LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATISKA INSTITUTIONEN

TENTAMENSSKRIVNING
Tillämpad matematik – Linjära system
2013–08–28 kl 14–19

Hjälpmedel: utdelat formelblad. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Skriv fullständiga meningar och förklara dina beteckningar. Alla svar skall förenklas så långt som möjligt.

1. Låt $f(t) = (t+1)\theta(t+1)$. Beräkna

a) en primitiv funktion till $f(t)$, (0.3)

b) f' och f'', (0.3)

c) en kausal lösning till ekvationen $x' + x = f'(t)$. (0.4)

2. a) För vilket system är impulssvaret lika med $3\delta(t-3)$? Beskriv systemet i ord. (0.2)

b) Vad menas med att ett system i insignal-utsignalform är stabilt? (0.2)

c) Under vilka villkor på impulssvaret är ett linjärt tidsinvariant system kausalt? (0.2)

d) För vilka a har matrisen

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ som egenvektor? (0.2)

e) Definiera begreppet positivt semidefinit matris. (0.2)

3. a) Beräkna samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

(0.4)

b) Beräkna determinanten $\det\left(e^{At}\right)$. (0.3)

c) Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_2' = 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\ x_3' = 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 \end{cases}, \quad x_1(0) = 1, x_2(0) = 2, x_3(0) = 3.$$

(0.3)

V.g. vänd!

4. Systemet $\mathcal{S}$ är kausalt, linjärt och tidsinvariant. Om man sänder in signalen $w(t) = \sin 3t\theta(t)$ så kommer signalen $y(t) = 6\cos 3t\theta(t)$ ut.

a) Bestäm överföringsfunktionen. (0.2)

b) Bestäm impulssvaret. (0.2)

c) Ange utsignalen $y_1(t)$ om insignalen är

$$w_1(t) = e^{2it}\theta(t).$$

(0.3)

d) Ange utsignalen $y_2(t)$ om insignalen är

$$w_2(t) = \cos 3t.$$

(0.3)

5. Låt

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & b & 0 \\ a & -9 & 28 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & c \end{pmatrix}$$

vara en symmetrisk matris.

a) Bestäm a, b och c om det $K = 0$ (0.4)

b) Skriv ner motsvarande kvadratiska form $f(x) = x^T Kx$. Är formen positivt definit? (0.2)

c) Bestäm antalet egenvärden som är mindre än 2. (0.4)

6. Lös ekvationen

$$y'(t) + \int_0^t f(t-\tau)y(t)d\tau = f(t), t \geq 0$$

där $y(0) = 0$ och $f(t) = e^{-2t}$.

LYCKA TILL!