LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
KONTINUERLIGA SYSTEM
2015-06-01

1. Isoleringen bildar en ihålig cylinder vars radie går från 1 dm till 3 dm. Om u betecknar temperaturen så är modellen, en stationär värmeledningsekvation, $-\Delta u = 0$, med randvillkoren att $u = 80$ på den inre randen och $u = 0$ på den yttre. Temperaturen kan antas inte variera längs med cylindern så det räcker att studera ett cirkulärt tvärsnitt. Området och modellen passar bra ihop med polära koordinater centrerade i cirkelns mittpunkt. Eftersom området och randvillkoren är vinkeloberoende kommer temperaturen också att bli vinkeloberoende och endast bero på radien r . Modellen kan skrivas

$$u''(r) + \frac{1}{r}u'(r) = 0, \quad u(1) = 80, \quad u(3) = 0.$$

Lösningen till differentialekvationen står på formelbladet eller om man skriver ekvationen som $r^{-1}\partial_r(r\partial_r u) = 0$ är det lätt att integrera i två steg. Lösningen blir nu $u(r) = a + b\ln r$ med $a = 80$ och $b = -80/\ln 3$.

Svar: Temperaturen i halvvägs in i isoleringen ges av $80 - 80\ln 2/\ln 3 = 29{,}5^\circ\ C$.

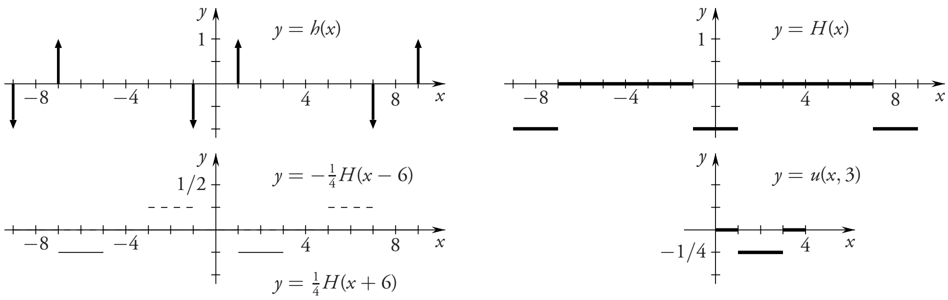
2. En modell är

$$\begin{cases} u''_{tt} - 4u''_{xx} = 0, & 0 < x < 4,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(4,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < 4, \\ u'_t(x,0) = \delta_1(x), & 0 < x < 4. \end{cases}$$

Låt h vara en udda och 8-periodisk funktion sådan att $h(x) = \delta(x-1) - \delta(x+1)$ då $-4 < x < 4$. Enligt d'Alemberts formel är då

$$u(x,t) = \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} h(y)\,dy \quad \text{då} \quad 0 < x < 4.$$

Speciellt blir $u(x,3) = \frac{1}{4}(\theta(x+6-1-8) - \theta(x+6+1-8) = \frac{1}{4}(\theta(x-3) - \theta(x-1))$ då $0 < x < 4$. u kan också konstrueras grafiskt enligt figurerna nedan.



Lösningen kan även skrivas $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{k\pi}{4})}{k\pi} \sin(\frac{k\pi}{2}t)\sin(\frac{k\pi}{4}x)$.

3. Legendrepolynomen P_n är ortogonala i $L_2([-1,1])$. Det tredjegradspolynom p som bäst approximerar $f(x) = 1 - |x|$ i L_2-norm på intervallet $[-1,1]$ kan sskrivas

$$p(x) = \frac{(P_0|f)}{\|P_0\|^2}P_0 + \frac{(P_1|f)}{\|P_1\|^2}P_1 + \frac{(P_2|f)}{\|P_2\|^2}P_2 + \frac{(P_3|f)}{\|P_3\|^2}P_3.$$

Legendrepolynomen bestäms enklast med rekursionsformeln på formelbladet. Man får

$$P_0(x) = 1\ , \quad P_1(x) = x\ , \quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \quad P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x.$$

(Alternativt kan man ortogonalisera $1, x, x^2, x^3$ med Gram-Schmidts metod.) Observera att P_0, P_2 och f är jämna funktioner, att P_1 och P_3 är udda samt att integrationsintervallet $[-1, 1]$ är symmetriskt vilket snabbt ger att $(P_1|f) = (P_3|f) = 0$

$$\begin{aligned}
\|P_0\|^2 &= \int_{-1}^{1} dx = 2,\\
\|P_2\|^2 &= \int_{-1}^{1} \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{2}{5},\\
(P_0|f) &= \int_{-1}^{1} 1 - |x|\, dx = 2\int_{0}^{1} 1 - x\, dx = 1,\\
(P_2|f) &= (P_2|1) - (P_2|\,|x|) = 0 - \int_{0}^{1} (3x^3 - x)\, dx = -\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Insatt i uttrycket för p ovan ger detta $p(x) = \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1/4}{2/5} \cdot \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$.

Svar: Bäst approximerande tredjegradspolynom är $p(x) = \dfrac{1}{16}(13 - 15x^2)$.

4. Utvidga udda kring $x = 0$ eftersom det är homogena dirichletvillkor i $x = 0$. Om u även betecknar den utvidgade funktionen så ska den lösa problemet

$$\begin{cases} \partial_t u - D\,\partial_x^2 u = -k\,u, \\ u(x, 0) = m\,\delta(x-1) - m\,\delta(x+1). \end{cases}$$

Låt $\hat{u}(\xi, t)$ vara den partiella fouriertransformen i x-led av $u(x, t)$. Fouriertransformation i x-led av differentialekvationen ger

$$\partial_t \hat{u} - D(i\xi)^2 \hat{u} = -k\hat{u}$$

som kan skrivas

$$\partial_t \hat{u} + (D\xi^2 + k)\hat{u} = 0$$

med lösningen

$$\hat{u}(\xi, t) = c(\xi)\, e^{-(D\xi^2 + k)t}\ .$$

Här ges $c(\xi)$ av begynnelsevärdet $\hat{u}(\xi, 0) = m\,e^{-i\xi} - m\,e^{i\xi}$. Således är

$$\hat{u}(\xi, t) = m\,e^{-kt}\, e^{-i\xi}\, e^{-D\xi^2 t} - m\,e^{-kt}\, e^{i\xi}\, e^{-D\xi^2 t}\ .$$

Inverstransformation ger nu lösningen.

Svar: Lösningen är $u(x, t) = \dfrac{m\,e^{-kt}}{\sqrt{4\pi D t}}\left(e^{-(x-1)^2/(4Dt)} - e^{-(x+1)^2/(4Dt)}\right)$ för $x > 0$, $t > 0$.

Ett förslag på fysikalsik modell. Ett långt och smalt vattenfyllt rör sträcker sig längs positiva x-axeln. Röret är vid $x = 0$ anslutet till en reservoar med rent vatten. Vid tiden $t = 0$ brister en ampull vid $x = 1$ och massan M av ett radioaktivt ämne börjar diffundera ut i vattnet samtidigt som det sönderfaller med en hastighet som är proportionell mot koncentrationen. Diffusionskonstanten är D. Sök koncentrationen av det diffunderande ämnet.

5. Dela upp problemet i två delar

$$\text{A}\begin{cases} -\Delta u = \delta_{(2,3)}(x,y), \ x>0, y>0 \\ u(x,0)=0, \ x>0 \\ u(0,y)=0, \ y>0 \end{cases} \qquad \text{B}\begin{cases} -\Delta u = 0, \ x>0, y>0 \\ u(x,0)=0, \ x>0 \\ u(0,y)=\pi, \ y>0\,. \end{cases}$$

Problem A löses genom att spegla udda i först x-axeln och sedan y-axeln. Lösningen u_A kan därefter skrivas med fundamentallösningar:

$$u_A(x,y) = -\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\left((x-2)^2+(y-3)^2\right)\left((x+2)^2+(y+3)^2\right)}{\left((x-2)^2+(y+3)^2\right)\xi\left((x+2)^2+(y-3)^2\right)}\,.$$

Problem B löses genom att spegla udda i x-axeln. Lösningen u_B kan sedan skrivas med hjälp av Poissonkärnan för ett halvplan:

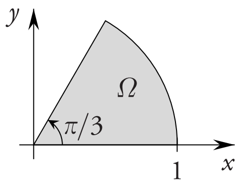
$$\begin{aligned} u_B(x,y) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{(y-\alpha)^2+x^2}\cdot(-\pi)\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{x}{(y-\alpha)^2+x^2}\cdot\pi\,d\alpha \\ &= \left[\arctan\frac{y-\alpha}{x}\right]_{-\infty}^{0} + \left[-\arctan\frac{y-\alpha}{x}\right]_{0}^{\infty} = 2\arctan\frac{y}{x}. \end{aligned}$$

En lösningen av det givna problemet är $u_A(x,y)+u_B(x,y)$. (Lösningen är inte entydig. Vi kan exempelvis lägga till xy till den framtagna lösningen.)

Svar: Lösningen blir

$$u(x,y) = -\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\left((x-2)^2+(y-3)^2\right)\left((x+2)^2+(y+3)^2\right)}{\left((x-2)^2+(y+3)^2\right)\xi\left((x+2)^2+(y-3)^2\right)} + 2\arctan\frac{y}{x}.$$

6. Lägg in sektorn Ω i ett koordinatsystem.



Svängningsrörelsen beskrivs av

$$\begin{cases} u''_{tt} - c^2\,\Delta\, u = 0, & (x,y)\in\Omega, \\ u = 0, & \text{på } \partial\Omega. \end{cases}$$

För att bestämma egenvinkelfrekvenser och svängningsmoder löser vi egenvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\,\Delta\, v = \lambda v, & (x,y)\in\Omega, \\ v = 0 & \text{på } \partial\Omega. \end{cases}$$

Gå över till planpolära koordinater och separera koordinater. $v(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$ insatt i $\Delta v+\lambda v=0$ ger

$$\begin{cases} \Theta'' = -c\Theta, \\ \frac{1}{r}(rR)' + (\lambda - \frac{c}{r^2})R = 0. \end{cases}$$

Vi löser först θ-ekvationen och använder då också randvillkoren

$$\begin{cases} \Theta'' = -c\Theta, \\ \Theta(0) = \Theta(\frac{\pi}{3}) = 0. \end{cases}$$

Här finns icketriviala lösningar då $\Theta_n(\theta) = \sin 3n\theta$ och $c_n = 9n^2$, $n = 1, 2, \ldots$ Insatt i ekvationen för R ger detta

$$R'' + \frac{1}{r}R' + (\lambda - \frac{9n^2}{r^2})R = 0.$$

Detta är Bessels differentialekvation med (den begränsade) lösningen

$$R(r) = J_{3n}(\sqrt{\lambda}r).$$

Randvillkoret $R(1) = 0$ ger att egenvärdena $\lambda_{nk} = (\alpha_{3n,k})^2$, där $\alpha_{3n,k}$ är det k :te positiva nollstället till Besselfunktionen J_{3n}, $k = 1, 2, \ldots$, $n = 1, 2, \ldots$ Härur följer, med hjälp av egenfunktionsutvecklingar, att membranets egenfrekvenser och svängningsmoder är

$$\text{egenfrekvenser } f_{nk} = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\lambda_{nk}} = \frac{c}{2\pi}\alpha_{3n,k}\ , \quad k, n = 1, 2, \ldots,$$

$$\text{svängningsmoder } J_{3n}(\alpha_{3n,k}r) \sin 3n\theta.$$

Med hjälp av tabellen över besselnollställen ser vi att de fyra lägsta frekvenserna ges av $\alpha_{3,1}$, $\alpha_{3,2}$, $\alpha_{6,1}$ respektive $\alpha_{3,3}$. Figurerna nedan visar noderna hos motsvarande svängningsmoder.