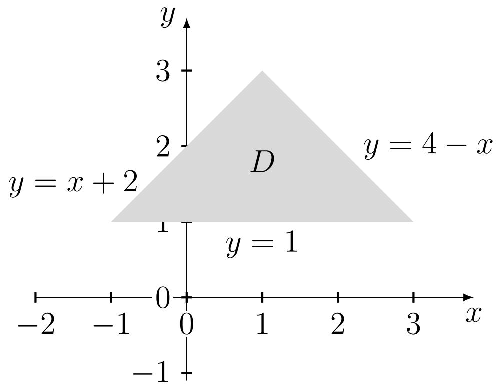
LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
FLERDIMENSIONELL ANALYS, FMA430
2014-10-31 kl 8–13

1. Vi börjar med att rita triangelskivan. Linjen genom $(-1, 1)$ och $(1, 3)$ har ekvationen $y = x + 2$, linjen genom $(1, 3)$ och $(3, 1)$ har ekvationen $y = 4 - x$ och linjen genom $(-1, 1)$ och $(3, 1)$ har ekvationen $y = 1$.



Området ges alltså av $D = \{(x, y);\ 1 \leq y \leq 3,\ y - 2 \leq x \leq 4 - y\}$. Dubbelintegralen blir alltså (vi integrerar i x-led först)

$$\begin{aligned}
\iint_D (xy + y)\ dx\, dy &= \int_1^3 \left(\int_{y-2}^{4-y} (xy + y)\, dx \right) dy = \int_1^3 \left[\frac{y}{2}x^2 + yx \right]_{x=y-2}^{x=4-y} dy \\
&= \int_1^3 \left(\frac{y}{2}(4 - y)^2 + y(4 - y) \right) - \left(\frac{y}{2}(y - 2)^2 + y(y - 2) \right) dy \\
&= \int_1^3 \left(\frac{y}{2}(16 + y^2 - 8y) + 4y - y^2 \right) - \left(\frac{y}{2}(y^2 + 4 - 4y) + y^2 - 2y \right) dy \\
&= \int_1^3 \left(8y + \frac{y^3}{2} - 4y^2 + 4y - y^2 \right) - \left(\frac{y^3}{2} + 2y - 2y^2 + y^2 - 2y \right) dy \\
&= \int_1^3 \left(8y + \frac{y^3}{2} - 4y^2 + 4y - y^2 - \frac{y^3}{2} - 2y + 2y^2 - y^2 + 2y \right) dy \\
&= \int_1^3 \left(-4y^2 + 12y \right) dy = \left[-\frac{4}{3}y^3 + 6y^2 \right]_{y=1}^{y=3} \\
&= (-36 + 54) - \left(-\frac{4}{3} + 6 \right) = \frac{40}{3}.
\end{aligned}$$

2. a) Bemärk att variabelbytet är bijektivt och att $\{(x, y);\ y > 0\}$ svarar mot $\{(u, v); v > 0\}$. Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = f'_u \cdot 1 + f'_v \cdot e^x y = f'_u + e^x y \cdot f'_v,$$

och

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y = f'_u \cdot 0 + f'_v \cdot e^x = e^x \cdot f'_v.$$

Insättning ger då

$$\frac{\partial f}{\partial x} - y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = f'_u + e^x y \cdot f'_v - y \cdot (e^x \cdot f'_v) = f'_u.$$

Differentialekvationen transformeras alltså till $f'_u = 2x = 2u$. Detta ger $f(u,v) = u^2 + \varphi(v)$, där $\varphi\colon\ ]0,\infty[\to \mathbb{R}$ är en godtycklig deriverbar funktion i en variabel. Övergång til (x,y) ger då $f(x,y) = x^2 + \varphi(e^x y)$.

b) Från **a)** fås

$$f(x,1) = x^2 + \varphi(e^x \cdot 1) = x^2 + \varphi(e^x).$$

Alltså gäller för alla x:

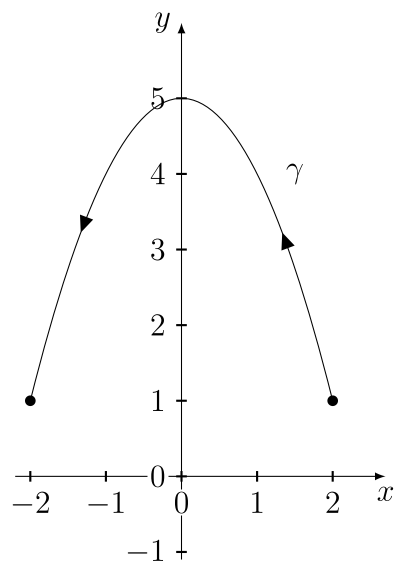
$$f(x,1) = 0 \iff x^2 + \varphi(e^x) = 0 \iff \varphi(e^x) = -x^2.$$

Med $t = e^x$ fås $x = \ln(t)$ vilket ger $\varphi(t) = -\left(\ln(t)\right)^2$, $t \geq 0$. Funktionen

$$f(x,y) = x^2 + \varphi(e^x y) = x^2 - \left(\ln(e^x y)\right)^2 = x^2 - \left(x + \ln(y)\right)^2 = -\ln(y) \cdot (2x + \ln(y))$$

är alltså den sökta lösningen.

3. **a)** Vi börjar med att rita kurvan γ.



Kurvan γ har parametriseringen

$$\begin{cases} x = t, \\ y = 5 - t^2, \end{cases} \qquad t : 2 \to -2,$$

så kurvintegralen blir

$$\begin{aligned}
\int_\gamma xy\,dx + 3x\,dy &= \int_2^{-2} \left(t \cdot (5 - t^2) \cdot 1 + 3 \cdot t \cdot (-2t)\right)\,dt \\
&= \int_2^{-2} \left(5t - t^3 - 6t^2\right)\,dt = \left[\frac{5}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4 - 2t^3\right]_{t=2}^{t=-2} \\
&= (10 - 4 - (-16)) - (10 - 4 - 16) = 32.
\end{aligned}$$

b) *Metod 1:* Vi testar om det finns en potentialfunktion. Om $U(x, y)$ är en potentialfunktion gäller

$$\frac{\partial U}{\partial x} = (x^2 y + 2x) \cdot e^{xy}, \qquad \text{och} \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = x^3 \cdot e^{xy}.$$

Den andra ekvationen ger

$$U(x, y) = \int x^3 \cdot e^{xy}\,dy = x^2 \cdot e^{xy} + \varphi(x),$$

där $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en godtycklig deriverbar funktion i en variabel. Den första ekvationen ger nu

$$(x^2 y + 2x) \cdot e^{xy} = \frac{\partial U}{\partial x} = 2x \cdot e^{xy} + x^2 \cdot e^{xy} \cdot y + \varphi'(x),$$

dvs. $\varphi'(x) = 0$. Alltså är φ konstant och $U(x, y) = x^2 \cdot e^{xy}$ är en potentialfunktion. Kurvintegralen är därför

$$\begin{aligned}
\int_\gamma (x^2 y + 2x) \cdot e^{xy}\,dx + x^3 \cdot e^{xy}\,dy &= U(-2, 1) - U(2, 1) \\
&= (-2)^2 \cdot e^{-2} - 2^2 \cdot e^2 \\
&= 4\left(e^{-2} - e^2\right).
\end{aligned}$$

Metod 2: Med $P = (x^2 y + 2x) \cdot e^{xy}$ och $Q = x^3 \cdot e^{xy}$ gäller

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 \cdot e^{xy} + x^3 \cdot e^{xy} \cdot y = (3x^2 + x^3 y) \cdot e^{xy},$$

och

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x^2 \cdot e^{xy} + (x^2 y + 2x) \cdot e^{xy} \cdot x = (x^2 + x^3 y + 2x^2) \cdot e^{xy} = (3x^2 + x^3 y) \cdot e^{xy},$$

så $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Då P och Q är definierade på $\mathbb{R}^2$ som är enkelt sammanhängande finns alltså en potentialfunktion och vektorfältet (P, Q) är vägoberoende. Om γ_1 är linjestycket från $(2, 1)$ till $(-2, 1)$ gäller alltså

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy.$$

Kurvan γ_1 har parametriseringen

$$\begin{cases} x = t, \\ y = 1, \end{cases} \qquad t : 2 \to -2.$$

Kurvintegralen blir därför

$$\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = \int_2^{-2} \left((t^2 \cdot 1 + 2t) \cdot e^t \cdot 1 + t^3 \cdot e^t \cdot 0\right)\,dt = \int_2^{-2} (t^2 + 2t) \cdot e^t\,dt.$$

Partialintegration ger

$$\begin{aligned} \int (t^2 + 2t) \cdot e^t\,dt &= (t^2 + 2t) \cdot e^t - \int (2t + 2) \cdot e^t\,dt \\ &= (t^2 + 2t) \cdot e^t - \left((2t + 2) \cdot e^t - \int 2e^t\,dt\right) \\ &= (t^2 + 2t) \cdot e^t - (2t + 2) \cdot e^t + 2e^t + C \\ &= t^2 \cdot e^t + C. \end{aligned}$$

Alltså gäller

$$\int_2^{-2} (t^2 + 2t) \cdot e^t\,dt = \left[t^{\cdot} e^t\right]_{t=2}^{t=-2} = 4e^{-2} - 4e^2 = 4\left(e^{-2} - e^2\right).$$

4. a) Funktionen f är kontinuerlig och området $D_1 = \{(x, y);\ (x - 2)^2 + y^2 \leq 1\}$ är kompakt, så största och minsta värden existerar. Funktionen f är differentierbar på $\mathbb{R}^2$ och $\operatorname{grad} f(x, y) = (2x, -2y)$. Då

$$(2x, -2y) = (0, 0) \iff (x, y) = (0, 0)$$

är $(0, 0)$ det enda stationära punkt för f. Då $(0, 0) \notin D_1$ (ty $(0 - 2)^2 + 0^2 = 4 \not\leq 1$) antas största och minsta värden på randen av D_1. Vi kan bestämma dessa på olika sätt.

Metod 1: Randen av D_1 är en cirkel med medelpunkt $(2, 0)$ och radie 1. Vi har parametriseringen

$$\begin{cases} x = 2 + \cos(\varphi), \\ y = \sin(\varphi), \end{cases}$$

vilket ger

$$g(\varphi) = f(2 + \cos(\varphi), \sin(\varphi)) = (2 + \cos(\varphi))^2 - \sin^2(\varphi).$$

Differentiation ger

$$\begin{aligned} g'(\varphi) &= 2(2 + \cos(\varphi)) \cdot (-\sin(\varphi)) - 2\sin(\varphi)\cos(\varphi) \\ &= -2\sin(\varphi) \cdot (2 + \cos(\varphi) + \cos(\varphi)) \\ &= -2\sin(\varphi) \cdot (2 + 2\cos(\varphi)) \\ &= -4\sin(\varphi) \cdot (1 + \cos(\varphi)). \end{aligned}$$

Alltså gäller

$$\begin{aligned} g'(\varphi) = 0 &\iff (\sin(\varphi) = 0 \text{ eller } \cos(\varphi) = -1) \\ &\iff \sin(\varphi) = 0 \end{aligned}$$

(då $\cos(\varphi) = -1$ implicerar $\sin(\varphi) = 0$). Detta svarer mot punkterna $(x, y) = (1, 0)$ och $(x, y) = (3, 0)$. Då $f(1, 0) = 1$ och $f(3, 0) = 9$ är största värden 9 och minsta värden är 1.

Metod 2: Man kan också bestämma maximum och minimum på randen av D_1 genom att uppfatta randen som ett bivillkor. Med $g(x, y) = (x-2)^2 + y^2$ beskrivs randen av $g(x, y) = 1$. Då g är differentierbar på $\mathbb{R}^2$ antas maximum och minimum för f i punkter (x, y) på randen så att $\operatorname{grad} f(x, y)$ och $\operatorname{grad} g(x, y)$ är parallella. Då $\operatorname{grad} g(x, y) = (2(x - 2), 2y)$ blir $\operatorname{grad} f(x, y)$ och $\operatorname{grad} g(x, y)$ parallella precis när determinanten

$$\begin{vmatrix} 2x & 2(x-2) \\ -2y & 2y \end{vmatrix} = 4xy + 4(x - 2)y = 4y(x + (x - 2)) = 4y(2x - 2) = 8y(x - 1)$$

blir 0. Vi har alltså $y = 0$ eller $x = 1$. Då (x, y) ligger på randen av D_1 gäller också $(x - 2)^2 + y^2 = 1$. Fallet $y = 0$ ger då $(x - 2)^2 = 1$, dvs. $x - 2 = \pm 1$ varav $x = 1$ eller $x = 3$. Fallet $x = 1$ ger $y^2 = 0$, dvs. $y = 0$. Vi får alltså punkterna $(x, y) = (1, 0)$ och $(x, y) = (3, 0)$. Då $f(1, 0) = 1$ och $f(3, 0) = 9$ är största värden 9 och minsta värden är 1.

Metod 3: På randen av D_1 gäller $(x - 2)^2 + y^2 = 1$, varav

$$y^2 = 1 - (x - 2)^2 = 1 - (x^2 + 4 - 4x) = -x^2 + 4x - 3.$$

Insättning ger

$$g(x) = f(x, y) = x^2 - y^2 = x^2 - (-x^2 + 4x - 3) = 2x^2 - 4x + 3.$$

Randen av D_1 är en cirkel med medelpunkt $(2, 0)$ och radie 1, så $1 \leq x \leq 3$. Då

$$g'(x) = 0 \iff 4x - 4 = 0 \iff x = 1$$

inte är ett inre punkt i intervallet $[1, 3]$, antar g maximum och minimum i ändpunkterna. Då $g(1) = 1$ och $g(3) = 9$ är största värden 9 och minsta värden är 1.

b) Låt $D_2 = \{(x, y);\ x^4 + y^4 \leq 1\}$. Då D_2 är kompakt existerar största och minsta värden. Den stationära punkten $(0, 0)$ tillhör D_2 och $f(0, 0) = 0$. Randen av D_2 behandlas enklast som ett bivillkor. Med $g(x, y) = x^4 + y^4$ ges randen av $g(x, y) = 1$. Då g är differentierbar på $\mathbb{R}^2$ antas maximum och minimum för f i punkter (x, y) på randen så att $\operatorname{grad} f(x, y)$ och $\operatorname{grad} g(x, y)$ är parallella. Då $\operatorname{grad} g(x, y) = (4x^3, 4y^3)$ blir $\operatorname{grad} f(x, y)$ och $\operatorname{grad} g(x, y)$ parallella precis när determinanten

$$\begin{vmatrix} 2x & 4x^3 \\ -2y & 4y^3 \end{vmatrix} = 8xy^3 + 8x^3y = 8xy \cdot (x^2 + y^2)$$

blir 0. Vi har

$$\begin{aligned} 8xy \cdot (x^2 + y^2) = 0 &\iff \big(x = 0 \text{ eller } y = 0 \text{ eller } x^2 + y^2 = 0\big) \\ &\iff (x = 0 \text{ eller } y = 0 \text{ eller } (x, y) = (0, 0)) \\ &\iff (x = 0 \text{ eller } y = 0)\,. \end{aligned}$$

På randen gäller $x^4 + y^4 = 1$, så fallet $x = 0$ ger $y = \pm 1$ och fallet $y = 0$ ger $x = \pm 1$. Vi får alltså de fyra punkterna $(x, y) = (0, \pm 1)$ och $(x, y) = (\pm 1, 0)$. Funktionsvärden blir $f(0, \pm 1) = -1$ och $f(\pm 1, 0) = 1$, så maximum för f är 1 och minimum är -1.

5. a) Med $f(x, y) = x^2 + xy$ gäller $f(1, 1) = 1^2 + 1 \cdot 1 = 2$, så punkten $(1, 1, 2)$ ligger på grafytan. Då $f'_x(x, y) = 2x + y$ och $f'_y(x, y) = x$ fås $f'_x(1, 1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ och $f'_y(1, 1) = 1$. Tangentplanet blir alltså

$$z - 2 = 3(x - 1) + 1(y - 1) \iff z = 3x + y - 2.$$

b) En sådan punkt P måste ha formen $P : (a, b, a^2 + ab)$. Tangentplanet i P har ekvationen (jämför deluppgift **a)**)

$$z - (a^2 + ab) = (2a + b) \cdot (x - a) + a \cdot (y - b).$$

Då både $(0, 3, 0)$ och $(1, 0, 1)$ ligger på tangentplanet fås

$$0 - (a^2 + ab) = (2a + b) \cdot (0 - a) + a \cdot (3 - b), \tag{1}$$
$$1 - (a^2 + ab) = (2a + b) \cdot (1 - a) + a \cdot (0 - b). \tag{2}$$

Subtraheras ekvation (1) från ekvation (2) fås

$$1 = (2a + b) \cdot 1 + a \cdot (-3) \iff b = a + 1.$$

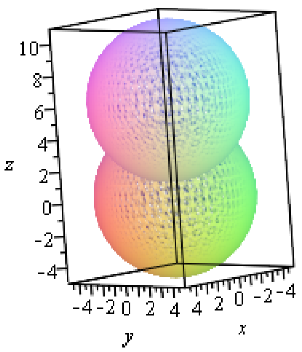
Insättning i (1) ger då

$$\begin{aligned}
-a^2 - a(a+1) &= (2a + a + 1)\cdot(-a) + a\cdot(3-(a+1)) \iff \\
-a^2 - a^2 - a &= (3a+1)\cdot(-a) + a\cdot(2-a) \iff \\
-2a^2 - a &= -3a^2 - a + 2a - a^2 \iff \\
2a^2 - 2a &= 0 \iff \\
2a(a-1) &= 0 \iff \\
a = 0 &\text{ eller } a = 1.
\end{aligned}$$

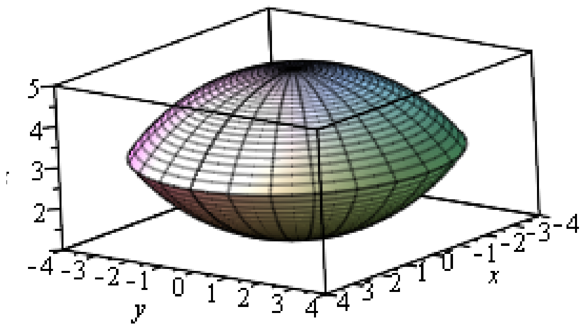
Punkten P är alltså $(0,1,0)$ eller $(1,2,3)$.

6. a) Sfärens ekvation är $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$.

b) Vi väljar ett positivt orienterad ortonormerad koordinatsystem sådan att klotens medelpunkter är $(0,0,0)$ och $(0,0,6)$. Klotens ekvationer är då $K_1 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 5^2$ och $K_2 : x^2 + y^2 + (z-6)^2 \leq 5^2$. Låt K vara skärningen av K_1 och K_2.



Figur 1: Kloten K_1 och K_2



Figur 2: Kroppen K

Metod 1: Vi beräknar volymen av K genom att indela K i lodräta staplar (parallella med z-axeln). Projektionen av K på xy-planet är en cirkelskiva D, och kroppen K ges av $f(x,y) \leq z \leq g(x,y)$, $(x,y) \in D$, där $f(x,y)$ anger undra delen av K_2 och $g(x,y)$ anger övra delen av K_1. Vi har

$$x^2 + y^2 + (z-6)^2 = 5^2 \iff z - 6 = \pm\sqrt{25 - x^2 - y^2},$$

så $f(x,y) = 6 - \sqrt{25 - x^2 - y^2}$. På samma sätt gäller

$$x^2 + y^2 + z^2 = 5^2 \iff z = \pm\sqrt{25 - x^2 - y^2},$$

så $g(x,y) = \sqrt{25-x^2-y^2}$. Cirkelskivan D ges av

$$\begin{aligned} f(x,y) \le g(x,y) &\iff 6 - \sqrt{25-x^2-y^2} \le \sqrt{25-x^2-y^2} \\ &\iff 6 \le 2\sqrt{25-x^2-y^2} \\ &\iff 3 \le \sqrt{25-x^2-y^2} \\ &\iff 9 \le 25 - x^2 - y^2 \\ &\iff x^2 + y^2 \le 16, \end{aligned}$$

så D är cirkelskivan med medelpunkt $(0,0)$ och radien 4. Volymen blir därför

$$\begin{aligned} \iint_D (g(x,y) - f(x,y))\,dx\,dy &= \iint_D \left(\sqrt{25-x^2-y^2} - \left(6 - \sqrt{25-x^2-y^2}\right)\right) dx\,dy \\ &= \iint_D \left(2\sqrt{25-x^2-y^2} - 6\right) dx\,dy. \end{aligned}$$

Med polära koordinater ($x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$), svarar D mot området

$$E = \{(r,\varphi); 0 \le r \le 4, 0 \le \varphi \le 2\pi\},$$

så

$$\begin{aligned} \iint_D \left(2\sqrt{25-x^2-y^2} - 6\right) dx\,dy &= \iint_E \left(2\sqrt{25-r^2} - 6\right) r\,dr\,d\varphi \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) \cdot \left(\int_0^4 \left(2r\sqrt{25-r^2} - 6r\right) dr\right) \\ &= 2\pi \left[-\frac{2}{3}\cdot(25-r^2)^{3/2} - 3r^2\right]_{r=0}^{r=4} \\ &= 2\pi \left(\left(-\frac{2}{3}\cdot 9^{3/2} - 48\right) - \left(-\frac{2}{3}\cdot 25^{3/2}\right)\right) \\ &= 2\pi \left(-18 - 48 + \frac{250}{3}\right) = \frac{104\pi}{3}. \end{aligned}$$

Metod 2: Vi indelar K i vågräta skivor. För $(x,y,z) \in K_1$ gäller $-5 \le z \le 5$ och för $(x,y,z) \in K_2$ gäller $|z-6| \le 5$, dvs. $1 \le z \le 11$. För $(x,y,z) \in K$ gäller alltså $1 \le z \le 5$. För varje sådant z blir den motsvarende vågräta skiva en cirkelskiva vars radie ges av $x^2+y^2+(z-6)^2 = 5^2$ för $1 \le z \le 3$ och av $x^2+y^2+z^2 = 5^2$ för $3 \le z \le 5$. Vi har alltså $r^2 = 25-(z-6)^2$ för $1 \le z \le 3$ och $r^2 = 25 - z^2$ för $3 \le z \le 5$. Då cirkelskivans area är

πr^2 blir volymen alltså

$$\begin{aligned}\int_1^3 \pi\left(25-(z-6)^2\right)\,dz+\int_3^5 \pi\left(25-z^2\right)\,dz &= \pi\left[25z-\frac{1}{3}(z-6)^3\right]_{z=1}^{z=3}\\ &\quad+\pi\left[25z-\frac{1}{3}z^3\right]_{z=3}^{z=5}\\ &= \pi\left((75+9)-\left(25+\frac{125}{3}\right)\right)\\ &\quad+\pi\left(\left(125-\frac{125}{3}\right)-(75-9)\right)\\ &= \frac{52\pi}{3}+\frac{52\pi}{3}=\frac{104\pi}{3}.\end{aligned}$$

Anmärkning: Av symmetriskäl är det klart att de två integralerna ovan har samma värde, de anger ju volymen av undre hälften respektiva övre hälften av K. Vi kunde alltså ha sparat hälften av beräkningarna!