

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar och tydliga svar.

1. a) Lös ekvationen

$$z^2 + iz + \frac{1}{2} - i = 0.$$

Rötterna ska ges på formen  $a + bi$ , där  $a$  och  $b$  är reella tal. (0.6)

- b) Bestäm absolutbeloppet och ett argument av det komplexa talet

$$\frac{(1 + \sqrt{3}i)^7}{(-1 + i)^5}. \quad (0.4)$$

2. Skissera grafen till funktionen

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}, \quad x \neq 1.$$

Ange speciellt eventuella lokala extrempunkter och sneda asymptoter.

3. a) Låt  $f(x) = \ln(\sqrt{1+e^x})$ . Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan  $y = f(x)$  i den punkt på kurvan som har  $x$ -koordinat 0. (0.4)

- b) Definiera vad som menas med att en funktion  $f$  är kontinuerlig respektive deriverbar i en punkt  $x_0$ . (0.2)

- c) Betrakta påståendena

A:  $f$  är kontinuerlig i  $x_0$ ,

B:  $f$  är deriverbar i  $x_0$ .

Vilka implikationer gäller mellan dessa båda påståenden? Motivera ditt svar genom att ge bevis/motexempel. (0.4)

4. a) Bestäm ett polynom  $p(x)$  av grad 1 sådant att

$$|(1+3x)^{3/2} - p(x)| \leq \frac{3}{8} \quad \text{då} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{3}.$$

Visa också att olikheten gäller med detta polynom. (0.5)

- b) Använd Maclaurinutveckling för att bestämma gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2/2} - \cos x}{x(\sin x - x)}. \quad (0.5)$$

VAR GOD VÄND!

5. a) Avgör för vilka värden på  $x$  som serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x-1}\right)^k, \quad x \neq 1,$$

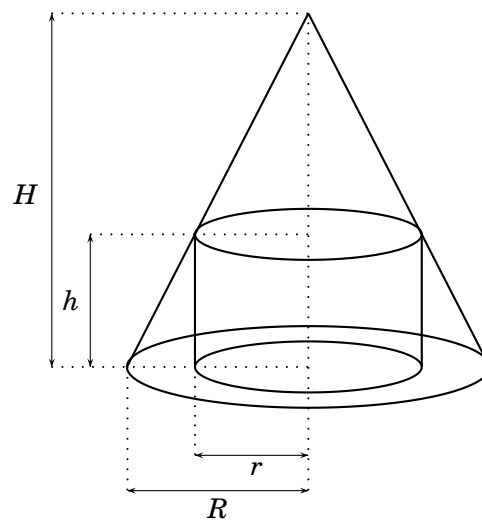
är konvergent. Bestäm även seriens summa för dessa värden på  $x$ . (0.5)

- b) Bestäm det värde på konstanten  $a$  som gör att gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2(a+1)x + 3a - 1}{x^2 - x}$$

existerar (ändligt). Beräkna sedan gränsvärdet för detta värde på  $a$ . (0.5)

6. En rak cirkulär cylinder med radie  $r$  och höjd  $h$  är inskriven i en rak cirkulär kon med given radie  $R$  och given höjd  $H$ , som visas i figuren. Bestäm det värde på  $r$  (uttryckt i  $R$  och  $H$ ) som maximerar den totala ytarean av cylindern (inklusive topp och botten).



Du får, till att börja med, anta att  $H > 2R$ . Undersök slutligen vad som händer i fallet  $H \leq 2R$ .

LYCKA TILL!