LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Funktionsteori
2015–01–07 Svar och anvisningar

1. En beräkning visar att $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$, så u är harmonisk. Cauchy–Riemanns ekvationer ger så småningom (tillsammans med identitetssatsen) att

$$f(z) = \frac{iz^4}{4} + iC$$

där $C \in \mathbb{R}$ är godtycklig.

2. a) $s_{n+1} - s_n = n^2 + 2n + 1$.

b) $s_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$. Glöm inte att bestämma konstanten m.h.a. t.ex. s_1.

3. a) Den första serien divergerar. (Jfr. t.ex. med $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$).
Den andra serien divergerar. (Jfr. t.ex. med $\sum_{k=2}^{\infty} 1/k$, gärna på gränsvärdesform.)
Den tredje serien är absolutkonvergent och därmed konvergent. (Jfr. t.ex. $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ med $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$.

b) Till exempel $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$. (Termerna går inte mot 0.)

c) Till exempel den trigonometriska Fourierserien för en diskontinuerlig funktion, som ändå uppfyller villkoren i Sats 7.18 och därmed konvergerar punktvis.
Ett annat exempel: geometriska serien på intervallet $(-1, 1)$ (detaljerna utelämnade, se boken).

4. a) $\frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} \cos kt - \frac{(-1)^k}{k} \sin kt$.

b) Funktionen uppfyller villkoren i sats 7.16, så Fourierserien konvergerar mot $f(0) = 0$ respekive $f(4\pi) = 0$ i de två punkterna.

c) Utnyttja Parseval. Svaret blir $\dfrac{\pi^4}{24}$.

5. Potensseriens konvergensskiva blir $|z| < 3$ och teorin visar att summan är holomorf på enhetsskivan. (T.o.m. på en cirkelskiva med radie 3.) Residyregel 2 ger de kortaste räkningarna för att visa att

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{f(z)}{z^3}\, dz = \frac{8\pi i}{13}.$$

6. a) Se kursboken. Glöm inte förutsättningarna!

b) Se kursboken.

c) Om det finns en sådan funktion ger ML-olikheten att

$$\left| \int_{|z|=1} p(z) - \frac{1}{z} \right| \leq \pi.$$

Å andra sidan är

$$\int_{|z|=1} (p(z) - \frac{1}{z})\, dz = -2\pi i,$$

vilket ger en motsägelse. Något sådant polynom p kan alltså inte finnas.