

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga och tydliga motiveringar. Ge tydliga svar där så är möjligt.

1. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = x + e^x \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

2. a) Ekvationen

$$z^4 - 7z^3 + 18z^2 - 22z + 12 = 0$$

har roten  $z = 1 - i$ . Lös ekvationen fullständigt. (0.5)

b) Beräkna  $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{60}$ . Svara på formen  $a + bi$ . (0.5)

3. Beräkna integralerna

$$\text{a) } \int_{-1}^0 (x^2 + 1)\sqrt{x+1} \, dx \quad (0.5) \qquad \text{b) } \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} \, dx \quad (0.5)$$

4. a) Bevisa formeln för partiell integration

$$\int f(x) g(x) \, dx = F(x)g(x) - \int F(x) g'(x) \, dx,$$

där  $F$  är en primitiv funktion till  $f$ . (0.5)

b) Bestäm alla primitiva funktioner till funktionen  $x^5 \sin(x^2)$ . (0.5)

5. Ytan mellan  $x$ -axeln och kurvan  $y = \frac{1}{x\sqrt{x+2}}$ , där  $1 \leq x \leq 2$ , roterar ett varv kring  $x$ -axeln och bildar på så sätt en homogen rotationskropp  $K$  med densiteten  $\rho_0$ .

a) Beräkna massan  $m$  av  $K$ . (0.5)

b) Bestäm tyngdpunkten för  $K$ .

(För tyngdpunktens  $x$ -koordinat  $x_T$  gäller  $x_T = \frac{1}{m} \int_K x \, dm$ .) (0.5)

6. Antag att arean av en cirkelskiva ökar med en hastighet som är proportionell mot kvadraten av cirkelskivans radie. Vid mätningarnas start är radien 1 meter. Efter 2 sekunder är radien 4 meter. Hur stor beräknas arean vara efter 3 sekunder?

LYCKA TILL !