

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar.  
Lämna tydliga svar om så är möjligt.

1. a) Derivera funktionerna  $\frac{e^x}{e^{2x} + 1}$  och  $\arctan(e^x)$ . (0.3)/styck
- b) Ett badkar töms på vatten så att det vid tiden  $t$  minuter efter start av tömningen återstår  $V(t) = 120 - 6t - 6t^2$  liter i karet. Med vilken hastighet minskar vattenvolymen i badkaret alldeles innan det är tomt? (0.4)
2. a) Ekvationen
- $$z^4 + 2z^3 + z^2 - 6z + 14 = 0$$
- har roten  $z = 1 - i$ . Lös ekvationen fullständigt. (0.5)
- b)  $z = \frac{\sqrt{3} + i}{1 - i}$  roteras vinkeln  $\pi/6$  moturs runt origo i det komplexa talplanet. Bestäm absolutbelopp och argument för resultatet. (0.5)
3. a) Beräkna  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2(1+x)}$ . (0.3)
- b) Beräkna  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})$ . (0.4)
- c) Beräkna  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n}{1} \binom{n}{2}}{\binom{n}{3}}$ . (0.3)
4. a) Visa att Maclaurinpolynomet  $p_3(x)$  av ordning 3 till funktionen  $f(x) = \sqrt{1 + \sin x}$  är  $p_3(x) = 1 + x/2 - x^2/8 - x^3/48$ . (0.5)
- b) Bestäm alla lokala extrempunkter till  $p_3(x)$  och ange deras typ. (0.3)
- c) Visa att det största nollstället till  $p_3(x)$  ligger i intervallet  $[3, 4]$ . (0.2)
5. a) Definiera vad som menas med att  $f$  är kontinuerlig i punkten  $a$  och vad som menas med att  $f$  är deriverbar i punkten  $a$ . (0.2)
- b) Vilket av påståendena "kontinuitet medför deriverbarhet" och "deriverbarhet medför kontinuitet" är korrekt? Bevisa det korrekta påståendet. (0.3)
- c) Beräkna  $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^2(1+x^2)^{-k}$  för alla  $x$  och avgör om vi får en kontinuerlig funktion av  $x$ . (0.4)
- d) Om  $f(x)$  inte är kontinuerlig, kan vi då ändra dess värde i en enda punkt och få den kontinuerlig? Vilken punkt och vilket värde i så fall? (0.1)

Var God Vänd!

6. a) Om Paula, som är jordbrukare, använder  $x$  kg gödsel per  $100 \text{ m}^2$  får hon en avkastning som är  $128x/(1+x)$  kg per  $100 \text{ m}^2$ . Gödslet kostar 5 kr/kg och grödan hon odlar säljs för ett kilopris på 10 kr. Hur mycket ska hon gödsla per  $100 \text{ m}^2$  för att få en så stor ekonomisk vinst som möjligt? (0.5)
- b) En cirkulär kon med höjd  $H$  mm och basradie  $R$  mm och spetsen rakt nedåt samlar regnvatten. Vid en regnperiod föll  $a$  mm regn per timme mot konens toppyta. När regnmätaren var halvfull, hur snabbt steg vattenytan (alltså avståndet mellan vattenytan och spetsen)? (0.5)