LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
LINJÄR ALGEBRA
2015–05–29 kl 8–13

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar. Lämna tydliga svar om så är möjligt. Om inget annat anges så kan samtliga baser antas vara ortonormerade och positivt orienterade

1. Låt $P:(1,2,1)$, $Q:(3,1,2)$, $R:(0,0,1)$ och $S:(1,1,8)$. Bestäm

a) avståndet från S till planet som går genom punkterna P,Q,R. (0.5)

b) avståndet från S till linjen som går genom punkterna Q och R. (0.5)

2. Låt $\boldsymbol{u}=(2,1,0)$ och $\boldsymbol{v}=(1,-2,1)$. Visa att $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ är en bas av parvis ortogonala vektorer i rummet (dock *ej ortonormerad*) och bestäm koordinaterna för $(0,0,1)$ i denna bas.

3. Beräkna rangen och nolldimensionen av matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 11 & 6 & -7 \end{pmatrix}.$$

Bestäm dessutom baser både för nollrummet och för kolonnrummet (värderummet) för matrisen.

4. Diagonalisera matrisen

$$A=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

och visa sedan att

$$A^n \to \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \text{ då } n\to\infty.$$

5. Låt F vara en avbildning som beskriver en ortogonal projektion på ett plan i rummet.

a) Visa att om origo inte ligger i planet kan F inte vara en linjär avbildning. (0.2)

b) Vilka egenvärden har avbildningsmatrisen till F om den är linjär? Beskriv de tillhörande egenvektorerna geometriskt. (0.4)

c) Matrisen

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

beskriver en ortogonal projektion på ett plan. Bestäm planets ekvation på affin form (normalform). (0.4)

6. Låt $\boldsymbol{e}$ vara en fix enhetsvektor i rummet och definiera, för varje vektor $\boldsymbol{u}$ i rummet, en ny vektor $F(\boldsymbol{u})$ genom

$$F(\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}+\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{u}.$$

Visa först att F är en isometri, alltså att $|F(\boldsymbol{u})|=|\boldsymbol{u}|$ för alla $\boldsymbol{u}$. Beskriv sedan i ord hur man geometriskt får $F(\boldsymbol{u})$ från $\boldsymbol{u}$. Du ska avgöra om F är en projektion, spegling eller rotation och närmare beskriva denna.