LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Funktionsteori
2015–03–21 kl 8–13

Hjälpmedel: Bifogat formelblad.
Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Skriv fullständiga meningar och förklara dina beteckningar. Ge tydliga och enkla svar där så är möjligt.

1. Lös rekursionsekvationen $x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 4$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.

2. Endast kortfattade lösningar krävs på denna uppgift. (0.2/st)

a) Beräkna $\log(-1 + i)$.

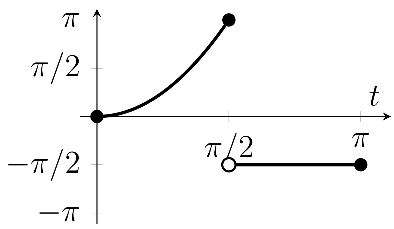
b) Finns det någon holomorf funktion på $\mathbb{C}$, vars realdel är $u(x, y) = x^3 - y^3$?

c) Ge ett exempel på en *betingat* konvergent serie.

d) Ge ett exempel på en potensserie, centrerad i $z = i$ med konvergensradie $R = 1$.

e) Ge ett exempel på en funktion f med en dubbelpol i $z = 0$ sådan att $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 1$.

3. Funktionen f är 2π-periodisk och jämn. I figuren ser du grafen för f på intervallet $0 \le t \le \pi$.



a) Låt $S(t)$ beteckna summan av f:s trigonometriska Fourierserie. Beräkna $S(t)$ i punkterna $t = \pi/2$, $t = -\pi/2$ och $t = 3\pi$. (0.3)

b) Rita tydliga bilder av graferna till $f(t)$ och $S(t)$ (två bilder!) på hela intervallet $-\pi \le t \le 3\pi$. (0.3)

c) En av nedanstående serier är den trigonometriska Fourierserien till f. Vilken? Motivera ordentligt. (0.4)

$$A: \quad \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3k^2\pi^2 - 16)\sin\frac{k\pi}{2} + 8k\pi\cos\frac{k\pi}{2}}{\pi^2 k^3} \cos kt$$

$$B: \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3k\pi^2 - 16)\sin\frac{k\pi}{2} + 8\pi\cos\frac{k\pi}{2}}{\pi^2 k^3} \sin kt$$

$$C: \quad -\frac{\pi}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3k^2\pi^2 - 16)\sin\frac{k\pi}{2} + 8k\pi\cos\frac{k\pi}{2}}{\pi^2 k^3} \cos kt$$

$$D: \quad \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3k\pi^2 - 16)\sin\frac{k\pi}{2} + 8\pi\cos\frac{k\pi}{2}}{\pi^2 k^3} \cos kt$$

$$E: \quad -\frac{\pi}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3k\pi^2 - 16)\sin\frac{k\pi}{2} + 8\pi\cos\frac{k\pi}{2}}{\pi^2 k^3} \cos kt$$

4. a) Avgör om följande serier konvergerar eller divergerar: (0.2+0.2+0.2)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^5}{k!} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k^2-5} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/k}}.$$

b) För vilka reella värden på α konvergerar serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)^{\alpha}$? (0.4)

5. Besselfunktionen J_n (där n är ett positivt heltal) definieras via potensserieutvecklingen

$$J_n(z) = \frac{z^n}{2^n n!} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

där $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ och $a_k = \frac{-a_{k-2}}{k(2n+k)}$ för $k \geq 2$.

a) Bestäm konvergensradien för serien som definierar J_n. (0.3)

b) Uppskatta resttermen om $J_n(1)$ approximeras med (0.3)

$$J_n(1) \approx \frac{1}{2^n n!}(a_0 + a_1 + a_2).$$

c) Ange Maclaurinserien för J_n' och beräkna integralen (0.4)

$$\int_{|z|=1} \frac{J_n'(z)}{z^2}\, dz.$$

6. a) Låt $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{e^z + e^{-z}}$. Visa att $f(z + i\pi) = -e^{-\pi} f(z)$ för alla z. (0.2)

b) Beräkna integralen (0.8)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}}\, dx.$$

Ledning: integrera f från a-uppgiften längs randen av en rektangel med hörn i $\pm R$ och $\pm R + i\pi$.