

HJÄLPMEDEL: Utdelad formelsamling samt miniräknare.

Motivera lösningarna väl.

1. Lös värmeledningsproblemet

$$\begin{cases} u'_t - a u''_{xx} = 0, & x > 0, t > 0, \\ u'_x(0, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = \theta(x) - \theta(x-1), & x > 0. \end{cases}$$

2. Ge en rimlig fysikalisk tolkning av problemet

$$\begin{cases} u''_{tt} - u''_{xx} = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & x > 0, \\ u'_t(x, 0) = \delta_2(x), & x > 0. \end{cases}$$

Lös systemet och rita lösningen för $t = 1$ och $t = 5$.

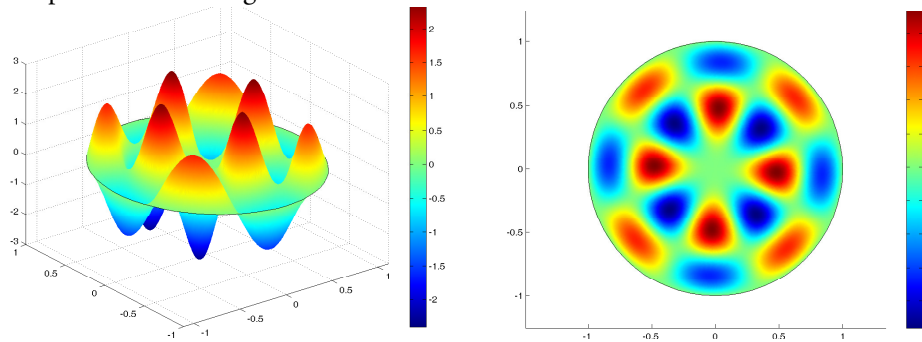
3. Bestäm det andragradspolym som bäst approximerar funktionen e^{-x} på intervallet $x \geq 0$ i normen $\|f\| = \left(\int_0^\infty |f(x)|^2 e^{-x} dx \right)^{1/2}$.
4. En mängd m av ett radioaktivt ämne injiceras vid tiden $t = 0$ i en punkt på ett smalt mycket långt vätskefyllt rör. Därefter diffunderar ämnet ut i röret samtidigt som det sönderfaller med en hastighet som är proportionell mot koncentrationen. Formulera en matematisk modell för koncentrationen av ämnet i röret för $t > 0$ samt lös problemet.
5. En akustikingenjör ska mäta upp ett rum. Fem av rummets ytor består av hårt och ljudreflekterande material medan den sjätte är starkt ljudabsorberande. Ingenjören har glömt sitt måttband men med sina akustiska apparater mäter han snabbt rummets lägsta resonansfrekvenser. De blir

21,25 30,05 47,52 60,52 63,75 64,14 67,20 73,95 76,62.

Beräkna rummets dimensioner om ljudhastigheten är 340 m/s.

Vänd!

6. Betrakta operatoren $\mathcal{A} = -\Delta$ med $D_{\mathcal{A}} = \{u \in C^2(\Omega); u = 0 \text{ på } \partial\Omega\}$, där Ω är enhetscirkelskivan. I figurerna nedan visas en egenfunktion till \mathcal{A} . Ange ett numeriskt värde på motsvarande egenvärde.



Hur många linjärt oberoende egenfunktioner finns det till detta egenvärde? Beskriv den/dem. Beteckna egenfunktionen i figurerna med φ . Lös svängningsproblemet

$$\begin{cases} u''_{tt} - c^2 \Delta u = 0, & x^2 + y^2 < 1, t > 0, \\ u(x, y, t) = 0, & x^2 + y^2 = 1, t > 0, \\ u(x, y, 0) = \varphi(x, y), & x^2 + y^2 < 1, \\ u'_t(x, y, 0) = 0, & x^2 + y^2 < 1. \end{cases}$$

Funktionen φ får ingå i svaret.

TREVLIG SOMMAR!