LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
SYSTEM OCH TRANSFORMER
2013–12–21 kl 08 – 13

1. Multiplicera hela ekvationen med $\theta(t)$. Låt $Y = \mathcal{L}(\theta(t)y(t))$. Laplacetransformering ger: $s^2Y - sy(0) - y'(0) + 2(sY - y(0)) + Y = \frac{1}{s+2}$. Därefter blir $Y = \frac{1}{(s+2)(s+1)^2} + \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{(s+1)^2}$ och vidare är $\theta(t)y(t) = (e^{-2t} + te^{-t})\theta(t)$. $\boxed{\text{Svar: } y(t) = e^{-2t} + te^{-t}, \text{ då } t > 0}$.

2.

a) Systemmatrisen är $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Det karaktäristiska polynomet är $P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$ med nollställen $\lambda_1 = -2$ och $\lambda_2 = -1$. Motsvarande egenvektorer blir $z_1 = c(1\ 1)^T$ respektive $z_2 = c(1\ 2)^T$, där $c \neq 0$ är en konstant. Negativa egenvärden innebär att systemet A är stabilt.

b) En generaliserat stationär lösning så som den är definierad i boken finns för alla reella s som inte är egenvärden till systemmatrisen, dvs $s \neq -1$ och $s \neq -2$. Dessutom kan man notera att för fallet $s = -2$ saknas lösning, medan för $s = -1$ finns det oändligt många lösningar av den föreslagna typen, för reellt t och $C = \begin{pmatrix} t \\ 2t - 1 \end{pmatrix}$.

c) En homogen lösning kan fås via egenvärden och egenvektorer, dvs

$$c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Eftersom $s = -3$ inte är ett egenvärde fås en partikulär lösning via

$$e^{-3t} (-3I - A)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Summan av ovanämnda homogena och partikulära lösningen med $c_1 = 2$ och $c_2 = 0$ uppfyller begynnelsevillkoren.
$\boxed{\text{Svar: } x(t) = y(t) = 2e^{-2t} - e^{-3t}}$.

3. a) Formel (20) i formelsamlingen med $a = 1/2$ samt förskjutningsregel (9) med $t_0 = 1/2$ ger $\hat{f}(w) = 2e^{-iw/2}\frac{\sin(w/2)}{w} = \frac{1-e^{-iw}}{iw}$. Det senare alternativet kan fås direkt ur definitionen av Fouriertransformen.

b) Funktionen f är punktvis konstant och har två språng. Därmed blir $f'(t) = \delta(t) - \delta(t-1)$.

c) $g * f' = g * (\delta(t) - \delta(t-1)) = g(t) - g(t-1)$. Därmed blir $\mathcal{F}(g * f') = \pi(1 - e^{-iw})e^{-|w|}$. Alt: $\mathcal{F}(g * f') = iw\hat{g} \cdot \hat{f} = \pi(1 - e^{-iw})e^{-|w|}$.

d) Genom att kontrollera alla Heavisidefunktionerna som ingår i integranden, konstaterar man att integranden är noll: $f(t)$ är skild från noll bara för $t \in [0, 1]$. För sådana t blir $-3 - t$ alltid negativt och motsvarande Heavisidefunktionen är noll. $\boxed{\text{Svar: } 0}$.

4. a) Laplacetransformering av $y''' + 3y'' + 3y' + y = \delta'(t) + \delta(t)$ ger $\boxed{H(s) = \frac{1}{(s+1)^2}}$, definierad för $Re(s) > -1$ ty kausalt system. Alternativt se sats 12.2.

b) Inverslaplace ger $\boxed{h(t) = te^{-t}\theta(t)}$. Funktionen är absolut integrerbar i $\mathbb{R}$ och därmed är systemet insignal-utsignalstabilt.

c) $y(t) = Re(H(i)e^{it}) = \boxed{\frac{1}{2}\sin t}$.

d)

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * (\cos t)\theta(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+1)(s+1)^2}\right) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{2}(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{(s+1)^2})\right) = \frac{1}{2}(\sin t - te^{-t})\theta(t). \end{aligned}$$

Notera att svaret i c) och d) blir praktiskt taget lika för stora t. De skiljer sig i en transient term som uppstår därför att insignalen i d) börjar oscillera först vid $t = 0$. Transientens effekt avtar exponentiellt snabbt.

5. Ekvationen kan ses som en faltningsekvation, dvs $y - 2y * \theta(t)e^{-t} = \theta(t)e^{-2t}$. Via Laplacetransform fås $Y(s) = \dfrac{\mathcal{L}(\theta(t)e^{-2t})}{1 - 2\mathcal{L}(\theta(t)e^{-t})} = \dfrac{s+1}{(s-1)(s+2)}$. Definitionsstrimlan? Högerleden i ekvationen har definitionsstrimlan $Re(s) > -2$, medan $\mathcal{L}(\theta(t)e^{-t})$ är definierad för $Re(s) > -1$. $Y(s)$ är definierad på så sätt att både faltningen och dess Laplacetransform existerar, vilket kan bero på vilken sorts lösning $y(t)$ som sökes.

a) Kausallösning, definitionsstrimlan skall då vara $Re(s) > 1$ och

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{3}(2e^{t} + e^{-2t})\theta(t)}.$$

b) Begränsad lösning, definitionsstrimlan måste innehålla den imaginära axeln och blir då $-2 < Re(s) < 1$. Därefter blir

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{3}e^{-2t}\theta(t) - \frac{2}{3}e^{t}(1 - \theta(t))}.$$

6. **a)** Exponentialfunktionerna i den första matrisen indikerar två olika egenvärden men trots det finns t-faktorer bland matriselementen. Matrisen kan inte vara e^{tA} för någon matris A. Den andra matrisen har endast en exponentialfunktion, den är en bra kandidat att vara e^{tA} för den icke-diagonaliserbara matrisen $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Handräkning bekräftar att så är fallet.

b) Eftersom $Ax_0 = (-1)x_0$ (konstatera att x_0 är egenvektor till A), blir

$$x_n = A^n x_0 = (-1)^n x_0 = (-1)^n \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösningen är begränsad. Alternativt, gör som i c) nedan.

c) Notera att $A = (-1)(I - N)$ där $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ är en nilpotent matris, dvs $N^2 = 0$. Via binomialsatsen fås $A^n = (-1)^n(I - N)^n = (-1)^n(I - nN)$. Därmed,

$$x(n) = A^n x(0) = \begin{pmatrix} (-1)^n & -n(-1)^n \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 - n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösningen är **inte** begränsad. Alternativt kan man först lösa den andra ekvationen, dvs $x_2(n+1) = -x_2(n)$, $x_2(0) = 1$, vilken har lösningen $x_2(n) = (-1)^n$ och sedan sätta in detta och lösa den första ekvationen, dvs $x_1(n+1) = -x_1(n) + (-1)^n$, $x_1(0) = 1$, vilket ger lösningen
$x_1(n) = (1 - n)(-1)^n$.