LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
ENDIMENSIONELL ANALYS
DELKURS A2
2012–12–22

1. a) Gränsvärdet är lika med "$\dfrac{1}{0^+} \cdot \dfrac{e^2}{\ln(2)}$" $= \infty$.

b) Gränsvärdet är lika med

$$\lim_{x\to 0} 4\,\frac{e^{4x}-1}{4x} \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\frac{2x}{\ln(1+2x)} = 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 2.$$

c) Variabelbytet $t = x - 1$ ger att gränsvärdet är lika med

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t(t+2)} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

d) Uttrycket kan skrivas

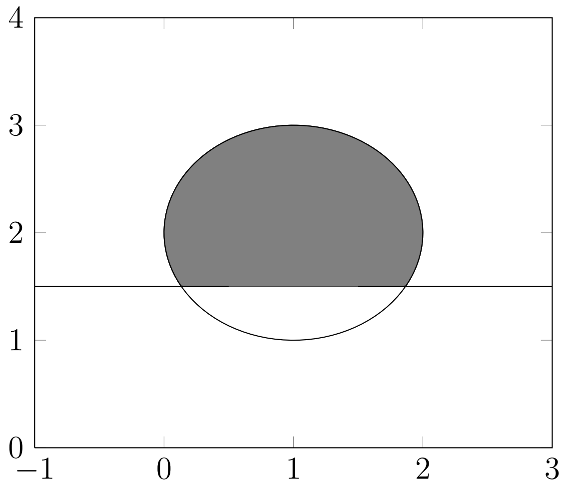
$$\frac{2^x(1 + \frac{3x^{100}}{2^x} - 9\frac{\ln(x)}{2^x})}{\sqrt{4^x(4 - \frac{x^9}{4^x})}} = \frac{1 + \frac{3x^{100}}{2^x} - 9\frac{\ln(x)}{2^x}}{\sqrt{4 - \frac{x^9}{4^x}}}$$

där $\frac{3x^{100}}{2^x}, 9\frac{\ln(x)}{2^x}$ och $\frac{x^9}{4^x} \to 0$ då $x \to \infty$ enligt standardgränsvärden. Det följer att gränsvärdet blir $1/\sqrt{4} = 1/2$.

2. a) Skriv $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ och $z = re^{i\theta}$. För att absolutbelopp och argument ska passa måste vi då ha $r^{15} = 2^{1/2}$ och $15\theta = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$, varur följer att lösningarna är de femton talen

$$z_k = 2^{\frac{1}{30}} e^{i(\frac{\pi}{60} + k\frac{2\pi}{15})}, k = 0, 1, \ldots, 14.$$

b) Det efterfrågade området är det gråa i figuren nedan:

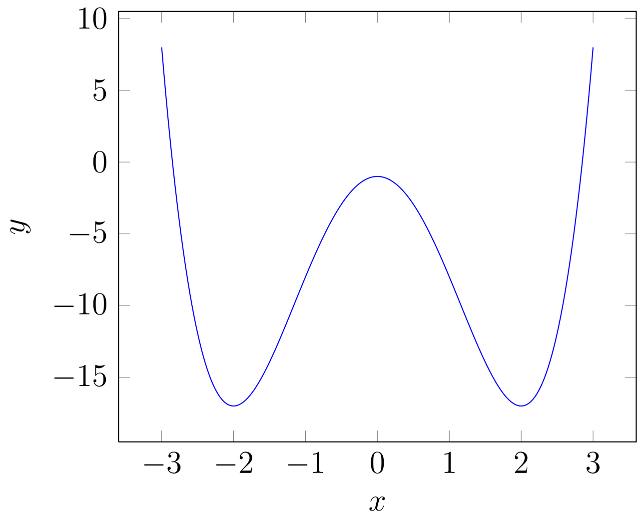


3. a) Derivatan är $f'(x) = 4x^3 - 16x = x(x-2)(x+2)$, så vi har stationära punkter i $x = \pm 2, 0$. Teckentabell:

x		-2		0		2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-17	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-17	$\nearrow$

Vi ser alltså att vi har lokala minima i punkterna $(\pm 2, -17)$ i grafen, och ett lokalt maximum i $(0, -1)$. Då $x \to \pm\infty$ gäller att $f(x) \to \infty$.

b) Grafen kan ritas ifrån informationen i a):



I den ser vi att $V_f = [-17, \infty[$. Antalet lösningar $N(y)$ för olika y framgår då av följande tabell:

y		-17		-1	
$N(y)$	0	2	4	3	2

c) Ett sätt är att använda satsen om mellanliggande värden och notera att $f(2) < 0$ men $f(3) = 81 - 8 \cdot 9 - 1 = 8 > 0$. Ett annat sätt är att bestämma det största nollstället till $\sqrt{4 + \sqrt{17}}$, som är större än $\sqrt{4} = 2$ men mindre än $\sqrt{4 + \sqrt{25}} = 3$. Svaret är alltså $[2, 3]$.

4. a) Se boken.

b) Högerledet kan efter polynomdivision skrivas $\frac{x}{2} - \arctan(2x) - \frac{7}{2}\frac{x}{2x^2+7}$. Eftersom $\arctan(2x) \to \pm\frac{\pi}{2}$ och $\frac{x}{2x^2+7} \to 0$ då $x \to \pm\infty$, ser vi att när $x \to \infty$ har vi asymptoten $y = x/2 - \pi/2$ och då $x \to -\infty$ har vi asymptoten $y = x/2 + \pi/2$.

5. a) Derivera funktionen $f(x) = \ln(3 + x)$. Då gäller att $f'(x) = (3 + x)^{-1}, f''(x) = -(3 + x)^{-2}$ och $f'''(x) = 2(3 + x)^{-3}$. Enligt Maclaurinutvecklingen kring $x = 0$ har vi därför att $f(x)$ är lika med

$$f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f'''(\theta x)\frac{x^3}{6} = \ln 3 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{18} + (3 + \theta x)^{-3}\frac{x^3}{3}.$$

Då $x \geq 0$ gäller att $3 + \theta x \geq 3$ och då gäller att

$$|f(x) - (\ln 3 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{18})| = |\frac{x^3}{3(3 + \theta x)^3}| \leq \frac{x^3}{3^4}.$$

Då vidare $x \leq 1$ blir detta $\leq 3^{-4} = 1/81 = \frac{3}{243} < \frac{3}{200} = 0.015$.

b) Vi kan börja med att notera att

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-\sqrt{1+x}}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-\sqrt{1+x}}{x^2},$$

där det första gränsvärdet är ett. I den andra faktorn har vi att

$$e^{ax}-\sqrt{1+x} = 1+(ax)+\frac{(ax)^2}{2}+x^3B_1(x)-(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+x^3B_2(x)) =$$

$$(a-\frac{1}{2})x+(\frac{a^2}{2}+\frac{1}{8})x^2+x^3B_3(x).$$

För att gränsvärdet ska finnas måste faktorn framför x vara noll, och alltså $a = 1/2$. Dividerar vi det som blir kvar med x^2 och låter x gå mot noll, ser vi att gränsvärdet blir $1/4$.

6. Om radien på cylinder och klot är r, och cylinderns höjd är h, så har vi att volymen är $V = \pi r^2 h + 2\pi r^3/3$ och totalkostnaden, mätt i kilokronor, blir $K = 2\cdot 2\pi r h + 4\cdot 2\pi r^2$. Genom att här sätta $K = 144\pi$ kan vi lösa ut h som funktion av r:

$$h = \frac{1}{4\pi r}(144\pi - 8\pi r^2) = \frac{36-2r^2}{r}.$$

Stoppar vi in detta i uttrycket för V får vi volymen som en funktion av r:

$$V(r) = \pi(36r - 2r^3 + 2r^3/3) = \pi(36r - 4r^3/3),\ 0 < r < \sqrt{18}.$$

(Gränserna bestäms av att både radie och höjd måste vara positiva.) Deriverar vi får vi att $V'(r) = 4\pi(9-r^2)$, så den enda stationära punkten är i $r = 3$, som vi lätt ser (teckentabell, andraderivatan) är ett lokalt maximum. Den måste då också vara det globala maximumet. Vi ska alltså konstruera silon så att radien är $r = 3$ m och höjden är $h = (36-18)/3 = 6$ m.