LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
ENDIM ANALYS A2
2015-05-07 kl 08-13

Endast svar och kortare anvisningar för omtentor.

1. a) Se boken, sid 206. $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^3-1}{h} = 3+3h+h^2 \overset{h\to 0}{\to} 3 = f'(1)$.

b) Se boken, sid 88–89. $\frac{1-i}{i-2} = \frac{(1-i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = \frac{-3+i}{5} = -\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$.

c) Endast $(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(0)} = -\frac{1}{2}$ är möjligt att bestämma (ty $f(0)=3$).

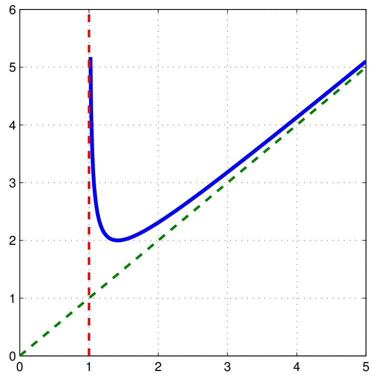
2. $f'(x) = \frac{x(x^2-2)}{(x^2-1)^{3/2}}$. Den relevanta stationära punkten $x=\sqrt{2}$ (ty 0 och $-\sqrt{2}$ är utanför intervallet) är en lokal minimipunkt.

Linjen $y=x$ är en sned asymptot då $x\to+\infty$ eftersom

$\frac{f(x)}{x} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{1-1/x^2}} \to 1 = k$,

$f(x)-x = \frac{x(x-\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x(x^2-(x^2-1))}{\sqrt{x^2-1}(x+\sqrt{x^2-1})} \to 0 = m$.

Kompletterande gränsvärdet: $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = "\frac{1}{0^+}" = +\infty$.



3. a) $z = \frac{1-i}{2} + \frac{1}{i-1} = -i \Rightarrow z^{19} = (-i)^{19} = i$, dvs $\mathrm{Re}=0$, $\mathrm{Im}=1$.

b) Dela med i och kvadratkomplettera: $(z-(2+i))^2 = 4+3i \Rightarrow z = 2+i\pm\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$.

4. a) Den första: $1+0+1+0+1+0+\ldots$ — ej geometrisk.

Den andra: $-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots = \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k = -\frac{1}{3}$ — geometrisk, konvergent.

Den tredje: $1+1+1+1+1+\ldots = \sum_{k=2}^{\infty} 1^k$ — geometrisk, ej konvergent.

b) Derivera implicit: $\frac{p'}{3p^{2/3}} + \frac{h'}{400} = 0$. Sätt in $p=8000$ och $h'=2$ och får $p'=-6$.

5. Tangenten i en punkt $x=a$ är $y-e^{-\sqrt{a}} = -\frac{e^{-\sqrt{a}}}{2\sqrt{a}}(x-a)$. Skärningspunkter med axlarna (sätt in $y=0$ resp. $x=0$): $X_a = \sqrt{a}(\sqrt{a}+2)$ och $Y_a = e^{-\sqrt{a}}\frac{\sqrt{a}+2}{2}$. Triangelns area $A(a) = \frac{X_aY_a}{2} = e^{-\sqrt{a}}\frac{(\sqrt{a}+2)^2\sqrt{a}}{4}$, $a>0$. Att minimera $A(a)$ är detsamma som att minimera $F(t) = e^{-t}(t+2)^2 t$, $t>0$ och sedan dela det minsta värdet med 4. Minimipunkten är $t=2$, min $= \frac{4^2\cdot 2}{e^2}$, dvs den minsta arean är $\frac{8}{e^2}$. (Jämför med Uppg. 10.45 i övningshäftet.)

6. a) $f(x) = 2-3x+B(x)x^2$.

b) Kontinuerlig då samma ensidiga gränsvärden från båda håll

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-}(ax+b) = b, \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}(2-3x+B(x)x^2) = 2,$$

hence, $b=2$, alla a.

c) Deriverbar då kontinuerlig (dvs $b=2$) samt samma ensidiga gränsvärden för differenskvoten från båda håll

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{g(h)-g(0)}{h} = a, \qquad \lim_{h\to 0^+}\frac{g(h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{2-3h+B(h)h^2-2}{h} = -3,$$

hence, $b=2$, $a=-3$.