LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
System och Transformer
2014–06–02 Svar och anvisningar

1. a) Systemmatrisen har egenvärden $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = 5$ med motsvarande egenvektorer $\mathsf{S}_1 = c(1, -1)$ och $\mathsf{S}_2 = c(1, 1)$ där $c \neq 0$. Matrisen är alltså diagonaliserbar och systemet har den allmänna lösningen

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Systemet är inte stabilt, eftersom det finns lösningar som går mot ∞ då $t \to \infty$ (t.ex. $c_1 = 0, c_2 = 1$).

b) En partikulärlösning bestäms enklast via resolventen (den generaliserat stationära lösningen). Svar:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{2t} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

2. a) Svar: $f'(t) = \begin{cases} e^t, & t < 0 \\ -e^{-t}, & t > 0 \end{cases}$, $f''(t) = e^{-|t|} - 2\delta(t)$.

b) Svar: $g * g(t) = \dfrac{1}{6} t^3 \theta(t)$, $g * f''(t) = e^{-|t|}$ (enklast via $g * f'' = g'' * f$.)

3. a) Matrisens egenvärden är $-\dfrac{1}{2}$ och -2, så den är diagonaliserbar (olika egenvärden).

b) Ett egenvärde har belopp större än 1, så systemet är instabilt.

c) Enklast utnyttjar man att $(1, 1)$ är en egenvektor till A. Svar: $v_n = (-1/2)^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4. a) Svar: $F(s) = \dfrac{e}{(s-1)^2 + 1}$, definitionsstrimla $\operatorname{Re} s > 1$.

b) Svar: $g(t) = \big(e^{t+1} \sin t\big)(\theta(t) - 1)$, definitionsstrimla $\operatorname{Re} s < 1$. (Någon motivering krävs!)

5. Överföringsfunktionen bestäms via Laplacetransformer: $H(s) = \dfrac{s^2 + 1}{(s+1)^2}$. Den sökta insignalen måste alltså ha Laplacetransformen

$$\frac{(s+1)^2}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{s^2+1} + \frac{2s}{(s^2+1)^2}.$$

Inverstransformation ger $w(t) = (t+1) \sin t \, \theta(t)$. Alla funktioner kausala, och alla definitionsstrimlor högerhalvplan.

6. a) Svar: $\pi(\theta(\omega + a) - \theta(\omega - a))$.

b) Parsevals formel, gränsövergång och invers Fouriertransform visar att

$$\lim_{a \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) \sin at}{t} \, dt = \pi f(0).$$