**LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA**
**MATEMATIK**

**LÖSNINGAR**
**FLERDIMENSIONELL ANALYS**
**2014-05-26 kl 08-13**

**1.** $\text{grad} f = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$.

**a)** $f'_v(1,1,1) = \text{grad} f(1,1,1) \cdot \frac{v}{|v|} = (1,2,3) \cdot \frac{(2,2,1)}{3} = \underline{\underline{3}}$.

**b)** $\text{Max} = |\text{grad} f(1,1,1)| = \underline{\underline{\sqrt{14}}}$ i riktningen $\underline{\underline{(1,2,3)}}$.

**2.** Endast möjligt att integrera först i $x$-led, dvs $D = \{(x,y)\colon 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le \sqrt{y})\}$ och

$$\begin{aligned}\iint_D x^3 e^{y^3}\,dxdy &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} x^3 e^{y^3}\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\frac{x^4}{4} e^{y^3}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{y}} dy = \frac{1}{4}\int_0^1 y^2 e^{y^3}\,dy = \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}e^{y^3}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{12}(e-1)}}.\end{aligned}$$

**3. a)** "Kompakt + kontinuerligt" $\Rightarrow$ min/max existerar!

Stationära punkter: $\text{grad}\, f = \big((2x + x^2 + y^2 - 3)e^x, 2ye^x\big) = (0,0) \Leftrightarrow y = 0$ och $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (1,0)$ (eller $(-3,0)$, men ej inom $D$). $f(1,0) = \boxed{-2e}$.

Randen: $(x,y) = (2\cos t, 2\sin t)$, $t \in [0, 2\pi] \Rightarrow g(t) = f(x(t), y(t)) = e^{2\cos t}$. Derivera $g'(t) = e^{2\cos t}(-2\sin t) = 0 \Leftrightarrow \sin t = 0 \Leftrightarrow t = 0$ eller $\pi \Rightarrow g(0) = \boxed{e^2}$ och $g(\pi) = \boxed{e^{-2}}$.

Jämförelse: min $= \underline{\underline{-2e}}$, max $= \underline{\underline{e^2}}$.

**b)** $f(x,y) \ge 0$ utanför $D \Rightarrow$ min $=$ min i 3a) $= \underline{\underline{-2e}}$.
$f(0,y) = y^2 - 3 \to +\infty$ då $y \to \infty \Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{max saknas}}}$.

**4. a)** Sätt $g(x,y,z) = z - x^2 - y^2$ och $h(x,y,z) = 4x - 2y + z$. Normalvektorn till $Y$ är $\text{grad}\, g = (-2x, -2y, 1)$ och till $\Pi$ är $\text{grad}\, h = (4, -2, 1)$. Enligt uppgiften $\text{grad}\, g \parallel \text{grad}\, h \Leftrightarrow x = -2$ och $y = 1 \Rightarrow z = (-2)^2 + 1^2 = 5$ och tangentplanets ekvation i punkten $\underline{\underline{(-2,1,5)}}$ är $\underline{\underline{4x - 2y + z + 5 = 0}}$.

**b)** Den "övre" ytan är $z = -4x + 2y + 4$, den "nedre" är $z = x^2 + y^2$, och randen till projektionen på $xy$-planet $E$ ges av $-4x + 2y + 4 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$, således

$$\begin{aligned}V &= \iint_E (-4x + 2y + 4 - x^2 - y^2)\,dxdy = \iint_E (9 - (x+2)^2 - (y-1)^2)\,dxdy = \\ &= \left[\begin{array}{rcl} x+2 &=& r\cos\phi, \\ y-1 &=& r\sin\phi, \end{array}\ E: \begin{array}{l} 0 \le r \le 3, \\ 0 \le \phi \le 2\pi \end{array}\right] = \int_0^3 (9 - r^2) r\,dr \int_0^{2\pi} d\phi = \\ &= \left[9\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^3 \cdot 2\pi = \left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4}\right) 2\pi = \underline{\underline{\frac{81\pi}{2}}}.\end{aligned}$$

**5.** **a)** Sätt $t = xy$ och beräkna $f'_x = g'(t)y$ och $f'_y = g'(t)x \Rightarrow$

$$xf'_x + yf'_y = xyg'(t) + xyg'(t) = 2tg'(t) = 1 \;\Rightarrow\; g'(t) = \frac{1}{2t} \;\Rightarrow\; g(t) = \frac{1}{2}\ln(t) + C \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x, y) = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\ln(xy) + C}}.$

**b)** Problemet är att bestämma största värdet till $f(x, y, z) = xyz$ med bivillkor $g(x, y, z) = x + y + z \le 158$ samt $x, y, z \ge 0$. Det är klart att $\le 158$ kan bytas med $= 158$ då man söker den största volymen.

"Kompakt + kontinuerlig" $\Rightarrow$ max existerar!

<u>Inre punkter</u> ($x > 0$, $y > 0$ och $z > 0$): $\operatorname{grad} f \parallel \operatorname{grad} g \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} yz &= \lambda, \\ xz &= \lambda, \\ xy &= \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xyz &= \lambda x, \\ xyz &= \lambda y, \\ xyz &= \lambda z \end{cases} \Rightarrow x = y = z \Rightarrow$$

$x = y = z = \frac{158}{3} \Rightarrow f = \boxed{\frac{158^3}{3^3}}.$

<u>Randen</u>: på tre delrandar, vilka utgörs av skärningar med koordinatplanen $x = 0$, $y = 0$, respektive, $z = 0$, är $f = \boxed{0}$.

Jämförelse: $\underline{\underline{\max = \frac{158^3}{3^3}}}.$

**6.** **a)** Vi har $Q'_x = P'_y \Rightarrow$ kurvintegralen är oberoende av vägen i den (enkelt sammanhängande) första kvadranten $\Rightarrow \int_{\gamma_2} = \int_{\gamma_1 + \sigma_1} = \int_{\gamma_1} + \int_{\sigma_1}$ där $\sigma_1$ är linjestycket längs $y = x$ mellan ändpunkterna för $\gamma_1$ och $\gamma_2$, men $\int_{\sigma_1} = 0$, ty $P = Q = 0$ på $y = x \Rightarrow \int_{\gamma_2} = \int_{\gamma_1}$.

**b)** Tag $\gamma$ som enhetscirkelbågen från $(1, 0)$ till $y = x$ och parametrisera den $(x, y) = (\cos t, \sin t)$, $t\colon 0 \to \frac{\pi}{4} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \int_\gamma P\,dx + Q\,dy &= \int_0^{\pi/4} \left( \frac{-\sin t(\cos t - \sin t)}{1^{3/2}}(-\sin t) + \frac{\cos t(\cos t - \sin t)}{1^{3/2}} \cos t \right) dt = \\ &= \int_0^{\pi/4} (\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{=1})(\cos t - \sin t)\,dt = [\sin t + \cos t]_0^{\pi/4} = \underline{\underline{\sqrt{2} - 1}}. \end{aligned}$$

<u>Alternativt</u>: använd potentialfunktionen $U(x, y) = \dfrac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.