LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
LINJÄR ALGEBRA
2013-10-21

1. Enligt huvudsatsen har systemet precis en lösning då

$$0 \neq \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & a & -4 \\ 1 & -3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & a-2 & 0 \\ 0 & -4 & a+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-2 & 0 \\ -4 & a+2 \end{vmatrix} = (a-2)(a+2).$$

Alltså har systemet precis en lösning då $a \neq \pm 2$. Då $a = -2$ blir systemet

$$\begin{cases} x + \ \ y - 2z = 1, \\ 2x - 2y - 4z = 3, \\ x - 3y - 2z = 2, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + \ \ y - 2z = 1, \\ \quad - 4y \qquad = 1, \\ \quad - 4y \qquad = 1, \end{cases}$$

där den sista ekvationen kan strykas och man ser att systemet har oändligt många lösningar. Då $a = 2$ blir systemet istället

$$\begin{cases} x + \ \ y - 2z = 1, \\ 2x + 2y - 4z = 3, \\ x - 3y + 2z = 2, \end{cases}$$

och om man jämför de två första ekvationerna så ser man att systemet saknar lösning.

2. Vektorn $\mathbf{v} = (3,3,5) - (2,1,2) = (1,2,3)$ är en riktningsvektor för linjen och vektorn $\mathbf{u} = (3,1,-3) - (2,1,2) = (1,0,-5)$ är en vektor mellan linjen och den givna punkten utanför linjen. Komposantuppdela $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\|} + \mathbf{u}_{\perp}$ i en vektor $\mathbf{u}_{\|}$ parallell med $\mathbf{v}$ och en vektor $\mathbf{u}_{\perp}$ vinkelrät mot $\mathbf{v}$. Projektionsformeln ger

$$\mathbf{u}_{\|} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} = \frac{-14}{14}(1,2,3) = -(1,2,3)$$

och därmed $\mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\|} = (1, 0-5) + (1,2,3) = (2,2,2)$. Avståndet mellan linjen och punkten är längden av $\mathbf{u}_{\perp}$, alltså $2\sqrt{3}$ längdenheter.

3. Att diagonalisera A innebär att man finner en inverterbar matris S och en diagonalmatris D sådana att $\mathsf{S}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{S} = \mathsf{D}$.

Matrisen $\mathsf{A}' = 2\mathsf{A}$ har det karakteristiska polynomet

$$\det(\lambda \mathsf{I} - \mathsf{A}') = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -5 \\ -5 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 5^2$$

som har nollställena 1 ± 5, dvs 6 och -4. Egenvektorerna löser de homogena ekvationssystemen $(\lambda \mathsf{I} - \mathsf{A}')\mathsf{X} = \mathbf{0}$. För egenvärdet $\lambda = 6$ får man egenvektorerna $s(1,1)$, $s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$ och för egenvärdet $\lambda = -4$ får man egenvektorerna $t(1,-1)$, $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$. Eftersom egenvärdena för A är hälften av de till A' men egenvektorer är de samma ger detta till exempel diagonalmatrisen $\mathsf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ och $\mathsf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (S uppenbart inverterbar).

4. Ekvationen kan skrivas

$$(\mathsf{A}-2\mathsf{I})\mathsf{X}=\mathsf{A}^T,$$

med entydig lösning

$$\mathsf{X}=(\mathsf{A}-2\mathsf{I})^{-1}\mathsf{A}^T$$

förutsatt att inversen existerar. Beräkning av inversen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

går bra varför den entydiga lösningen till matrisekvationen är

$$\mathsf{X}=(\mathsf{A}-2\mathsf{I})^{-1}\mathsf{A}^T=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Välj först $\mathbf{e}_1'$ parallell med $\mathbf{u}$ och med längd 1, alltså $\mathbf{e}_1'=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ (eller omvänt tecken). Välj sen $\mathbf{e}_3'$ vinkelrät mot $\mathbf{e}_1'$ och $\mathbf{v}$, det vill säga parallell med $\mathbf{e}_1'\times\mathbf{v}=\frac{1}{\sqrt{3}}(3,-3,0)$. Efter normering blir då $\mathbf{e}_3'=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$ (även omvänt tecken möjligt). Slutligen sätt $\mathbf{e}_2'=\mathbf{e}_3'\times\mathbf{e}_1'=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)$. Eftersom $\mathbf{e}_1'=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{u}$ får $\mathbf{u}$ koordinaterna $(\sqrt{3},0,0)$ i det nya koordinatsystemet. Koordinaterna för $\mathbf{v}$ bestäms lättast av skalärprodukterna mellan $\mathbf{v}$ och de nya basvektorerna. Detta ger att $\mathbf{v}$ får koordinaterna $(4\sqrt{3},\sqrt{6},0)$ i det nya koordinatsystemet.

6. Matrisen för rotation $\pi/2$ är $\mathsf{A}=\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. En normalvektor för linjen är $\mathsf{N}=\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ och då ges avbildningsmatrisen av

$$\mathsf{B}=\mathsf{I}-2\frac{\mathsf{N}\mathsf{N}^T}{\mathsf{N}^T\mathsf{N}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\frac{2}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Matrisen för den sammansatta avbildningen blir

$$\mathsf{BA}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Denna matris har egenvärdena 1 och -1 med motsvarande egenvektor $s(1,3)$ respektive $t(3,-1)$ för $s,t\neq 0$. Detta svarar mot en ortogonal spegling i linjen genom origo med normalvektor $(3,-1)$, det vill säga i linjen $3x-y=0$.