LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR TILL
LINJÄR ALGEBRA
2015-08-27 kl 14–19

1. Dom två vektorerna $\overline{RP} = (-1, 1, -1) - (2, -6, 3) = (-3, 7, -4)$ och $\overline{RQ} = (1, 2, -4) - (2, -6, 3) = (-1, 8, -7)$ blir riktningsvektorer till planet. Vi får då $\overline{RQ} \times \overline{RP} = (17, 17, 17)$ vilket ger att exempelvis $\bar{\mathbf{n}} = (1, 1, 1)$ är normal till planet. Planets ekvation blir alltså $x + y + z + d = 0$ och insättning av någon av punkterna ger $d = 1$. För att testa vilka av punkterna på linjen som också ligger i planet stoppar vi in utrycket för linjen i planets ekvation:

$$(5 - t) + (3 + 3t) + (1 + 8t) + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

Skärningspunkten blir alltså $(5, 3, 1) + (-1)(-1, 3, 8) = (6, 0, -7)$.

2. Normering av $(1, 2, -2)$ ger $\hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{3}(1, 2, -2)$. Vektorn $\hat{\mathbf{e}}_2$ måste vara vinkelrät mot både $(1, 2, -2)$ och $(3, 2, 2)$. En sådan vektor ges av $(1, 2, -2) \times (3, 2, 2) = (8, -8, -4)$. Normering ger $\hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{3}(2, -2, -1)$. Eftersom $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ ska vara positivt orienterade väljer vi

$$\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{3}(-2, -1, -2).$$

Eftersom den nya basen är ortogonal får vi dom nya koordinaterna genom

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_1 &= \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{3}(1, 2, -2) \cdot (3, 6, 9) = -1, \\
\tilde{v}_2 &= \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{3}(2, -2, -1) \cdot (3, 6, 9) = -5, \\
\tilde{v}_3 &= \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{3}(-2, -1, -2) \cdot (3, 6, 9) = -10.
\end{aligned}$$

3. a) För att hitta nollrummet till A löser vi systemet $AX = 0$ med gauss-elimination:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 14x_3 + 8x_4 = 0 \\ 3x_1 \quad\quad 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

Om vi sätter $x_3 = t$ får vi lösingarna

$$\begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = -2t \\ x_3 = t \\ x_4 = 0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

En bas till nollrummet blir $(-1, -2, 1, 0)$ och nolldimensionen blir 1. Eftersom trappsystemet ovan har 3 pivåelement blir rangen också 3.

b) En enkel beräkning ger

$$AX_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = Y.$$

Vi ser nu att X_p är **en** lösning till $AX = Y$. Eftersom skillnaden mellan 2 lösningar ligger i nollrummet (se t.ex. Sats 8 sid 141) blir **samtliga** lösningar till systemet

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

4. Avbildingsmatrisen A uppfyller

$$A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -5 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{=B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{=C}.$$

Invertering av B och multiplikation från höger ger

$$A = CB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 5 & 4 \\ -4 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 6 \\ -22 & -16 & -12 \\ 23 & 16 & 12 \end{pmatrix}.$$

Eftersom radvektorerna på rad 1 och 2 är parallella är raderna i A linjärt beroende och därför kan inte A vara inverterbar.

5. a) Utveckling efter rad 2 ger

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

M.h.a. t.ex. Sarrus regel får man

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -12 \quad \text{och} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6,$$

vilket ger determinanten $-(-1)\cdot(-12) + 4\cdot 6 = 12$.

b) Eftersom determinanten i **a)** inte blir 0 är dom 4 kolonnvektorerna $\bar{\mathbf{u}} = (1,-1,1,-1)$, $\bar{\mathbf{u}}_2 = (2,0,2,0)$, $\bar{\mathbf{v}} = (3,0,0,1)$ och $\bar{\mathbf{w}} = (4,4,4,2)$ linjärt oberoende. Då är även varje delmängd av dessa vektorer, speciellt $\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{w}}$, linjärt oberoende.
För att se detta kan man t.ex. titta på vilka lösningar som

$$\lambda_1\bar{\mathbf{u}} + \lambda_3\bar{\mathbf{v}} + \lambda_4\bar{\mathbf{w}} = 0 \tag{1}$$

kan ha. Om $(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4) = (a, b, c)$ är en lösning till (1) så blir $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (a, 0, b, c)$ en lösning till

$$\lambda_1\bar{\mathbf{u}} + \lambda_2\bar{\mathbf{u}}_2 + \lambda_3\bar{\mathbf{v}} + \lambda_4\bar{\mathbf{w}} = 0. \tag{2}$$

Men (2) har bara den triviala lösningen $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (0,0,0,0)$ eftersom $\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}_2, \bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{w}}$ är linjärt oberoende. Alltså har (1) bara triviala den lösningen $(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4) = (0,0,0)$.

6. a) Först beräknar vi egenvärden och egenvektorer. Egenvärdena får vi genom att lösa

$$0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3,$$

vilken har rötterna $\lambda = -1$ och $\lambda = 3$.
Egenvektorerna till $\lambda = -1$ uppfyller

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = t \end{cases}, \quad t \neq 0.$$

Till $\lambda = 3$ får vi

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \end{cases}, \quad t \neq 0.$$

Om vi väljer egenvektorerna $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$ och $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ som kolonner i S blir matrisen både ortogonal och symmetrisk. Därför är $S^{-1} = S^T = S$. Vi får alltså diagonaliseringen $D = S^{-1}AS$ där

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \; S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Insättning i formlerna ger

$$\begin{aligned} p(-1) &= (-1)^2 - 2(-1) - 3 &= 0, \\ p(3) &= 3^3 - 2 \cdot 3 - 3 &= 0, \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} p(A) &= SD^2S^{-1} - 2SDS^{-1} - 3SS^{-1} \\ &= S(D^2 - 2D - 3I)S^{-1} \\ &= S \begin{pmatrix} (-1)^2 - 2(-1) - 3 & 0 \\ 0 & 3^2 - 2 \cdot 3 - 3 \end{pmatrix} S^{-1} = 0. \end{aligned}$$

c) Om $m \times m$ matrisen B har diagonaliseringen $D = S^{-1}BS$ så gäller

$$\begin{aligned} q(B) &= B^n + \alpha_{n-1}B^{n-1} + \ldots \alpha_1 B + \alpha_0 I \\ &= SD^nS^{-1} + \alpha_{n-1}SD^{n-1}S^{-1} + \ldots + \alpha_1 SDS^{-1} + \alpha_0 SS^{-1} \\ &= S(D^n + \alpha_{n-1}D^{n-1} + \ldots + \alpha_1 D + \alpha_0 I)S^{-1} \\ &= S \begin{pmatrix} q(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & q(\lambda_m) \end{pmatrix} S^{-1}. \end{aligned}$$

Om $q(\lambda_1) = q(\lambda_2) = ... = q(\lambda_m) = 0$ blir alltså diagonalmatrisen ovan 0 vilket ger $q(B) = 0$.