LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
LINJÄR ALGEBRA
2015-03-16 kl 8–13

INGA HJÄLPMEDEL.
Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Alla koordinatsystem får antas vara ortonormerade och positivt orienterade.

1. Lös, för varje värde på a, ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + ay + z = 0 \\ 2x + 2y + az = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases}.$$

2. a) Bestäm en ekvation på affin form för planet π genom punkterna

$$P_1 : (1, 0, -1), \quad P_2 : (2, 1, 3), \quad \text{och} \quad P_3 : (3, -1, 1). \qquad (0.3)$$

b) Bestäm skärningen mellan planet π ovan och linjen l som går genom punkterna

$$P_4 : (3, 2, 1) \quad \text{och} \quad P_5 : (2, 1, -1). \qquad (0.3)$$

c) Bestäm avståndet mellan punkten P_3 och linjen l. (0.4)

3. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till A. (0.5)

b) Diagonalisera A, dvs. ange en inverterbar matris S och en diagonalmatris D sådana att $S^{-1}AS = D$. (0.3)

c) Antag att matrisen B är inverterbar, och har ett egenvärde $\lambda \neq 0$. Visa att B^{-1} har egenvärdet $1/\lambda$. (0.2)

4. Bestäm en positivt orienterad ortonormerad bas $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ sådan att

$\hat{\mathbf{e}}_1$ är parallell med linjen $l : (x, y, z) = (1, 0, 2) + t(2, 2, 1)$ och

$\hat{\mathbf{e}}_2$ är parallell med planet $\pi : 2x + 3y + 2z - 7 = 0$.

Ange också koordinaterna, i den gamla basen, för den vektor som i din nya bas får koordinaterna $(9, 3, 6)$.

Var god vänd!

5. Låt F vara en linjär avbildning som avbildar vektorerna

$$(1,0,0),\ (1,1,0) \text{ och } (1,1,1) \qquad \text{på} \qquad (1,2,0),\ (2,-1,3) \text{ respektive } (0,1,-1).$$

Låt vidare G vara avbildningen som speglar rummets vektorer i yz-planet, dvs. i planet $x = 0$. Låt slutligen H vara den sammansatta avbildning som innebär att vi först tillämpar F och därefter G.

a) Bestäm avbildningsmatrisen för H. (0.8)

b) Blir volymen av en parallellepiped större eller mindre då vi tillämpar H på den? (0.2)

6. Antag att vi vrider rummets vektorer vinkeln θ kring linjen $(x, y, z) = t\,(402, -512, 267)$, i positiv led sett från spetsen av vektorn $(402, -512, 267)$, och låt A vara avbildningsmatrisen för denna avbildning.

a) Bestäm, för varje värde på θ, rangen av A. (0.2)

b) Bestäm, för varje värde på θ, determinanten av A. (0.2)

c) Bestäm, för varje värde på θ, alla (reella) egenvärden till A. (0.3)

d) Bestäm, för varje värde på θ, huruvida A är diagonaliserbar eller ej. (0.3)

Glöm inte motiveringar.

LYCKA TILL!