LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
SYSTEM OCH TRANSFORMER
2015–05–07

1. Laplacetransformering ger att

$$Y(s)(s^2+4s+13) = (s+2)W(s)s,$$

där $Y = \mathcal{L}y$ och $W = \mathcal{L}w$. Överföringsfunktionen är

$$H(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{s+2}{(s+2)^2+9}.$$

Därför är impulssvaret

$$\mathcal{L}^{-1}(H(s)) = e^{-2t}\cos(3t)\theta(t).$$

Stegsvaret ges av

$$\mathcal{L}^{-1}(H(s)\frac{1}{s}) = \int_{-infty}^{t} h(t)\,dt = \left(-\frac{2}{13}e^{-2t}\cos(3t) + \frac{3}{13}e^{-2t}\sin(3t) + \frac{2}{13}\right)\theta(t).$$

2. Förenkling ger

$$y'''(t) = -2\delta(t+1) + 2\delta(t+3).$$

Integrering ger

$$y''(t) = -2\theta(t+1) + 2\theta(t+3) + A$$
$$y'(t) = -2(t+1)\theta(t+1) + 2(t+3)\theta(t+3) + At + B$$
$$y(t) = -(t+1)^2\theta(t+1) + (t+3)^2\theta(t+3) + \frac{A}{2}t^2 + Bt + C.$$

$y'(0) = 4 \implies B = 0$, $y(0) = 1 \implies C = 0$ och $y(t)$ begränsad då $t \to -\infty$ ger $A = 0$.
Alltså är $y(t) = -(t+1)^2\theta(t+1) + (t+3)^2\theta(t+3)$.

3. Vi har

$$2x' - y' = 3.$$

Ansätt $z = 2x - y$ och $z' = 3$. Därför är $2x - y = 3t + C$ och $y = 2x - 3t + C$. Insättning in i första differentialekvationen ger

$$x = \frac{3}{2}t^2 + 2t \qquad y = 3t^2 + t$$

som partikulärlösning. Eftersom systemmatrisen har 0 som dubbelegenvärde ansätter vi för homogena lösning $x = C_1t + C_2$ och $y = C_3t + C_4$. Därför är

$$x(t) = C_1t + C_2 + \frac{3}{2}t^2 + 2t \qquad y(t) = 2C_1t + (2C_2 - C_1) + 3t^2 + t$$

den allmänna lösningen.

4. a) Vi noterar att om A har egenvärdena λ_l så har iA egenvärderna $i\lambda_l$. Båda tidsdiskreta systemen är stabila om

$$|\lambda_l| = |i\lambda_l| < 1 \qquad l = 1, \cdots, n.$$

b) Vi har $\mathcal{R}e(i\lambda_l) = -\mathcal{I}m(\lambda_l)$. Därför är båda kontinuerliga systemen stabila om

$$\mathcal{R}e(\lambda_l) < 0 \qquad \text{och} \qquad \mathcal{I}m(\lambda_l) > 0 \qquad l = 1, \cdots, n.$$

c) Egenvärderna till A är $a \pm b \in \mathbb{R}$. Det tidsdiskreta systemet är stabilt om

$$|a+b| < 1 \qquad \text{och} \qquad |a-b| < 1.$$

Det kontinuerliga systemet är stabilt om

$$a+b < 0 \qquad \text{och} \qquad a-b < 0.$$

5. a) Integralen är en faltning. Fouriertransformation ger

$$\hat{y}(w)\frac{2}{1+w^2} = 2\pi i\delta'(w) + \frac{1}{1+iw}.$$

Vi får (med förenkling)

$$\hat{y}(w) = \pi i(1+w^2)\delta'(w) + \frac{1}{2}(1-iw) = \pi i\delta'(w) + \frac{1}{2}(1-iw).$$

Inverstransformering ger

$$y(t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\delta(t) - \frac{1}{2}\delta'(t).$$

b) Sätt $e^{-|t|} = e^t(1-\theta(t)) + e^{-t}\theta(t)$ och beräkna faltningsintegralen.

6. a) Vi ser att $-\hat{f}(-w) = \overline{\hat{f}(w)}$. Därför

$$\overline{f(t)} = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iwt}\hat{f}(w)\,dw} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt}\overline{\hat{f}(w)}\,dw = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ist}\hat{f}(s)\,ds = -f(t),$$

(med variabelbyte $s = -w$).

b) Vi ser att

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \hat{f}(0) = i.$$

Med hjälp av Parsevals formel och a) får vi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2\,dt = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(w)|^2\,d\omega = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1+3w^2}{(1+w+w^3)^2}\,dw$$
$$= -\frac{1}{\pi}\int_1^{\infty} \frac{1}{z^2}\,dz = -\frac{1}{\pi}.$$