

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Beräkna följande gränsvärden. Endast svar krävs på denna uppgift. (0.2)/st.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{2x} & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{3x} + 1}{2x} & \text{c)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} - 1}{2x} \\ \text{d)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{3x} - 1}{2x} & \text{e)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{3x} - 1}{2x} & \end{array}$$

2. Rita grafen till funktionen

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2 - 4}.$$

Ange speciellt alla lokala extrempunkter och asymptoter.

3. Polynomen  $p(z) = z^4 + 5z^2 + 2z + 20$  och  $q(z) = z^3 - 8$  har precis två gemensamma nollställen. Bestäm dessa och lös ekvationen  $p(z) = 0$  fullständigt. (Ledning: Lös först  $q(z) = 0$ .)

4. a) Visa att en funktion  $f$  som är deriverbar i en punkt  $x_0$  också är kontinuerlig i  $x_0$ . (0.3)

- b) Gäller omvändningen till påståendet i a)? Bevisa eller ge ett motexempel. (0.2)

- c) Bestäm konstanterna  $a$  och  $b$  ( $b > 0$ ) så att funktionen (0.5)

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x^2} & \text{då } x < 0 \\ a & \text{då } x = 0 \\ \frac{1}{x} \left( \sqrt{\frac{1}{x^2} + b} - \frac{1}{x} \right) & \text{då } x > 0 \end{cases}$$

blir kontinuerlig.

5. a) Visa att  $|(1+x)^{3/2} - 1 - \frac{3}{2}x| \leq \frac{3}{4}x^2$  då  $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ . (0.5)

- b) Bestäm konstanten  $a$  så att gränsvärdet (0.5)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x^2)^{3/2} - 1 + ax^2}{x^4}.$$

blir ändligt. Bestäm också gränsvärdet för detta värde på  $a$ .

6. En cirkelsektor är ett område som begränsas av en cirkelbåge och två av cirkelns radier (se figuren). Man vill inhägnat ett område i form av en cirkelsektor. Bestäm den radie  $r$  och den vinkel  $\theta$  som ger kortast längd på stängslet om arean av området skall ha det bestämda värdet  $A \text{ m}^2$ .

LYCKA TILL!

$\theta$

$r$