LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

SVAR
ENDIMENSIONELL ANALYS
DELKURS B1
2013–01–07 kl. 14–19

1. **a)** 0, **b)** e, **c)** 0, **d)** e, **e)** 0.

2. Svar $x = 2/3$. (Om du även fått $x = -2$ så har du bortsett från att serien inte konvergerar för $x = -2$.)

3. **a)** 0

b) $V_f = \{-\pi/2, \pi/2\}$.

c) Nej, det går inte eftersom vänster- och högergränsvärde är olika.

4. **a)** $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

b) $x = -1$.

5. **a)** Först noterar vi att högerledet och vänsterledet är väldefinierade endast för de nämnda värdena på φ. Sedan använder vi för dessa φ formler för dubbla vinkeln för cosinus och sinus:

$$\frac{\sin(\varphi)}{1+\cos(\varphi)} = \frac{2\sin(\varphi/2)\cos(\varphi/2)}{2\cos^2(\varphi/2)} = \tan(\varphi/2).$$

b) Kapaciteten är störst då $\varphi = \pi$. Kommentar: Arean $A(\varphi)$ av den skuggade delen ges av

$$A(\varphi) = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\varphi - \sin(\varphi)}{\varphi^2}\right)$$

för *alla* $0 < \varphi \leq 2\pi$. Deriveras detta får vi

$$A'(\varphi) = a^2 \frac{2\sin(\varphi) - \varphi(1+\cos(\varphi))}{2\varphi^3},$$

varur vi ser att $A'(\pi) = 0$. Då $\varphi \neq \pi$ får vi med hjälp av **a)**

$$A'(\varphi) = a^2 \frac{(1+\cos(\varphi))(\tan(\varphi/2) - \varphi/2)}{\varphi^3}$$

varför $A'(\varphi) = 0$ endast då $\varphi = \pi$. Dessutom ser vi att $A'(\varphi) > 0$ då $0 < \varphi < \pi$ och $A'(\varphi) < 0$ då $\pi < \varphi < 2\pi$. Alltså antas största värdet då $\varphi = \pi$.

6. **a)** Se kurslitteraturen.

b) Vi använder sinussatsen, den nämnda olikheten och så sinussatsen igen:

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{b}\sin(\beta) \leq \frac{b+c}{2b}\sin(\beta) = \frac{1}{2}\sin(\beta) + \frac{c}{2b}\sin(\beta) = \frac{1}{2}\sin(\beta) + \frac{1}{2}\sin(\gamma).$$

c) Se kurslitteraturen.

d) Påståendet vi skall visa är ekvivalent med att $\cos(\alpha) \geq 1/2$. Detta följer av att $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ och $2\alpha \leq \beta + \gamma$, det vill säga $\alpha \leq \pi/3$.
Antag nu att $a \leq \frac{1}{2}(b+c)$. Då är $a^2 \leq \frac{1}{4}(b+c)^2$. Cosinussatsen och kvadratkomplettering ger

$$2bc\cos(\alpha) = b^2 + c^2 - a^2 \geq b^2 + c^2 - \frac{1}{4}(b+c)^2 = \frac{3}{4}(b-c)^2 + bc \geq bc.$$

Förkortar vi med bc får vi

$$2\cos(\alpha) \geq 1,$$

det vill säga $\cos(\alpha) \geq 1/2$. Eftersom detta visades vara ekvivalent med vad vi ville visa så är vi klara.