LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
ENDIMENSIONELL ANALYS
DELKURS B2/A3
2015-01-17 kl 8–13

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

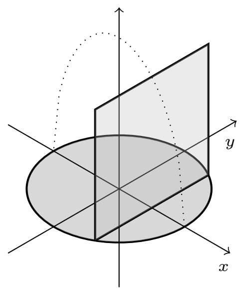
1. a) Bestäm $\int (x+1)e^x dx$. (0.4)

b) Beräkna integralen
$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx.$$ (0.6)

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen
$$y'' - 3y' - 10y = e^x + 5$$
som uppfyller villkoren $y(0) = 2$ och $y'(0) = 0$.

3. a) Lös ekvationen
$$z^2 - (3+i)z + 4 + 3i = 0.$$ (0.5)

b) Basen till en kropp K är cirkelskivan i xy-planet med radien 1 och medelpunkt i origo. Varje snitt av K med ett plan vinkelrätt mot x-axeln är en kvadrat (se figuren till höger). Bestäm volymen av K. (0.5)



4. a) Formulera och bevisa analysens huvudsats. (0.5)

b) Bestäm alla stationära punkter till funktionen
$$g(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2x}} \sqrt{1-t^4}\,dt$$
på intervallet $]0, 1/2[$. (0.5)

5. a) Bestäm Maclaurinpolynomen av ordning 0, 1 och 2 till funktionen
$$f(t) = (t+1)^{1/3}, \quad t > -1.$$ (0.4)

b) Visa att
$$\left|(t+1)^{1/3} - 1\right| \le t/3 \;\text{ för alla } t \ge 0.$$ (0.3)

c) Är serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{1+n^3} - n\right)$ konvergent? (0.3)

Tips: Sätt $g(x) = (1+x^3)^{1/3} - x$ och visa att $|g(x)| \le \dfrac{1}{3x^2}$ då $x > 0$.

6. En rak cirkulär kon med höjden 16 m och radien 16 m har spetsen nedåt och är fylld med vatten. Klockan 13.00 tas en plugg vid botten av konen ut, och 31 minuter senare är vattendjupet 4 m. Enligt Torricellis lag är den utströmmande vattenvolymen per tidsenhet proportionell mot kvadratroten av vattendjupet. Hur mycket vatten finns kvar i konen klockan 13.33?

LYCKA TILL !