

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar.  
Lämna tydliga svar om så är möjligt.

1. Beräkna (0.3/styck för a och b, 0.4 för c)

a)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$     b)  $\int \cos^2 x \, dx$     c)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, dx$

2. a) Vilket komplex tal får vi om vi roterar  $z = 1 + 3i$  vinkeln  $\pi/3$  moturs? (0.3)

- b) Formulera algebrans fundamentalsats. (0.2)

- c) Bestäm alla lösningar till ekvationen

$$z^{16} - z^8 + 1 = 0.$$

Lösningarna anges på polär form. (0.5)

3. Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen

$$y''(x) + 4y(x) = e^{-x} \cos(2x) - e^{-x} \sin(2x).$$

4. a) Formulera och motivera skivformeln för beräkning av en volym. (0.3)

- b) Myrlejonsländans larv gräver ner sig längst ner i en grop i fin sand för att fånga sin mat, myror. Om larven ligger i origo och fångstgropen har som rand den rotationsyta som uppkommer när vi roterar  $y = 3x/\sqrt{1+x^2}$ ,  $0 \leq x \leq 1$  runt  $y$ -axeln, hur stor är fångstgropens volym? (0.7)

5. En fabrik ligger vid en mindre sjö. En dag går en tank med ett kemiskt ämne sönder och innehållet läcker ut i sjön. Efter ett febrilt arbete lyckas man stoppa läckan en timme senare, men under den timmen har ämnet läckt ut med en hastighet av  $1 - t$  kg/timme, där  $t$  är tid (timmar) sedan läckaget startade. Lyckligtvis finns i sjön mikroorganismer som bryter ner ämnet till ofarliga produkter, och detta sker med en hastighet av 10% per timme.

- a) Hur mycket ämne fanns i sjön när läckan tätades? (Vill du ange ett numeriskt värde kan du använda att  $e^{-0.1} \approx 0.905$ .) (0.8)

- b) Hur lång tid tar det för mikroorganismerna att reducera denna mängd till en tredjedel? (0.2)

6. a) Ange och härled Maclaurinutvecklingen av ordning 4 för funktionen  $\sin x$ . Resttermen ska anges på Lagranges form. (0.3)

- b) Bestäm ett närmevärde till integralen

$$\int_0^1 \sin \sqrt{x} \, dx$$

sådant att felet är mindre än  $5 \cdot 10^{-3}$ . (Du måste visa att ditt värde har önskad precision.) (0.7)