

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 3, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 3.$$

2. Kurvan $y = \sqrt{\ln(x+1)}$, $0 \leq x \leq 1$, roterar kring x -axeln och bildar en homogen rotationskropp K .

a) Beräkna volymen av K . (0.5)

b) Bestäm tyngdpunkten (masscentrum) för K . (0.5)

(För tyngdpunktens x -koordinat gäller $x_T = \frac{1}{m} \int_K x \, dm$, där m är massan av K .)

3. a) Lös ekvationen $iz^2 + (2 - 2i)z - 4 = 0$. (0.5)

b) Visa att $|\sqrt{1+x} - (1 + \frac{1}{2}x)| \leq \frac{1}{8}x^2$ om $x \geq 0$. (0.5)

4. Avgör om följande integraler är konvergenta eller divergenta. Ange också, i det fall att integralen är konvergent, integralens värde.

a) $\int_2^\infty \frac{x-8}{x^3+4x} dx$, (0.7)

b) $\int_0^2 \frac{x-8}{x^3+4x} dx$. (0.3)

5. a) Formulera integralkalkylens medelvärdessats. (0.2)

b) Formulera analysens huvudsats. (0.2)

c) Bestäm alla kontinuerliga funktioner f som uppfyller integralekvationen (0.6)

$$f(x) = -1 + \int_0^{x^2} \frac{(f(\sqrt{t}))^2 \sin t}{\cos^2 t} dt, \quad -1 < x < 1.$$

6. Du är på fest och det är dags för efterrätt. Precis när du serveras kaffe så börjar någon hålla ett halvtimmeslångt tal. När talet slutar är temperaturen på ditt kaffe 54°C , och en halvtimme efter att talet är slut är den 38°C . Vad hade kaffet för serveringstemperatur? Temperaturen i festlokalen är 22°C .

(Enligt *Newtons avvalningslag* avtar temperaturen hos en varm kropp med en hastighet som är proportionell mot skillnaden mellan kroppens och omgivningens temperatur.)

LYCKA TILL!