

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Beräkna nedanstående gränsvärden. Endast svar krävs på denna uppgift. (0.2p/styck)

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x - 5} & \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1+7x} - e}{3x} \quad \text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(x) \cdot 8^x + 8 \cdot \ln(x)}{x^8 - 8^{x+1}} \\ \text{d)} & \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(1+3x)}{\sin(\frac{\pi}{2} + x)} \end{array}$$

2. Rita grafen till funktionen

$$f(x) = \frac{e^{-x^2}}{x^2 - 1}, \quad x \neq -1, 1.$$

Gör en ordentlig utredning och ange eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. Ange även värdemängden till f .

3. Funktionen f är definierad i en omgivning av punkten a .

a) Definiera vad som menas med att f är deriverbar i a . (0.2)

b) Definiera vad som menas med att f är kontinuerlig i a . (0.2)

c) Visa att f är kontinuerlig i a om f är deriverbar i a . (0.3)

d) Visa att det finns minst ett reellt tal som är en lösning till ekvationen $3x^5 - \sin(\frac{\pi}{2}x) = 1$. (Observera: Du behöver inte ange talet/talen.) (0.3)

4. a) Skriv upp Maclaurins formel med Lagranges restterm. (0.3)

b) Bestäm Maclaurinpolynomet av ordning ett till funktionen $f(x) = (1+x) \cdot \ln(1+x)$, $x > -1$. (0.3)

c) Visa att

$$|(1+x) \cdot \ln(1+x) - x| \geq \frac{1}{8} \quad \text{då} \quad 1 \leq x \leq 3. \quad (0.4)$$

5. Du har bokat en flygbiljett hos ett välkänt flygbolag. Din biljett ger dig rätt att checka in en väska i form av ett rätblock. Summan av väskans längd, bredd och djup får inte överstiga 158 cm. Under förutsättningen att din väskas längd är dubbelt så stor som dess bredd, vilka dimensioner ska väskan ha för att dess volym ska bli så stor som möjligt?

6. a) Formulera faktorsatsen för polynom. (0.2)

b) Låt α vara ett nollställe till polynomet p , och låt n beteckna multipliciteten av α som ett nollställe till p . Visa att om α även är ett nollställe till derivatan p' , då måste n vara större än ett. (Ledning: Använd definitionen av multiplicitet samt produktregeln för derivata.) (0.8)

LYCKA TILL!