LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR TILL
LINJÄR ALGEBRA
2015-01-12 kl 8–13

1. a) Eftersom vi kan anta ON bas kan vi använda formeln för skärprodukt. Vi får

$$\bar{\mathbf{u}} \bullet \bar{\mathbf{v}} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 3,$$
$$|\bar{\mathbf{u}}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$$

och

$$|\bar{\mathbf{v}}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}.$$

Enl. definitionen av skalärprodukt är

$$\bar{\mathbf{u}} \bullet \bar{\mathbf{v}} = |\bar{\mathbf{u}}||\bar{\mathbf{v}}| \cos \varphi,$$

där φ är vikeln mellan vektorerna $\bar{\mathbf{u}}$ och $\bar{\mathbf{v}}$. Alltså får vi

$$\cos \varphi = \frac{\bar{\mathbf{u}} \bullet \bar{\mathbf{v}}}{|\bar{\mathbf{u}}||\bar{\mathbf{v}}|} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

vilket ger vinkeln $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

b) Beräkning av determinanten mha Sarrus regel ger

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2 + 0 - 0 - 8 - 2 = -8.$$

c) Enl. huvudsatsen är kolonnvektorerna i en matris linjärt oberoende om determinanten inte är 0. Eftersom determinanten i b) har kolonnvektorerna $\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{w}}$ måste dom vara linjärt oberoende.
Volymen av parallellepipeden blir absolutvärdet av determinanten i b), dvs $|-8| = 8$.

2. Enligt huvudsatsen kan systemet endast ha oändligt många lösningar om determinanten till systemmatrisen blir 0. Beräkning av determinanten ger

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & a \\ 2 & a & 0 \end{vmatrix} = 0 + 4a + a - a^2 - 0 - 6 \Leftrightarrow a^2 - 5a + 6 = 0,$$

vilken har rötterna $a = 2$ och $a = 3$.
I fallet $a = 2$ får vi med hjälp av Gausselimination

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 10 \\ 2x & + & 2y & & & = & -8 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ & & y & + & z & = & 7 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Här ser vi att trappsystemet har oändligt många lösningar.
I fallet $a = 3$ får vi

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ x & + & 3y & + & 3z & = & 11 \\ 2x & + & 3y & & & = & -8 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ & & y & + & 2z & = & 8 \\ & & & & 0 & = & -6 \end{array} \right. ,$$

vilket inte har några lösningar.

Systemet har alltså oändligt många lösningar när $a = 2$.

3. Att $\hat{\mathbf{e}}_2$ är vinkelrät mot π är samma sak som att $\hat{\mathbf{e}}_2$ är parallell med dess normal $\bar{\mathbf{n}} = (1, 0, 1)$. För att $\hat{\mathbf{e}}_2$ ska få längden 1 kan vi t.ex. välja

$$\hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1).$$

Vektorn $\hat{\mathbf{e}}_3$ är ortogonal mot linjen om $\hat{\mathbf{e}}_3$ är ortogonal mot dess riktningsvektor $\bar{\mathbf{v}} = (1, 2, 2)$. För att basen ska bli ortonormal måste dessutom $\hat{\mathbf{e}}_3$ vara vinkelrät mot $\hat{\mathbf{e}}_2$ (och därmed $\bar{\mathbf{n}}$). Alltså blir $\hat{\mathbf{e}}_3$ parallell med $\bar{\mathbf{n}} \times \bar{\mathbf{v}} = (-2, -1, 2)$. För att få längden 1 kan vi t.ex. välja

$$\hat{\mathbf{e}}_3 = \frac{1}{3}(-2, -1, 2).$$

Slutligen skall $\hat{\mathbf{e}}_1$ vara vinkelrät mot både $\hat{\mathbf{e}}_2$ och $\hat{\mathbf{e}}_3$ och dessutom ska $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ vara positivt orienterad. Genom att permutera en gång ser vi att

$$\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3 \text{ pos. orient.} \Leftrightarrow \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3, \hat{\mathbf{e}}_1 \text{ pos. orient.}$$

Alltså får vi

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1, -4, -1). \tag{1}$$

(Obs: $\hat{\mathbf{e}}_1$ har redan längden 1 eftersom både $\hat{\mathbf{e}}_2$ och $\hat{\mathbf{e}}_3$ har längden 1 och är vinkelräta.)

4. Om A är systemets avbildningsmatris gäller $AB = C$ där

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ och } C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 8 & 3 & -8 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Eftersom B är inverterbar får man

$$A = CB^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 8 & 3 & -8 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Gausselimination på A ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Vi får alltså 2 pivåelement och därför blir rangen 2. Eftersom matrisen har 3 kolonner blir nolldimensionen $3 - 2 = 1$ endligt dimensionssatsen. Eftersom rangen är 2 finns bara 2 linjärt oberoende kolonner i A och därför kan inte A vara inverterbar enligt huvudsatsen.

5. a) Matrisen P har egenvärdet λ med egenvektorn $\bar{\mathbf{v}} = (v_1, v_2)$ om

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} p_{11}v_1 + p_{12}v_2 = \lambda v_1 \\ p_{21}v_1 + p_{22}v_2 = \lambda v_2 \end{cases}.$$

Summerar vi dom två ekvationerna får vi

$$\underbrace{(p_{11} + p_{21})}_{=1} v_1 + \underbrace{(p_{12} + p_{22})}_{=1} v_2 = \lambda(v_1 + v_2),$$

dvs.

$$(\lambda - 1)(v_1 + v_2) = 0.$$

För att ekvationen ska vara uppfylld måste alltså $\lambda = 1$ eller $v_1 + v_2 = 0$.

b) Egenvektorer till $\lambda = 1$ ges av systemet

$$(3I - P)\bar{\mathbf{v}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2v_1 - 4v_2 &= 0 \\ 2v_1 + 4v_2 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 &= -2t \\ v_2 &= t \end{cases}, t \neq 0.$$

I fallet $v_1 + v_2 = 0$ är t.ex. $\bar{\mathbf{v}} = (-1, 1)$ en egenvektor. Egenvärdet får vi från

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underbrace{-1}_{=\lambda} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Matrisen P kan nu skrivas som $A = SDS^{-1}$ där

$$S = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ och } S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Eftersom $P^{2015} = SD^{2015}S^{-1}$ och

$$D^{2015} = \begin{pmatrix} (-1)^{2015} & 0 \\ 0 & 1^{2015} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

får vi

$$P^{2015} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = SDS^{-1} = P.$$

Alternativ lösning:
Om man ser att $P^2 = I$ så inser man lätt att
$P^3 = P^2 P = P$
$P^4 = P^3 P = I$
$P^5 = P^5 P = P$ osv.
Alltså gäller

$$P^n = \begin{cases} P & \text{om } n \text{ är udda} \\ I & \text{om } n \text{ är jämn} \end{cases}.$$

6. a) Planet π_1 har normalen $(1,1,1)$. Dom punkter som hamnar på $Q_1 : (1,1,0)$ (vid ortogonal projektion) ligger på linjen om är vinkelrät mot planet och går igenom Q_1. I parameterform kan linjen skrivas

$$(x,y,z) = (1,1,0) + t(1,1,1).$$

b) På samma sätt som i a) ser vi att dom punkter som hamnar på $Q_2 : (2,3,1)$ vid ortogonal projektion på $\pi_2 : 2x + y + 2z - 9 = 0$ ligger på linjen

$$(x,y,z) = (2,3,1) + s(2,1,2).$$

För att båda projektionerna ska bli rätt måste alltså P ligga i skärningen mellan dom två linjerna, vilken ges av

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1+t & = & 2+2s \\ 1+t & = & 3-s \\ t & = & 1+2s \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} s & = & 1 \\ t & = & 3 \end{array}\right. .$$

Insättning i någon av linjerna ger skärningspunkten $P : (4,4,3)$.
Eftersom planet $\pi_3 : 4y + 3z = 0$ innehåller origo ges projektionen Q_3 av

$$\overline{OQ_3} = \overline{OP} - \overline{Q_3P} = \overline{OP} - \frac{\overline{OP} \bullet \bar{\mathbf{n}}}{|\bar{\mathbf{n}}|^2}\bar{\mathbf{n}}.$$

(Rita figur!)
Alltså får vi projektionen

$$Q_3 : (4,4,3) - \frac{(4,4,3) \bullet (0,4,3)}{0^2 + 4^2 + 3^2}(0,4,3) = (4,0,0).$$