

*HJÄLPMEDEL: Utdelad formelsamling samt miniräknare.*

*Motivera lösningarna väl.*

1. Ge en rimlig fysikalisk tolkning av problemet

$$\begin{cases} u''_{tt} - u''_{xx} = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & x > 0, \\ u'_t(x, 0) = \theta(x - 1) - \theta(x - 4), & x > 0. \end{cases}$$

Lös systemet och rita lösningen för  $t = 1$ ,  $t = 3$  och  $t = 5$ .

2. Bestäm talen  $a$  och  $b$  så att integralen

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\theta(x) - a \cos x - b \sin x)^2 dx$$

blir så liten som möjligt. Bestäm integralens minsta värde.

3. Lös problemet

$$\begin{cases} u'_t - u''_{xx} = \delta(x - 1), & 0 < x < 2, t > 0, \\ u(0, t) = u'_x(2, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & 0 < x < 2. \end{cases}$$

Ge en rimlig fysikalisk tolkning av problemet.

4. En halvoändlig, tunn stav är isolerad längs mantelytan. Stavens ändyta hålls vid den konstanta temperaturen  $20^\circ \text{C}$  och stavens begynnelsestemperatur är  $0^\circ \text{C}$ . Lös värmeledningsproblemet.

5. Finn en lösning till det tvådimensionella potentialproblemet

$$\begin{cases} -\Delta u = \delta_{(2,1)}, & x > 0, y \in \mathbb{R}, \\ u(0, y) = \theta(y + 2) - \theta(y - 1), & y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

6. Två trummor har trumskinn tillverkat av samma material. Det ena trumskinnets är kvadratisk och det andra är cirkulärt. Kvadraten och cirkelns areor är lika. Spänningen och densiteten är också lika. Hos vilken av trummorna finns den lägsta egenvinkelfrekvensen?

**LYCKA TILL!**