1 **a)** **Svar:** Arean är $\frac{\pi}{6}(5^{3/2} - 1)$.

b) **Svar:** Flödet är 0.

c) **Svar:** Flödet är 0.

2. **a)** Se definition i läroboken.

Exempel: Fältet $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0} = (0\,,0\,,0)$ är exakt på $\Omega = \mathbb{R}^3$, ty en potential ges av $U(x\,,y\,,z) = 42$.

Fältet $\boldsymbol{f} = (y, 0\,, 0)$ är inte exakt i $\Omega = \mathbb{R}^3$, ty $\nabla \times \boldsymbol{f} \neq \boldsymbol{0}$.

b) **Skiss av ett bevis:** Antag att $\nabla \times \boldsymbol{f} \neq \boldsymbol{0}$ Vi visar att det då måste finnas en sluten kurva γ så att $\int_\gamma \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} \neq 0$.

Det måste finnas en punkt $\boldsymbol{a}$ så att $\nabla \times \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \neq \boldsymbol{0}$. Eftersom $\nabla \times \boldsymbol{f}$ är kontinuerlig så finns det ett litet klot runt $\boldsymbol{a}$ så att $\nabla \times \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ är nästan konstant och nollskild i klotet. Låt Y vara en liten cirkelskiva i klotet så att normalen $\boldsymbol{n}$ är parallell med $\nabla \times \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$, och låt γ vara randen till Y, orienterad på sedvanligt vis.

Nu förkunnar Stokes sats att

$$\int_\gamma \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_Y \nabla \times \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S}.$$

Den sista integralen är positiv (och därmed inte noll), ty $d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}dS$ och $\nabla \times \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n} > 0$ på Y, om klotet väljs tillräckligt litet. Beviset är färdigt.