LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Funktionsteori
2013–03–12 Lösningar

1. Den karakteristiska ekvationen är $r^2 - 5r + 6 = 0$ med lösningarna $r = 2$ och $r = 3$. Lösningen till den homogena ekvationen blir alltså

$$x_n^h = A2^n + B3^n.$$

Nästa steg är att ansätta en partikulärlösning. Den naturliga ansatsen skulle vara $C3^n + D$, men eftersom 3^n ingår i lösningen till den homogena ekvationen, så måste vi ta till

$$x_n^p = Cn3^n + D.$$

Insättning i den givna ekvationen ger

$$C(n+2)3^{n+2} + D - 5(C(n+1)3^{n+1} + D) + 6(Cn3^n + D) = 3^n + 1,$$

dvs $3C3^n + 2D = 3^n + 1$ vilket ger $3C = 1$ och $2D = 1$. Partikulärlösningen blir alltså

$$x_n^p = \frac{n}{3}\,3^n + \frac{1}{2},$$

och den allmänna lösningen

$$x_n = x_n^h + x_n^p = A2^n + B3^n + \frac{n}{3}\,3^n + \frac{1}{2}.$$

Insättning av $a_0 = a_1 = 0$ ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} A + B + \frac{1}{2} = 0 \\ 2A + 3B + \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = 0 \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

så den sökta lösningen är

$$x_n = -\frac{1}{2}\,3^n + \frac{n}{3}\,3^n + \frac{1}{2}.$$

2. a) $(-1)^3 = (-1)(-1)(-1) = -1$ och det är det enda möjliga värdet. (Om man absolut vill använda $(-1)^3 = e^{3\log(-1)}$ så blir det samma sak.) För $(-1)^{1/3}$ måste vi gå omvägen via exp och log. Varje värde för $\log(-1)$ ger ett värde för $(-1)^{1/3}$:

$$(-1)^{1/3} = e^{\frac{1}{3}\log(-1)} = e^{\frac{1}{3}(i\pi + 2\pi ik)} = e^{i\pi/3} \cdot e^{2\pi ik/3}$$

där k är ett godtyckligt heltal. För $k = 0, 1, 2$ får vi

$$(-1)^{1/3} = e^{i\pi/3} \cdot e^{2\pi i0/3} = e^{i\pi/3} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$(-1)^{1/3} = e^{i\pi/3} \cdot e^{2\pi i1/3} = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$
$$(-1)^{1/3} = e^{i\pi/3} \cdot e^{2\pi i2/3} = e^{5i\pi/3} = e^{-i\pi/3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

och övriga värden på k ger bara upprepningar av dessa. Observera att de tre värdena är lösningarna till ekvationen $z^3 = -1$.

b) Det enklaste är att konstatera att $F(z) = \frac{1}{2}e^{2z}$ är en primitiv funktion (på hela $\mathbb{C}$) till $f(z) = e^{2z}$. Integralen blir alltså

$$\int_\gamma e^{2z}\,dz = \left[\frac{1}{2}e^{2z}\right]_1^i = \frac{1}{2}(e^{2i} - e^2) = \frac{1}{2}(\cos 2 + i\sin 2 - e^2).$$

Det går också bra att parametrisera γ, men det blir lite krångligare.

3. a) Den första serien är divergent, eftersom termerna inte går mot 0. (De är till och med obegränsade.)

Den andra serien är enklast att hantera med kvottestet. Termerna är positiva, så vi behöver inga absolutbelopp:

$$\begin{aligned}\kappa &= \lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{(2(k+1))!}{5^{k+1}((k+1)!)^2}}{\dfrac{(2k)!}{5^k(k!)^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+2)!}{5\cdot 5^k((k+1)!)^2} \cdot \frac{5^k(k!)^2}{(2k)!} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+2)(2k+1)(2k)!}{5\cdot 5^k(k+1)^2(k!)^2} \cdot \frac{5^k(k!)^2}{(2k)!} = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+2)(2k+1)}{5(k+1)^2} = \frac{4}{5} < 1\end{aligned}$$

så serien är konvergent.

I den tredje serien är $a_k = \frac{\sqrt{k}}{k+5} \approx \frac{1}{\sqrt{k}}$ om k är stort. Sätt $b_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$. Vi har att

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{k}}{k+5}}{\dfrac{1}{\sqrt{k}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+5} = 1.$$

Eftersom $\sum b_k$ är divergent (p-serie med $p = 1/2$), så ger jämförelsetestet på gränsvärdesform att serien $\sum a_k$ också divergerar.

b) Serien är positiv och $a_k = \dfrac{1}{k^4+k} \leq \dfrac{1}{k^4}$. Jämförelse med den konvergenta serien $\sum \dfrac{1}{k^4}$ visar att serien är konvergent.

Ovanstående uppskattning av a_k och beviset av integraltestet (sätt $f(x) = 1/x^4$, vilket är en kontinuerlig, positiv, avtagande funktion) ger att

$$r_{10} = \sum_{k=11}^{\infty} \frac{1}{k^4+k} \leq \sum_{k=11}^{\infty} \frac{1}{k^4} \leq \int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x^4} = \lim_{X\to\infty} \left[\frac{-1}{3x^3}\right]_{10}^{X} = \frac{1}{3\cdot 10^3} = \frac{1}{3000} < 0{,}00034.$$

(Det är *inte* värt arbetet att beräkna integralen av $1/(x^4+x)$; om man ändå går det, så leder det till uppskattningen $r_{10} < 0{,}0003332$ i stället för $r_{10} < 0{,}0003334$.)

4. a) Med $f = u + iv$ har vi alltså $u(x,y) = x^2 + y^2$, men $\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = 4$, vilket visar att u inte är harmonisk. Det kan alltså inte finnas någon sådan analytisk funktion. (Det går bra att börja räkna med Cauchy–Riemanns ekvationer också; man hamnar ganska snabbt i en motsägelse.)

b) Sätt $h(z) = z\sin z - \cos z$. Då är $h = g$ på hela reella axeln, och identitetssatsen visar att $h = g$ överallt. Det finns alltså bara *en* sådan funktion, nämligen $g(z) = z\sin z - \cos z$.

5. a) Vi använder Weierstrass M-test: Låt $u_k(t) = e^{ikt}/2^k$. Då är

$$\|u_k\| = \sup_t \left|\frac{e^{ikt}}{2^k}\right| = \frac{1}{2^k},$$

och serien $\sum_{k=0}^{\infty} \|u_k\|$ konvergerar allstså. (Geometrisk serie med $r = 1/2$). Weierstrass garanterar att serien konvergerar likformigt.

b) Vi använder Weierstrass på den termvis deriverade serien:

$$\|u_k'\| = \sup_t \left|\frac{ike^{ikt}}{2^k}\right| = \frac{k}{2^k},$$

och serien $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{k}{2^k}$ konvergerar (t.ex med hjälp av kvot- eller rottestet).

Eftersom $\sum_{k=0}^{\infty} u_k'$ konvergerar likformigt så rättfärdigar detta termvis derivering. Med andra ord är f' deriverbar och Fourierserien för f' blir

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{ike^{ikt}}{2^k}.$$

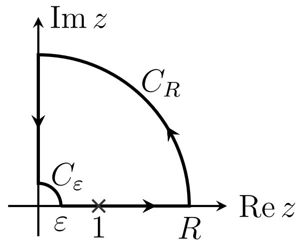
c) Vi observerar enklast att

$$\int_0^{2\pi} f'(t)\cos 2t\,dt = \pi a_2(f') = \pi(c_2(f') + c_{-2}(f')) = \pi\left(\frac{2i}{2^2} + 0\right) = \frac{i\pi}{2}$$

ur uppgift b).

6. a) Eftersom $z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$ har ett enkelt nollställe i $z = 1$, och $\operatorname{Log} 1 = 0$, så är singulariteten *hävbar*.

b) Om man vill vara riktigt noggrann, så tar man bort en liten bit kring origo också. (Eftersom $\operatorname{Log} z$ är obegränsad nära $z = 0$.)
"Singulariteten" i $z = 1$ är däremot inget problem, eftersom vi lika gärna kan tänka oss att f är analytisk i $z = 1$.



Låt Γ vara kurvan som i bilden. Eftersom f är analytisk på och inuti Γ så behöver vi inte ens använda residysatsen. Cauchys integralsats ger

$$\int_\varepsilon^R \frac{\ln x}{x^2 - 1}\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz + \int_R^\varepsilon \frac{\operatorname{Log}(it)}{(it)^2 - 1}\,i\,dt + \int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz = 0.$$

(Den tredje integralen får vi genom att parametrisera sträckan längs imaginära axeln: $z = it$, så $dz = i\,dt$.)

ML-olikheten ger

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \le \frac{\pi R}{2} \cdot \max_{z\in C_R} \left|\frac{\operatorname{Log} z}{z^2 - 1}\right| \le \frac{\pi R}{2} \cdot \frac{C}{R^2} \cdot (\ln R + \pi/2) \to 0$$

då $R \to \infty$. På mostvarande sätt är

$$\left|\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz\right| \le \frac{\pi\varepsilon}{2} \cdot \max_{z\in C_\varepsilon} \left|\frac{\operatorname{Log} z}{z^2 - 1}\right| \le \frac{\pi\varepsilon}{2} \cdot 2 \cdot (|\ln\varepsilon| + \pi/2) \to 0$$

då $\varepsilon \to 0$. Slutligen är

$$\int_R^{\varepsilon} \frac{\mathrm{Log}(it)}{(it)^2 - 1}\, i\, dt = i \int_{\varepsilon}^R \frac{\ln t + \frac{i\pi}{2}}{t^2+1}\, dt = i \int_{\varepsilon}^R \frac{\ln t}{t^2+1}\, dt - \frac{\pi}{2} \int_{\varepsilon}^R \frac{1}{t^2+1}\, dt.$$

Sätt ihop alla beräkningar och låt $\varepsilon \to 0$ och $R \to \infty$. Kvar blir:

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}\, dx + i \int_0^{\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\, dt - \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{t^2+1}\, dt = 0,$$

och genom att titta på realdelen för sig:

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{t^2+1}\, dt = \frac{\pi^2}{4},$$

där den sista integralen beräknas reellt:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{t^2+1}\, dt = \lim_{T\to\infty} [\arctan t]_0^T = \frac{\pi}{2}$$

(eller, om man absolut vill, via en ny resdyberäkning).

Anledningen att den naturliga grenen och den ”vanliga hålkakan” inte fungerar så bra är att när man kommer tillbaka på ”undersidan” av den reella axeln, så är

$$\frac{\mathrm{Log}_n z}{z^2-1} = \frac{\ln x + 2\pi i}{x^2-1}$$

och denna funktion har en riktig singularitet i $x = 1$. Det kommer därför inte gå att integrera längs undersidan av den reella axeln, åtminstone inte på vanligt sätt.