

HJÄLPMEDEL: Utdelade formelblad för System och transformer.

Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar. Skriv fullständiga meningar och förklara dina beteckningar. Alla svar ska förenklas så långt som möjligt.

1. I ett lineärt, tidsinvariant och kausalt system \mathcal{S} ges sambandet mellan insignal w och utsignal y av differentialekvationen

$$y'' - 4y = w' + 6w.$$

- a) Bestäm systemets impulssvar. (0.6)
- b) Bestäm en kausal primitiv funktion till impulssvaret i a). Vad kallas den primitiva funktionen om systemspråk används? (0.4)

2. Det tidsdiskreta begynnelsevärdesproblemet

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

har lösningen

$$\begin{cases} x_1(k) = 2 \cdot 3^k + 3 \cdot 5^k \\ x_2(k) = 3 \cdot 3^k + 4 \cdot 5^k \end{cases}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- a) Vilka egenvärden och egenvektorer har matrisen A ? (0.4)
- b) Är A diagonaliserbar? (0.2)
- c) Bestäm A . (0.4)

3. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = \delta(t - \pi), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

4. Betrakta matriserna $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$.

- a) Bestäm en stationär lösning till

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B \sin t. \quad (0.5)$$

- b) Ett lineärt, tidsinvariant och kausalt system ges på tillståndsform av

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + Bw \\ y = Cx + Dw \end{cases}.$$

Bestäm systemets stegsvar. (0.5)

Var god vänd!

5. Det finns en 2×2 matris A sådan att

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} (1-2t)e^{3t} & f(t) \\ te^{3t} & g(t) \end{bmatrix}.$$

a) Vilka egenvärden har A ? Ange även egenvärdenas multiplicitet. (0.2)

b) Är A diagonaliserbar? Glöm inte att motivera ditt svar. (0.2)

c) Vad blir $\det A$ och $\operatorname{tr} A$? (0.2)

d) Bestäm A . (0.4)

6. a) Uttryck integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

med hjälp av Fouriertransformen av f . (0.2)

b) Bestäm den inversa Fouriertransformen av $\frac{\sin^2 \omega}{\omega^2}$. (0.3)

c) Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \omega}{\omega} \right)^3 d\omega. \quad (0.5)$$

Slut!