LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Linjär algebra
2014–08–28 kl 14–19

INGA HJÄLPMEDEL. Förklara dina beteckningar och motivera lösningarna väl. Om inget annat anges är baser ortonormerade och positivt orienterande.

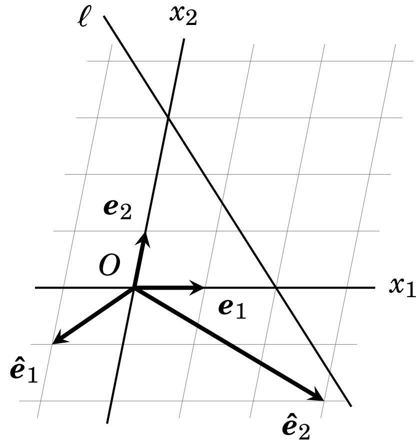
1. Beräkna den ortogonala projektionen av punkten $(5,-2,1)$ på planet med parameterframställningen $(x,y,z) = s(1,-1,2)+t(1,0,1)$, $s,t \in \mathbf{R}$. Bestäm dessutom avståndet mellan punkten och planet.

2. Bestäm rang och nolldimension för matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

och ange en bas för matrisens nollrum samt en bas för dess kolonnrum.

3. Figuren till höger visar en rät linje ℓ, ett origo O och två baser i planet $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ och $\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2$, samt rutnätet hörande till koordinatsystemet $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$.
Ange en ekvation på affin form för ℓ i koordinatsystemet $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$. Bestäm koordinatbytet mellan de två baser och härled en ekvation på affin form för ℓ i det nya koordinatsystemet $O\hat{\boldsymbol{e}}_1\hat{\boldsymbol{e}}_2$.



4. a) Bestäm vinkeln mellan vektorerna $(3,2,6)$ och $(3,-5,-8)$. (0.5)

b) Låt $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ vara vektorer i rummet som uppfyller villkoren $|\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{w}| = 1$ och $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} = \mathbf{0}$. Bestäm vinklarna mellan varje par av dessa vektorer. (0.5)

5. a) Formulera definitionen för att en kvadratisk matris $\boldsymbol{A}$ är diagonaliserbar och härled med hjälp av denna en formel för $\boldsymbol{A}^n$, där n är ett positivt heltal. (0.4)

b) Diagonalisera matrisen

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 2 \end{bmatrix},$$

och evaluera gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{A}^n$. (0.6)

V.G. VÄND

6. En vridning av rummets vektorer är en linjär avbildning som kännetecknas av att dess avbildningsmatris är en ortogonal matris med determinant ett.

Låt F och G beteckna vridningar av rummets vektorer med vinkeln 90° kring x-axeln respektive y-axeln, moturs sett från axlernas spetsar. Visa att den sammansatta avbildningen $F \circ G$ också är en vridning och bestäm dess vridningsaxel samt motsvarande vridningsvinkel (då vridningen sker moturs sett från spetsen av den valda riktningsvektorn för vridningsaxeln).

LYCKA TILL!