LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
ENDIMENSIONELL ANALYS
DELKURS B2/A3
2016–01–16 8–13

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar. Lämna tydliga svar om så är möjligt.

1. a) Lös den binomiska ekvationen $z^4 = -4$ och rita ut lösningarna i en figur. Lösningarna ska anges på formen $a + ib$. (0.7)

b) Faktorisera polynomet $p(x) = x^4 + 4$ i reella andragradsfaktorer. (0.3)

2. a) Bestäm alla funktioner f sådana att $(xf(x))' = \dfrac{1}{1+x}$. (0.3)

b) Bestäm alla primitiva funktioner till funktionen $\dfrac{x+2}{x^2-2x+5}$. (0.5)

c) Konvergerar integralen (0.2)

$$\int_1^\infty \frac{(x+2)dx}{x^2-2x+5} \quad ?$$

3. a) Formulera och bevisa analysens huvudsats. (0.6)

b) Beräkna derivatan $\Phi'(x)$ av funktionen $\Phi(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{e^{-t}}{t} dt$. (0.4)

4. Vatten, som innehåller 2 g/l av föroreningar, rinner **igenom** en reningstank med flödet 500 l/min. I tanken tar reningsprocesserna ut 5% av föroreningarna per minut och vattnet i tanken blandas väl. Reningstanken kan innehålla 10 000 liter vatten. Den dag tanken togs i bruk var den fylld med rent vatten. Vilken koncentration förorening finns i tanken efter mycket lång tid, och hur lång tid tog det tills koncentrationen nådde halvvägs till detta värde?
Anm. Det rinner alltså ut vätska ur tanken med samma flöde som det rinner in vätska.

5. a) Visa, t.ex. genom att göra en integraluppskattning av summan, att (0.3)

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} \leq \frac{\pi}{4}.$$

b) Beräkna Maclaurinutvecklingen av ordning 6 för funktionen $f(x) = e^{-x^2}$ och använd denna till att beräkna ett närmevärde till integralen $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ med ett fel som är $< 5 \cdot 10^{-3}$. (Du måste visa att ditt värde har önskad precision.) (0.7)

6. a) Om vi roterar området mellan kurvan $y = x^2 e^{-x^2/2}$, $0 \leq x \leq 2$, och x-axeln runt y-axeln får vi en skål. Hur många liter vatten kan vi hälla i denna skål innan det rinner över? Längdenheten är dm. (0.7)

b) Vilket samband måste gälla mellan de positiva konstanterna λ och ω för att lösningen till ekvationen

$$y''(t) + \lambda y(t) = \sin(\omega t)$$

ska ge svängningar som ökar obegränsat i amplitud (d.v.s. ge resonans)? (0.3)

Lycka till!