

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga och tydliga motiveringar.

1. Lös ekvationerna

a) $4^x + 3 \cdot 2^x - 4 = 0$ (0.3)

b) $|x + 1| = 2 + x$ (0.3)

c) $\ln 2 + \ln\left(x + \frac{3}{2}\right) = 2 \ln x$ (0.4)

2. a) Polynomet

$$p(x) = x^3 + ax^2 - 2x + 2, \quad \text{där } a \text{ är ett reellt tal,}$$

har ett nollställe $x = 1$. Ange alla nollställen till $p(x)$. (0.5)

b) Funktionen

$$f(x) = x^3 + bx^2 - x + 1, \quad \text{där } b \text{ är ett reellt tal,}$$

har en lokal minimipunkt $x = 1$. Finn alla lokala extrempunkter till f samt ange dess karaktär. (0.5)

3. a) Rita grafen till funktionen

$$y = x - \arctan(2x).$$

Ange eventuella sneda asymptoter. (0.8)

b) Hur många lösningar har ekvationen

$$x - \arctan(2x) = a$$

för olika värden på konstanten a ? (0.2)

4. a) Visa med hjälp av medelvärdessatsen att om funktionen f är deriverbar på ett öppet intervall I och $f'(x) = 0$ för alla $x \in I$ så är f en konstant funktion i I . (0.5)

b) Visa att likheten

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

gäller för alla $-1 < x < 1$. (0.5)

5. a) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 - \sqrt{x+1}}. \quad (0.5)$$

V.g. vänd!

b) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(c + \frac{1}{x} \right)^x$$

för varje positivt värde på konstanten c . (0.5)

6. a) En partikel rör sig längs en rät linje. Partikelns hastighet v beror på den tillryggalagda sträckan enligt

$$v = \frac{3s + 4}{2s + 1},$$

där s är avståndet från partikeln till dess startpunkt. Bestäm partikelns acceleration när $s = 2$. (Ledning: Derivat av hastighet med avseende på tid ger acceleration.) (0.7)

- b) Beräkna med hjälp av Binomialsatsen följande summa:

$$\binom{12}{0} + \binom{12}{2} + \binom{12}{4} + \binom{12}{6} + \binom{12}{8} + \binom{12}{10} + \binom{12}{12}. \quad (0.3)$$

LYCKA TILL!