LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

SVAR OCH ANVISNINGAR TILL TENTAMEN I ENDIMENSIONELL ANALYS
DELKURS A2
2013–04–02 kl 8–13

1. a) Derivatorna blir

$$D(\frac{e^x}{e^{2x}+1}) = \frac{e^x(1-e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2} \text{ och } D(\arctan(e^x)) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

b) $V(t) = 0$ då $t = 4$ och $V'(4) - 54$, varför sökt hastighet är 54 liter/min.

2. a) Nollställen är $1 \pm i$ och $-2 \pm i\sqrt{3}$.

b) Talet har längden $|z| = \sqrt{2}$ och argumentet $5\pi/12$. Vridning ytterligare $\pi/6$ ändrar inte längden men ger argumentet $7\pi/12$.

3. a) $\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2(1+x)} \to -\dfrac{1}{2}$ då $x \to 0$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2 \ln(1+\frac{1}{x}) \to \text{“}\infty \cdot \ln(e)'' = \infty$ då $t \to \infty$.

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{1}\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}} = 3.$

4. a) Direkt derivering ger resultatet.

b) Stationära punkter i $x = -2 \pm 2\sqrt{3}$. För andraderivatan gäller att $p_3''(-2 \pm 2\sqrt{3}) = \mp\sqrt{3}/8$ (minus svarar mot plus). I $-2-2\sqrt{3}$ är alltså andraderivatan positiv (lokalt minimum) och i $-2+2\sqrt{3}$ är den negativ (lokalt maximum). (Teckentabell går också bra.)

c) $p_3(3) = 39/48 > 0$ och $p_3(4) = 1 + 2 - 2 - 4/3 < 0$. Satsen om mellanliggande värden ger nu att det finns ett nollställe in sagda intervall. Att det är det största följer av att efter det lokala maximumet i $x = -2 + 2\sqrt{3} < 3$ är funktionen avtagande och går mot $-\infty$.

5. a) Se boken

b) Påståendet “deriverbarhet medför kontinuitet” är det korrekta. För beviset, se boken.

c) Vi har att

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}\frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}} = 1,$$

då $x \neq 0$. Då $x = 0$ är alla termer 0, och därför också summan. Funktionen är inte kontinuerlig i $x = 0$.

d) Om vi omdefinierar den så att den är 1 också i $x = 0$ blir funktionen kontinuerlig.

6. a) Funktionen att optimera är

$$f(x) = 10 \cdot \frac{128x}{1+x} - 5x.$$

Globalt maximum för $x = 15$. Svaret är att Paula ska använda 15 kg gödsel per 100 m^2.

b) Om $V(t)$ är volymen vatten i mätaren vid tiden t gäller att $V'(t) = a\pi R^2$ (mm^3/h). Eftersom för en kon $h(t)/r(t) = H/R$ får vi att

$$V(t) = \frac{\pi R^2}{3H^2} h(t)^3.$$

Deriverar vi detta och använder villkoret ovan får vi att

$$a\pi R^2 = \frac{\pi R^2}{H^2} h(t)^2 h'(t) \quad \Leftrightarrow \quad h'(t) = \frac{aH^2}{h(t)^2}.$$

Att vattenmätaren är halvfull innebär att $h(t)^3 = \frac{1}{2}H^3$, så

$$h'(t) = \frac{aH^2}{(H^3/2)^{2/3}} = a2^{2/3}.$$