LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

SVAR
LINJÄR ALGEBRA
2015-03-16

1. Fallet $a = 3$ ger $(x, y, z) = t(-7, 1, 4),\ t \in \mathbb{R}$, och $a = 2$ ger $(x, y, z) = t(-1, 0, 1),\ t \in \mathbb{R}$. Då $a \neq 3$ och $a \neq 2$ blir lösningen $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

2. **a)** En ekvation är $2x + 2y - z - 3 = 0$.

   b) Punkten $(0, -1, -5)$.

   c) Avståndet är $\frac{1}{2}\sqrt{30}$.

3. **a)** a) Egenvektorer $X = t(1, 1),\ t \neq 0$, till egenvärdet $\lambda = 3$, och egenvektorer $X = t(1, -2),\ t \neq 0$, till egenvärdet $\lambda = -3$.

   b) Exempelvis $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

   c) Kan visas på följande sätt:

$$B \text{ har egenvärdet } \lambda \quad \Leftrightarrow \quad BX = \lambda X \quad (X \neq 0) \quad \Leftrightarrow \quad B^{-1}BX = B^{-1}\lambda X \quad \Leftrightarrow$$
$$X = \lambda B^{-1}X \quad \Leftrightarrow \quad B^{-1}X = \tfrac{1}{\lambda}X \quad \Leftrightarrow \quad B^{-1} \text{ har egenvärdet } 1/\lambda.$$

4. Man kan välja $\hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{3}(2, 2, 1)$, $\hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{3}(1, -2, 2)$ och $\hat{\mathbf{e}}_3 = \frac{1}{3}(2, -1, -2)$. Vektorn får då (de gamla) koordinaterna $(11, 2, 1)$. (Har du valt motsatt tecken på $\hat{\mathbf{e}}_2$ och $\hat{\mathbf{e}}_3$ så får vektorn istället koordinaterna $(1, 10, 5)$.)

5. **a)** Avbildningsmatrisen för F blir

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

   och avbildningsmatrisen för G blir

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Matrisen för den sammansatta avbildningen H blir således

$$C = BA = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

   b) Eftersom $|\det C| = 2 > 1$ så följer det, enligt determinantens tolkning som volymskala, att en parallellepiped får större volym då vi tillämpar H på den.

6. **a)** Eftersom avbildningen är en rotation så är värdemängden hela rummet, dvs. av dimension 3. Vi får därför rang$A = 3$, oavsett θ.

b) En rotation påverkar inte volymen av en kropp, och eftersom inte heller orienteringen ändras så är det$A = 1$, oavsett θ.

c) För alla θ så gäller det att den angivna linjen avbildas på sig själv, så vektorerna ($\neq \mathit{0}$) på denna linje blir egenvektorer med egenvärdet $\lambda = 1$. Om $\theta = \pi\ (+k{\cdot}2\pi)$ så vrider vi ett halvt varv, och då blir alla vektorer ($\neq \mathit{0}$) ortogonala mot linjen (dvs. i planet $402x - 512y + 267z = 0$) egenvektorer med egenvärdet $\lambda = -1$. Om vi vrider hela varv ($\theta = k{\cdot}2\pi$) så blir alla vektorer ($\neq \mathit{0}$) egenvektorer med egenvärdet $\lambda = 1$. Inga andra vridningar ger egenvektorer utöver vridningsaxeln.

d) Matrisen A är diagonaliserbar precis då vi kan välja 3 linjärt oberoende egenvektorer. Enligt resonomanget i b) så ser vi att detta är möjligt endast då $\theta = \pi + k{\cdot}2\pi$ och då $\theta = k{\cdot}2\pi$, eller sammantaget, då $\theta = k{\cdot}\pi$.

Svar: a) rang $A = 3$. b) det$A = 1$. c) Vinkeln $\theta = \pi + k{\cdot}2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ger $\lambda = 1$ och $\lambda = -1$. Övriga θ ger endast $\lambda = 1$. d) Diagonaliserbar endast då $\theta = k{\cdot}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.