LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Tillämpad matematik – Linjära system
2014-08-29

1. a) Eftersom $f(t) = \sin t\,[\theta(t) - \theta(t-\pi)]$ har vi

$$f'(t) = \cos t\,[\theta(t) - \theta(t-\pi)] + \sin t\,[\delta(t) - \delta(t-\pi)] = \cos t\,[\theta(t) - \theta(t-\pi)]\,,$$

$$f''(t) = -\sin t\,[\theta(t) - \theta(t-\pi)] + \cos t\,[\delta(t) - \delta(t-\pi)] =$$
$$= -\sin t\,[\theta(t) - \theta(t-\pi)] + \delta(t) + \delta(t-\pi).$$

b) Eftersom $F(t) = -\cos t$ är en primitiv funktion till $\sin t$ är svaret

$$(F(t) - F(0))\theta(t) - (F(t) - F(\pi))\theta(t-\pi) = (\cos t - 1)\theta(t) - (\cos t + 1)\theta(t-\pi).$$

c) Eftersom $f(t) + f''(t) = \delta(t) + \delta(t-\pi)$ är svaret

$$f(t) + f(t-\pi) = \sin t\,[\theta(t) - \theta(t-\pi)] + \sin(t-\pi)\,[\theta(t-\pi) - \theta(t-2\pi)] =$$

$$= \sin t[\theta(t) - 2\theta(t-\pi) + \theta(t-2\pi)].$$

2. a) Derivation och multiplikation med 5.

b) Se bocken!

c) Se bocken!

d) Eftersom $\lambda = -2$ är $a = -\frac{10}{3}$.

e) Se bocken!

3. a)
$$\lambda_1 = 2, X_1 = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}, t \neq 0,\ \lambda_2 = -6, X_2 = \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix}, t \neq 0.$$

b)
$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{2t} + e^{-6t} & e^{2t} - e^{-6t} \\ e^{2t} - e^{-6t} & e^{2t} + e^{-6t} \end{bmatrix}.$$

c) $x_1 = \frac{1}{2}(5e^{2t} - e^{-6t}), x_2 = \frac{1}{2}(5e^{2t} + e^{-6t})$.

4. a) $A(\omega) = \frac{3}{\sqrt{3+\omega^2}}, \phi(\omega) = -\arctan\frac{\omega}{\sqrt{3}}$.

b) $H(s) = \frac{3}{s+\sqrt{3}}, h(t) = 3e^{-\sqrt{3}t}\theta(t)$.

c) $y_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}\sin(\sqrt{3}t - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin\sqrt{3}t - \cos\sqrt{3}t)$.

d) $y_2(t) = e^{-\sqrt{3}t}\theta(t) + \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin\sqrt{3}t - \cos\sqrt{3}t)$.

5. a) Symmetri ger $a = 0, a - b = 9 \Rightarrow b = -9$. Eftersom

$$\det K = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & -28 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 9+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & -28 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 9+c \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 9+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 25+c \end{vmatrix} = 0$$

ser vi att $c = -25$.

b) $f(x) = x^T K x = -x_1^2 + 4x_1x_2 - 7x_2^2 + 18x_2x_3 - 28x_3^2 + 8x_3x_4 - 16x_4^2$. Eftersom minst ett av egenväredena är lika med 0 är formen inte negativt definit.

c) Gausselimination ger

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & -26 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1 = 1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & -26 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 = -9}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -17 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 = -17} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4/17 \\ 0 & 0 & 0 & -14 + 16/17 \end{pmatrix}.$$

Vi ser att $d_4 < 0$ därför är precis tre egenvärena i $a + 2I$ är negativa, alltså precis tre egenvärdena i A är mindre än -2.

6. a) Eftersom $y(s) * e^{-t} = w(t) + y(t)$ får vi

$$Y(s) \cdot \frac{1}{s+1} = W(s) + Y(s) \Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{-s-1}{s}.$$

b) Eftersom $\mathcal{L}\left(e^{-2t} \sin t\theta(t)\right) = \frac{1}{(s+2)^2+1}$ är svaret

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-s-1}{s((s+2)^2+1)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{5} \cdot \frac{s+2}{(s+2)^2+1} - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{(s+2)^2+1} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{s}\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(e^{-2t} \cos t - 3e^{-2t} \sin t - 1\right)\theta(t).$$