1. Detta är en inhomogen rekursionsekvation av ordning 2. Vi löser först den homogena ekvationen. Den karakteristiska ekvationen är $r^2 + 2r - 15 = 0$, och lösningarna är $r_1 = -5$ och $r_2 = 3$. Lösningarna till den homogena ekvationen är då

$$x_n = C_1(-5)^n + C_2 3^n.$$

Varje lösning är summan av en lösning till homogena ekvationen och en partikulärlösning. Eftersom högerledet är förstagradspolynomet $12n + 8$ ansätter vi ett förstagradspolynom $x_n = Cn + D$ som partikulärlösning. Insättning i ekvationen ger

$$C(n+2) + D + 2C(n+1) + 2D - 15(Cn + D) = 12n + 8.$$

Efter förenkling får vi $-12Cn + (4C - 12D) = 12n + 8$, alltså $C = -1$ och $D = -1$. Då är den almänna lösningen till ekvationen av formen

$$x_n = C_1(-5)^n + C_2 3^n - n - 1.$$

Begynnelsevillkoret ger ekvationerna

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 - 1 &= 1 \\ -5C_1 + 3C_2 - 2 &= -4. \end{aligned}$$

Lösningen är $C_1 = 1$ och $C_2 = 1$. Svaret är

$$x_n = (-5)^n + 3^n - n - 1.$$

2. Motivera till exempel genom att studera period, udda/jämn samt beteende då $t \to 0$.
Svar: b)

3. Funktionen u är harmonisk. Detta ger att

$$0 = \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \underbrace{(e^y + e^{-y})}_{\neq 0}(g''(x) + g(x)) \quad \text{för alla} \quad x, y$$

Alltså är

$$g''(x) + g(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = A\cos x + B\sin x$$

Ett nödvändigt utseende på u är alltså

$$u(x,y) = (e^y + e^{-y})(A\cos x + B\sin x)$$

Men $f(0) = 0$ ger att $0 = u(0,0) = 2A$. Alltså måste gälla att

$$u(x,y) = (e^y + e^{-y})B\sin x = 2B\cosh y \sin x$$

Sätt $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Enligt Cauchy-Riemanns ekvationer gäller då att

$$\begin{cases} v_x = -u_y = -2B\sinh y \sin x \\ v_y = u_x = 2B\cosh y \cos x \end{cases}$$

Detta ger att $v(x,y) = 2B\sinh y \cos x + C$, där C är en reell konstant.
Vi återvänder till f.

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = 2B\cosh y \sin x + i(2B\sinh y \cos x + C)$$

Speciellt är

$$f(x + i \cdot 0) = 2B\sin x + iC$$

Enligt identitetssatsen är då $f(z) = 2B\sin z + iC$. Med hänsyn till att $f(0) = 0$ och $f'(0) = 1$ måste gälla att $C = 0$ och $B = \frac{1}{2}$.
Med $f(z) = \sin z$ blir alla krav uppfyllda.

4. a) Vi skriver om funktionen som summan av en geometrisk serie:

$$f(x) = \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{x}{2})^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\frac{1}{2})^{k+1}x^k \text{ om } |\frac{x}{2}| < 1 \Leftrightarrow |x| < 2$$

Alltså är konvergensradien $R = 2$, och seriens summa för $x = 1$ blir $f(1) = \frac{1}{3}$.

b) Sätt $a_k = \frac{(-1)^k}{k^2}$. Vi får $|a_k|^{\frac{1}{k}} = (\frac{1}{k^{\frac{1}{k}}})^2 \to 1$, då $k \to \infty$.
Alltså är konvergensradien $R = \frac{1}{1} = 1$.
Om $|z| = 1$, är $|a_k z^k| = \frac{1}{k^2}$. Eftersom $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ är konvergent, är alltså vår potensserie absolutkonvergent och därmed konvergent.
Svar: Konvergensradien är $R = 1$.

5. a) För argumentdelen så kan språnget justeras genom division med i och därefter kompenseras argumentet med $\frac{\pi}{2}$. Med maplesyntax:

```
logaritm:=z->log(abs(z))+I*(argument(z/I)+Pi/2);
```

b) Med texasgrenen så kommer $1/z$ att ha primitiv $\log(z)$. Kurvan startar i $z_{\text{start}} = (1+\frac{1}{5})$ och slutar i $z_{\text{slut}} = (-1+\frac{1}{5})$. Alltså är

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \Big[\log(z)\Big]_{z_{\text{start}}}^{z_{\text{slut}}} = \log\left(-\frac{4}{5}\right) - \log\left(\frac{6}{5}\right) = \left(\ln\left(\frac{4}{5}\right) + i\pi\right) - \left(\ln\left(\frac{6}{5}\right) + i0\right)$$
$$= \ln\left(\frac{2}{3}\right) + i\pi.$$

6. Integralen är konvergent enligt sats 13.4. Sätt

$$f(z) = \frac{z^{1/4}}{(4+z)^2}\ ,$$

där $z^{1/4}$ är den naturliga grenen, dvs

$$0 < \arg z < 2\pi\ .$$

Nyckelhålsintegration ger

$$(1 - e^{i2\pi/4})\int_0^\infty \frac{x^{1/4}}{(4+x)^2}dx = 2\pi i\sum_{z\neq 0}\mathrm{Res} f(z).$$

Den enda polen är $z = -4$ (dubbel). Sätt $g(z) = (4+z)^2 f(z) = z^{1/4}$. Då är $g'(z) = z^{-3/4}/4$ och

$$\operatorname*{Res}_{-4} f = \frac{g'(-4)}{1!} = \frac{1}{4}(-4)^{-3/4} = \frac{e^{-3(\ln 4 + i\pi)/4}}{4} = \frac{4^{-3/4}e^{-i3\pi/4}}{4} = \frac{e^{-i3\pi/4}}{4\cdot 2\sqrt{2}}.$$

(Argumentet är valt i intervallet $(0, 2\pi)$.) Den sökta integralen är

$$I = 2\pi i\frac{1}{(1-e^{i2\pi/4})}\frac{e^{-i3\pi/4}}{8\sqrt{2}} = 2\pi i\frac{e^{-i3\pi/4}}{(1-i)8\sqrt{2}} = 2\pi i\frac{e^{-i3\pi/4}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\cdot 8\sqrt{2}} = \frac{\pi}{8}$$