LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
ENDIMENSIONELL ANALYS
DELKURS B2/A3
2015-01-17 kl 8–13

SVAR och ANVISNINGAR

1. a) Partialintegration ger att

$$\int (x+1)e^x dx = (x+1)e^x - \int e^x dx = \underline{xe^x + C}$$

där C är en godtycklig konstant.

b) Vi har

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\, dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{x} & dx = 2tdt \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 & x = 1 \Rightarrow t = 1 \end{bmatrix} = \int_0^1 \frac{t \cdot 2t}{1+t}\, dt$$

Polynomdivision ger att

$$\frac{t^2}{1+t} = t - 1 + \frac{1}{1+t}$$

och

$$\int_0^1 2t - 2 + \frac{2}{1+t}\, dt = \Big[t^2 - 2t + 2\ln(1+t)\Big]_0^1 = \underline{2\ln 2 - 1}$$

2. Den karakteristika ekvationen $r^2 - 3r - 10 = 0$ har rötterna $r_1 = -2$ och $r_2 = 5$. Så den allmänna lösningen till den homogena ekvationen

$$y'' - 3y' - 10y = 0$$

ges av

$$y_h(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{5x}$$

där C_1 och C_2 är godtyckliga konstanter.

Vi ser direkt att $y_{p_1}(x) = -1/2$ löser ekvationen

$$y'' - 3y' - 10y = 5$$

och genom att gissa på en lösning av formen Ce^x ser vi att $y_{p_2}(x) = -e^x/12$ löser ekvationen

$$y'' - 3y' - 10y = e^x$$

Den allmänna lösningen till ekvationen

$$y'' - 3y' - 10y = e^x + 5$$

ges därför av

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{5x} - \frac{1}{12}e^x - \frac{1}{2}$$

där C_1 och C_2 är godtyckliga konstanter.

Villkoret $y(0) = 2$ ger att

$$C_1 + C_2 - \frac{1}{12} - \frac{1}{2} = 2$$

och eftersom $y'(x) = -2C_1 e^{-2x} + 5C_2 e^{5x} - e^x/12$ ger villkoret $y'(0) = 0$ att

$$-2C_1 + 5C_2 - \frac{1}{12} = 0$$

Dessa två ekvationer med två obekanta har den enda lösningen $(C_1, C_2) = (11/6, 3/4)$. Den sökta lösningen är därför

$$\underline{y(x) = \frac{11}{6}e^{-2x} + \frac{3}{4}e^{5x} - \frac{1}{12}e^x - \frac{1}{2}}$$

3. a) Vi har

$$z^2-(3+i)z+4+3i=\left(z-\frac{3+i}{2}\right)^2-\frac{(3+i)^2}{4}+4+3i=\left(z-\frac{3+i}{2}\right)^2+2+\frac{3}{2}i$$

och börjar med att lösa ekvationen

$$-w^2=2+\frac{3}{2}i$$

Vi ansätter $w=x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R})$ och får ekvationerna

$$x^2-y^2=-2,\quad 2xy=-\frac{3}{2},\quad x^2+y^2=\frac{1}{2}\cdot|4+3i|=\frac{5}{2}$$

Det följer att

$$2x^2=\frac{1}{2},\quad 2y^2=\frac{9}{2}$$

och dessutom har x och y olika tecken. Så antingen är $x=1/2$ och $y=-3/2$ eller $x=-1/2$ och $y=3/2$.

Vi drar slutsatsen att $z^2-(3+i)z+4+3i=0$ om och endast om

$$z=\frac{1-3i}{2}+\frac{3+i}{2}=\underline{2-i}\quad\text{eller}\quad z=\frac{-1+3i}{2}+\frac{3+i}{2}=\underline{1+2i}$$

b) Låt $A(x)$ beteckna arean av den kvadrat som erhålls när K snittas med planet genom punkten $(x,0,0)$ och vinkelrätt mot x-axeln. Eftersom enhetscirkeln i xy-planet ges av ekvationen

$$x^2+y^2=1$$

följer att

$$A(x)=\left(2\sqrt{1-x^2}\right)^2=4(1-x^2),\quad -1\le x\le 1$$

Enligt skivformeln gäller därför att volymen av K ges av

$$V=\int_{-1}^{1}A(x)dx=4\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=\underline{\frac{16}{3}}$$

4. a) Se Sats 13.6 i boken.

b) Vi har

$$g(x)=\int_0^{\sqrt{2x}}\sqrt{1-t^4}\,dt-\int_0^{\sqrt{x}}\sqrt{1-t^4}\,dt$$

och ser att

$$g'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x}}\sqrt{1-\left(\sqrt{2x}\right)^4}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^4}=\frac{\sqrt{1-4x^2}}{\sqrt{2x}}-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{x}}$$

enligt analysens huvudsats. Det följer att

$$g'(x)=0\;\Leftrightarrow\;\sqrt{2}\sqrt{1-4x^2}=\sqrt{1-x^2}\;\Leftrightarrow\;2(1-4x^2)=1-x^2\;\Leftrightarrow\;1=7x^2$$

På intervallet $]0,1/2[$ har ekvationen $x^2=1/7$ den enda lösningen $\underline{x=1/\sqrt{7}}$.

5. a) Vi har

$$f'(t)=\frac{1}{3}(t+1)^{-2/3},\quad f''(t)=-\frac{2}{9}(t+1)^{-5/3}$$

och ser att

$$f(0)=1,\quad f'(0)=\frac{1}{3},\quad f''(0)=-\frac{2}{9}$$

Det följer att

$$p_0(t)=f(0)=\underline{1}\qquad p_1(t)=p_0(t)+f'(0)t=\underline{1+\frac{1}{3}t}$$

och

$$p_2(t)=p_1(t)+\frac{f''(0)}{2}t^2=\underline{1+\frac{1}{3}t-\frac{1}{9}t^2}$$

b) Enligt Maclaurins formel gäller att

$$(t+1)^{1/3}-1=f(t)-p_0(t)=f'(\xi)t$$

för något ξ mellan 0 och t. Eftersom

$$|f'(\xi)|=\frac{1}{3}(\xi+1)^{-2/3}\le\frac{1}{3} \quad \text{då } \xi\ge 0$$

följer att

$$|(t+1)^{1/3}-1|\le t/3 \quad \text{för alla } t\ge 0.$$

c) Sätt

$$g(x)=(1+x^3)^{1/3}-x, \qquad x>0$$

Vi ser direkt att $g(x)\ge 0$ $\big($ty $(1+x^3)^{1/3}\ge x^{3\cdot 1/3}=x\big)$ och eftersom

$$g'(x)=3x^2\cdot\frac{1}{3}(1+x^3)^{-2/3}-1=\frac{x^2}{(1+x^3)^{2/3}}-1\le\frac{x^2}{x^{3\cdot 2/3}}-1=0$$

är g avtagande. Enligt Cauchys integralkriterium gäller därför att serien

$$\sum_{n=1}^{\infty}g(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\big(\sqrt[3]{1+n^3}-n\big)$$

är konvergent om och endast om den generaliserade integralen $\int_1^\infty g(x)dx$ är konvergent. Vi har

$$g(x)=x\Big(\big(1/x^3+1\big)^{1/3}-1\Big)$$

och det följer av olikheten i b) med $t=1/x^3$ att

$$|g(x)|=|x|\cdot\Big|\big(1/x^3+1\big)^{1/3}-1\Big|\le x\cdot\frac{1}{3x^3}=\frac{1}{3x^2}$$

Eftersom

$$\int_1^\infty\frac{1}{x^2}dx$$

är konvergent drar vi slutsatsen att även $\int_1^\infty g(x)dx$ är konvergent. Så serien är konvergent.

6. Låt $V(t)$ beteckna vattenvolymen i konen vid tiden t minuter (så att $t=0$ motsvarar klockan 13.00). Enligt Torricellis lag gäller att

$$V'(t)=-k\sqrt{h(t)}$$

där $k>0$ är en okänd konstant och $h(t)$ är vattendjupet i konen vid tiden t. Eftersom $V(t)=\pi h(t)^3/3$ kan differentialekvationen ovan skrivas som

$$V'(t)=-\tilde{k}\,V(t)^{1/6}$$

där $\tilde{k}=(3/\pi)^{1/6}k$. Denna ekvation är separabel och kan lösas på följande sätt:

$$V'=-\tilde{k}\,V^{1/6} \overset{V>0}{\Leftrightarrow} \frac{dV}{V^{1/6}}=-\tilde{k}\,dt \Leftrightarrow \int\frac{dV}{V^{1/6}}=\int-\tilde{k}\,dt \Leftrightarrow \frac{6}{5}V^{5/6}=-\tilde{k}\,t+C$$

Villkoret $V(0)=\pi\cdot 16^3/3=\pi\cdot 2^{12}/3$ ger nu

$$\frac{5}{6}C=\big(\pi\cdot 2^{12}/3\big)^{5/6}=\big(\pi/3\big)^{5/6}2^{10}$$

och av villkoret $V(31)=\pi\cdot 4^3/3=\pi\cdot 2^6/3$ får vi vidare

$$\frac{6}{5}\big(\pi\cdot 2^6/3\big)^{5/6}=-\tilde{k}\cdot 31+C, \quad \text{dvs} \quad \frac{5}{6}\tilde{k}=\frac{2^{10}-2^5}{31}\big(\pi/3\big)^{5/6}=32\big(\pi/3\big)^{5/6}$$

Den implicita lösningen ges således av

$$\big(3V(t)/\pi\big)^{5/6}=-32t+1024$$

Eftersom $32^2=1024$ ser vi att konen är tom vid tiden $t=32$. Så det finns inget vatten kvar i konen klockan 13.33.