

HJÄLPMEDEL: Utdelat formelblad för System och transformer.

Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar. Förenkla svaren så långt som möjligt.

1. Lös följande begynnelsevärdesproblem med hjälp av Laplacetransformationen:

$$y'(t) - 2y(t) = -te^t$$

$$y(0) = 1.$$

2. Bestäm en distribution $y(t)$ som uppfyller

$$y'''(t) = t^2 \cdot \delta(t - 1) + \sin\left(t\frac{\pi}{2}\right) \cdot \delta(t - 3)$$

med villkoren $y'(0) = 0$, $y(0) = 1$ och sådan att $y(t)$ är begränsad då $t \rightarrow -\infty$.

3. Sätt $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

a) Beräkna faltningen $f * f'(t)$. (0.5)

b) Beräkna integralen $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot f''(t) dt$. (0.5)

4. I ett linjärt, tidsinvariant och kausalt system ges sambandet mellan insignalen w och utsignalen y av ekvationen

$$y(t) + 3 \int_{-\infty}^{\infty} y(t - \tau) \sin(\tau) \theta(\tau) d\tau = w(t).$$

a) Bestäm systemets överföringsfunktion. (0.4)

b) Vilken utsignal ger insignalen $\cos t \cdot \theta(t)$ upphov till? (0.4)

c) Viken utsignal fås med insignalen $\cos(3t)$? (0.2)

5. Låt k vara en reell parameter i matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & k \end{bmatrix}.$$

a) Bestäm de värden på k för vilka systemet $\frac{dx}{dt} = Ax$, $t > 0$, av differentialekvationer är stabilt. (0.5)

b) För vilka av k -värdena i a) är dessutom det tidsdiskreta systemet $x(n+1) = Ax(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ av differensekvationer stabilt? (0.5)

6. a) För *svaret* på stegsvaret $S(\theta)$ till ett allmänt lineärt och tidsinvariant system S gäller formeln

$$S(S(\theta)) = S(\theta) * S(\theta)'.$$

Verifiera denna formel för det kausala system som uppfyller sambandet

$$y'' - y = w' - w$$

mellan insignal w och utsignal y , dvs. beräkna och jämför $S(\theta)$, $S(S(\theta))$ och $S(\theta) * S(\theta)'$. (0.6)

b) Betrakta rampen $r(t) = t \cdot \theta(t)$ och rampsvaret $S(r)$ till ett allmänt lineärt och tidsinvariant system S . Visa att *svaret* på rampsvaret uppfyller formeln

$$S(S(r)) = S(r)' * S(r)'.$$

Ledning: *Arbeta med impulssvaret h .* (0.4)

Lycka till!