LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

SVAR
KONTINUERLIGA SYSTEM
2015-08-26

1. Efter jämn utvidgning och faltning med Greenfunktionen för värmeledning på reella axeln blir svaret

$$1-\frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x+1}{\sqrt{4at}}\right)+\frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x-1}{\sqrt{4at}}\right)\qquad \text{för } x>0,\ t>0\,.$$

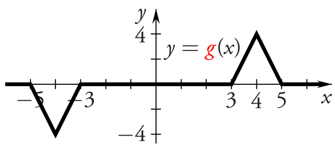
2. Modell

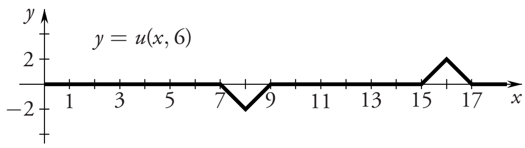
$$\begin{cases} u''_{tt}-4u''_{xx}=0, & x>0,\ t>0,\\ u(0,t)=0, & t>0\\ u(x,0)=g(x), & x>0\\ u'_t(x,0)=0, & x>0. \end{cases}$$

Om ${\color{red}g}$ är den udda utvidgningarna av g med avseende på x till hela $\mathbb{R}$ så ger d'Alemberts formel lösningen

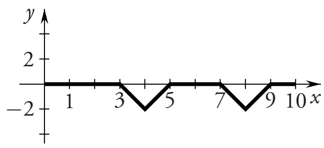
$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left({\color{red}g}(x+2t)+{\color{red}g}(x-2t)\right),\quad x>0,\ t>0$$

med följande utseende:





För strängen som också är fast inspänd i $x=10$ blir figuren istället:



3. Lämplig skalärprodukt är $(u|v)=\int_1^2 \overline{u(x)}v(x)\,x\,dx$. Symmetri och positivt definithet följer antingen av direkt uträkning eller genom att konstatera att $\mathcal{A}$ är en Sturm-Liouville operator med $w=q=x$ och $p=1/x$. Funktionen $u(x)=\sin(\pi(x^2-1))$ tillhör $D_{\mathcal{A}}$ och uppfyller $\mathcal{A}\,u=(1+4\pi^2)u$ varför den är en egenfunktion med egenvärdet $1+4\pi^2$.

4. Modellen är

$$\begin{cases} u'_t-u''_{xx}=1, & 0<x<2, t>0,\\ u(0,t)=u(2,t)=20, & t>0,\\ u(x,0)=20, & 0<x<2. \end{cases}$$

Homogenisering och sin-utveckling ger lösningen

$$u(x,t)=20+8\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k^3\pi^3}(1-e^{-k^2\pi^2t/4})\sin(k\pi x/2)$$

alternativt

$$u(x,t)=20+\frac{1}{2}x(2-x)-8\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k^3\pi^3}\,e^{-k^2\pi^2t/4}\sin(k\pi x/2).$$

5. Greenfunktionen är

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2+(z-1)^2}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(x-2)^2+y^2+(z-2)^2}}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2+(z+1)^2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(x-2)^2+y^2+(z+2)^2}}\right).$$

6. Lägg origo i membranets centrum. Av symmetriskäl är membranets utböjning u vinkeloberoende. Alltså $u = u(r,t)$ där $r = \sqrt{x^2+y^2}$ och t tiden. En modell är

$$\begin{cases} u''_{tt} - c^2\,\Delta\, u = 0, & r<1, t>0 \\ u(1,t) = 0, & t>0 \\ u(r,0) = 0, & r<1 \\ u'_t(r,0) = h(r) = \begin{cases} v, & r<a, \\ 0, & a<r<1. \end{cases} \end{cases}$$

där $\Delta\, u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r})$. Lösningen är

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v}{c\alpha_{0k}} \frac{\int_0^a \mathrm{J}_0(\alpha_{0k}r)\, r\, dr}{\int_0^1 \mathrm{J}_0^2(\alpha_{0k}r)\, r\, dr} \sin(c\alpha_{0k}t)\, \mathrm{J}_0(\alpha_{0k}r).$$