LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
ENDIMENSIONELL ANALYS
DELKURS B1 (FMAA05)
2013–01–07 kl. 14–19

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar om inte annat anges. Lämna tydliga svar om så är möjligt.

1. *OBS!* På denna uppgift skall endast svar ges. Eventuella motiveringar kommer ej att beakta vid rättningen. Varje korrekt svar ger +0.2 poäng. Beräkna

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x)}{3x}$,

b) $\lim_{x\to+\infty} x^{1/\ln(x)}$,

c) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x}$,

d) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}$,

e) $\binom{10}{0}-\binom{10}{1}+\binom{10}{2}-\binom{10}{3}+\binom{10}{4}-\binom{10}{5}+\binom{10}{6}-\binom{10}{7}+\binom{10}{8}-\binom{10}{9}+\binom{10}{10}$.

2. Lös ekvationen

$$\sum_{k=2}^{+\infty} x^k = \frac{4}{3}.$$

3. Låt $f(x) = \arctan(x) + \arctan(1/x)$ för $x \neq 0$.

a) Bestäm $f'(x)$. Förenkla ditt svar så långt du kan. (0.4)

b) Vad är värdemängden för f? (0.3)

c) Kan talet a bestämmas så att funktionen

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0, \\ a, & x = 0, \end{cases}$$

blir kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$? Hur i sådana fall? (0.3)

4. a) Definiera absolutbeloppet av det reella talet x. (0.2)

b) Finn alla reella tal x som uppfyller ekvationen $x + |x| = \ln|x|$. (0.8)

5. a) Visa att $\frac{\sin(\varphi)}{1+\cos(\varphi)} = \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ för $\varphi \neq \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. (0.3)

b) Ett tunt ark av tenn med bredd a skall böjas till en öppen cylindrisk kanal (se Figur 1 nedan). Hur skall centrumvinkeln φ väljas så att kanalen får maximal kapacitet (det vill säga så att den skuggade arean i figuren blir maximal)? (0.7)

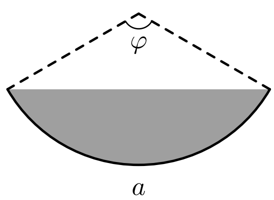
6. Låt a, b och c beteckna sidlängderna i en triangel, och låt vidare α, β och γ beteckna vinklarna som står mot sidorna med längd a, b respektive c (se Figur 2 nedan).

a) Formulera sinussatsen. (0.1)

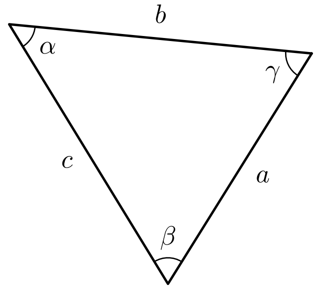
b) Visa att om $a \leq \frac{b+c}{2}$ så är $\sin(\alpha) \leq \frac{\sin(\beta)+\sin(\gamma)}{2}$. (0.3)

c) Formulera cosinussatsen. (0.2)

d) Visa att om $a \leq \frac{b+c}{2}$ så är $\alpha \leq \frac{\beta+\gamma}{2}$. (0.4)



Figur 1



Figur 2

LYCKA TILL!