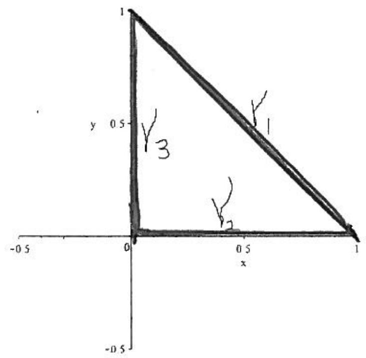
LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
FLERDIMENSIONELL ANALYS
2013-12-17 kl 8-13

1. Eftersom funktionen är kontinerlig i den kompakta triangelskivan, finns det både ett största och ett minsta värde. Vi söker nu efter intressanta punkter.
Stationära punkter: Systemet

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 4y - 1 = 0 \\ f'_y(x,y) = 4x - 1 = 0 \end{cases}$$

har en lösning $(1/4, 1/4)$, som ligger inom triangelskivan och alltså är en stationär punkt.



Randpunkter: Tre hörnen $(0,0)$, $(1,0)$ och $(0,1)$ och tre sträckorna γ_1, γ_2, γ_3.
På γ_1 gäller $f(t, 1-t) = -4t^2 + 4t - 1$, där $0 < t < 1$, som har en stationär punkt $t = 1/2$. Vi får en punkt $(1/2, 1/2)$.
På γ_2 gäller $f(t,0) = -t$, där $0 < t < 1$, som har ingen stationär punkt.
På γ_3 gäller $f(0,t) = -t$, där $0 < t < 1$, som har ingen stationär punkt.
Eftersom $f(0,0) = 0$, $f(1,0) = f(0,1) = -1$, $f(1/2, 1/2) = 0$ och $f(1/4, 1/4) = -1/4$, så får vi det största värdet 0 och det minsta värdet -1.

2. a) Längden av riktningsvektoren är $\sqrt{3^3 + 4^2} = 5$, och $\text{grad} f(-1,1) = (3,6)$.
Så är $f'_{\mathbf{v}}(-1,1) = (3,6) \cdot (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}) = 33/5$.
b) Längs gradienten $\text{grad} f(-1,1) = (3,6)$ är riktningsderivatan av $f(x,y)$ i punkten $(-1,1)$ störst. Den största riktningsderivatan är lika med $|\text{grad} f(-1,1)| = 3\sqrt{5}$.
c) Låt $f(x,y,z) = x^2/4 + y^2/4 + z^2/2$. Ellipsoiden $f(x,y,z) = 1$ har en normalvektor $\text{grad} f(1,1,1) = (1/2, 1/2, 1)$ i punkten $(1,1,1)$.
Ekvationen av det sökta tangentplanet är

$$(1/2, 1/2, 1) \cdot (x-1, y-1, z-1) = 0,$$

dvs

$$x + y + 2z - 4 = 0.$$

3. a) Det triangelformade området D kan uttryckas som $D = \{(x,y);\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$. Alltså gäller

$$\iint_D e^{-x-2y}\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^x e^{-x-2y}\,dy \right) dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^{-x} - e^{-3x}\right) dx = \frac{e^{-3}}{6} - \frac{e^{-1}}{2} + \frac{1}{3}.$$

b)

$$\iint_{0\le y\le x} e^{-x-2y}\,dxdy = \lim_{R\to\infty} \iint_{0\le y\le x\le R} e^{-x-2y}\,dxdy$$
$$= \lim_{R\to\infty} \int_0^R \left(\int_0^x e^{-x-2y}\,dy \right) dx = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2}\int_0^R \left(e^{-x} - e^{-3x}\right) dx = \frac{1}{3}.$$

4. a) Kedjeregeln medför

$$f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = 2xf'_u + 2xf'_v$$
$$f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y = 2yf'_u - 2yf'_v.$$

Insättning i differentialekvationen ger

$$4xyf'_u = xy(x^2 + y^2).$$

Men $x^2 + y^2 = u$ och $x > 0,\ y > 0$. så blir ekvationen

$$f'_u = \frac{u}{4},$$

som medför att $f = u^2/8 + g(v)$. Så har vi lösningar

$$f(x,y) = \frac{(x^2+y^2)^2}{8} + g(x^2 - y^2),$$

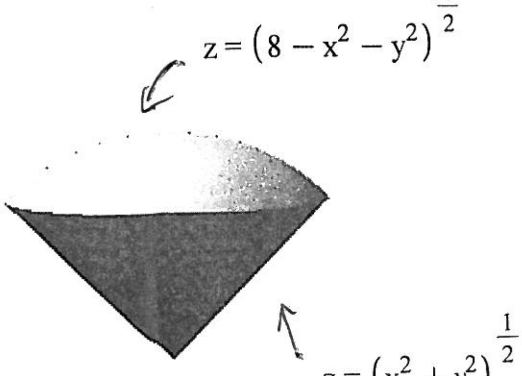
där g är en godtycklig funktion.

b) Det finns ingen stationär punkt för varje lösning $f(x,y)$ i området, därför att för en stationär punkt (x_0, y_0) gäller

$$0 = y_0 f'_x(x_0,y_0) + x_0 f'_y(x_0,y_0) = x_0 y_0 (x_0^2 + y_0^2) >, 0$$

som är ett motsägelse.

5. a) Volymen av kroppen K är lika med $\iiint_K dxdydz$.



Genom att införa sfäriska koordinater kan man uttrycka området

$$K: \quad 0 \le \theta \le \pi/4,\ 0 \le \phi < 2\pi,\ 0 \le r \le 2\sqrt{2}.$$

Därmed är

$$\iiint_K dxdydz = \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\sqrt{2}} r^2 \sin\theta \, dr \right) d\phi \right) d\theta$$

$$= \left(\int_0^{\pi/4} \sin\theta \, d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) \left(\int_0^{2\sqrt{2}} r^2 \, dr \right) = \frac{32(\sqrt{2}-1)\pi}{3}.$$

Alternativ metod. Skärningskurvan mellan ytorna är

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2} \\ x^2+y^2+z^2 = 8 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2+x^2+y^2 = 8$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 2.$$

Detta medför att projektionen E av kroppen K på xy-planet är en cirkelskiva med centrum i origo och radien 2. Vi inför cylinderkoordinater

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{cases} .$$

Så blir området: $0 \le \phi < 2\pi,\ 0 \le r \le 2,\ r \le z \le \sqrt{8-r^2}$. Så är

$$\iiint_K dxdydz = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2} \left(\int_r^{\sqrt{8-r^2}} r \, dz \right) dr \right) d\phi$$

$$= 2\pi \int_0^2 r\left(\sqrt{8-r^2} - r\right) dr = 2\pi \left[\frac{(8-r^2)^{3/2}}{-3} - \frac{r^3}{3} \right]_0^2 = \frac{32(\sqrt{2}-1)\pi}{3}.$$

b) Vi inför parameter $y = t$ för att parameterframställa kurvan runt punkten $(2,0,2)$. Så gäller

$$x^2+t^2+z^2 = 8 \quad \text{och} \quad z^2 = x^2+t^2,$$

som ger en parameterframställning av kurvan runt punkten $(2,0,2)$:

$$\begin{cases} x = \sqrt{4-t^2} \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} .$$

En tangentvektor av kurvan i punkten är $\left((\sqrt{4-t^2})', (t)', (2)'\right)$, där $t = 0$, som är $(0,1,0)$. Ekvationen av tangentlinjen är

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = s \\ z = 2 \end{cases} ,$$

där s är parameter.

6. a) En direkt beräkning ger

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x+2y}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-y^2-4xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x+y}{x^2+y^2}\right).$$

b) Låt γ_1 vara enhetscirkeln genomlöpt ett varv i negativ led, och låt D vara området som begränsas av kurvorna γ och γ_1. Enlight Greens formel har vi

$$\int_{\gamma+\gamma_1}\frac{2x+y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{-x+2y}{x^2+y^2}\,dy$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x+2y}{x^2+y^2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x+y}{x^2+y^2}\right)\right)\,dxdy=0.$$

Så är

$$\int_{\gamma}\frac{2x+y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{-x+2y}{x^2+y^2}\,dy=-\int_{\gamma_1}\frac{2x+y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{-x+2y}{x^2+y^2}\,dy$$

$$=\int_{-\gamma_1}\frac{2x+y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{-x+2y}{x^2+y^2}\,dy.$$

Men kurvan $-\gamma_1$ har en parameterframställning

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases},$$

där $0\le t\le 2\pi$. Vi har

$$\int_{-\gamma_1}\frac{2x+y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{-x+2y}{x^2+y^2}\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}\left((2\cos t+\sin t)\,(-\sin t)+(-\cos t+2\sin t)\,\cos t\right)\,dt=-\int_0^{2\pi}dt=-2\pi.$$

c) Enligt b) vet vi att kurvintegralen av vektorfältet längs den slutna kurvan γ inte är lika med noll. Alltså är vektorfältet inte konservativt i det punkterade planet.