LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Funktionsteori
2014–01–07, Svar och anvisningar

1. Svar: $x_n = \frac{8}{9} + \frac{1}{9} \cdot (-2)^n + \frac{n}{3}$.

2. a) Ur Fourierserien ser vi att $a_k = 0$ för alla $k \geq 1$, så funktionen är konstant + udda funktion. Grafen i a) är jämn, så den kan vi förkasta. Perioden för den givna serien är 2π, vilket gör att vi kan förkasta grafen i c). Weierstrass M-test visar (detaljer utelämnade) att Fourierserien konvergerar likformigt, så gränsfunktionen är f och f är kontinuerlig, varför grafen i d) förkastas. Den enda möjliga grafen är alltså den i b).

b) Ur uppgift a vet vi att Fourierserien konvergerar likformigt mot f och i synnerhet kan vi sätta in $t = 0$ som visar att $c_0 = f(0) = 0$ (avläst ur grafen).

c) Definitionen av Fourierkoefficienter visar att

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(4t)\,dt = \pi b_4 = \frac{\pi}{257}.$$

3. a) Konvergent, enklast via rottestet (eller kvottestet) eller genom att jämföra med den geometriska serien $\sum (3/4)^k$.
b) Divergent, enklast via jämförelsetestet på gränsvärdesform (sätt $b_k = 1/k$.)
c) Divergent, hänvisa till sats eller använd integraltestet.
d) Absolutkonvergent, ty $|a_k| \leq 1/k^2$. Observera att Leibniz test *inte* går att använda. Serien är inte alternerande, och $|a_k|$ är heller inte avtagande.
e) Divergent, eftersom termerna inte går mot 0 ($|a_k| = 1$ för alla k).

4. $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1)(z-1)^k$ (antingen genom att derivera direkt eller genom att manipulera den geometriska serien). Konvergensradien blir 1 (avståndet till närmaste singularitet. Serien divergerar för $z = 2$ (termerna går inte mot 0).

5. a) Funktionen har dubbelpoler i $z = \pm 3i$. Residyerna (gm regel 1) blir

$$\operatorname{Res}_{z=3i} g(z) = -\frac{7ie^{-6}}{108} \qquad \operatorname{Res}_{z=-3i} g(z) = -\frac{5ie^{6}}{108}$$

b) Integrera g (ur a-uppgiften) över en randen till en stor halvcirkelskiva i övre halvplanet. Integralen över halvcirkeln går mot 0 då $R \to \infty$ (antingen pga Jordans lemma eller ur direkt uppskattning). Kvar fås

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+9)^2}\,dx = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=3i} g(z) = \frac{7\pi e^{-6}}{54}.$$

6. Enklast via primitiv funktion, man kontrollerar att

$$F(z) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}_n(z^2 + 4)$$

duger som primitiv funktion på ett område som innehåller kurvan. (F är analytisk utom i punkter där $z^2 + 4$ är positivt reellt, dvs utom i punkter där z är reellt och i punkter där z är rent imaginärt och $|z| < 2$). Däremot duger *inte* principalgrenen. Svaret blir

$$\int_C \frac{z}{z^2+4}\,dz = F(-1+3i) - F(1+3i) = i \arctan\frac{3}{2}.$$