LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
ENDIMENSIONELL ANALYS A1
2014–10–30 kl 14–19

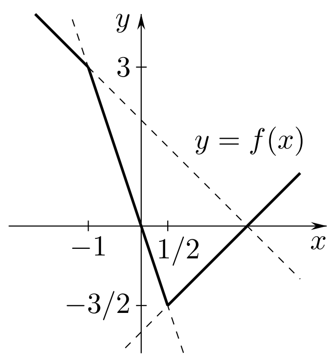
1.

	Version 1	Version 2
a)	$5/27$	$x(x+2)(x-6)$
b)	3	$x=-1/2$
c)	$x=2$	$(x+4)^2-16$
d)	$x=-1/2$	$-\sqrt{3}/2$
e)	$(x+3)^2-9$	3
f)	$\sqrt{3}/2$	$\alpha=240°$, $\alpha=300°$
g)	$\alpha=210°$, $\alpha=330°$	$5/27$
h)	$0<x<1$	$x=1$
i)	$x=1$	$0<x<1$
j)	$x(x-2)(x+6)$	$x=2$

2. a) Vi skriver först om $f(x)$ genom att dela upp i fall:

$$f(x)=\begin{cases} (2x-1)-(x+1)=x-2 & \text{då } x\geq \frac{1}{2}, \\ -(2x-1)-(x+1)=-3x & \text{då } -1\leq x<\frac{1}{2}, \\ -(2x-1)+(x+1)=-x+2 & \text{då } x<-1. \end{cases}$$

Grafen $y=f(x)$ (heldragen) får då utseendet i figuren. Ekvationen $f(x)=2$ löses sedan i varje aktuellt delintervall, och vi får



$$x\geq \tfrac{1}{2}: \qquad x-2=2 \quad\Leftrightarrow\quad x=4 \quad \text{(ok)}$$

$$-1\leq x<\tfrac{1}{2}: \qquad -3x=2 \quad\Leftrightarrow\quad x=-\tfrac{2}{3} \quad \text{(ok)}$$

$$x<-1: \qquad -x+2=2 \quad\Leftrightarrow\quad x=0 \quad \text{(utanför).}$$

Vi har således rötterna $x=-2/3$ och $x=4$, något som också kan avläsas i grafen genom att bestämma skärningen med linjen $y=2$.

b) Vi ser att grafen i a)-uppgiften saknar skärning med linjen $y=a$ precis då $a<-3/2$, så svaret är alla $a<-3/2$.

3. a) Se läroboken sidan 133.

b) Med omskrivningen

$$f(x) = 3 - \ln \frac{e}{x+1} = 3 - (\ln e - \ln(x+1)) = 2 + \ln(x+1)$$

ser vi att grafen $y = f(x)$ svarar mot en $y = \ln x$-kurva flyttad ett steg åt vänster och två steg uppåt (se grafen längst ned). Definitionsmängden till f är $]-1, \infty[$ och värdemängden till f är $\mathbb{R}$.

Eftersom f är injektiv så har den en invers, och vi beräknar denna genom att utgå från sambandet $y = f(x)$:

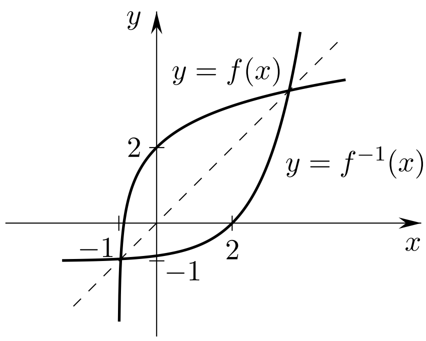
$$\begin{aligned} & y = 2 + \ln(x+1) && \Leftrightarrow && y - 2 = \ln(x+1) \\ \Leftrightarrow \quad & e^{y-2} = x + 1 && \Leftrightarrow && x = -1 + e^{y-2}. \end{aligned}$$

Inversen ges således av

$$f^{-1}(x) = -1 + e^{x-2}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

där vi noterar att $D_{f^{-1}} = V_f = \mathbb{R}$ och $V_{f^{-1}} = D_f =]-1, \infty[$.

Slutligen skisserar vi grafen $y = f^{-1}(x)$, t.ex. genom att spegla $y = f(x)$ i linjen $y = x$:



4. a) Vi använder binomialsatsen och får

$$\left(x^2 - \tfrac{1}{2x}\right)^{12} = \left(x^2 + \left(-\tfrac{1}{2x}\right)\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} \tbinom{12}{k} (x^2)^{12-k} \left(-\tfrac{1}{2x}\right)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{12} \tbinom{12}{k} \left(-\tfrac{1}{2}\right)^k x^{2(12-k)-k} = \sum_{k=0}^{12} \tbinom{12}{k} \left(-\tfrac{1}{2}\right)^k x^{24-3k}.$$

Den sökta termen får vi då $24 - 3k = 15$, dvs. då $k = 3$, och motsvarande koefficient blir

$$\binom{12}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{55}{2}.$$

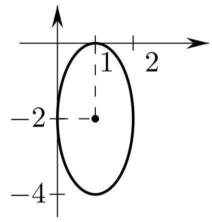
b) Vi börjar med att skriva om vart och ett av påståendena:

$$\begin{aligned}
&\text{A:} \quad |x-1| < 3 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < x < 4,\\
&\text{B:} \quad x^2 < 16 \quad \Leftrightarrow \quad -4 < x < 4,\\
&\text{C:} \quad x < 4,\\
&\text{D:} \quad x^2 < 4x \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < 4,
\end{aligned}$$

där den sista omskrivningen t.ex. kan tas fram genom teckenstudium. Med samtliga påståenden uttryckta på samma form, kan vi utläsa implikationerna. Det gäller att $A \Rightarrow B$, $A \Rightarrow C$, $B \Rightarrow C$, $D \Rightarrow A$, $D \Rightarrow B$ och $D \Rightarrow C$.

5. a) Kvadratkomplettering ger

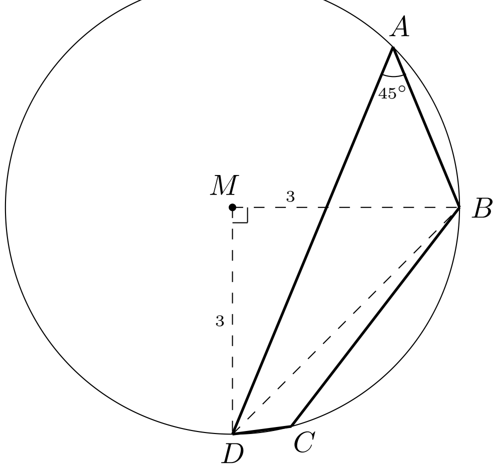
$$4x^2 - 8x + y^2 + 4y + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + \frac{(y+2)^2}{2^2} = 1,$$

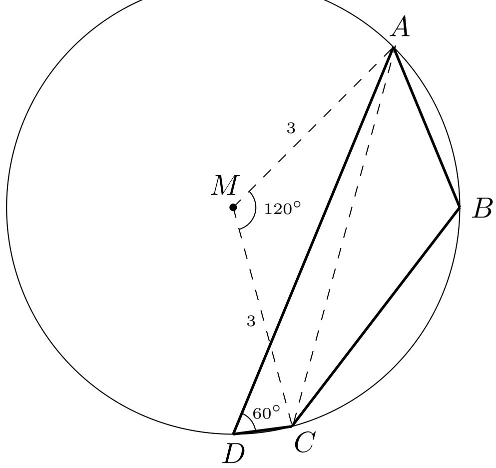


och vi kan avläsa att det rör sig om en ellips med medelpunkt $(1, -2)$ och halvaxlar 1 respektive 2.

b) I en fyrhörning $ABCD$ inskriven i en cirkel är summan av två motstående vinklar lika med 180° enligt Följdsats 3, sidan 39, i geometriboken (alternativt visas detta med randvinkelsatsen). De två vinklarna i uppgiftstexten är därför inte motstående, och de har motstående vinklar av storleken 135° respektive 60°.

Låt vinklarna vara $\angle A = 45°$, $\angle B = 120°$, $\angle C = 135°$ och $\angle D = 60°$ enligt figur, och beteckna cirkelns medelpunkt med M. Eftersom $\angle BMD$ är medelpunktsvinkel och $\angle A$ randvinkel på samma cirkelbåge (figuren till vänster), så följer det av randvinkelsatsen att $\angle BMD = 2 \cdot \angle A = 90°$. Triangeln BMD är alltså rätvinklig med kateter av längd 3 cm (radier), och det följer av Pythagoras sats att $|BD| = 3\sqrt{2}$ cm.





På motsvarande sätt är $\angle AMC$ medelpunktsvinkel och $\angle D$ randvinkel på samma cirkelbåge (figuren till höger), så det följer återigen av randvinkelsatsen att $\angle AMC = 2 \cdot \angle D = 120°$. Cosinussatsen på triangel AMC ger nu att

$$|AC| = \sqrt{3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos 120°} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{ cm}.$$

6. a) Med beteckningen $\alpha = \arccos(1/3)$ gäller det att $\cos\alpha = 1/3$, och uppgiften går ut på att förenkla $\sin 2\alpha$. Satsen för dubbla vinkeln för sinus ger att

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha \cdot \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}\sin\alpha,$$

så det återstår att eventuellt förenkla $\sin\alpha$. Från trigonometriska ettan följer det att $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$, där vi kan bortse från minustecknet eftersom $\alpha = \arccos(1/3)$ är en vinkel mellan 0 och π och sinus då är icke-negativ. Således gäller det att

$$\sin 2\alpha = \tfrac{2}{3}\sin\alpha = \tfrac{2}{3}\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \tfrac{2}{3}\sqrt{1-(1/3)^2} = \tfrac{4\sqrt{2}}{9}.$$

b) Med hjälp av additionsformeln för sinus kan vi skriva funktionsuttrycket som

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\sin\left(x + \tfrac{\pi}{6}\right) + \cos x = \\ &= 2\left(\sin x \cos\tfrac{\pi}{6} + \cos x \sin\tfrac{\pi}{6}\right) + \cos x = \sqrt{3}\sin x + 2\cos x, \end{aligned}$$

och eftersom $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{7}$ så följer det av hjälpvinkelmetoden att

$$f(x) = \sqrt{7}\sin(x+\delta)$$

för någon fasförskjutning δ. Eftersom $\sin(x+\delta)$ antar alla värden mellan -1 och 1 så blir värdemängden $[-\sqrt{7}, \sqrt{7}]$.