LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

PRELIMINÄRA LÖSNINGAR
SYSTEM OCH TRANSFORMER
2016–01–13

1. Ett linjärt och tidsinvariant system med impulssvar $h(t)$ är kausalt om och endast om $h(t) = 0$ då $t < 0$. Om impulssvaret är en funktion är systemet stabilt om och endast om integralen $\int |h(t)|\,dt$ konvergerar.
Vi ser direkt att (endast) systemen i d och e är kausala.
Återstår stabiliteten:
a) Eftersom funktionen $(t^2+1)t^2e^{-t^2}$ är begränsad gäller $|h(t)| \le C(1+t^2)^{-1}$ så systemet är stabilt.
b) Funktionen $|h(t)|$ är exponentiellt avtagande då $t \to \pm\infty$ så systemet är stabilt.
c) Funktionen $|h(t)|$ är exponentiellt avtagande då $t \to -\infty$ och noll då $t > 0$ så systemet är stabilt.
d) Funktionen $|h(t)|$ växer (exponentiellt) då $t \to \infty$ så systemet är inte stabilt.
e) Det gäller

$$\int_{\pi}^{N\pi} |h(t)|\,dt = \sum_{k=1}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{t}|\sin t|\,dt >$$
$$> \sum_{k=1}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{\pi(k+1)}|\sin t|\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin u\,du \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k+1}\,,$$

där $\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k+1} \to \infty$ då $N \to \infty$. Detta visar att $\int_0^\infty |h(t)|\,dt$ är divergent, dvs att systemet inte är stabilt.

2. Differentialekvationen kan skrivas

$$\theta(t)y''(t) - \theta(t)y(t) = \theta(t)\sin t\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Laplacetransformation med användning av regeln $\mathcal{L}(\theta u')(s) = s\mathcal{L}(\theta u)(s) - u(0)$ ger

$$(s^2-1)Y(s) = s + 1 + \frac{1}{s^2+1}\,,$$

där $Y(s) = \mathcal{L}(\theta y)(s)$.
Vi får

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s^2-1)(s^2+1)} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s^2-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s^2+1} \\ &= \frac{5}{4}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{4}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s^2+1}\,. \end{aligned}$$

Kausal inverstransform ger

$$\theta(t)y(t) = \left(\frac{5}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}\sin t\right)\theta(t)\,,$$

och alltså

$$y(t) = \frac{5}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}\sin t\,, \quad t > 0\,.$$

Observera att $y(+0)$ och $y'(+0)$ stämmer överens med de givna begynnelsevillkoren.

3. Differentialekvationen kan skrivas

$$u^{(4)}(x) = x\delta'(x-1) = (x\delta(x-1))' - \delta(x-1) = \delta'(x-1) - \delta(x-1)\,.$$

Genom att att ta primitiva distributioner får vi

$$\begin{aligned} u'''(x) &= \delta(x-1) - \theta(x-1) + A \\ u''(x) &= \theta(x-1) - (x-1)\theta(x-1) + Ax + B\,. \end{aligned}$$

Villkoren $u''(0) = u''(2) = 0$ ger att $A = B = 0$. Ytterligera två integrationer och användning av bivillkoren $u(0) = u(2) = 0$ ger

$$u(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2\theta(x-1) - \frac{1}{6}(x-1)^3\theta(x-1) - \frac{1}{6}x\,.$$

4. Vi skriver $A = a\cdot I + b\cdot N$ med

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi noterar att $I\cdot N = N\cdot I$, $N^2 = 0$ och att A har ett dubbelt egenvärde a.

a) Antag att matrisen A är diagonaliserbar. I så fall existerar en inverterbar matris S med

$$A = S\cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \cdot S^{-1} = a\cdot I.$$

Det medför att $b = 0$ om A är diagonaliserbar. Om $b = 0$ kan vi välja vilken inverterbar matris S som helst – t ex enhetsmatrisen – så A är diagonaliserbar.

b) Eftersom I och N kommuterar har vi

$$e^{At} = e^{aI}\cdot e^{bN} = (e^{at}\cdot I)\cdot(I + bt\cdot N) = \begin{bmatrix} e^{at} & bte^{at} \\ 0 & e^{at} \end{bmatrix}.$$

c) Eftersom I och N kommuterar får vi (enligt binomialsatsen)

$$\begin{aligned} A^n &= (a\cdot I + b\cdot N)^n = a^n\cdot I + n\cdot a^{n-1}\cdot I\cdot b\cdot N \\ &= \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Alternativt kan vi använda att $x_n = A^n x_0$ löser systemet i e). Med $x_n = [u_n\, v_n]^T$ kan systemet skrivas

$$\begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n \\ v_{n+1} = av_n\,. \end{cases}$$

Den andra ekvationen har lösningen $v_n = a^n v_0$. Insättning i den första ekvationen ger

$$u_{n+1} = au_n + ba^n v_0$$

med lösning $u_n = a^n u_0 + bna^{n-1}v_0$.

d) Systemet har den allmänna lösningen

$$x_1(t) = c_1 e^{at} + c_2 bte^{at}, \qquad x_2(t) = c_2 e^{at}.$$

Därför är systemet stabilt om och endast om $a < 0$.

e) Systemet har den allmänna lösningen

$$x_n^{(1)} = c_1 a^n + c_2 bna^{n-1}, \qquad x_n^{(2)} = c_2 a^n.$$

Därför är systemet stabilt om och endast om $-1 < a < 1$.

5. Eftersom $|\frac{\sin t}{t}| \leq 1$ har vi

$$\left| \frac{\sin t}{t(a^2+t^2)} \right| \leq \frac{1}{a^2+t^2}$$

vilket visar att integralen är konvergent. Integranden är en jämn funktion så vi har

$$I_a := \int_0^\infty \frac{\sin t}{t(a^2+t^2)}\, dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin t}{t(a^2+t^2)}\, dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty u(t)\overline{v(t)}\, dt\,,$$

där $u(t) = \frac{\sin t}{t}$ och $v(t) = \frac{1}{a^2+t^2} = \frac{1}{a^2} \frac{1}{1+(t/a)^2}$.
Parsevals formel ger

$$I_a = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty \hat{u}(\omega)\overline{\hat{v}(\omega)}\, d\omega\,.$$

Eftersom $u(t) = \hat{w}(t)$ där $w(x) = \frac{1}{2}(\theta(x+1) - \theta(x-1))$ har vi $\hat{u}(\omega) = 2\pi w(-\omega) = 2\pi w(\omega)$.
Vidare är

$$\hat{v}(\omega) = \frac{1}{a^2} \cdot (1/|a|)^{-1} \pi e^{-|\omega/(1/a)|} = \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega}\,.$$

Vi får

$$I_a = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \pi \cdot \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}\, d\omega = \frac{\pi}{2a} \int_0^1 e^{-a\omega}\, d\omega = \frac{\pi}{2a^2}(1 - e^{-a})\,.$$

6.a) Impulssvaret $h(t)$ är utsignalen då insignalen $w(t) = \delta(t)$.
Laplacetransform av systemet ger

$$\begin{cases} (s+1)X(s) = 1 \\ \left(s + 3 + \frac{1}{s+1}\right) H(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3}\right) X(s)\,, \end{cases}$$

där $X(s) = \mathcal{L}(x)(s)$ och där $H(s) = \mathcal{L}(h)(s)$ är överföringsfunktionen.
Vi får

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}\,,$$

med definitionsområde $\operatorname{Re} s > -1$ eftersom systemet är kausalt.
Partialbråksuppdelning och kausal inverstransform ger att

$$h(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-t} - 2e^{-2t} + e^{-3t}\right)\theta(t)\,.$$

b)

$$S(e^{1\cdot t}) = H(1)e^{1\cdot t} = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} e^t = \frac{1}{24} e^t\,.$$