LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
ENDIMENSIONELL ANALYS
DELKURS A2
2015–05–07 kl 8–13

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. a) Definiera $f'(a)$ och använd definitionen för att härleda $f'(1)$ för $f(x) = x^3$. (0.4)

b) Förklara hur man beräknar kvoten mellan två komplexa tal och skriv $\dfrac{1-i}{i-2}$ på rektangulär form. (0.3)

c) Låt f vara en injektiv och deriverbar funktion i $]-1,1[$ som uppfyller $f(0) = 3$ och $f'(0) = -2$. Avgör vilka av följande derivator för inversen f^{-1} som går att bestämma och bestäm dem i så fall: (0.3)

$$(f^{-1})'(0), \qquad (f^{-1})'(3), \qquad (f^{-1})'(-2).$$

2. Skissera grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$, $x > 1$. Ange speciellt eventuella lokala extrempunkter och sneda asymptoter.

3. a) Bestäm real– och imaginärdel av $\left(\dfrac{1-i}{2} + \dfrac{1}{i-1}\right)^{19}$. Svara utan arctan/rottecken. (0.5)

b) Lös ekvationen $iz^2 + (2-4i)z = 1+i$. Svara på formen $a + bi$. (0.5)

4. a) Låt $f(x) = \cos x$. Avgör vilka av följande tre serier som är geometriska (Motivera!) och beräkna summorna av de *konvergenta* geometriska serierna. (0.5)

$$\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\tfrac{\pi k}{2}\right)^k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} f(\pi k)\cdot 2^{-k}, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} f(\pi\, 2^k).$$

b) En luftballong stiger uppåt med den konstanta hastigheten 2 m/sek. Vid en viss tidpunkt är lufttrycket 8000 Pa. Hur snabbt ändras lufttrycket vid denna tidpunkt om det gäller att $p^{1/3} + h/400$ är konstant? (Här är p lufttrycket [Pa] och h höjden [m].) (0.5)

5. Bestäm största möjliga area av en triangel som bildas av de två koordinataxlarna och en tangent till grafen $y = e^{-\sqrt{x}}$, $x > 0$.

6. Definiera $f(x) = \dfrac{2\sin x - \ln(1+2x)}{x^2}$ med $D_f = \{x;\ -0.5 < x < 0.5,\ x \neq 0\}$.

a) Använd Maclaurinutvecklingar till sin och ln för att finna konstanter c_0 och c_1 sådana att $f(x) = c_0 + c_1 x + B(x)x^2$ där $B(x)$ är en funktion som är begränsad nära noll. (0.4)

b) För vilka reella a och b är funktionen $g(x)$ nedan kontinuerlig i $x = 0$? (0.3)

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{om } 0 < x < 0.5, \\ ax + b & \text{om } x \leq 0. \end{cases}$$

c) För vilka reella a och b är funktionen $g(x)$ i 6b) deriverbar i $x = 0$? (0.3)

LYCKA TILL!