LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Funktionsteori
2016–01–07 Svar och anvisningar

1. $x_n = (-5)^n + n^2 + n + 5$.

2. a) Nej (eftersom u inte är harmonisk).

b) Konvergensradien blir $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

c) Dubbelpol. (Någon form av motivering krävs!)

d) $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$.

e) 0 (enl. Cauchys integralsats: integranden är holomorf på och inuti kurvan).

3. a) Se kursboken.

b) $g(y) = Ay + B$, där $A, B \in \mathbb{R}$. Ur det följer att $f(z) = -\frac{iA}{2}z^2 + Bz + C$, där även $C \in \mathbb{R}$.

4. a) Första och tredje serierna är divergenta. Den andra är konvergent. (Observera att termerna i den andra serien är komplexa: man kan inte använda jämförelsetest utan absolutbelopp.)

b) Taylorserien är centrerad i $z = -1$. Konvergensradien blir därmed $R = 3$ (avståndet mellan -1 och närmaste singularitet), och $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = f(0) = -\frac{1}{2}$

5. Funktionen f är 2π-periodisk och uppfyller att

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 < t < \pi \\ 0, & \pi < t < 2\pi. \end{cases}$$

a) Efter en del beräkningar (utnyttja gärna Eulers formler) får man:

$$c_0 = \frac{1}{\pi}, \qquad a_k = \frac{1 + (-1)^k}{\pi(1 - k^2)} \text{ (med } a_1 = 0), \qquad b_k = \begin{cases} 0, & k \neq 1 \\ \frac{1}{2}, & k = 1 \end{cases}$$

Observera att fallet $k = 1$ måste behandlas separat.

b) Resultatet i a) tillsammans med Parseval och lite algebra ger $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$.

c) $\mathcal{FS}_f^{\text{trig}}$ konvergerar likformigt på hela $\mathbb{R}$. (Utnyttja antingen resultatet i a) tillsammans med Weierstrass test, eller hänvisa till teorin: f är kontinuerlig och styckvis C^1, så sats 7.25 garanterar likformig konvergens.)

6. a)

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \begin{cases} 0, & \text{om } \gamma \text{ inte omsluter } 0 \\ 2\pi i, & \text{om } \gamma \text{ omsluter } 0. \end{cases}$$

b) En komplex, kontinuerlig funktion f har en primitiv funktion om och endast om $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ för alla enkla, slutna kurvor (sats 3.19). Residykalkyl (enklast med hjälp av residyregel 2) visar att detta villkor är uppfyllt för g_n om och endast om n är jämnt.