LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

Lösningsförslag
ENDIMENSIONELL ANALYS
DELKURS B2/A3
2016–01–16

1. a) Med $z = re^{i\theta}$ får vi ekvationen $r^4e^{4i\theta} = 4e^{i\pi}$, vilket betyder att $r = \sqrt{2}$ och att

$$4\theta = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

där k är ett heltal. Fyra olika lösningar fås genom att använda $k = 0, 1, 2, 3$ och blir

$$z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i, \quad z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = -1 + i,$$
$$z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} = -1 - i, \quad z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}} = 1 - i.$$

Geometriskt utgör lösningen hörnen i den axelparallella kvadraten som har hörn på enhetscirkeln.

b) Vi vet att $p(z) = (z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$ och ser att $z_3 = \bar{z_0}$, $z_2 = \bar{z_1}$. Vidare har vi att $(z - w)(z - \bar{w}) = z^2 - 2\mathrm{Re}(w) + w\bar{w}$, så

$$p(x) = (x - z_0)(x - \bar{z_0})(x - z_1)(x - \bar{z_1}) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2).$$

En enklare lösning är att skriva

$$x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2$$

varefter konjugatregeln ger resultatet.

2. a) Integrera ekvationen: $xf(x) = \int \frac{dx}{1+x} = \ln|x + 1| + C$, vilket ger

$$f(x) = \frac{\ln|x + 1|}{x} + \frac{C}{x}$$

där C är en konstant.

b) Vi har att

$$\int \frac{(x + 2)dx}{x^2 - 2x + 5} = \int \frac{(x + 2)dx}{(x - 1)^2 + 4} = \int \frac{ydy}{y^2 + 4} + 3\int \frac{dy}{y^2 + 4}$$

med $y = x - 1$. Vi tar integralerna var för sig:

$$\int \frac{ydy}{y^2 + 4} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\ln|z| + C_1 = \frac{1}{2}\ln(y^2 + 4) + C_1$$

där vi använt variabelbytet $z = y^2 + 4$, och

$$\int \frac{dy}{y^2 + 4} = \frac{1}{4}\int \frac{2dz}{z^2 + 1} = \frac{1}{2}\arctan z + C_2 = \frac{1}{2}\arctan\frac{y}{2} + C_2,$$

där vi satt $z = y/2$. Sätter vi in uttrycket för y får vi därför

$$\frac{1}{2}\ln(x^2 - 2x + 5) + \frac{3}{2}\arctan\frac{x - 1}{2} + C$$

c) Vi får att

$$\int_1^\infty \frac{(x+2)dx}{x^2-2x+5} = \lim_{X\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+5)+\frac{3}{2}\arctan\frac{x-1}{2}\right]_1^X =$$

$$\lim_{X\to\infty}\frac{1}{2}\ln(X^2-2X+5)+\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 4=\infty.$$

Integralen är därför divergent. Om man inte bestämt den primitiva funktionen i b) finns det många sätt att visa att den är divergent genom att jämföra integranden med en annan funktion som ger en divergent integral.

3. a) Se läroboken eller motsvarande.

b) Analysens huvudsats säger att $S(x)=\int_1^x \frac{e^{-t}}{t}dt$ har derivatan $S'(x)=e^{-x}/x$ och $\Phi(x)=S(\sqrt{x})$. Kedjeregeln ger då att

$$\Phi'(x)=S'(\sqrt{x})(\sqrt{x})'=\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{e^{-\sqrt{x}}}{2x}.$$

4. Låt $y(t)$ =mängd (kg) förorening i tanken vid tiden t, där tid mäts i minuter. Inflödet till tanken av förorening ges då av $2\cdot 500=1000$ g/min $=1$ kg/min. I tanken renas $0.05y(t)$ kg/min och samtidigt rinner det ut $500\cdot(y(t)/10000)=y(t)/20=0.05y(t)$ kg/min. Sammanlagt försvinner alltså $(0.05+0.05)y(t)=y(t)/10$ kg/min. Massbalans ger oss därför modellen

$$y'(t)=1-y(t)/10.$$

Startvillkoret är att $y(0)=0$, eftersom tanken var fylld med rent vatten.

Enklast löser vi denna ekvation genom att se att den homogena ekvationen har lösningen $Ce^{-t/10}$ och att $y_p=1/0.1=10$ är en partikulärlösning. Den allmänna lösningen är därför $10+Ce^{-t/10}$ och C bestäms av att $y(0)=0$. Det följer att

$$y(t)=10(1-e^{-t/10}).$$

Vi ser att $y(t)\to 10$ kg då $t\to\infty$. Koncentrationen efter lång tid är därför $\frac{10}{10000}=\frac{1}{1000}$ kg/l $=1$ g/l, och tiden τ till att nå halva detta värde fås ur ekvationen

$$1-e^{-\tau/10}=0.5 \quad\Leftrightarrow\quad \tau=10\ln 2\approx 7 \text{ min}.$$

5. a) Funktionen $f(x)=1/(1+x^2)$ är avtagande då $x\geq 0$ och en figur (som ska ritas) visar att

$$\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{1+k^2}\leq \int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}=[\arctan x]_1^\infty=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

b) Maclaurinutvecklingen av e^x till ordning 3 ges av

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{e^{\theta x}x^4}{24},\quad 0\leq\theta\leq 1.$$

Det följer att

$$e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{6}+\frac{e^{-\theta x^2}x^8}{24},\quad 0\leq\theta\leq 1,$$

vilket av entydighetsskäl ger Maclaurinutvecklingen av ordning 6. Integrerar vi får vi att

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 (1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6}) dx + \int_0^1 \frac{e^{-\theta x^2} x^8 dx}{24}.$$

Den första termen i högerledet beräknas till

$$\left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} = \frac{26}{35} \approx 0.743.$$

Detta blir integralens närmevärde. Den andra integralen anger felet. Eftersom $e^{-(\theta x)^2} \leq 1$ och alla termer är positiva har vi att

$$0 \leq \int_0^1 e^{-\theta x^2} \frac{x^8 dx}{24} \leq \int_0^1 \frac{x^8 dx}{24} = \frac{1}{9 \cdot 24} = \frac{1}{216} < \frac{1}{200} = 5 \cdot 10^{-3}.$$

Sammanfattningsvis har vi alltså att

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = 0.743 \pm 0.005$$

6. a) Vi börjar med att skissa upp kurvan. Derivatan är $y' = (2x - x^3)e^{-x^2/2}$ som är noll då $x = \sqrt{2}$ (origo är en ändpunkt) och vi ser lätt att detta är ett lokalt maximum. Det föjer att kurvan $y = x^2 e^{-x^2/2}$, $0 \leq x \leq \sqrt{2}$ är växande. Det är området ovanför kurvan men under linjen $y = (\sqrt{2})^2 \exp -(\sqrt{2})^2/2 = 2/e$ som definierar det område vi ska fylla med vatten (efter att ha roterat ett varv runt y-axeln).

Eftersom det är svårt att hitta inversen till funktionen får vi beräkna volymen med hjälp av rörformeln:

$$\int_0^{\sqrt{2}} 2\pi x \cdot (\frac{2}{e} - x^2 e^{-x^2/2}) dx = 2\pi \left[\frac{x^2}{e}\right]_0^{\sqrt{2}} - 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} x^3 e^{-x^2/2} dx =$$

$$\left[\begin{array}{c} y = x^2/2 \\ dy = x dx \end{array}\right] \frac{4\pi}{e} - 2\pi \int_0^1 2y e^{-y} dy = 4\pi(e^{-1} - ([-e^{-y} y]_0^1 + \int_0^1 e^{-y} dy)) =$$

$$4\pi(3e^{-1} - 1) \approx 1.3$$

liter.

b) Svängningar med obegränsad amplitud uppkommer när högerledet är en lösning till den homogena ekvationen. Med $y(t) = \sin(\omega t)$ får vi att

$$y''(t) + \lambda y(t) = (-\omega^2 + \lambda) \sin(\omega t)$$

och för att detta ska vara noll för alla t krävs att $\lambda = \omega^2$. Men när så är fallet måste lösningen ha en amplitud som växer med tiden, vilket man kan se genom att lösa ekvationen. Den allmänna lösningen ges av

$$y(t) = -\frac{t}{2\omega} \cos(\omega t) + A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t).$$