

*HJÄLPMEDEL: Utdelad formelsamling samt miniräknare.  
Motivera lösningarna väl.*

1. Lös värmeledningsproblemet

$$\begin{cases} u'_t - a u''_{xx} = 0, & x > 0, t > 0, \\ u'_x(0, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = \theta(x - 1), & x > 0. \end{cases}$$

2. En halvoändlig elastisk sträng är fast inspänd i änden  $x = 0$  och har vid tiden  $t = 0$  formen  $\sin(\pi x/2)(\theta(x) - \theta(x - 2))$ . Vid tiden  $t = 0$  träffas strängen av ett hammarslag och får den transversella hastigheten  $h(x) = \delta_6(x)$ . Vågutbredningshastigheten i strängen antas vara 1. Ställ upp en modell för strängens transversella utböjning och bestäm utböjningen. Rita strängens utböjning vid tiden  $t = 2$ .

3. Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till operatoren

$$\mathcal{A}u = -u'' - 6u', \quad D_{\mathcal{A}} = \{u \in C^2([0, 1]); u(0) = u(1) = 0\}.$$

Kontrollera även att de två egenvektorer som har lägst egenvärden är ortogonala i lämplig skalärprodukt.

4. Den dämpade rörelsen hos en fast inspänd sträng av längd  $\pi$  beskrivs av

$$u''_{tt} + u'_t - u''_{xx} = 0, \quad 0 < x < \pi, t > 0.$$

Vid startögonblicket är strängen rak och ges den transversella hastigheten 1 i varje punkt. Beräkna strängens utböjning  $u(x, t)$  för  $t > 0$ .

5. Lös problemet

$$\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & x^2 + y^2 < 1, \\ u = xy, & x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

6. En cirkulär cylinder av plåt har radie  $R$  och längd  $L$  och är öppen i bägge ändarna. Bestäm dess egenfrekvenser. Jämför dessa med egenfrekvenserna i en endimensionell modell där radien antas vara liten. Vad blir villkoret på radien och längden för att grundtonen och de två första övertonerna ska bli lika i den tre- respektive endimensionella modellen?

**LYCKA TILL!**