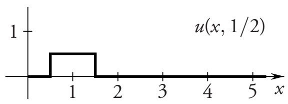
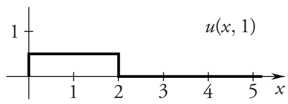
LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

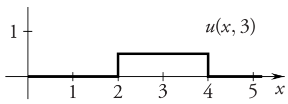
LÖSNINGAR
KONTINUERLIGA SYSTEM
2014-05-31

1. Till exempel kan u vara utböjningen av en mycket lång (halvoändlig) elastisk sträng med vågutbredningshastighet 1 som är fast inspänd i änden ($x = 0$) och som ej påverkas av några yttre krafter. Vid tiden 0 är strängen i jämnviktläget och ges med ett slag underifrån i $x = 1$ av en spetsig hammare.

Utvidga problemet till hela $\mathbb{R}$ genom att spegla udda och sätt $h(x) = \delta(x-1) - \delta(x+1)$. Om $H(x) = -\theta(x+1) + \theta(x-1)$ är en primitiv funktion till h så kan lösningen skrivas $u(x,t) = (H(x+t) - H(x-t))/2$.







2. En modell är

$$\begin{cases} u'_t - D\,u''_{xx} = -\alpha\, u, & 0 < x < L, t > 0, \\ u'_x(0,t) = u'_x(L,t) = 0\ , & t > 0, \\ u(x,0) = M\,\delta(x - L/2), & 0 < x < L, \end{cases}$$

där $D > 0$ är diffusionskonstanten och $\alpha > 0$ sönderfallskonstanten. Eftersom det är homogena neumannvillkor kan man ansätta

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)\cos(k\pi x/L)\ .$$

Efter termvis derivation och insättning i differentialekvationen får man

$$\sum_{k=0}^{\infty}(u'_k(t) + \frac{Dk^2\pi^2}{L^2}u_k(t))\cos(k\pi x/L) = -\alpha\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)\cos(k\pi x/L)$$

vilket med hjälp av entydigheten hos ortogonalutvecklingen ger

$$u'_k(t) + (\alpha + \frac{Dk^2\pi^2}{L^2})u_k(t) = 0$$

med lösningen

$$u_k(t) = c_k\, e^{-(\alpha + Dk^2\pi^2/L^2)t}\ ,\quad k = 0, 1, \ldots$$

där $c_k = u_k(0)$ ges av utvecklingen av $M\,\delta_{L/2}$ i cosinusserie

$$c_0 = \frac{1}{L}\int_0^L M\,\delta(x - L/2)\,dx = \frac{M}{L},$$

$$c_k = \frac{2}{L}\int_0^L M\,\delta(x - L/2)\cos(k\pi x/L)\,dx = \frac{2M}{L}\cos(k\pi/2).$$

Alltså är lösningen

$$u(x,t) = \frac{M}{L}e^{-ct} + \frac{2M}{L}e^{-ct}\sum_{k=1}^{\infty}\cos(k\pi/2)e^{-Dk^2\pi^2 t/L^2}\ \cos(k\pi x/L).$$

3. U består av tredjegradspolynom utan konstant koefficient och de är en delmängd av det linjära rummet $L_2([-1,1])$. Låt u och v vara polynom i U. Då är både λu där λ är en skalär och $u+v$ högst tredjegradspolynom vars konstanta koefficienter är 0 och de ligger därmed i U.

En bas i U är x, x^2, x^3 men den ät inte ortogonal. Utgående från denna ger Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess den ortogonala basen $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = x^2$, $\varphi_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$. Enligt projektionssatsen minimeras den givna integralen om koefficienterna c_k i polynomet $p(x) = \sum_{k=1}^{3} c_k\varphi_k(x)$ väljs så att

$$c_k = \frac{(\varphi_k|1)}{(\varphi_k|\varphi_k)}, \quad k = 1, 2, 3,$$

Detta ger att $c_1 = c_3 = 0$ och $c_2 = 5/3$ det vill säga polynomet $\frac{5}{3}x^2$ minimerar integralen.

4. Starta med att homogenisera randvillkoret, sätt $v(x,t) = u(x,t) - T_0$. Då är

$$v(0,t) = 0,\ t > 0, \quad \text{och} \quad v(x,0) = T_1 - T_0\ ,\ x > 0.$$

Vi har nu ett homogent dirichletvillkor vid $x = 0$ och speglar udda. För w gäller

$$\begin{cases} w'_t - a\, w''_{xx} = 0\ , \quad x \in \mathbb{R}\ ,\ t > 0, \\ w(x,0) = g(x) = (T_1 - T_0)\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} T_1 - T_0, & x > 0, \\ -(T_1 - T_0), & x < 0. \end{cases} \end{cases}$$

Lösningen $w(x,t)$ kan skrivas med greenfunktionen G för värmeledning som

$$\begin{aligned} w(x,t) = G * g(x,t) &= \frac{T_1 - T_0}{\sqrt{4\pi a t}}\Big(-\int_{-\infty}^{0} e^{-(x-\alpha)^2/4at}\, d\alpha + \int_{0}^{\infty} e^{-x-\alpha)^2/4at}\, d\alpha\Big) \\ &= \frac{T_1 - T_0}{\sqrt{\pi}}\Big(\int_{\infty}^{x/\sqrt{4at}} e^{-y^2}\, dy - \int_{x/\sqrt{4at}}^{-\infty} e^{-y^2}\, dy\Big) \\ &= \frac{T_1 - T_0}{2}\Big(\big[\operatorname{erf}(y)\big]_{\infty}^{x/\sqrt{4at}} - \big[\operatorname{erf}(y)\big]_{x/\sqrt{4at}}^{-\infty}\Big) = (T_1 - T_0)\operatorname{erf}(x/\sqrt{4at}) \end{aligned}$$

Alltså är $u(x,t) = T_0 + (T_1 - T_0)\operatorname{erf}(x/\sqrt{4at})$, $x > 0$, $t > 0$.

Problemet kan beskriva värmeledning i en lång (halvoändlig) stav som är isolerad utom i ändpunkten ($x = 0$). Från början ($t = 0$) har hela staven temperaturen $u = T_1$. Vid starttiden ges ändpunkten ($x = 0$) temperaturen T_0 och hålls därefter vid denna temperatur. Värmediffusiviteten är a.

5. Dela upp $u = u_1 + u_2$ där u_1 och u_2 löser de två problemen

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = \delta_{(0,1)}, & x \in \mathbb{R},\ y > 0, \\ u_1(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

respektive

$$\begin{cases} -\Delta u_2 = 0, & x \in \mathbb{R},\ y > 0, \\ u_2(x,0) = \theta(x+1) - \theta(x-1), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Då kan u_1 bestämmas, efter udda spegling, ur fundamentallösningen för $\mathbb{R}^2$

$$u_1(x,y) = -\frac{1}{4\pi}\ln(x^2 + (y-1)^2) + \frac{1}{4\pi}\ln(x^2 + (y+1)^2)$$

och u_2 fås med hjälp av Poissons integralformel

$$\begin{aligned}
u_2(x,y) &= \int_{-\infty}^{\infty} P(x-t,y)u_2(t,0)\,dt \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\pi}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\pi y}\frac{1}{1+(\frac{x-t}{y})^2}\,dt \\
&= \Big[-\frac{1}{\pi}\arctan\frac{x-t}{y}\Big]_{-1}^{1} = \frac{1}{\pi}\big(\arctan\frac{x+1}{y} - \arctan\frac{x-1}{y}\big).
\end{aligned}$$

Lösningen $u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y)$ för $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$.

6. Egenfrekvenserna är $f = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\lambda}$ där c är ljudhastigheten och λ är egenvärdena till operatorn $Au = -\Delta u$ i Ω med homogena neumannvillkor på $\partial\Omega$ det vill säga att normalderivatorna $\partial_n u = 0$ på varje rand.

I det endimensionella fallet är Ω intervallet $0 \le x \le L$ med egenvärden respektive egenfunktioner

$$\lambda_k = \big(\frac{k\pi}{L}\big)^2, \quad \text{och} \quad \varphi_k = \cos\big(\frac{k\pi}{L}x\big), \quad k = 0,1,2,\ldots$$

vilket ger egenfrekvenserna

$$f_k = \frac{ck}{2L}, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

($f_0 = 0$ brukar inte räknas som egenfrekvens).

I det tredimensionella fallet ges Ω i cylinderkoordinater av $0 \le r \le R$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le z \le L$. Sätt $u(r,\theta,z) = \rho(r)\Theta(\theta)Z(z)$

$$Au = \lambda u \equiv \frac{\frac{1}{r}(r\rho')'}{\rho} + \frac{1}{r^2}\underbrace{\frac{\Theta''}{\Theta}}_{-\beta} + \underbrace{\frac{Z''}{Z}}_{-\alpha} + \lambda = 0$$

Med beteckningen $\gamma = \lambda - \alpha$ blir de separerade ekvationerna

$$\begin{cases}
Z'' + \alpha Z = 0 & Z'(0) = Z'(L) = 0, \\
\Theta'' + \beta\,\Theta = 0 & \Theta \;\; 2\pi\text{-periodisk}, \\
\rho'' + \frac{1}{r}\rho' + \big(\gamma - \frac{\beta}{r^2}\big)\rho = 0 & \rho'(R) = 0,\; \rho \text{ begränsad.}
\end{cases}$$

Z-ekvationen har de icketriviala lösningarna

$$Z_k(z) = \cos\big(\frac{k\pi}{L}z\big) \quad \text{för} \quad \alpha_k = \big(\frac{k\pi}{L}\big)^2, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

Θ-ekvationen har de icketriviala lösningarna

$$\Theta_n(\theta) = \cos n\theta \quad \text{eller} \quad \sin n\theta \quad \text{för} \quad \beta = n^2, \quad n = 1,2,\ldots$$

men bara $\Theta_0(\theta) = 1$. ρ-ekvationen är Bessels ekvation med $\beta = n^2$. Lösningarna är

$$\rho(r) = \begin{cases}
a_n J_n(\sqrt{\gamma}r) + b_n Y_n(\sqrt{\gamma}r) & \text{om } \gamma > 0, \\
a_n r^n + b_n r^{-n} & \text{om } \gamma = 0,\, n \ne 0, \\
a_0 + b_0 \ln r & \text{om } \gamma = 0,\, n = 0.
\end{cases}$$

Villkoret att ρ är begränsad och $\rho'(R) = 0$, ger om α_{nm}, $m = 1, 2, \ldots$ betecknar de ickenegativa nollställena till J_n', de icketriviala lösningarna,

$$\rho(r) = \begin{cases} J_n\big(\frac{\alpha_{nm}}{R}r\big) & \text{om } \gamma = (\alpha_{nm})^2,\ n, m-1 = 0, 1, 2, \ldots,\ (m, n) \neq (0, 1) \\ 1 & \text{om } \gamma = 0,\ n = 0. \end{cases}$$

Egenvärden och egenfunktioner blir nu

$$\lambda_{knm} = \big(\frac{k\pi}{L}\big)^2 + \big(\frac{\alpha_{nm}}{R}\big)^2,$$

med egenfunktioner

$$J_n\big(\frac{\alpha_{nm}}{R}r\big)\begin{Bmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{Bmatrix}\cos\big(\frac{k\pi}{L}z\big),$$

då $k, n, m-1 = 0, 1, 2, \ldots$ utom då $(m, n) = (0, 1)$ då istället för $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\lambda_{k01} = \big(\frac{k\pi}{L}\big)^2 \qquad \text{med} \qquad \cos\big(\frac{k\pi}{L}z\big).$$

Observera att eftersom $\alpha_{01} = 0$ så fungerar formeln för λ_{knm} även i undantagsfallet. Egenfrekvenser i den tredimensionella modellen blir

$$f_{knm} = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\big(\frac{k\pi}{L}\big)^2 + \big(\frac{\alpha_{nm}}{R}\big)^2} \quad k, n, m-1 = 0, 1, 2, \ldots$$

Av dessa så överensstämmer f_{k01} med f_k från den endimensionella modellen och egenfrekvenserna, upp till 2000 Hz i bägge fallen blir $170k$ Hz för $k = 1, 2, \ldots, 11$ dvs

$$170, 340, 510, 680, 850, 1020, 1190, 1360, 1530, 1700, 1870 \text{ Hz}.$$

Den lägsta egenfrekvensen som bara finns i den tredimensionella modellen är då $k = 0$, $n = 1$, $m = 1$ med $\alpha_{11} = 1{,}841$. Frekvensen är $f_{011} = 1992$ Hz. Närmast högre frekvens fås genom att höja k till 1 med $f_{111} = 1999{,}6$ Hz. Nästa α_{nm} är 3,054 vilket ger frekvenser över 2000 Hz.

Approximationen är ganska god om man huvudsakligen är intresserad av de lägsta egenfrekvenserna som vid modellering av ljudet från en riktig orgelpipa.