

Hjälpmedel: Bifogat formelblad.

Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Skriv fullständiga meningar och förklara dina beteckningar. Ge tydliga och enkla svar där så är möjligt.

1. Lös rekursionsekvationen

$$x_{n+2} + 4x_{n+1} - 5x_n = 12n + 14, \quad x_0 = 6, \quad x_1 = 2.$$

2. Endast kortfattade lösningar behövs på denna uppgift. (5 × 0.2)

- a) Finns det någon funktion  $f$  som är holomorf (på hela  $\mathbb{C}$ ) och vars realdel är  $u(x, y) = x^2 - y^3$ ?
- b) Vilken konvergensradie har serien  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{2k}$ ?
- c) Vilken typ av singularitet har  $\frac{2z}{(z-1)^2 \sin z}$  i  $z = 1$ ? (Om det är en pol, ange även ordningen.)
- d) Hur definieras  $z^\alpha$  om  $z$  och  $\alpha$  är komplexa tal?
- e) Beräkna integralen  $\int_{|z-1|=2} \frac{\sin^2 z}{(z+4)e^z} dz$ .

3. a) Visa att realdelen av en holomorf funktion är harmonisk. (0.3)

- b) Bestäm samtliga funktioner  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sådana att

$$u(x, y) = x g(y)$$

blir realdelen av en funktion  $f$  som är holomorf på hela komplexa planet. Uttryck alla sådana  $f$  som funktioner av  $z = x + iy$ . (0.7)

4. a) Avgör vilka av följande serier som konvergerar respektive divergerar: (3 × 0.2)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{5^k}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(k+i)^3}, \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}k}{\sqrt{k+1} \ln k}.$$

- b) Funktionen

$$f(z) = \frac{e^z}{z-2}$$

har en Taylorserie  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z+1)^k$ . Vad är dess konvergensradie? Beräkna värdet av  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ . (0.4)

5. Funktionen  $f$  är  $2\pi$ -periodisk och uppfyller att

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 < t < \pi \\ 0, & \pi < t < 2\pi. \end{cases}$$

a) Bestäm den trigonometriska Fourierserien,  $\mathcal{FS}_f^{\text{trig}}(t)$ , för  $f$ . (0.4)

b) Utnytta resultatet i a) för att beräkna

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2} \quad (0.3)$$

c) Konvergerar  $\mathcal{FS}_f^{\text{trig}}$  likformigt på något intervall som innehåller punkten  $t = 1$ ? Bestäm i så fall (ett så stort du kan) sådant intervall. (0.3)

6. a) Låt  $f(z) = \frac{\cos z}{z}$ . Vilka olika värden kan integralen

$$\int_{\gamma} f(z) dz$$

anta om  $\gamma$  är en enkel, sluten (styckvis slät) kurva som inte går genom origo? (0.3)

b) Låt  $n \geq 1$  vara ett positivt heltal. För vilka värden på  $n$  har funktionen

$$g_n(z) = \frac{\cos z}{z^n}$$

en primitiv funktion på  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ? (0.7)