

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Beräkna gränsvärdena:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) \quad (0.3)$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \cos x)}{x} \quad (0.3)$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \sin x - e^x}{2^x \ln x + e^{-x}} \quad (0.4)$$

2. a) Bestäm värdemängden V_f för funktionen $f(x) = (x - 1)^2 e^{3-x}$, $x \geq 0$. (0.5)

b) Ange antal lösningar till ekvationen $\ln(1 + x) = x + a$ för alla reella a . (0.5)

3. a) Vektorn $z = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ roteras vinkeln $\pi/3$ medurs runt origo i det komplexa planet.

Bestäm absolutbelopp och argument för resultatet. (0.5)

b) Ekvationen $z^5 + 2z^4 + 5z^3 + 8z^2 + 16z + 40 = 0$ har roten $z = -1 + 2i$. Lös ekvationen fullständigt. Svara på formen $a + bi$. (0.5)

4. a) Visa olikheten $\left| \frac{\sin x}{x} - 1 + \frac{x^2}{6} \right| \leq \frac{x^4}{120}$ om $x \neq 0$. (0.5)

b) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - e^x}{x - \ln(1+x)}$$

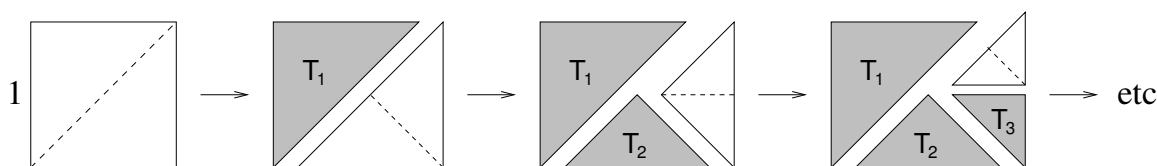
med hjälp av Maclaurinutveckling. (0.5)

5. a) I delkurs A2 har vi träffat på olika gränsvärdetyper, t.ex. " $\infty \cdot 0$ ", " $0/0$ " m.m. Formulera satsen som handlar om gränsvärdetyp " $B \cdot 0$ " (dvs "*begränsat gånger noll*"). (0.2)

b) För vilka $p > 0$ är funktionen $f(x) = x^p \sin(1/x)$ deriverbar i $x = 0$ om vi definierar $f(0) = 0$? (0.4)

c) För vilka $p > 0$ är funktionen i 5b) *kontinuerligt* deriverbar i $x = 0$, dvs $f'(x)$ existerar och är kontinuerlig i $x = 0$? (0.4)

6. Enhetskvadraten klipps itu diagonalt i två lika trianglar. Sedan klipps en av dessa i sin tur i två lika trianglar, och så vidare (se bilden). På det viset får man i slutändan "oändligt många" trianglar T_1, T_2, T_3, \dots . Bestäm den sammanlagda omkretsen av dessa.



LYCKA TILL!