LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Funktionsteori
2013–08–28, Svar och anvisningar

1. För att v ska vara imaginärdelen av en analytisk funktion, så måste v vara harmonisk vilket leder till $a = -1$. Lösning av Cauchy–Riemanns ekvationer ger tillsammans med identitetssatsen att

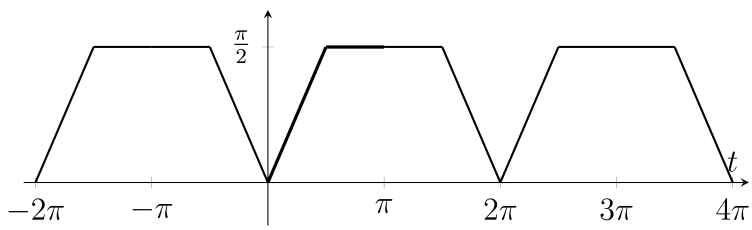
$$f(z) = iz^2 + 6z + C$$

där C är en *reell* konstant.

2. Svar: $a_n = \frac{1}{2}n(n-1)$.

3. a) Divergent (termerna går mot 1)
b) Konvergent (enklast via kvottestet)
c) Konvergent enligt Leibniz (glöm inte att kontrollera alla förutsättningar)
d) Absolutkonvergent och därmed konvergent (jämför med p-serie, $p = 2$)
e) Absolutkonvergent och därmed konvergent (jämför med p-serie, $p = 3$, utnyttja Maclaurin-serien för sin)

4. a)



b) Fourierkoefficienterna blir:

$$a_k = \frac{2(\cos\frac{k\pi}{2} - 1)}{\pi k^2}, \qquad b_k = 0, \qquad c_0 = \frac{3\pi}{8},$$

och motsvarande Fourierserie $c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$.

c) Med hjälp av Parsevals formel blir

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = 2\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |f(t)|^2\,dt - |c_0|^2\right) = \frac{5\pi^2}{96}.$$

5. a) $a_0 = f(0) = 0$ och $a_1 = f'(0) = 1$.

b) De singulariteter som ligger närmast origo är i $z = \pm\frac{\pi}{2}$, så konvergensradien blir $\frac{\pi}{2}$.

c) Enligt ovan konvergerar serien för $z = 1$ (mot $f(1)$), dvs seriens värde blir $\frac{1}{\cos 1}$.

6. Anta att f är en funktion som är analytisk på området $D \subset \mathbb{C}$. Då gäller som bekant att f har en primitiv funktion på D om och endast om

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

för alla slutna kurvor γ i D.

a) Utnyttja insättningsformeln.

b) Genom att betrakta kurvor som omsluter $z = 1$ respektive $z = -1$ och kurvor som omsluter båda singulariteterna ger residysatsen att g har en primitiv funktion om och endast om $f(1) = f(-1) = 0$.

c) Med en liknande analys som i b) blir villkoret $f(1) - f(-1) = 0$.