1. Det blir enklast att integrera med avseende på y först.

$$\begin{aligned}
\iint_D xy\,dx\,dy &= \int_0^2 x \int_{x-2}^{1-x/2} y\,dy\,dx = \int_0^2 x\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{x-2}^{1-x/2} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 x\left(\left(1-\frac{1}{2}x\right)^2 - (x-2)^2\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(-3x+3x^2-\frac{3}{4}x^3\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{3}{2}x^2+x^3-\frac{3}{16}x^4\right]_0^2 = \frac{1}{2}(-6+8-3) = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

2. a) Gradienten till f är

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = (y^2-1, 2xy+3z^2(y^2-1), 2z(y^3-3y)),$$

och för punkten $(2,0,1)$ får vi $\operatorname{grad} f(2,0,1) = (-1,-3,0)$. Tangentplanets ekvation är då $-1(x-2)-3y+0(z-1)=0$, d.v.s. $x+3y=2$

b) Riktningsvektorn har längd $\sqrt{3^2+4^2}=5$, och vi måste normera den för att få en riktningsvektor av längd 1. Låt $\overline{v} = \frac{1}{5}(3,4,0)$. Riktningsderivatan av f i punkten $(2,0,1)$ och i riktningen $\overline{v}$ är

$$f'_{\overline{v}}(2,0,1) = \operatorname{grad} f(2,0,1)\cdot\overline{v} = (-1,-3,0)\cdot\frac{1}{5}(3,4,0) = \frac{1}{5}(-3-12) = -3.$$

3. a) Vi byter variabler med det föreslagna variabelbytet. Med hjälp av kedjeregeln får vi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = 2x\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}. \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial v}.
\end{aligned}$$

För de andraderivator vi behöver i ekvationen får vi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

och

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) = 2x\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) = 2x\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

Vi sätter in dessa i differentialekvationen, och får efter förenkling

$$2x\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} = 2xe^{x^2},$$

vilket ger (då $x\neq 0$)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} = e^u$$

Vi integrerar denna ekvation med avseende på u:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = e^u + \varphi(v),$$

där φ är en godtycklig funktion av en variabel. Sedan integrerar vi igen, denna gång med avseende på v:

$$f(u,v) = ve^u + \Phi(v) + \psi(u),$$

där Φ är en primitiv funktion till φ. Nu byter vi tillbaka till de ursprungliga variablerna:

$$f(x,y) = (x+y)e^{x^2} + \Phi(x+y) + \psi(x^2).$$

Denna funktion är en lösning till differentialekvationen om Φ och ψ är godtyckliga C^2-funktioner av en variabel.

b) Ja, om vi sätter $\Phi(v) = v$ och $\psi(u) = 0$, så får vi $f(x, y) = (x+y)e^{x^2} + x + y = (x+y)(e^{x^2} + 1)$.

4. Ekvationen för halvsfären (skålen) är $z = 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Vi söker volymen mellan ytorna $z = 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ (den nedre ytan) och $z = (1 + x^2 + y^2)/2$ (den övre ytan). Dessa skär varandra då $x^2 + y^2 = 1$, och projektionen av området på xy-planet blir därför cirkelskivan $D = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \leq 1\}$. Vattenvolymen är

$$V = \iint_D \left(\frac{1 + x^2 + y^2}{2} - 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2} \right) dx\, dy.$$

Vi byter nu till planpolära koordinater, och använder att funktionaldeterminanten är r. D avbildas på området

$$E = \{(r, \varphi);\ 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Med variabelbytet får vi

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\frac{r^3}{2} - \frac{r}{2} + \sqrt{1 - r^2} r \right) dr \\ &= 2\pi \left[\frac{r^4}{8} - \frac{r^2}{4} - \frac{1}{3}(1 - r^2)^{3/2} \right]_0^1 \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) = \frac{5\pi}{12}. \end{aligned}$$

Alternativ lösning: Vattenvolymen kan också beräknas genom att räkna ut hur mycket av innehållet i skålen som inte är vatten (d.v.s. luftens volym) och subtrahera den från volymen av skålen (en halvsfär). Luftens volym är

$$\begin{aligned} \iint_D \left(1 - \frac{1 + x^2 + y^2}{2} \right) dx\, dy &= \frac{1}{2} \iint_D (1 - x^2 - y^2)\, dx\, dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 - r^2) r\, dr \\ &= \pi \int_0^1 (r - r^3)\, dr = \pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 \\ &= \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Skålens volym är $2\pi/3$ (halva enhetssfärens volym), och vattnets volym blir därför

$$V = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}.$$

5. a) Låt $P(x, y) = xy^2 - y$ och $Q(x, y) = x^2 y$. Kurvan γ omsluter ett område D (enhetscirkelskivan) där både P och Q är definierade, och randen γ är positivt orienterad. Greens formel ger

$$\begin{aligned} \int_\gamma P\, dx + Q\, dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \iint_D (2xy - 2xy + 1)\, dx\, dy \\ &= \iint_D dx\, dy = \pi, \end{aligned}$$

eftersom π är arean av enhetscirkelskivan.

Går även att lösa med parametrisering: Med denna metod sätter vi $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Då blir $x'(t) = -\sin t$ och $y'(t) = \cos t$. Vi får

$$\begin{aligned} \int_\gamma P\, dx + Q\, dy &= \int_0^{2\pi} \left((\cos t \sin^2 t - \sin t)(-\sin t) + \cos^2 t \sin t \cos t \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin^3 t \cos t + \sin^2 t + \cos^3 t \sin t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{4} \frac{d}{dt} \sin^4 t + \frac{1 - \cos(2t)}{2} - \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \cos^4 t \right) dt = \pi. \end{aligned}$$

b) Nu låter vi i stället $P(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ och $Q(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Vi ser att

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Vi försöker hitta en potential U. För en sådan måste vi ha

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

och genom att integrera med avseende på x så ser vi att

$$U(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \varphi(y).$$

Denna deriveras med avseende på y för att kunna jämföras med Q:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \varphi'(y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = Q(x,y).$$

Det följer att $\varphi'(y) = 0$, och $\varphi(y) = C$ för någon konstant C. Vi väljer t.ex. $C = 0$, och kan nu beräkna kurvintegralen enligt

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = U(0,1) - U(1,0) = 0.$$

Alternativ lösning: Låt γ_1 vara den del av enhetscirkeln som går från $(1,0)$ till $(0,1)$. Kurvan $\gamma + (-\gamma_1)$ är sluten, och omsluter ett område D, och kurvan $\gamma + (-\gamma_1)$ är den positivt orienterade randen. I D är $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$, och Greens formel ger

$$\int_\gamma \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} - \int_{\gamma_1} \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 0,$$

och alltså är

$$\int_\gamma \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_{\gamma_1} \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

och den senare kurvintegralen kan beräknas med parametrisering. γ_1 har parametriseringen $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $dx = -\sin t\,dt$, $dy = \cos t\,dt$. Detta ger

$$\int_{\gamma_1} \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t(-\sin t) + \sin t \cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\,dt = 0.$$

6. a) Vi bestämmer först de stationära punkterna.

$$f'_x = 2x + y + \frac{1}{4}x^2 = 0,$$
$$f'_y = x + 2y = 0.$$

Den andra av dessa ekvationer är ekvivalent med $x = -2y$, och ersätter vi x med $-2y$ i den första av ekvationerna, så får vi $y^2 - 3y = 0$, vilket är ekvivalent med $y(y-3) = 0$, d.v.s. $y = 0$ eller $y = 3$. Om $y = 0$, så är $x = 0$, och om $y = 3$, så är $x = -6$. Vi får därför de två stationära punkterna $(0,0)$ och $(-6,3)$.
Andraderivatorna är

$$f''_{xx} = 2 + \frac{1}{2}x,$$
$$f''_{xy} = 1,$$
$$f''_{yy} = 2.$$

Vi studerar nu karaktären för den kvadratiska formen Q som hör till den stationära punkten $(0,0)$:

$$Q(h,k) = 2h^2 + 2hk + 2k^2 = 2(h^2 + hk + k^2) = 2\left(\left(h + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}k^2\right)$$

är positivt definit, vilket betyder att den stationära punkten $(0,0)$ är en lokal minimipunkt. För den stationära punkten $(-6,3)$ gör vi på motsvarande sätt: Notera att $f''_{xx}(-6,3) = -1$. Vi får då

$$Q(h,k) = -h^2 + 2hk + 2k^2.$$

Vi ser lätt att Q är indefinit (t.ex. eftersom $h = 0$ ger $Q(0,k) = 2k^2 > 0$ för alla $k \neq 0$, medan $Q(h,0) = -h^2 < 0$ för alla $h \neq 0$. Det betyder att den stationära punkten $(-6,3)$ är en sadelpunkt (ej extrempunkt).

Svar: Den enda lokala extrempunkten till f är $(0,0)$, och det är ett lokalt minimum.

b) Området är kompakt och f är kontinuerlig. Alltså existerar största och minsta värde. Vi undersöker randen med hjälp av Lagrangemultiplikatormetoden. Randen ges av ekvationen

$$g(x,y) = x^2 + xy + y^2 = 36.$$

Vid en punkt där största resp. minsta värde antas, så måste gradienterna till f och g vara parallella. Detta sker om och endast om determinanten

$$\begin{vmatrix} 2x + y + \frac{1}{4}x^2 & x + 2y \\ 2x + y & x + 2y \end{vmatrix} = (x + 2y)\frac{1}{4}x^2 = 0,$$

d.v.s då $x = 0$ eller $x = -2y$. Om $x = 0$ så är $y = \pm 6$ (bivillkoret), och om $x = -2y$, så ger bivillkoret att $3y^2 = 36$, d.v.s. $y = \pm 2\sqrt{3}$, och då är $x = \mp 4\sqrt{3}$.

Vi jämför värdena i de intressanta punkterna.

$$\begin{aligned} f(4\sqrt{3}, -2\sqrt{3}) &= 16 \cdot 3 - 4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} + 4 \cdot 3 + \frac{1}{12} \cdot 64 \cdot 3\sqrt{3} = 36 + 16\sqrt{3}, \\ f(-4\sqrt{3}, 2\sqrt{3}) &= 16 \cdot 3 - 4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} + 4 \cdot 3 - \frac{1}{12} \cdot 64 \cdot 3\sqrt{3} = 36 - 16\sqrt{3}, \\ f(0,0) &= 0. \end{aligned}$$

Punkten $(-6,3)$ ligger visserligen i området, men det är en sadelpunkt och därför kan varken största eller minsta värde antas i den punkten. Svar: Största värde är $36 + 16\sqrt{3}$, och minsta värde är 0.

Alternativ lösning: Ett enklare sätt att analysera f på randen är följande: På randen är $f(x,y) = 36 + x^3/12$. Det räcker därför att hitta största värdet för $\tilde{f}(x,y) = x$ under bivillkoret $g(x,y) = 36$. Detta kan göras med Lagrangemultiplikatormetoden som i första lösningsalternativet, eller genom att lösa ut y i bivillkoret och få fram att $y = -x/2 \pm \sqrt{x^2/4 + 36 - x^2} = -x/2 \pm \sqrt{36 - 3x^2/4}$. Uttrycket under rottecknet får inte bli negativt, och för punkter på ellipsen är $36 - 3x^2/4 \geq 0$, d.v.s. $-4\sqrt{3} \leq x \leq 4\sqrt{3}$. Detta medför att $f(x,y) = 36 + x^3/12$ varierar mellan $36 - 16\sqrt{3}$ och $36 + 16\sqrt{3}$ på ellipsen (randen). Jämförelsen mellan intressanta punkter görs lika som i det första lösningsförslaget.