

**HJÄLPMEDEL:** Medföljande formelblad för System och transformer

Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar. Skriv fullständiga meningar och förklara dina beteckningar. Alla svar ska förenklas så långt som möjligt.

1. Lös ekvationen

$$y'' + y' + y = e^{-t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad t > 0,$$

med hjälp av ensidig Laplacetransform.

2. Betrakta matriserna

$$\begin{pmatrix} e^{-4t}(1+t) & te^{-4t} \\ -te^{-4t} & e^{-4t}(1-t) \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{pmatrix} e^{-4t}(2-t) & te^{-4t} \\ -e^{-4t} & e^{-4t}(3+t) \end{pmatrix}.$$

a) Vilken av matriserna ovan kan vara  $e^{tA}$  för någon matris  $A$ ? Bestäm matrisen  $A$  i det fallet. Är matrisen  $A$  diagonaliserbar? Motivera svaren ordentligt. (0.3)

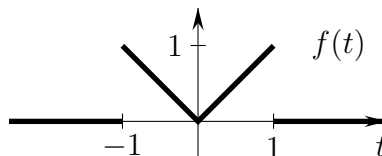
b) För matrisen  $A$  från a), bestäm en partikulärlösning till ekvationssystemet  $\dot{x} = Ax + 17 \sin t \, f$ , då  $f = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . (0.3)

c) Lös ekvationssystemet i b) med begynnelsevillkor  $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . (0.4)

3. a) Beskriv följande funktion med hjälp av stegfunktioner. (0.3)

b) Beräkna distributionsderivatan  $f'$  samt translationen  $T_1 f$ . (0.4)

c) Beräkna  $f' * (\theta(t) - \theta(t-1))$ . (0.3)



4. För ett linjärt, tidsinvariant och kausalt system uppfyller utsignalen  $y$ , som svarar mot insignalen  $w$ , ekvationen

$$y'' + 2y' + y = w'(t) + w(t).$$

a) Bestäm systemets överföringsfunktion. (0.2)

b) Bestäm systemets impulssvar. Är systemet insignal-utsignalstabil? (0.3)

c) Bestäm systemets svar då insignalen är  $w(t) = \cos t$ . (0.2)

d) Bestäm systemets svar då insignalen är  $w(t) = \theta(t) \cos t$ . (0.3)

5. Byn Jobbmokk i norra Norrland har 2000 arbetsmogna invånare. Byn kan bara erbjuda ettåriga anställningar. I början på vår studie har alla dessa personer jobb. Andelen arbetare som behåller sitt jobb även nästa år är  $1 - a$  där  $0 < a < 1$  medan andelen som blir arbetslösa är  $a$ . Andelen arbetslösa som får jobb nästa år är  $b$ , där  $0 < b < 1$  och andelen som förblir arbetslösa ett år till är  $1 - b$ .

a) Sätt upp en **tidsdiskret** matrisekvation som beskriver antalet arbetande och arbetslösa i byn år efter år. (0.2)

b) Beräkna egenvärden och egenvektorer till systemmatrisen ovan. Vilket är det största egenvärdet i absolutbelopp? Motivera noga. (0.3)

c) Beräkna den fullständiga lösningen till ekvationen i a). (0.3)

d) Är lösningen begränsad? Hur fördelar sig arbetande och arbetslösa i byn efter mycket lång tid? (0.2)

6. a) Beräkna Fouriertransformen av  $f(t) = (\theta(t + 1) - \theta(t - 1)) \cos \frac{\pi t}{2}$ . (0.4)

b) Använd resultaten ovan för att beräkna  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi \sin \omega \cos \omega}{\omega(\frac{\pi^2}{4} - \omega^2)} d\omega$ . (0.6)

*Lycka till!*  
*God Fortsättning!*