LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
LINJÄR ALGEBRA, FMA420
2013-12-17 kl 14–19

INGA HJÄLPMEDEL.
Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Alla koordinatsystem får antas vara ortonormerade och positivt orienterade, om inte annat anges.

1. Lös, för varje värde på a, ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax & + & y & + & z & = & 0 \\ (a-1)x & + & (1-a)y & + & 2z & = & 0 \\ ax & - & ay & + & 3z & = & 0. \end{cases}$$

2. **a)** Bestäm skärningen mellan planen $\pi_1 : 2x - y + z - 5 = 0$ och $\pi_2 : x + y - z - 1 = 0$. (0.3)

b) Bestäm spegelbilden av punkten $P : (1, -11, 5)$ i planet $\pi : x + 3y - 2z = 0$. (0.7)

3. OBS! På denna uppgift skall endast svar ges. Avgör vilka av påståendena **(a)**–**(e)** nedan som är sanna respektive falska. Bedömning: Varje rätt svar ger 0.2 poäng, varje fel svar ger -0.2 poäng och varje uteblivet svar ger 0.0 poäng.

a) Ett homogent linjärt ekvationssystem med 3 ekvationer och 4 obekanta har alltid oändligt många lösningar.

b) Fyra godtyckliga vektorer i $\mathbb{R}^4$ är linjärt beroende.

c) För 4×5-matrisen A gäller det att rang $A = 2$. Då är nolldim $A = 3$.

d) Låt $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildningen som ges av spegling i linjen $l : x + 3y = 0$. Då är F bijektiv.

e) Om 0 är ett egenvärde till 3×3-matrisen A så är A inverterbar.

4. Låt $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ beteckna den linjära avbildningen som ges av $F(\boldsymbol{x}) = (1, 2, 3) \times \boldsymbol{x}$. Ange avbildningsmatrisen A för F och bestäm A:s rang och nolldimension.

5. Låt $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ vara en bas i planet. Vektorerna $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ ges av

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1' & = & \mathbf{e}_1 & + & 2\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2' & = & 3\mathbf{e}_1 & + & 4\mathbf{e}_2. \end{cases}$$

a) Visa att $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ är en bas i planet. Ange motsvarande basbytesmatris. (0.4)

b) Linjen l har den affina ekvationen $l : x_1' + x_2' + 1 = 0$ i koordinatsystemet $O\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'$. Ange en affin ekvation för l i koordinatsystemet $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$. (0.6)

6. Bestäm en lösning till matrisekvationen $X^2 = A$ där

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -6 \\ 4 & -4 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

t.ex. genom diagonalisering av A. Har matrisekvationen mer än en lösning?

GOD JUL!