

**HJÄLPMEDEL:** Medföljande formelblad för System och transformer

Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar. Skriv fullständiga meningar och förklara dina beteckningar. Alla svar ska förenklas så långt som möjligt.

1. Betrakta de linjära och tidsinvarianta systemen med impulssvar  $h(t) =$

a)  $t^2 e^{-t^2}$     b)  $e^{-|t|}$     c)  $e^t(1 - \theta(t))$     d)  $e^t \theta(t)$     e)  $\frac{\sin t}{t} \theta(t)$ .

Vilka av systemen är kausala? Vilka är stabila?

2. Lös följande begynnelsevärdesproblem med hjälp av Laplacetransformation.

$$\begin{cases} y''(t) - y(t) = \sin t, & t > 0 \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$$

3. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} u^{(4)}(x) = x \delta'(x - 1), & x \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u(2) = 0 \\ u''(0) = u''(2) = 0. \end{cases}$$

4. Låt

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

där  $a$  och  $b$  är reella tal.

- a) För vilka tal  $a$  och  $b$  är matrisen diagonaliserbar? . (0.2)
- b) Bestäm för alla  $a$  och  $b$  exponentialmatrisen  $e^{At}$ . (0.2)
- c) Bestäm för alla  $a$  och  $b$  matrisen  $A^n$ , där  $n$  är ett positivt heltal. (0.2)
- d) För vilka tal  $a, b$  är systemet  $x' = Ax$  stabilt? (0.2)
- e) För vilka tal  $a, b$  är systemet  $x_{n+1} = Ax_n$  stabilt? (0.2)

Var god vänd!

5. Beräkna integralen

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t(a^2 + t^2)} dt, \quad a > 0.$$

6. a) För ett linjärt, tidsinvariant och kausalt system ges sambandet mellan insignalen  $w(t)$  och utsignalen  $y(t)$  av

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) &= w(t) \\ y'(t) + 3y(t) &+ \int_{-\infty}^\infty y(t - \tau) \cdot e^{-\tau} \theta(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^\infty e^{-2\tau} \cosh \tau \cdot \theta(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau, \end{cases}$$

där  $\cosh \tau = \frac{1}{2}(e^\tau + e^{-\tau})$ . Bestäm systemets överföringsfunktion och impulssvar. (0.8)

b) Vilket är systemets svar på insignalen  $w(t) = e^t$ ? (0.2)

*Lycka till!*