LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Funktionsteori
2015–03–21 Svar och anvisningar

1. Lösningen blir $x_n = (n-1)(-1)^n + 1$.

2. a) $\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{3\pi i}{4} + 2\pi i k$, där $k \in \mathbb{Z}$

b) Nej, u är inte harmonisk.

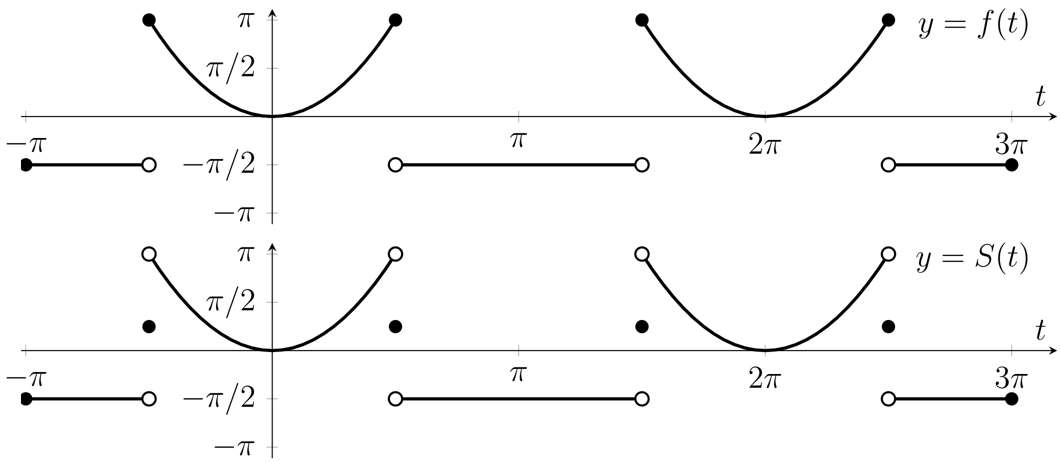
c) Till exempel: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

d) Till exempel: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (z-i)^k$.

e) Till exempel: $f(z) = \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z}$.

3. a) Börja gärna med att göra första halvan av uppgift b. Funktionen är begränsad (och därmed L^1), styckvis kontinuerlig och styckvis C^1 och uppfyller därmed villkoren i sats 7.18 i alla punkter (och villkoren i sats 7.16 i de flesta punkter). Det följer ur dessa konvergenssatser att $S(\pi/2) = \pi/4$, $S(-\pi/2) = \pi/4$ och $S(3\pi) = -\pi/2$.

b)



c) Funktionen är jämn, så serie B är utesluten. Medelvärdet över en period kan omöjligen vara $\pi/2$, vilket utesluter serie A och D. Serie E konvergerar likformigt med hjälp av Weierstrass M-test, så dess seriesumma är kontinuerlig. Den enda möjligheten är alltså C.

4. a) Den första serien är konvergent (enklast med kvottestet), den andra konvergent (Leibniz) och den tredje är divergent (termerna går inte mot 0).

b) Serien är konvergent om och endast om $\alpha > 2/3$. (Jämför till exempel med $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^{3\alpha/2}}$.)

5. a) Konvergensradien blir ∞. (Observera att $a_k = 0$ när k är udda..)

b) Serien är alternerande och termerna uppfyller villkoren i Leibniz test. Det följer att resttermen till beloppet är mindre än

$$\frac{1}{2^n n!} a_4 = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{1}{8(2n+2)(2n+4)}$$

c) Maclaurinserien för J_n' blir (enklast att först multiplicera in z^n och derivera termvis, vilket är tillåtet på hela $\mathbb{C}$ tack vare resultatet i a-uppgiften):

$$J_n'(z) = \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{\infty}(n+k)a_k z^{n+k-1} \tag{*}$$

Med hjälp av residyregel 2 ser vi att

$$\int_{|z|=1} \frac{J_n'(z)}{z^2}\,dz = 2\pi i c_1$$

där c_1 betecknar koeffeicienten framför z^1 i Maclaurinserien för J_n'. Vi ser att $c_1 = 0$ om $n > 2$ (lägstagradstermen i (*) har grad $n-1$). För $n = 2$ ger $k = 0$ rätt grad, och därmed

$$c_1 = \frac{1}{2^2 \cdot 2!}(2+0)a_0 = \frac{1}{4}.$$

För $n = 1$ ger $k = 1$ rätt grad och

$$c_1 = \frac{1}{2^1 \cdot 1!}(1+1)a_1 = 0.$$

Sammanfattningsvis:

$$\int_{|z|=1} \frac{J_n'(z)}{z^2}\,dz = \begin{cases} \frac{i\pi}{2}, & n = 2 \\ 0, & n \neq 2. \end{cases}$$

(Även $n = 0$ ger en nollskild integral, men vi tittar bara på *positiva* n i denna uppgift.)

6. a) Följer ur algebra och observationen att $e^{\pm i\pi} = -1$.

b) Följ ledningen. Integralen längs de två lodräta stäckorna går mot 0 då $R \to \infty$ mha ML-olikheten och uppskattningen (för $z = R + it$)

$$f(z) = \left|\frac{e^{iz}}{e^z + e^{-z}}\right| \leq \frac{1}{e^R - e^{-R}}$$

och en likartad uppskattning för $z = -R + it$. På sträckan $x + i\pi$ utnyttjar vi beräkningen i a) och får att

$$\int f(z)\,dz = \int_R^{-R} f(t+i\pi)\,dt = \int_{-R}^{R} e^{-\pi} f(z)\,dt.$$

Sammanfattningsvis (efter att $R \to \infty$) får vi kvar:

$$(1+e^{-\pi})\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{e^x + e^{-x}}\,dx = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i\pi/2} \frac{e^{iz}}{e^z + e^{-z}} = \pi e^{-\pi/2}$$

och därmed (ta realdelen):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}}\,dx = \frac{\pi e^{-\pi/2}}{1+e^{-\pi}} = \frac{\pi e^{\pi/2}}{e^{\pi}+1}.$$