LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Funktionsteori
2015–10–29 Lösningsförslag

1. a) $e^{2z} = i \iff 2z = \log i = \dfrac{i\pi}{2} + 2\pi i k$, dvs. $z = \dfrac{i\pi}{4} + i\pi k$, där $k \in \mathbb{Z}$ är godtyckligt.

b) Rottestet ger de kortaste räkningarna:

$$\rho = \lim_{k\to\infty} |kz^k|^{1/k} = |z|,$$

så serien konvergerar för $|z| < 1$ och divergerar för $|z| > 1$. Konvergensradien är alltså 1.

c) Maclaurinutveckling av f ger:

$$f(z) = z^2 - \frac{1}{2}z^4 + \text{högre ordningens termer},$$

vilket visar att f har ett dubbelt nollställe i $z = 0$.

d) Funktionen har en dubbelpol i $z = 0$. Residyregel 1 ger

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{\frac{\cos z}{1+z}}{z^2}\right) = \left(\frac{\cos z}{1+z}\right)'\Big|_{z=0} = \left(\frac{-(1+z)\sin(z) - \cos z}{(1+z)^2}\right)\Big|_{z=0} = -1.$$

2. Den givna funktionen är harmonisk (på hela komplexa planet) och har därför ett harmoniskt konjugat. Cauchy–Riemanns ekvationer ger:

$$\begin{cases} v'_y = u'_x = 2x - 2y \\ v'_x = -u'_y = 2x + 2y. \end{cases}$$

Ur den första ekvationen följer $v = 2xy - y^2 + \phi(x)$, vilket medför att $v'_x = 2y + \phi'(x)$. Jämförelse med den andra ekvationen ger $\phi'(x) = 2x$, dvs. $\phi(x) = x^2 + C$ för någon (reell) konstant C. Den sökta funktionen blir således

$$f(x+iy) = (x^2 - 2xy - y^2) + i(x^2 - y^2 + 2xy + C)$$

eller, med hjälp av identitetssatsen (sätt $y = 0$, $x = z$):

$$f(z) = (1+i)z^2 + iC$$

för någon reell konstant C.

3. a) Vi börjar med att lösa motsvarande homogena ekvation, vars karakteristiska ekvation är $r^2 - 5r + 6 = 0$, dvs. $r = 2$ eller $r = 3$. Lösningen till den homogena ekvationen blir alltså:

$$x_n^h = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n.$$

Eftersom $r = 2$ är en rot till det karakteristiska polynomet, ansätter vi en partikulärlösning: $x_n^p = Cn2^n$. Insättning ger

$$C(n+2)2^{n+2} - 5C(n+1)2^{n+1} + 6Cn2^n = 2^{n+1},$$

dvs. $(8C - 10C)2^n = 2 \cdot 2^n$, så $C = -1$ och den allmänna lösningen till rekursionsekvationen blir

$$x_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n - n2^n.$$

Begynnelsevärdena ger $1 = A + B$ och $1 = 2A + 3B - 2$ vilket löses till $A = 0$, $B = 1$, och svaret blir därmed $x_n = 3^n - n2^n$.

b) Vi har $x_n = 3^n - n2^n$. Sätt $a_n = \frac{1}{x_n}$ och $b_n = \frac{1}{3^n}$. Vi ser att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^n - n2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^n(1-n(\frac{2}{3})^n)} = 1$$

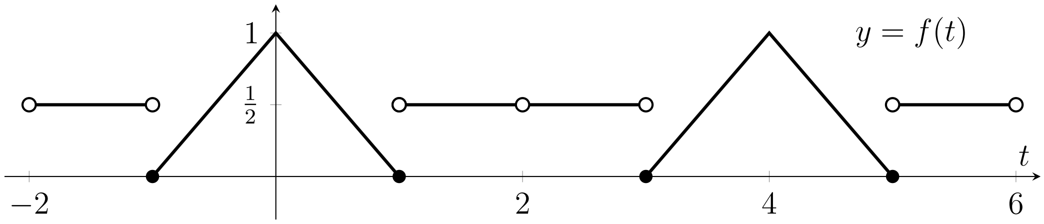
och eftersom $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ är en konvergent (geometrisk) serie, visar jämförelsetestet på gränsvärdesform att $\sum_{n=0}^{\infty} a_k$ också är konvergent. (Lösningar med kvot- eller rottestet fungerar också bra.)

För den andra serien har vi att

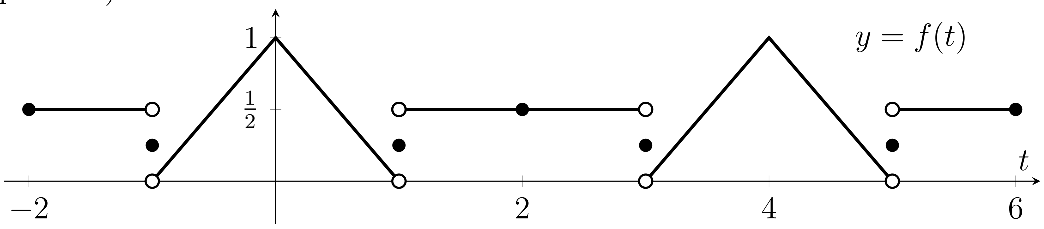
$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n(3^n - n2^n)}{3^{n+1} - (n+1)2^{n+1}} \right| = \cdots = \frac{1}{3}$$

på liknande sätt som i den första gränsvärdesberäkningen. Termerna i serien går alltså inte mot 0 och serien divergerar därför.

4. a)



b) Funktionen uppfyller villkoren (existens av höger- och vänstergränsvärden och höger- och vänsterderivator) i sats 7.18 i alla punkter (och villkoren i sats 7.16 i de flesta punkter). Grafen till Fourierseriens summa blir således:



c) Eftersom f är jämn är $b_k = 0$ för alla k. Fourierserien blir alltså:

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi t}{2}.$$

Insättning av $t = 0$ och hänvisning till sats 7.16 (eller grafen i b) visar att

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1.$$

Beräkning av c_0 ger

$$c_0 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{2} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 (1-t)\,dt + \int_1^2 \frac{1}{2}\,dt\right) = \frac{1}{2}.$$

Följaktligen är $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{2}$. På motsvarande sätt ger Parsevals formel att

$$|c_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} |f(t)|^2\,dt$$

och

$$\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}|f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 (1-t)^2\,dt + \int_1^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 dt\right) = \frac{7}{24}.$$

Vi får alltså $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \frac{1}{12}$.

5. a) Vi har att

$$f_n(x) = \frac{1+nx^2}{n+x^2} = \frac{x^2+\frac{1}{n}}{1+\frac{x^2}{n}},$$

så $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x^2$ för varje $x \in \mathbb{R}$. Funktionsföljden konvergerar alltså punktvis mot $f(x) = x^2$ på hela $\mathbb{R}$.

b) $\|g\|_D = \sup\{|g(x)| : x \in D\}$.

c) Vi ser att

$$|f_1(x) - f(x)| = \left|\frac{1+x^2}{1+x^2} - x^2\right| = |1-x^2| = |x^2-1|$$

så för $0 \le x \le 1$, $|f_1(x) - f(x)| = 1 - x^2 \le 1$ med likhet för $x = 0$. Med andra ord måste $\|f_1 - f\|_{[0,1]} = 1$.

Vi ser också att $|f_1(x) - f(x)|$ kan bli godtyckligt stort eftersom högerledet går mot $+\infty$ då $x \to +\infty$, så $\|f_1 - f\|_{[0,\infty)} = +\infty$.

d) En liknande beräkning som i c) visar att

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1-x^4}{x^2+n}\right|. \tag{*}$$

Vi ser alltså att

$$\|f_n - f\|_{[0,R]} = \sup_{0\le x\le R} |f_n(x) - f(x)| \le \frac{R^4+1}{n},$$

vilket visar att $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{[0,R]} = 0$ för varje $R > 0$. Det betyder att funktionsföljden konvergerar likformigt på $[0, R]$ för varje $R > 0$. (I synnerhet för $R = 1$).

Ur (*) ser vi också att för varje fixt n, kan vi göra $|f_n(x) - f(x)|$ hur stort som helst (uttrycket i höger led går mot $+\infty$ då $x \to +\infty$ för varje n). Med andra ord är $\|f_n - f\|_{[0,\infty)} = +\infty$ för varje n. Funktionsföljden konvergerar alltså *inte* likformigt på $[0, \infty)$.

6. Sätt $f(z) = \dfrac{z^\alpha}{1+z^2}$, där $z^\alpha = \exp(\alpha \operatorname{Log}_n z)$ är den naturliga grenen.

Jag väljer att göra lösningen genom att integrera längs en hel hålkaka (för figur och beteckningar, se exempel 10.5), men det går också bra att integrera längs en halv hålkaka (som i övning 10.22).

På C_R (om R är tillräckligt stort) är

$$\left|\int_{C_R} \frac{z^\alpha}{1+z^2}\,dz\right| \le 2\pi R \max_{z\in C_R}\left|\frac{z^\alpha}{1+z^2}\right| \le 2\pi R\frac{4R^\alpha}{R^2} = \frac{8\pi R^{1+\alpha}}{R^2} \to 0$$

då $R \to \infty$ eftersom $\alpha < 1$.

På C_ε (om $\varepsilon < 1/\sqrt{2}$) är

$$\left|\int_{C_\varepsilon} \frac{z^\alpha}{1+z^2}\,dz\right| \le 2\pi\varepsilon \max_{z\in C_\varepsilon}\left|\frac{z^\alpha}{1+z^2}\right| \le 2\pi\varepsilon\frac{\varepsilon^\alpha}{1/2} = 4\pi\varepsilon^{1+\alpha} \to 0$$

då $R\to\infty$ eftersom $\alpha > -1$.

Längs I^+ får vi den önskade integralen och längs I^- får vi:

$$\int_{I^-} f(z)\,dz = \int_R^\varepsilon \frac{\exp(\alpha(\ln x + 2\pi i))}{1+x^2}\,dx = -e^{2\pi i\alpha}\int_\varepsilon^R \frac{x^\alpha}{1+x^2}\,dx.$$

Vi lägger ihop alla fyra integraler, använder residysatsen och låter $\varepsilon\to 0^+$ och $R\to+\infty$:

$$\begin{aligned}(1-e^{2\pi i\alpha})\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^2}\,dx &= 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=i}\left(\frac{z^\alpha}{1+z^2}\right) + \operatorname*{Res}_{z=-i}\left(\frac{z^\alpha}{1+z^2}\right)\right)\\ &= 2\pi i\left(\frac{i^\alpha}{2i} - \frac{(-i)^\alpha}{2i}\right) = \pi\big(e^{i\pi\alpha/2} - e^{3i\pi\alpha/2}\big).\end{aligned}$$

Om $\alpha\ne 0$ kan vi dividera med $1-e^{2\pi i\alpha}$ och får

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^2}\,dx &= \pi\frac{e^{i\pi\alpha/2}-e^{3i\pi\alpha/2}}{1-e^{2\pi i\alpha}} = \pi\frac{e^{i\pi\alpha/2}(1-e^{i\pi\alpha})}{(1-e^{i\pi\alpha})(1+e^{i\pi\alpha})}\\ &= \frac{\pi}{2}\frac{2}{e^{-i\pi\alpha/2}+e^{i\pi\alpha/2}} = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi\alpha}{2}}.\end{aligned}$$

Fallet $\alpha = 0$ kan hanteras separat (enklast via envariabelmetoder) och det visar sig att formeln ovan gäller även i det fallet.