

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga och tydliga motiveringar.

1. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Beräkna exponentialmatrisen

$$e^{tA}. \quad (0.6)$$

b) Bestäm den allmänna lösningen till systemet $\frac{dx}{dt} = Ax$. (0.2)

c) Är systemet $\frac{dx}{dt} = Ax$ stabilt? Glöm inte att motivera ditt svar. (0.2)

2. a) Lös det tidsdiskreta systemet

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\text{med begynnelsevillkoret } \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (0.6)$$

b) Lös det tidsdiskreta systemet

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (0.4)$$

3. a) Låt

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{för } -\infty < t < 0 \\ t^2 - 1, & \text{för } 0 < t < 1 \\ 0, & \text{för } 1 < t < \infty \end{cases}$$

$$\text{Beräkna distributionsderivatorna } f' \text{ och } f''. \quad (0.5)$$

b) Lös ekvationen

$$y' * \theta(t) = \sin(\theta(t)). \quad (0.1)$$

c) Lös ekvationen

$$y'' * \theta(t) = \sin(\theta(t)). \quad (0.4)$$

4. Bestäm den kausala lösningen till differentialekvationen

$$y^{(4)} - y = \delta'''(t), \quad -\infty < t < \infty.$$

5. a) Beräkna Fouriertransformen $\mathcal{F}(f)$ och den inversa Fouriertransformen $\mathcal{F}^{-1}(f)$ av funktionen

$$f(t) = e^{-4t^2 + it}. \quad (0.3)$$

- b) En funktionsföljd definieras av rekursionsformeln $f_n = \mathcal{F}(f_{n-1})$ för $n = 1, 2, \dots$ och $f_0(t) = t e^{-4t^2}$. Bestäm funktionerna $f_{100}(t)$ och $f_{101}(t)$. (0.3)

- c) Låt $g(t) = e^{-t^2}$. Använd Parsevals formel för att beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} (g * g(t))^2 dt. \quad (0.4)$$

6. Ett kausalt linjärt och tidsinvariant system \mathcal{S} har impulssvaret $h(t)$. Antag att $y(t)$ med $y(1) = 2$ är en kausal funktion sådan att systemets svar blir

$$(1 - \cos t)\theta(t)$$

på insignalen $y(t)$ och

$$(t - \sin t)\theta(t)$$

på insignalen $t y(t)$. Bestäm insignalen $y(t)$ och impulssvaret $h(t)$.

LYCKA TILL!