LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
System och Transformer
2014–04–23 kl 14–19

Hjälpmedel: Bifogat formelblad.
Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Skriv fullständiga meningar och förklara dina beteckningar. Ge tydliga och enkla svar där så är möjligt.

1. Lös för $t > 0$ begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} x' = 3x - y + \delta(t-1) \\ y' = x + y \end{cases}$$

där $x(0) = y(0) = 1$.

2. a) Rita grafen till $f(t) = \big(\theta(t) - \theta(t - \frac{\pi}{2})\big)\sin t$. (0.2)

b) Beräkna och förenkla distributionsderivatorna f' och f''. (0.4)

c) Låt $g(t) = \delta(t - \pi)$. Beräkna $f * g$ och $f' * g'$. (0.4)

3. Det linjära och tidsinvarianta systemet $\mathcal{S}$ har impulssvaret $h(t) = 1/(1 + t^2)$.

a) Är systemet kausalt? (0.2)

b) Är systemet insignal-utsignalstabilt? (0.2)

c) Bestäm systemets frekvensfunktion, amplitudfunktion och fasfunktion. (0.4)

d) Beräkna systemets svar på insignalen $w(t) = \sin 2t$. (0.2)

4. a) Låt

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Beräkna e^{At}. (0.5)

b) Finns det någon matris B sådan att

$$e^{Bt} = \begin{bmatrix} 1+3t & -t \\ 2t & 1+t \end{bmatrix} ?$$

Bestäm B om den finns. (0.5)

5. Systemet $\mathcal{S}$ är linjärt, kausalt och tidsinvariant. Sambandet mellan insignalen w och utsignalen y ges av differentialekvationen

$$y'' - 3y' + 2y = w.$$

a) Bestäm systemets överföringsfunktion. (0.2)

b) Beräkna den utsignal som svarar mot insignalen $w(t) = e^{-t}\theta(t)$. (0.4)

c) Har differentialekvationen

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-t}\theta(t)$$

någon begränsad lösning? Bestäm i så fall denna. (0.4)

6. Följande ger en enkel modell av diffusion: Två urnor innehåller ett antal vita och svarta kulor. Totalt finns N kulor i vardera urnan. Varje sekund drar man slumpmässigt en kula ur vardera urna och byter plats på dem. Låt x_k och y_k beteckna det förväntade antalet svarta kulor i den första respektive den andra urnan efter k sekunder.

a) Det följer ur allmän sannolikhetsteori att (x_{k+1}, y_{k+1}) beror *linjärt* av (x_k, y_k). Med andra ord finns det en matris A, sådan att

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}.$$

Visa att

$$A = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{N} & \frac{1}{N} \\ \frac{1}{N} & 1 - \frac{1}{N} \end{bmatrix},$$

till exempel genom att beräkna (x_1, y_1) om $(x_0, y_0) = (N, 0)$ respektive $(x_0, y_0) = (0, N)$. (0.3)

b) Lös systemet ur uppgift a). Antag att $x_0 = N$ och $y_0 = 0$. Kontrollera att din lösning uppför sig som man intuitivt förväntar sig, dvs att

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} y_k = \frac{N}{2}. \quad (0.5)$$

c) Anta att N är stort. Ungefär hur stor andel svarta kulor kommer det att finnas i den andra urnan efter N sekunder om $x_0 = N$ och $y_0 = 0$? (Dvs. hur stort är y_N/N om N är stort; tänk i termer av gränsvärden). (0.2)