LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Tredimensionell vektoranalys
2013–04–22 kl 8–10

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Låt K vara området som definieras av

$$K: \ 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2.$$

a) Beräkna arean av randen ∂K. (0.4)

b) Antag att $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ är ett C^1-vektorfält definierat i hela $\mathbb{R}^3$.
Formulera divergenssatsen för $\boldsymbol{u}$ och området K. (0.2)

c) Beräkna flödet av vektorfältet

$$\boldsymbol{u} = (x^3 + z, \ x^2 z, \ y + x^2 z)$$

ut ur området K. (0.4)

2. Betrakta vektorfältet

$$\boldsymbol{F}_a(x,y,z) = \big(z - ae^{xy}, \ a\sin z, \ ay(z + \cos z) + x\big)$$

där a är en konstant.

a) Bestäm $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}_a$ för varje $a \in \mathbb{R}$ och $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Visa speciellt att det finns en funktion $g(x,y)$ så att

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F}_a = a\big(z, \ 0, \ g(x,y)\big). \qquad (0.3)$$

b) Sätt $a = 0$ och beräkna $\int_\gamma \boldsymbol{F}_a \cdot d\boldsymbol{r}$ längs kurvan γ given av

$$\boldsymbol{r}(t) = \big(\cos t, \ \sin t, \ t^2(2\pi - t)\big), \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \qquad (0.3)$$

c) Låt σ vara cirkeln

$$y^2 + (z-1)^2 = 1, \quad x = 1$$

genomlöpt ett varv i positiv led sedd från punkten $(0,0,1)$.
Beräkna $\int_\sigma \boldsymbol{F}_a \cdot d\boldsymbol{r}$ för alla $a \in \mathbb{R}$. (0.4)

LYCKA TILL !