

*HJÄLPMEDEL: Utdelad formelsamling samt miniräknare.*

*Motivera lösningarna väl.*

1. Ett långt fjärrvärmerör med radien 1 dm genomströmmas av vatten med konstant temperatur  $80^\circ\text{C}$ . Röret omges av ett 2 dm tjockt lager isolering. Utanför isoleringen har marken temperaturen  $0^\circ\text{C}$ . Bestäm temperaturen halvvägs in i isoleringen efter lång tid.
2. En elastisk sträng med längd 4 och vågutbredningshastighet 2 är fast inspänd i bägge ändar ( $x = 0$  och  $x = 4$ ). Från början är strängen rak men ges vid tiden  $t = 0$  med en spetsig hammare den transversella hastigheten  $\delta(x - 1)$ . Ställ upp en matematisk modell för strängens transversella utböjning, lös problemet och rita strängen då  $t = 3$ .
3. Bestäm det tredjegradspolynom som bäst approximerar funktionen  $1 - |x|$  på intervallet  $[-1, 1]$  i  $L_2$  normen  $\|f\| = \left(\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$ .
4. Finn en lösning till

$$\begin{cases} u_t' - D u_{xx}'' = -k u, & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = m \delta_1(x), & x > 0. \end{cases}$$

Ge också en rimlig fysikalisk tolkning av problemet.

5. Finn en lösning till det tvådimensionella potentialproblemet

$$\begin{cases} -\Delta u = \delta_{(2,3)}, & x > 0, y > 0, \\ u(x, 0) = 0, & x > 0, \\ u(0, y) = \pi, & y > 0. \end{cases}$$

6. Ett fast inspänt elastiskt membran har formen av en cirkelsektor med radie 1 och medelpunktsvinkel  $\pi/3$ . Bestäm egenfrekvenserna och svängningsmoder för membranet. Bestäm och rita även noderna till svängningsmoderna hörande till grundtonen och de tre första övertonerna.

**TREVLIG SOMMAR!**