LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
ENDIMENSIONELL ANALYS A3/B2
2003-06-05

1. **a)** Arean är

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = \left[\sqrt{x^2+4}\right]_0^2 = \sqrt{8}-\sqrt{4} = \underline{\underline{2(\sqrt{2}-1)}}.$$

b) Rotationsvolymen är

$$\pi\int_0^2 \frac{x^2}{x^2+4}\,dx = [\text{pol. div.}] = \pi\int_0^2 \left(1-\frac{4}{x^2+4}\right)dx =$$

$$= \pi\int_0^2 \left(1-\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\right)dx = \pi\left[x-2\arctan\frac{x}{2}\right]_0^2 = \pi(2-2\arctan 1) = \underline{\underline{2\pi-\frac{\pi^2}{2}}}.$$

2. Den karakteristiska ekvationen $r^2+2r+5=0$ har lösningarna $r=-1\pm 2i$, så den homogena lösningen blir

$$y_h = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x),$$

där A och B är godtyckliga konstanter.

För att finna en partikulärlösning sätter vi $y(x)=z(x)e^x$. Då är $y'=(z'+z)e^x$ och $y''=(z''+2z'+z)e^x$. Insatt i differentialekvationen ger detta

$$(z''+2z'+z)e^x - 2(z'+z)e^x + 5ze^x = 16xe^x \quad\Leftrightarrow\quad z''+4z'+8z=16x.$$

Vi ansätter nu $z=ax+b$. Då är $z'=a$ och $z''=0$. Insättning ger ekvationen $4a+8(ax+b)=16x$, vilket leder till att $a=2$ och $b=-1$. Alltså är $z=2x-1$ och $y_p=(2x-1)e^x$. Den allmänna lösningen blir således

$$y(x) = y_h+y_p = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + e^x(2x-1).$$

Derivation av $y(x)$ ger

$$y'(x) = -e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + e^{-x}(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) + e^x(2x-1) + e^x\cdot 2$$

Begynnelsevärdena ger nu systemet

$$\begin{cases} y(0) = A-1 = -1 \\ y'(0) = -A+2B-1+2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=1 \end{cases}$$

Vi får därför lösningen

$$\underline{\underline{y(x) = e^{-x}(\sin 2x) + e^x(2x-1)}}.$$

3. **a)** Se läroboken sid 321.

b) Vi gör först en partialbråksuppdelning. Ansatsen

$$\frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

ger $A = 2$, $B - 2$ och $C = 0$. Vi får därför

$$\begin{aligned}\int_1^X \frac{2}{x(x^2+1)}\,dx &= \int_1^X \left(\frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+1}\right)dx = \big[2\ln x - \ln(x^2+1)\big]_1^X = \\ &= 2\ln X - \ln(X^2+1) - (2\ln 1 - \ln 2) = \\ &= \ln\frac{X^2}{X^2+1} + \ln 2 \quad\to\quad \ln 1 + \ln 2 = \ln 2 \qquad \text{då } X \to \infty.\end{aligned}$$

Integralens värde är alltså $\underline{\underline{\ln 2}}$

c) För stora x dominerar termen $x^{3/2}$ över x i nämnaren, så integranden är av storleksordning $2/x^{3/2}$. Eftersom

$$\int_1^\infty \frac{2}{x^{3/2}}\,dx = 2\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$$

är konvergent (enligt Sats 13.11 på sidan 326 eller en direkt uträkning) så misstänker vi därför att vår ursprungliga integral är konvergent. Detta verifierar vi genom att konstatera att

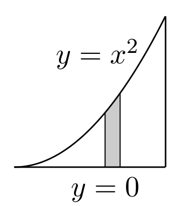
$$0 \le \frac{2}{x^{3/2}+x} \le \frac{2}{x^{3/2}}$$

för alla $x \ge 1$ och använda en jämförelsesats (Sats 13.10 på sidan 326). Vår integral är alltså $\underline{\underline{\text{konvergent}}}$

4. Eftersom skivan är homogen så sätter vi densiteten $\rho = 1$. Vi får då

$$m = A = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right] = \frac{1}{3}.$$

För att beräkna tyngdpunktens koordinat i x-led så skriver vi $dm = dA = x^2\,dx$, och får

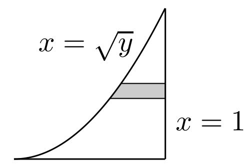


$$\int_S x\,dm = \int_0^1 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{3}\right] = \frac{1}{4}.$$

Detta ger

$$x_T = \frac{1}{m}\int_S x\,dm = \frac{1/4}{1/3} = \frac{3}{4}.$$

För beräkningarna i y-led skriver vi $dm = dA = (1 - \sqrt{y})\,dy$, vilket ger



$$\int_S y\,dm = \int_0^1 (y - y^{3/2})\,dx = \left[\frac{y^2}{2} - \frac{2y^{5/2}}{5}\right] = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}.$$

Detta ger

$$y_T = \frac{1}{m}\int_S x\,dm = \frac{1/10}{1/3} = \frac{3}{10}.$$

Tyngdpunktens koordinater är alltså $\underline{\underline{(x_T, y_T) = (3/4, 3/10)}}$.

5. **a)** Se läroboken sid 315.

b) Med hjälp av analysens huvudsats beräknar vi

$$f'(x) = 2\sqrt{1 + (\sqrt{x})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{1+x}{x}},$$

vilket sin tur ger

$$f''(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{x}}}\cdot\frac{1\cdot x - (1+x)\cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{2x^2\sqrt{\frac{1+x}{x}}}$$

Vi får nu Taylorpolynomet

$$p_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(x)}{2}(x-1)^2 =$$

$$= 0 + \sqrt{2}(x-1) + \frac{-1/2\sqrt{2}}{2}(x-1)^2 = \underline{\underline{\sqrt{2}(x-1) - \frac{1}{4\sqrt{2}}(x-1)^2}}.$$

c) Se läroboken sid 317.

6. Om $T(t)$ betecknar kroppens temperatur vid tiden t (timmar) och vi sätter $t = 0$ då klockan är 22.00 så får vi

$$T'(t) = -k(T(t) - 17), \qquad T(0) = 27, \quad T(1) = 22.$$

Ekvationen löses lämpligen med hjälp av integrerande faktor:

$$T' + kT = 17k \quad\Leftrightarrow\quad (Te^{kt})' = 17ke^{kt} \quad\Leftrightarrow\quad Te^{kt} = 17e^{kt} + C \quad\Leftrightarrow\quad T(t) = 17 + Ce^{-kt}.$$

$$T(0) = 27: \quad 17 + Ce^0 = 27 \quad\Leftrightarrow\quad C = 10.$$

$$T(1) = 22: \quad 17 + 10e^{-k} = 22 \quad\Leftrightarrow\quad e^{-k} = \tfrac{22-17}{10} = \tfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad k = -\ln\tfrac{1}{2} = \ln 2.$$

Vi får $T(t) = 17 + 10e^{-\ln 2\cdot t} = 17 + 10\left(e^{\ln 2}\right)^{-t} = 17 + 10\cdot 2^{-t}$, och skall undersöka när detta är 37:

$$17 + 10\cdot 2^{-t} = 37 \quad\Leftrightarrow\quad 2^{-t} = \tfrac{37-17}{10} = 2 \quad\Leftrightarrow\quad t = -1.$$

Mordet skedde alltså en timme före $t = 0$, dvs. kl 21.00.

<u>Svar: Mordet skedde kl 21.00.</u>