty $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+\ln x}{e^x}=0$.

c)
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos(2\cdot\frac{x}{2})\right)^2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-(1-2\sin^2\frac{x}{2})\right)^2}{x^4}$$
$$=4\lim_{x\to 0}\frac{\sin^4\frac{x}{2}}{x^4}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x/2}\right)^4=\frac{1}{4}.$$

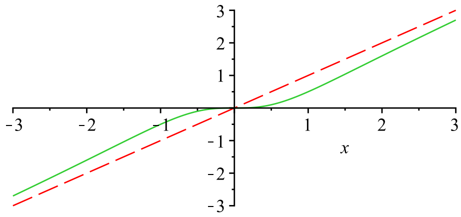
3. a) $\left(x-\frac{2}{x}\right)^8=\sum\limits_{k=0}^{8}\binom{8}{k}x^k\left(\frac{-2}{x}\right)^{8-k}=\sum\limits_{k=0}^{8}\binom{8}{k}(-2)^{8-k}x^{2k-8}$.
Koefficienten för x^6- termen är $\binom{8}{7}(-2)^{8-7}=-16$.

b) Polynomdivision ger $\frac{x^3}{x^2+1}=x+\frac{-x}{x^2+1}$, där $\frac{-x}{x^2+1}\longrightarrow 0$ då $x\to\infty$ eller $x\to-\infty$.
Detta medför att $y=x$ är asymptot till kurvan då $x\to\pm\infty$. Eftersom

$$y'=\frac{3x^2(x^2+1)-x^3\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}\geq 0,$$

så är funktionen strängt växande med en stationär punkt $x=0$ som inte är en lokal extrempunkt.

Funktionens graf:



4. a) Se boken.

b) Eftersom polynomet $p(x)$ har faktorerna $x+1$ och $x-2$, så gäller $p(-1) = a - b - 3 = 0$ och $p(2) = 4a + 2b + 6 = 0$, som medför att $a = 0$ och $b = -3$.

c) Det är klart att $x = 1$ inte är en lösning. För $x \neq 1$ gäller likheten $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 = x\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5\right) = \frac{x(x^6-1)}{x-1}$.

Så blir olikheten $\frac{x(x^6-1)}{x-1} < 0$. Polynomet $x(x^6-1)$ har nollställe $0,\ -1,\ 1$ och polynomet $x-1$ har nollställe 1. Så blir teckentabellen

x		-1		0		1	
$\frac{x(x^6-1)}{x-1}$	$+$	0	$-$	0	$+$	ej def.	$+$

Lösningarna är alla x i intervallet $]-1,\ 0[$.

5. a) och b) Se boken.

c) Om kurvan $y = \arctan(x-1)$, där $x > 0$, har $y = \frac{1}{2}x + c$ som tangentlinje i punkten x_0 så gäller $y'(x_0) = \frac{1}{2}$, vilket ger $\frac{1}{1+(x_0-1)^2} = \frac{1}{2}$. Men $x_0 > 0$ så är $x_0 = 2$, som ger $y_0 = \arctan(x_0 - 1) = \frac{\pi}{4}$. Eftersom tangentlinjen går genom (x_0, y_0) så gäller $y_0 = \frac{1}{2}x_0 + c$, dvs $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot 2 + c$. Alltså $c = \frac{\pi}{4} - 1$.

6. Om en sträcka med två ändpunkterna $(t,\ 0)$ och $(0,\ s)$ går genom punkten $(1,2)$, enligt tvåpunktsformeln för räta linjens ekvation har vi $\frac{s-0}{2-0} = \frac{0-t}{1-t}$, som medför att $s = \frac{-2t}{1-t}$. Så är sträckans längd lika med

$$\sqrt{(t-0)^2 + (0-s)^2} = \sqrt{t^2 + \frac{4t^2}{(1-t)^2}}$$

och $t > 1$ ty både s och t är positiva. Nu söker vi efter minimum av funktionen

$$f(t) = \sqrt{t^2 + 4\left(\frac{t}{1-t}\right)^2}$$

för $t > 1$. Vi har

$$f'(t) = \frac{1}{2}\left[t^2 + 4\left(\frac{t}{1-t}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \left(2t + 8 \cdot \frac{t}{1-t} \cdot \frac{1-t+t}{(1-t)^2}\right)$$

$$= t\left[t^2 + 4\left(\frac{t}{1-t}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{(1-t)^3 + 4}{(1-t)^3}.$$

Det finns alltså endast en stationär punkt $t = 1 + 4^{\frac{1}{3}}$ till funktionen. Eftersom $f(t)$ är kontinuerlig i $]1,\ \infty[$ och $\lim_{t\to 1^+} f(t) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \infty$, så är $f(1 + 4^{\frac{1}{3}}) = \left(1 + 4^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(1 + 2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ den sökta minsta längden.