

HJÄLPMEDEL: Medföljande formelblad för System och transformer

Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar. Skriv fullständiga meningar och förklara dina beteckningar. Alla svar ska förenklas så långt som möjligt.

1. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y'' + 2y' + y = e^{-2t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad t > 0,$$

med hjälp av ensidig Laplacetransform.

2. a) Bestäm egenvärden och egenvektorer för systemmatrisen till systemet

$$\begin{cases} \dot{x} &= -3x + y \\ \dot{y} &= -2x. \end{cases}$$

Är systemet stabilt? (0.4)

- b) För vilka reella s har systemet

$$\begin{cases} \dot{x} &= -3x + y + e^{st} \\ \dot{y} &= -2x + e^{st} \end{cases}$$

en generaliserat stationär lösning av typen Ce^{st} , där C är en konstant kolonnvektor? (0.2)

- c) Bestäm lösningen till systemet i b) då $s = -3$, $x(0) = 1$, $y(0) = 1$. (0.4)

3. Betrakta funktionerna

$$f(t) = \theta(t) - \theta(t-1), \quad g(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

- a) Beräkna Fouriertransformen av $f(t)$. (0.3)

- b) Beräkna distributionsderivatan f' . (0.2)

- c) Beräkna Fouriertransformen av $g * f'$. (0.3)

- d) Beräkna

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta(-3-t)g(-3-t)f(t)dt. \quad (0.2)$$

Var god vänd!

4. För ett linjärt, tidsinvariant och kausalt system uppfyller utsignalen y , som svarar mot insignalen w , ekvationen

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = w'(t) + w(t).$$

a) Bestäm systemets överföringsfunktion. (0.2)

b) Bestäm systemets impulssvar. Är systemet insignal-utsignalstabil? (0.3)

c) Bestäm systemets svar då insignalen är $w(t) = \cos t$. (0.2)

d) Bestäm systemets svar då insignalen är $w(t) = \theta(t) \cos t$. (0.3)

5. a) Bestäm en **kausal** lösning till ekvationen

$$y(t) - 2 \int_{-\infty}^{\infty} y(t - \tau) \theta(\tau) e^{-\tau} d\tau = \theta(t) e^{-2t}$$

med hjälp av Laplacetransform. Ange definitionsstrimlan för $\mathcal{L}(y)$. (0.5)

b) Bestäm en **begränsad** lösning till ekvationen

$$y(t) - 2 \int_{-\infty}^{\infty} y(t - \tau) \theta(\tau) e^{-\tau} d\tau = \theta(t) e^{-2t}$$

med hjälp av Laplacetransform. Ange definitionsstrimlan för $\mathcal{L}(y)$. (0.5)

6. a) Är någon av matriserna

$$\begin{pmatrix} e^t & te^{-t} \\ te^{-t} & e^t \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

en exponentialmatris e^{tA} för någon matris A ? Bestäm matrisen A . Är matrisen A diagonaliserbar? (0.4)

b) Lös för matrisen A från ovan det **tidsdiskreta** systemet $x_{n+1} = Ax_n$, med begynnelsevillkor $x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Är lösningen begränsad? (0.3)

c) Lös för matrisen A från ovan det **tidsdiskreta** systemet $x_{n+1} = Ax_n$, med begynnelsevillkor $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Är lösningen begränsad? (0.3)

Lycka till!
God Jul!