LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

Svar och lösningar, 2012–03–29
Tredimensionell vektoranalys

1 **a)** Vi finner att $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 1$. Nu ger Gauß sats att flödet ut ur K ges av

$$\iint_{\partial K} \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_K dxdydz = \pi.$$

Svar: Flödet är π.

b) Flödet blir noll, ty $\iint_{\partial K} \nabla \times \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_K \nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{f}\, dxdydz$ och $\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{f} = 0$ överallt.

Svar: Flödet är 0.

2. **a)** Differentialformen $udx + vdy + wdz$ är exakt om det finns en funktion U så att $(u, v, w) = \nabla U$.

Låt $U(x, y, z) = 0$. Då är tydligen $\nabla U = (0, 0, 0)$, och differentialformen $0 = 0dx + 0dy + 0dz$ är exakt.

Om en differentialform $udx + vdy + wdz$ är exakt så är $\nabla \times (u, v, w) = (0, 0, 0)$. Sålunda är ydx inte exakt, ty $\nabla \times (y, 0, 0) = (0, 0, -1) \neq (0, 0, 0)$.

b) Vi använder Stokes sats. Låt Y vara den cirkelskiva i π som har γ som rand, och orienterad så att normalen är $(1, 0, 1)$. Vi har då att

$$\int_\gamma \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_Y \nabla \times \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{N} dS,$$

där $\boldsymbol{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$. Sålunda är

$$\int_\gamma \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_Y \sqrt{2} y \, dS.$$

Av symmetri följer nu att $\int_\gamma \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$ om $(a, b, c) = (1, 0, 0)$. (Integranden är inte identiskt noll, men positiva delar tar ut negativa delar.)

Svar: Det blir 0.

c) Vi använder ånyo att

$$\int_\gamma \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_Y \sqrt{2} y \, dS.$$

Av symmetri följer att

$$\int_\gamma \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{r} = \sqrt{2} b \iint_Y dS = \sqrt{2} b \pi$$

Svar: Det blir $\sqrt{2} b \pi$.