LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Linjär analiys för D. Lösningar.
2011-3-11

1. a) $(t\theta(t))' = t'\theta(t) + t(\theta(t))' = \theta(t) + t\delta(t) = \theta(t)$.

b) Eftersom $\mathcal{L}f = \frac{1}{s^2}$ har vi

$$f * f = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}f \cdot \mathcal{L}f) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^4}\right) = \frac{t^3}{6}\theta(t).$$

c) Om $X = \mathcal{L}f$ har vi $s^2X + sX - 2X = \frac{1}{s^2} \Rightarrow$

$$X = \frac{1}{(s-1)(s+2)s^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s-1} - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2} \Rightarrow$$

$$x = \left(\frac{1}{3} \cdot e^t - \frac{1}{12} \cdot e^{-2t} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot t\right)\theta(t).$$

2. a) $(\sin t\theta(t))' = \cos t\theta(t) + \sin t\delta(t) = \cos t\theta(t)$.

b) $\mathcal{S}w(t) = y(t) \Rightarrow \mathcal{S}w(t-a) = y(t-a)$ för insignal $w(t)$ och varje tal a.

c) $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt$ konvergerar.

d) Vi har $\operatorname{tr} A = 3 + a > 0; \det A = 3a - 9 > 0$ viket är ekvivalent med $a > 3$.

e) Enligt (10) har vi $\sin 2t\delta'(t) = \sin(0)\delta'(t) - 2\cos 0\delta(t) = -2\delta(t)$.

3. a) Eftersom vi har två linjärt oberoende egenvekotrer är matrisen diagonaliserbar och

$$A = SDS^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2d_1 - d_2 & -2d_1 + 2d_2 \\ d_1 - d_2 & -d_1 + 2d_2 \end{pmatrix}.$$

Eftersom $d_i = \lambda_i$ är egenvärdena och vi vet att $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 = -4$ och $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -3$ har vi två alternativ:

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix};$$

b) Eftersom e^{At} har samma egenvektorer kan vi ta $d_1 = e^{-t}, d_2 = e^{-3t}$ och få

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-3t} & -2e^{-t} + 2e^{-3t} \\ e^{-t} - e^{-3t} & -e^{-t} + 2e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

c) Till exempel,

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t} \\ C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t} \end{bmatrix}$$

4. a) Eftersom $h(t) * \theta(t) = e^{-t}\theta(t) - e^{-2t}\theta(t)$ har vi:

$$H(s)\frac{1}{s} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \Rightarrow H(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)} = \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \Rightarrow$$

$$h(t) = \left(-e^{-t} + 2e^{-2t}\right)\theta(t).$$

Impulssvaret kunde vi också få som derivata av stegsvaret.

b) Systemet är stabilt därför att polerna i $H(s)$ är negativa och dessutom $\deg s \leq \deg(s+1)(s+2)$.

c) Eftersom $\mathcal{L}w_1(t) = \frac{s}{s^2+1}$ är

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(s)\mathcal{L}w_1(t)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2}{(s+1)(s+2)(s^2+1)}\right) =$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1} - \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right) =$$

$$\left(\frac{1}{2}\cdot e^{-t} - \frac{4}{5}\cdot e^{-2t} + \frac{3}{10}\cdot\cos t - \frac{1}{10}\cdot\sin t\right)\theta(t).$$

d) Eftersom $\mathcal{S}e^{st} = H(s)e^{st}$ är

$$y_2(t) = \mathcal{S}\cos t = \mathcal{S}\,Re\; e^{it} = Re\left(H(i)e^{it}\right) = Re\left(\frac{i}{(i+1)(i+2)}e^{it}\right) =$$

$$Re\left(\frac{i}{1+3i}e^{it}\right) = Re\left(\frac{3+i}{10}(\cos t + i\sin t)\right) = \frac{3\cos t - \sin t}{10}.$$

5. a) Summan av egenvärdena är lika med $\operatorname{tr} A = 18$. Produken är lika med determinanten. Vi räknar den med Gausselimination.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_1 = 1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 7 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_2 = 1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_3 = 1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_4 = -1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi ser att $\det A = d_1 d_2 d_3 d_4 = -2$, vilket ger produkten.

b) Eftersom matrisen är symmetrisk och det finns precis tre positiva d_i i Gausselimination ovan finns det precis tre positiva egenvärdena.

c) Vi gör en Gausselimination till:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_1 = -1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 5 & 9 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_2 = 1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -11 & -11 \\ 0 & 0 & -11 & -17 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_3 = -11}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_4 = -6} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi ser att endast ett $d_i > 0$ alltså endast en av egenvärdena är större än 2 och precis två positiva egenvärdena är mindre än två.

6. Om vi sätter $x = 0$ i ekvationen får vi direkt att $f(0) = -1$. Efter multiplikation med $\theta(x)$ kan ekvationen skrivas som

$$f'(x)\theta(x) * \sin 2x\, \theta(x) = f(x)\theta(x) + \cos 2x\, \theta(x).$$

Om $F(s) = \mathcal{L}f(x)\theta(x)$ har vi

$$(sF(s) - f(0))\frac{2}{s^2+4} = F(s) + \frac{s}{s^2+4} \Rightarrow 2sF(s) + 2 = F(s^2+4) + s \Rightarrow$$

$$F(s) = \frac{2-s}{s^2-2s+4} = \frac{1}{(s-1)^2+3} - \frac{s-1}{(s-1)^2+3} \Rightarrow$$

$$f(x)\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}x\, e^x\theta(x) - \cos\sqrt{3}x\, e^x\theta(x) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}x\, e^x - \cos\sqrt{3}x\, e^x$$

och ve kontrollerar att $f(0) = -1$ gäller.