LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

SVAR OCH ANVISNINGAR TILL FLERDIMENSIONELL ANALYS
2015–03–20 8–13

1. $-\frac{1}{3} + \ln\frac{3}{2}$.

2. a) $x - y - \frac{e}{2}z = 0$.

b) $2x + 5y = 9$.

c) De stationära punkterna fås ur ekvationssystemet $x(2-(x^2-y^2)) = 0,\ y(2+x^2-y^2) = 0$. Detta ger fyra fall:

1. $x = 0, y = 0$,
2. $x = 0, 2 + x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = \pm\sqrt{2}$,
3. $y = 0, 2 - x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}, y = 0$,
4. $2 + x^2 - y^2 = 0, 2 - x^2 + y^2 = 0$, vilket saknar lösning.

Alla punkterna ligger i området och vi har följande funktionsvärden:

$$f(0,0) = 0, f(\pm\sqrt{2},0) = 2e^{-1}, f(0,\pm\sqrt{2}) = -2e^{-1}.$$

Återstår att undersöka randen $x^2+y^2 = 4$. Vi parametriserar med $x = 2\cos t, y = 2\sin t, 0 \le t \le 2\pi$, och då blir funktionen

$$f(\cos t, \sin t) = (4\cos^2 t - 4\sin^2 t)e^{-2} = 4e^{-2}\cos(2t).$$

Största värdet på randen är därför $4e^{-2}$ och minsta värdet $-4e^{-2}$. Vidare gäller t.ex. att $4e^{-2} = \frac{4}{e}e^{-1} < 2e^{-1}$, så vi får $f_{max} = 2e^{-1}, \quad f_{min} = -2e^{-1}$.

3. a) Antingen parametriserar man med $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$, eller så resonerar man som

$$\int_\gamma \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2} = \int_\gamma \frac{-ydx + xdy}{r^2} = \frac{2}{r^2} \cdot \text{arean av } x^2+y^2 \le r^2 = 2\pi.$$

b) Om vi lägger en liten cirkel $x^2 + y^2 = r^2$ runt origo som ligger helt i området, så får vi ett område som inte innehåller origo. Använder vi Greens formel får vi att

$$\int_\gamma \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \int_{x^2+y^2} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = 2\pi.$$

c) Man kan antingen lösa den genom att bestämma en potentialfunktion till

$$F(x, y) = \frac{3x^4}{4} + x^3 y + \frac{3y^2}{2}$$

och sedan använda att

$$\int_\gamma 3x^2(x + y)dx + (x^3 + 3y)dy = F(2, 0) - F(0, 0) = 12.$$

Alternativt kan man använda att integranden i Greens formel blir noll och byta till den integrationsväg som går längs x-axeln. Då får man att

$$\int_\gamma 3x^2(x + y)dx + (x^3 + 3y)dy = \int_0^2 3x^3 dx = 12.$$

4. a) I rymdpolära koordinater $x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta$ blir området $0 \le r \le \sqrt{2}, 0 \le \theta \le \pi/2, 0 \le \varphi \le 2\pi$ och eftersom vi vet att $dxdydz = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$, så får vi att

$$\iiint_K ze^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz = \int_0^{\sqrt{2}} (\int_0^{\pi/2} (\int_0^{2\pi} r\cos\theta e^{-r^2} r^2 \sin\theta d\varphi) d\theta) dr =$$

$$2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (\int_0^{\pi/2} r^3 \cos\theta \sin\theta e^{-r^2} d\theta) dr = \pi \int_0^{\sqrt{2}} r^3 e^{-r^2} (\int_0^{\pi/2} \sin 2\theta d\theta) dr =$$

$$\pi \int_0^{\sqrt{2}} r^3 e^{-r^2} (\int_0^{\pi/2} \sin 2\theta d\theta) dr = \pi \int_0^{\sqrt{2}} r^3 e^{-r^2} dr.$$

Här gör vi variabelbytet $t = r^2$ och får integralen

$$\frac{\pi}{2} \int_0^2 te^{-t} dt = \frac{\pi}{2}([-te^{-t}]_0^2 + \int_0^2 e^{-t} dt) = \frac{\pi}{2}(-2e^{-2} + 1 - e^{-2}) = \frac{\pi}{2}(1 - 3e^{-2})$$

Vi kan också lösa uppgiften genom upprepad integration. Ett alternativ för detta är

$$\iiint_K ze^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz = \int_{x^2+y^2\le 2} e^{-x^2-y^2} (\int_0^{\sqrt{2-x^2-y^2}} ze^{-z^2} dz) dxdy =$$

$$\frac{1}{2} \int_{x^2+y^2\le 2} e^{-x^2-y^2} \left[-e^{-z^2}\right]_0^{\sqrt{2-x^2-y^2}}) dxdy = \frac{1}{2} \int_{x^2+y^2\le 2} e^{-x^2-y^2} (1 - e^{-(2-x^2-y^2)}) dxdy =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} (e^{-r^2} - e^{-2}) r (\int_0^{2\pi} d\varphi) dr = \frac{\pi}{2} \int_0^2 (e^{-t} - e^{-2}) dt = \frac{\pi}{2}(1 - 3e^{-2}).$$

Vi kan också integrerar i andra ordningen:

$$\iiint_K ze^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz = \int_0^{\sqrt{2}} ze^{-z^2} (\int_{x^2+y^2\le 2-z^2} e^{-x^2-y^2} dxdy) dz =$$

$$\int_0^{\sqrt{2}} ze^{-z^2} 2\pi (\int_0^{\sqrt{2-z^2}} re^{-r^2} dr) dz = \pi \int_0^{\sqrt{2}} ze^{-z^2} (\int_0^{2-z^2} e^{-t} dt) dz =$$

$$\pi \int_0^{\sqrt{2}} ze^{-z^2} (1 - e^{-(2-z^2)}) dz = \frac{\pi}{2} \int_0^2 (e^{-t} - e^{-2}) dt = \frac{\pi}{2}(1 - 3e^{-2}).$$

b) Grafen $z = x^2 + y^2$ uppkommer genom att vi roterar $z = x^2$ runt z-axeln. Dess nivåkurvor är därför cirklar och ytan växer ut från origo, så gradienten pekar bort från origo. Enda kandidaten är (VI).

Grafen $z = 4 - x^2 - y^2$ uppkommer genom att vi roterar $z = 4 - x^2$ runt z-axeln som har ett enda global maximum i origo. Igen är därför nivåkurvorna cirklar, men gradienten pekar in mot origo. Kandidater för detta är (I) och (V). För att skilja dem åt får vi titta närmare på nivårkurvorna: radien ska vara $r = \sqrt{4 - z}$ vilket för de aktuella nivåerna blir $0, 1, \sqrt{2} \approx 1.41, \sqrt{3} \approx 1.73$ De kommer alltså tätare och tätare, vilket gör att korrekt bild är (I).

Nivåkurvorna till $h(x, y) = xy$ utgörs av axlarna och hyperbler med dessa som asymptoter. Enda kandidaten är (II).

5. a) Kedjeregeln ger att $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} e^{-t}$, $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}(-xe^{-t}) + \frac{\partial f}{\partial v}$ vilket medför att

$$\frac{\partial f}{\partial t} + x\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}(-xe^{-t}) + \frac{\partial f}{\partial v} + x\frac{\partial f}{\partial u}e^{-t} = \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Detta ger oss differentialekvationen $\partial f/\partial v = -f$ som efter multiplikation med e^v (integrerande faktor) blir $\frac{\partial (e^v f)}{\partial v} = 0$. Integrerar vi det får vi att $e^v f(u, v) = G(u)$ för någon funktion G av u. Villkoret $f(x, 0) = x$ kan skrivas $f(u, 0) = u$ (när $t = 0$ är $u = x$ och $v = 0$), så vi ser att $G(u) = u$. Vi får alltså $f(u, v) = ue^{-v}$, vilket uttryckt i x, t blir

$$f(x, t) = xe^{-2t}.$$

b) Definiera $g(x, y) = x^4 + y^4 - 3xy - 9$. Då har vi att

$$\text{grad } f = (y, x), \qquad \text{grad } g = (4x^3 - 3y, 4y^3 - 3x).$$

Motsvarigheten till stationära punkter får vi därför genom att beräkna

$$\begin{vmatrix} y & 4x^3 - 3y \\ x & 4y^3 - 3x \end{vmatrix} = 4y^4 - 3xy - 4x^4 + 3xy = 4(x^4 - y^4) = 0.$$

I sådana ska alltså gälla att $x = \pm y$ och vi söker dem som ligger på $x^4 + y^4 - 3xy = 9$ i första kvadranten $x > 0, y > 0$, vilket kräver $x = y$. Insättes det i ekvationen för kurvan får vi att $2x^4 - 3x^2 - 9 = 0$. Denna har lösningarna $x^2 = \frac{3}{4} \pm \frac{9}{4}$ där endast plustecknet är möjligt som ger $x^2 = 3$. Det följer att $x = \sqrt{3}$ och punkten är $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$. Motsvarande funktionsvärde för f är 3.

Vidare måste vi undersöka ändpunkterna på kurvan, vilka är skärningarna med koordinataxlarna. Men där är funktionen av nödvändighet 0 eftersom endera av x, y är det. Vi ser därför att det största värdet är 3 och det minsta värdet är 0.

6. a) Nivåkurvan som svarar mot nivån e^{-k} blir ellipsen $2x^2 + 3y^2 = k$. Figur på nästa sida.

b) Vi har att grad $C(x, y) = -2C(x, y)(2x, 3y)$ och alltså grad $C(1, 2) = -2e^{-2-12}(2, 6) = -4e^{-14}(1, 3)$ vars riktning är samma som $-(1, 3)$, vilket är den sökta riktningen. Gradientens längd i punkten är

$$|\text{grad } C(1, 2)| = 4e^{-14}\sqrt{1^2 + 3^2} = 4e^{-14}\sqrt{10},$$

vilket ger den sökta koncentrationsökningen.

c) För kurvan $y = \phi(x)$ gäller att tangentens riktningskoefficient i punkten (a, b) ges av $\phi'(a)$. I samma punkt är koncentrationsgradientens riktning lika med $(2a, 3b)$, vilket betyder riktningskoefficienten $3b/2a$. Enligt förutsättningarna ska dessa vara lika, och eftersom $b = \phi(a)$, betyder det att $\phi'(a) = 3\phi(a)/2a$. Detta är en separabel differentialekvation ($a > 0$):

$$\phi'(a) = 3\phi(a)/2a \Leftrightarrow \frac{\phi'(a)}{\phi(a)} = \frac{3}{2a} \Leftrightarrow \ln \phi(a) = \frac{3}{2} \ln a + C.$$

Här bestämmer vi C genom att vi har att $\phi(1) = 2$, vilket betyder att $C = \ln 2$. Det följer att

$$\phi(a) = \exp(\frac{3}{2} \ln a + \ln 2) = 2a^{3/2}.$$

Vi ser alltså att vägen ifråga ges av ekvationen $y = 2x^{3/2}$ där $0 \leq x \leq 1$ (fast genomlöpt från $(1, 2)$ till $(0, 0)$).

En grafisk illustration finns nedan, där vi ser hur kurvan hela tiden skär C:s nivåkurvor vinkelrät. Det var det villkoret vi utnyttjade i räkningarna ovan.