LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
KONTINUERLIGA SYSTEM
2013-06-01

1. Med hänsyn till det homogena Neumannvillkoret utvidgar vi u till en jämn funktion v med avseende på x. Då gäller att

$$\begin{cases} v'_t - a\,v''_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ v(x,0) = \theta(x+1) - \theta(x-1), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Med hjälp av Greenfunktionen $G(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi a t}}\, e^{-x^2/4at}$ kan vi direkt skriva upp lösningen som en faltning.

$$v(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-\alpha, t)(\theta(\alpha+1) - \theta(\alpha-1))\, d\alpha = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{4\pi a t}}\, e^{-(x-\alpha)^2/4at}\; d\alpha$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x+1}{\sqrt{4at}}}^{\frac{x-1}{\sqrt{4at}}} e^{-z^2}\; dz = \left[-\frac{1}{2}\operatorname{erf}(z) \right]_{\frac{x+1}{\sqrt{4at}}}^{\frac{x-1}{\sqrt{4at}}}.$$

Svar: Lösningen är $u(x,t) = \dfrac{1}{2}\Big(\operatorname{erf}\big(\dfrac{x+1}{\sqrt{4at}}\big) - \operatorname{erf}\big(\dfrac{x-1}{\sqrt{4at}}\big)\Big)$ då $x > 0$ och $t > 0$.

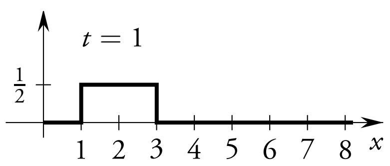
2. Om v är den udda utvidgningen av u så uppfyller v systemet

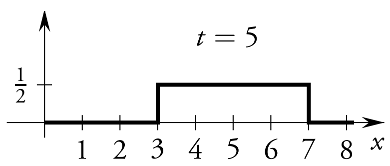
$$\begin{cases} v''_{tt} - v''_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ v(0,t) = 0, & t > 0, \\ v(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ v'_t(x,0) = \delta_2(x) - \delta_{-2}(x) = h(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Om $H(x) = \theta(x-2) - \theta(x+2)$ är en primitiv till h så ger d'Alemberts formel att lösningen är $v(x,t) = \frac{1}{2}(H(x+t) - H(x-t))$.

Svar: Fysikaliskt tolkning: u är utböjningen av en mycket lång (halvoändlig) elastisk sträng som är fast inspänd i änden ($x = 0$) och ej påverkas av några yttre krafter. Vid tiden 0 är strängen i jämtviktläget och ges, t ex med ett slag av en spetsig hammare, hastigheten $u_t(x,0)$. Vågutbredningshastigheten i strängen är 1.

Lösningen är $u(x,t) = \frac{1}{2}(\theta(x+t-2) - \theta(x+t+2) + \theta(x-t+2) - \theta(x-t-2))$ då $x > 0$ och $t > 0$ vilket ger följande figurer





3. Först bestäms en ortogonal bas för andragradspolynom med hjälp av Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod där skalärprodukten är

$$(f|g) = \int_0^\infty f(x)g(x)\, e^{-x}\ dx.$$

Räkningarna underlättas om man en gång för alla beräknar

$$I_k = \int_0^\infty x^k\, e^{-x}\ dx.$$

Först får man $I_0 = 1$ och sen med hjälp av partialintegration $I_k = kI_{k-1}$. Detta rekursionssystem ger att $I_k = k!$. Utgående från monomen $\tilde{p}_0 = 1, \tilde{p}_1 = x$ och $\tilde{p}_2 = x^2$ så får man $p_0 = 1$,

$$p_1 = \tilde{p}_1 - \frac{(p_0|\tilde{p}_1)}{(p_0|p_0)}p_0 = x - \frac{I_1}{I_0} = x - 1$$

och

$$p_2 = \tilde{p}_2 - \frac{(p_1|\tilde{p}_2)}{(p_1|p_1)}p_1 - \frac{(p_0|\tilde{p}_2)}{(p_0|p_0)}p_0 = x^2 - \frac{I_3 - I_2}{I_2 - 2I_1 + I_0}(x-1) - \frac{I_2}{I_0} = x^2 - 4x + 2.$$

Enligt projektionssatsen är

$$p = \frac{(p_2|\, e^{-x})}{(p_2|p_2)}p_2 + \frac{(p_1|\, e^{-x})}{(p_1|p_1)}p_1 + \frac{(p_0|\, e^{-x})}{(p_0|p_0)}p_0.$$

Här uppkommer integraler av typen

$$J_k = \int_0^\infty x^k\, e^{-x}\, e^{-x}\ dx = \int_0^\infty x^k\, e^{-2x}\ dx = \int_0^\infty \left(\frac{y}{2}\right)^k e^{-y}\ \frac{dy}{2} = \frac{I_k}{2^{k+1}} = \frac{k!}{2^{k+1}}$$

och man får att det bäst approximerande polynomet är

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{J_2 - 4J_1 + 2J_0}{I_4 - 8I_3 + 20I_2 - 16I_1 + 4I_0}(x^2 - 4x + 2) + \frac{J_1 - J_0}{I_2 - 2I_1 + I_0}(x-1) + \frac{J_0}{I_0} \\ &= \frac{1/4}{4}(x^2 - 4x + 2) - \frac{1/4}{1}(x-1) + \frac{1/2}{1} = \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{7}{8}. \end{aligned}$$

Svar: Polynomet är $\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{7}{8}$.

4. Räkna med ett oändligt långt rör. Lägg x-axeln längs röret med origo i den punkt där ämnet injiceras och låt tvärsnittsarean vara A. Låt $D > 0$ vara diffusionskonstanten, $k > 0$ sönderfallskonstanten och m mängden av det injicerade ämnet. Sätt $\tilde{m} = m/A$. Då fås modellen

$$\begin{cases} u'_t - D\, u''_{xx} = -k\, u, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \tilde{m}\, \delta(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Låt $\hat{u}(\xi, t)$ vara den partiella Fouriertransformen i x-led av $u(x,t)$. Fouriertransformation i x-led av differentialekvationen ger

$$\hat{u}'_t - D(i\xi)^2 \hat{u} = -k\, \hat{u}$$

som kan skrivas

$$\hat{u}'_t + (D\xi^2 + k)\hat{u} = 0$$

och som har lösningen

$$\hat{u}(\xi, t) = c(\xi)\, e^{-(D\xi^2+k)t} \,.$$

Från begynnelsevärdet fås $\hat{u}(\xi, 0) = c(\xi) = \tilde{m}\,\hat{\delta} = \tilde{m}$. Således är

$$\hat{u}(\xi, t) = \tilde{m}\, e^{-kt}\, e^{-D\xi^2 t} \,.$$

Inverstransformation ger u.

Svar: Koncentrationen är $u(x, t) = \dfrac{m}{A}\, e^{-kt}\, \dfrac{1}{\sqrt{4\pi D t}}\, e^{-x^2/4Dt}$ för $x \in \mathbb{R}$ och $t > 0$.

5. Beteckna rummets längd, bredd och höjd med L, B och H. Då blir ekvationen för ljudvågorna

$$u''_{tt} + c^2 \mathcal{A} u = 0, \qquad \text{med } \mathcal{A} = -\Delta,$$

och med randvärdena $u' = 0$ på alla väggar utom en där $u = 0$. Egenvärdena λ till $\mathcal{A}$ ger egenfrekvenserna $f = \frac{c\sqrt{\lambda}}{2\pi}$. För att hitta egenvärdena λ som gör vi variabelseparation av en egenfunktion $\varphi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$. Då får vi ekvationerna, i y-led,

$$Y'' + \lambda_y Y = 0, \qquad Y'(0) = Y'(B) = 0,$$

med egenfunktionen $Y(y) = \cos(\frac{j\pi y}{B})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ och i z-led

$$Z'' + \lambda_z Z = 0, \qquad Z'(0) = Z'(H) = 0,$$

med egenfunktionen $Z(z) = \cos(\frac{k\pi z}{H})$, $l = 0, 1, 2, \ldots$ och slutligen x-led

$$X'' + \lambda_x X = 0, \qquad X'(0) = 0, X(L) = 0,$$

med egenfunktionen $X(x) = \cos(\frac{(j+1/2)\pi x}{L})$, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Sammantaget blir egenfunktionerna

$$\varphi_{jkl}(x, y, z) = \cos(\frac{(j + 1/2)\pi x}{L}) \cos(\frac{j\pi y}{B}) \cos(\frac{k\pi z}{H})$$

och egenvärdena

$$\lambda_{jkl} = \lambda_x + \lambda_y + \lambda_z = \big(\frac{(j + 1/2)\pi}{L}\big)^2 + \big(\frac{k\pi}{B}\big)^2 + \big(\frac{l\pi}{H}\big)^2$$

vilket ger egenfrekvenserna

$$f_{jkl} = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\lambda_{jkl}} = 170\sqrt{\big(\frac{(j + 1/2)}{L}\big)^2 + \big(\frac{k}{B}\big)^2 + \big(\frac{l}{H}\big)^2}, \quad j, k, l = 0, 1, 2, \ldots$$

Grundfrekvensen, den lägsta frekvensen är $f_{000} = 170/(2L) = 21{,}25$ vilket ger $L = 4$. Då blir $f_{200} = 63{,}75$ och $f_{j00} \geq 63{,}75$ för $j \geq 1$. Den näst lägsta frekvensen 30,05 måste vara f_{010} (eller f_{001} vilket ger

$$30{,}05 = 170\sqrt{\big(\frac{1/2}{4}\big)^2 + \big(\frac{1}{B}\big)^2}$$

varför $B = 8$. Då blir $f_{110} = 63{,}75$, $f_{020} = 47{,}52$, $f_{030} = 67{,}20$. Den återstående låga frekvensen 60,52 måste då vara f_{001} vilket ger $H = 3$.

Svar: Rummets dimensioner är $3 \times 4 \times 8$ meter.

6. I exempel S.4 sidorna 337 - 339 i läroboken bestäms egenfunktioner och egenvärden till operatorn $\mathcal{A}$. Resultatet kan sammanfattas i följande tabell (beteckningar som i boken)

Egenvärden	*Egenfunktioner*
$\lambda_{0k} = \alpha_{0k}^2,\ k = 1, 2, \ldots$	$J_0(\alpha_{0k} r),\ k = 1, 2, \ldots$
$\lambda_{nk} = \alpha_{nk}^2,\ n, k = 1, 2, \ldots$	$J_n(\alpha_{nk} r) \cos n\theta,\quad J_n(\alpha_{nk} r) \sin n\theta,\ n, k = 1, 2, \ldots$

Figuren i kombination med informationen i tabellen ger att $n = 4$, 4 svängningar i θ-led och $k = 2$, två nollställen i r-led för $0 \leq r < 1$. Alltså är egenvärdet $\alpha_{42}^2 = 11{,}065^2 = 122{,}43$.

Av tabellen ovan ser vi att det finns två linjärt oberoende egenfunktioner som kan väljas till till exempel $J_4(\alpha_{42} r) \cos 4\theta$ och $J_4(\alpha_{42} r) \sin 4\theta$. Funktionen φ i bilden är någon linjärkombination av dessa.

Låt $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ vara en uppräkning av egenfunktionerna valda så att en av dessa, säg φ_1, är φ. Utveckla $u(x, y, t)$ i denna bas. Skriv

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \varphi_k(x, y).$$

Insättning i den partiella differentialekvationen leder till att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(u_k''(t) + c^2 \lambda_k u_k(t))}_{=0} \varphi_k(x, y) = 0.$$

Alltså är $u_k(t) = a_k \cos c\sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin c\sqrt{\lambda_k} t$. Då är

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos c\sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin c\sqrt{\lambda_k} t \right) \varphi_k(x, y) .$$

Begynnelsevillkoret $u_t'(x, y, 0) = 0$ ger att alla $b_k = 0$. Det andra begynnelsevillkoret ger att

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x, y) .$$

Alltså är $a_1 = 1$ och övriga $a_k = 0$. Vidare vet vi sen tidigare att $\lambda_1 = \alpha_{42}^2$.

Svar: Egenvärdet är $\alpha_{42}^2 = 122{,}43$ till vilket det hör två linjärt oberoende egenvektorer. Lösningen är $u(x, y, t) = \cos(c\alpha_{42} t)\, \varphi(x, y)$ då $x^2 + y^2 < 1$ och $t > 0$.