LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

SVAR MED NÅGRA ANVISNINGAR
FLERDIMENSIONELL ANALYS
2014–03–14 8–13

1. $\frac{9}{4}$.

2. a) $z + 2x - 7y + 5 = 0$.

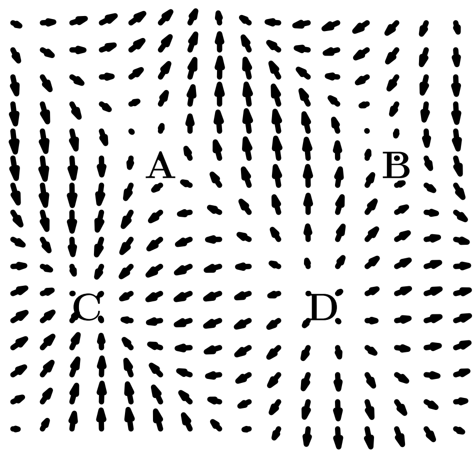
b) $2x - 7y + 12 = 0$.

c) Stationära punkter $(0, 0)$ och $(\pm 2, 1)$. Origo är ett lokalt minimum men de andra två sadelpunkter. Alltså är origo den enda lokala extrempunkten.

3. a) 2.

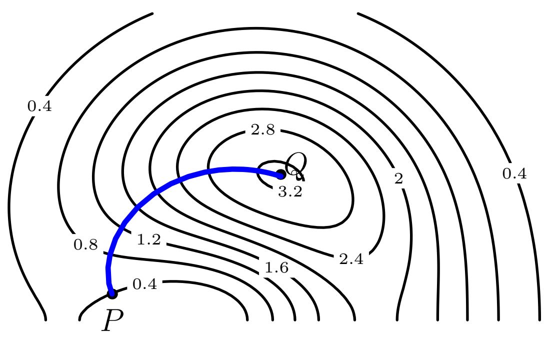
b) Differentialformen är exakt med potentialfunktion $F(x, y) = y(x - y)^{-1}$, så integralens värde är $F(1, 0) - F(0, -2) = 1$.

4. a) Punkterna ligger (ungefär) som i figuren nedan



Av dessa är A och B sadelpunkter eftersom pilarna pekar både in mot och ut från punkten. I C har vi ett lokalt maximum eftersom pilarna pekar in mot punkten, medan D är ett lokalt minimum eftersom alla pilar nära pekar bort ifrån punkten.

b) Han ska välja en väg som skär nivårkurvorna vinkelrätt, alltså som i figuren nedan:



5. Volymen ges av integralen

$$\iint_D (9 - (x-1)^2 - 2(y-2)^2)dxdy$$

där D är ellipsskivan $(x-1)^2 + 2(y-2)^2 \leq 9$. Ellipspolära koordinater ger svaret $\sqrt{2}\pi\frac{81}{4}$.

6. a) Eftersom $f(x,y,z) = 75-(x-5)^2-(y-5)^2-(z-5)^2$, ser vi att maximal njutning uppnås då $x = y = z = 5$.

b) Vi ska maximera f under bivillkoren

$$g(x,y,z) = 20x + 30y + 10z - 160 = 0, \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0,$$

vilket ger oss punkten $(3,2,4)$ som har njutningsvärdet $f(3,2,4) = 61$ l.e. På randen kvadratkompletterar man lämpligen.

c) Vi ska minimiera funktionen $g(x,y,z) = 20x+30y+10z$ under bivillkoren $f(x,y,z) = 47, \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0$. Lagranges multiplikatormetod ger oss kandidaterna

$$g(5 \pm 2\sqrt{2}, 5 \pm 3\sqrt{2}, 5 \pm \sqrt{2}) = 300 \pm 140\sqrt{2}$$

och lägst kostnad får vi med minustecknet. Denna kostnad är mindre än $300 - 140 \cdot 1.4 = 104$. Sedan undersöker man antingen randbitarna eller noterar att denna punkt ger globalt minimum på den sfär som definierar bivillkoret, eftersom sfären saknar rand (punkten uppfyller ju bivillkoren $x, y, z \geq 0$).

Lägsta kostnaden blir däför $300 - 140\sqrt{2} \approx 102$ kr.