LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
KONTINUERLIGA SYSTEM
2013-08-22, kl 8-13

HJÄLPMEDEL: Utdelad formelsamling samt miniräknare.
Motivera lösningarna väl.

1. Två slutna, smala cylindriska rör har samma radie och längd L. I det ena röret finns ett färgämne med koncentrationen q och i det andra röret finns samma ämne men med koncentrationen $2q$. Vid tiden $t = 0$ sätts rören ihop till ett rör med längden $2L$ och mellanväggen mellan rören tas bort. Färgämnet börjar omfördela sig genom diffusion. Bestäm koncentrationen av färgämnet i det nya långa röret. Vad blir den stationära koncentrationen?

2. Ge en rimlig fysikalisk tolkning av problemet

$$\begin{cases} u''_{tt} - u''_{xx} = 0, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < \pi, \\ u'_t(x,0) = \delta_{\pi/2}(x), & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Lös systemet och rita lösningen för $t = 2$.

3. Betrakta funktionerna $\varphi_k(x) = \theta(x-k) - \theta(x-k-1)$, där $k = 0, 1, 2, \ldots$. Dessa funktioner är ortogonala i skalärprodukten

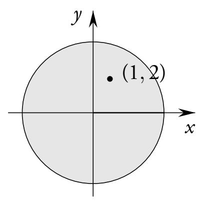
$$(u|v) = \int_0^\infty u(x)v(x)\,dx\,.$$

Bestäm, för givet positivt heltal n, talen c_k så att integralen

$$\int_0^\infty \left(e^{-x\ln 2}\cdot \ln 2 - \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x)\right)^2 dx$$

blir så liten som möjligt. Vad blir gränsvärdet av integralens minimivärde då $n \to \infty$?

4. En lång cylindrisk kropp har radien 5 m. Parallellt med dess axel löper ett värmerör som avger värmemängden 70 W/m. Temperaturen på cylinderytan är hela tiden $20^\circ\ C$. Värmekällan uppfattas som punktformig, belägen i $(1, 2)$. Bestäm temperaturen i origo efter mycket lång tid om värmediffusiviteten är $a = 10^{-6}$ m^2/s och värmeledningsförmågan $\lambda = 0{,}2$ W/(m$^\circ$ C).



5. Visa att operatorn

$$\mathcal{A}u = -\frac{d^2u}{dx^2} - 2\frac{du}{dx}, \quad u(0) = u(L) = 0,$$

är en Sturm-Liouvilleoperator och använd detta för att lösa svängningsproblemet

$$\begin{cases} u''_{tt} - c^2(u''_{xx} + 2u'_x) = 0, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 0,\ u'_t(x,0) = e^{-x}, & 0 < x < L. \end{cases}$$

6. Låt Ω vara enhetsklotet. Lös problemet

$$\begin{cases} -\Delta u = 6, & \text{i } \Omega, \\ u = 3z^2, & \text{på } \partial\Omega. \end{cases}$$

LYCKA TILL!