LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
ENDIMENSIONELL ANALYS
DELKURS A1
2013-04-08 kl 8–13

LÖSNINGSFÖRSLAG

1. a) Då $\sin(\frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ och $\cos(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ger hjälpvinkelmetoden att ekvationen kan skrivas som $\sin(x + \frac{3\pi}{4}) = 1$. För lösningarna till vår ekvation gäller således $x + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, dvs. $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
<u>**Svar:**</u> $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

b) Sätt $t = 2^x$ och betrakta ekvationen $t = \sqrt{t+12}$. Om t är en lösning, då gäller även $t^2 = t + 12$, dvs. $t^2 - t - 12 = 0$. pq-formeln ger $t = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{(\frac{-1}{2})^2 - (-12)} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{7}{2}$. Potentiella lösningar är alltså $t_1 = 4$ och $t_2 = -3$. Då $2^x = t$ ser vi att t_2 ej är en lösning, ty $-3 < 0$. Däremot ger t_1 en x-lösning: $2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2$.
<u>**Svar:**</u> $x = 2$

c) $x^5 > x^3 \Leftrightarrow x^5 - x^3 > 0 \Leftrightarrow x^3(x^2-1) > 0 \Leftrightarrow x^3(x+1)(x-1) > 0$.
Vi gör en teckentabell:

x		-1		0		1	
x^3	-	-	-	0	+	+	+
$x+1$	-	0	+	+	+	+	+
$x-1$	-	-	-	-	-	0	+
$x^3(x-1)(x+1)$	-	0	+	0	-	0	+

<u>**Svar:**</u> $-1 < x < 0$ eller $x > 1$.

2. a) $\sum_{k=3}^{10} \frac{4}{9^k} = 4 \cdot \sum_{k=3}^{10} \frac{1}{9^k} = \frac{4}{9^3} \cdot \sum_{k=3}^{10} \frac{1}{9^{k-3}} = \frac{4}{9^3} \cdot \sum_{k=0}^{7} \frac{1}{9^k} = \frac{4}{9^3} \cdot \frac{1-(\frac{1}{9})^8}{1-\frac{1}{9}} = \frac{4}{9^3} \cdot \frac{1-(\frac{1}{9})^8}{\frac{8}{9}} = \frac{1}{2 \cdot 9^2} \cdot (1-(\frac{1}{9})^8)$.
<u>**Svar:**</u> $\frac{1}{2 \cdot 9^2} \cdot (1 - (\frac{1}{9})^8)$.

b) $(3x^2 - 1/x)^{13} = (3x^2 + (-1/x))^{13} = \sum_{k=0}^{13} \binom{13}{k} (3x^2)^k (-1/x)^{13-k} = \sum_{k=0}^{13} \binom{13}{k} 3^k x^{2k} (-1)^{13-k} x^{k-13} = \sum_{k=0}^{13} \binom{13}{k} 3^k x^{3k-13} (-1)^{13-k}$
x^5-termen ges av $3k - 13 = 5 \Leftrightarrow k = 6$, dvs.: $\binom{13}{6} 3^6 x^{3 \cdot 6 - 13} (-1)^{13-6} = -\frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 3^6 \cdot x^5 = -\frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 8}{2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 3^6 \cdot x^5 = -\frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 8}{4 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 3^6 \cdot x^5 = -13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 3^6 \cdot x^5 = -13 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 3^7 \cdot x^5 = -572 \cdot 3^7 \cdot x^5$
<u>**Svar:**</u> $-572 \cdot 3^7 \cdot x^5$

3. a) Se läroboken.

b) Enligt uppgiftstexten gäller $0 = p(1) = 1^4 + a \cdot 1^3 + 5 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + b$ som är ekvivalent med $0 = a + b + 1$, samt $0 = p(-2) = (-2)^4 + a \cdot (-2)^3 + 5 \cdot (-2)^2 - 5 \cdot (-2) + b$ som är ekvivalent med $0 = -8a + b + 46$. Vi löser ekvationssystemet och får $a = 5$ samt $b = -6$. Enligt faktorsatsen är $x - 1$ och $x + 2$ faktorer i $p(x)$. Polynomdivision av $p(x)$ med $(x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$ går jämnt ut och ger $x^2 + 4x + 3$, dvs. $p(x) = (x-1)(x+2)(x^2+4x+3)$. Vi ser att $x = -1$ är ett nollställe till $x^2 + 4x + 3$. Polynomdivision med $x + 1$ ger $x + 3$. Därmed har vi visat att $p(x) = (x-1)(x+2)(x+1)(x+3)$.
<u>**Svar:**</u> $p(x) = (x-1)(x+2)(x+1)(x+3)$

4. a) Se läroboken.

b) Funktionen f kan ej vara inverterbar, ty $f(-1) = f(1)$. Däremot är funktionen g inverterbar; vi ser att $g = h_1 \circ h_2$ är en sammansatt funktion, där $h_2(x) = x^2$ är en injektiv funktion som avbildar intervallet $[0, 1]$ på $[0, 1]$. Dessutom är $h_1(y) = \arcsin(y)$ injektiv och avbildar intervallet $[0, 1]$ på $[0, \frac{\pi}{2}]$. Varje $x \in D_g$ paras således ihop med ett unikt $s \in V_g = [0, \frac{\pi}{2}]$, som satisfierar: $s = \arcsin(x^2) \Leftrightarrow \sin(s) = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\sin(s)}$. Vi ser nu att $g^{-1}(s) = \sqrt{\sin(s)}$, där $D_{g^{-1}} = [0, \frac{\pi}{2}]$.
Svar: $g^{-1}(s) = \sqrt{\sin(s)}$, där $D_{g^{-1}} = [0, \frac{\pi}{2}]$.

5. a) En funktion kallas udda om $f(x) = -f(-x)$ gäller för alla $x \in D_f$. Om vi antar att f är udda och definierad på intervallet $[-1, 1]$, då gäller i synnerhet att $f(0) = -f(0) \Leftrightarrow 2 \cdot f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$.

b) Vi noterar att A är ekvivalent med $\sin(x) = \sqrt{\sin^2(x)}$, dvs. $\sin(x) = |\sin(x)|$, som är ekvivalent med att $\sin(x)$ är icke-negativ, dvs. $x \in [0, \pi]$. Vi konstaterar alltså att $A \Leftrightarrow B$. B (och A) medför ej C, ty $0 \in [0, \pi]$ men $\sin(0) \neq 1$. Däremot gäller $C \Rightarrow B$, ty $\sin(x) = 1$ ger $x = \frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$.
Svar: A är ekvivalent med B. C implicerar B (och A). B (eller A) implicerar ej C.

6. a) Låt x beteckna avståndet från femhörnings centrum till ett hörn. Betrakta en triangeln med sidorna x, x och 1. I denna triangeln är den trubbiga vinkeln lika med $2 \cdot \frac{360°}{5} = 144°$. Cosinussatsen ger $1^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cdot \cos(144°)$, dvs. $x^2 = \frac{1}{2 \cdot (1 - \cos(144°))} = \frac{1}{2 \cdot (1 - (1 - 2 \cdot \sin^2(72)))} = \frac{1}{4 \cdot \sin^2(72)}$. Femhörningens area ges, enligt areasatsen, av $T = 5 \cdot \frac{x^2 \cdot \sin(\frac{360°}{5})}{2} = 5 \cdot \frac{x^2 \cdot \sin(72°)}{2} = 5 \cdot \frac{\sin(72°)}{2} \cdot \frac{1}{4 \cdot \sin^2(72°)} = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{\sin(72°)}$.
Svar: Femhörnings area är $\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{\sin(72°)}$ areaenheter.

b) Observera att den inskrivna cirkelns centrum sammanfaller med femhörningens centrum. Cirkelns radie är $r = x \cdot \cos(36°)$. Svaret ges av $\frac{\pi \cdot r^2}{T} = \frac{\pi \cdot x^2 \cdot \cos^2(36°)}{5 \cdot \frac{x^2 \cdot \sin(72°)}{2}} = \frac{\pi \cdot \cos^2(36°)}{5 \cdot \frac{\sin(72°)}{2}} = \frac{\pi \cdot \cos^2(36°)}{5 \cdot \frac{\sin(2 \cdot 36°)}{2}} = \frac{\pi \cdot \cos^2(36°)}{5 \cdot \frac{2 \cdot \sin(36°) \cdot \cos(36°)}{2}} = \frac{\pi}{5} \cdot \frac{\cos(36°)}{\sin(36°)}$.
Svar: Andelen är $\frac{\pi}{5} \cdot \frac{\cos(36°)}{\sin(36°)}$.