

*HJÄLPMEDEL: Utdelad formelsamling samt miniräknare.  
Motivera lösningarna väl.*

1. Ge en rimlig fysikalisk tolkning av problemet

$$\begin{cases} u''_{tt} - u''_{xx} = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & x > 0, \\ u'_t(x, 0) = \delta(x - 1), & x > 0. \end{cases}$$

Lös systemet och rita lösningen för  $t = 1/2$ ,  $t = 1$  och  $t = 3$ .

2. En smalt vätskefyllt rör med längden  $L$  har slutna ändar. Vid tiden  $t = 0$  injiceras massan  $M$  av ett radioaktivt ämne i rörets mittpunkt. Ämnet diffunderar ut i röret och sönderfaller med en hastighet som är proportionell mot koncentrationen. Formulera en matematisk modell för koncentrationen av ämnet i röret samt lös problemet.

3. Visa att

$$U = \{p \mid p \text{ polynom med grad } p \leq 3 \text{ och } p(0) = 0\}$$

är ett linjärt underrum i  $L_2([-1, 1])$ . Bestäm en ortogonal bas i  $U$  och bestäm det polynom  $p$  i  $U$  som minimerar integralen

$$\int_{-1}^1 (1 - p(x))^2 dx.$$

4. Lös problemet

$$\begin{cases} u'_t - a u''_{xx} = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = T_0, & t > 0, \\ u(x, 0) = T_1, & x > 0. \end{cases}$$

Ge en rimlig fysikalisk tolkning av problemet.

5. Finn en lösning till det tvådimensionella potentialproblemet

$$\begin{cases} -\Delta u = \delta_{(0,1)}, & x \in \mathbb{R}, y > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

6. En sluten orgelpipa (cirkulär cylinder av plåt) har radie  $R$  och längd  $L$ . Bestäm egenfrekvenserna, först under antagandet att  $R$  är så litet jämfört med  $L$  att man kan räkna endimensionellt och sedan om  $R$  inte kan försummas. Skriv i bägge fallen upp alla egenfrekvenser lägre än 2000 Hz då  $L$  är 1 m,  $R$  är 5 cm och ljudhastigheten är 340 m/s. Jämför egenvärdena. Är approximationen i första fallet rimlig under dessa förhållanden?

**LYCKA TILL!**