LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Funktionsteori
2014–03–11 kl 8–13

Hjälpmedel: Bifogat formelblad.
Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Skriv fullständiga meningar och förklara dina beteckningar. Ge tydliga och enkla svar där så är möjligt.

1. Lös rekursionsekvationen $x_{n+2} - x_{n+1} - 2x_n = 3 \cdot 2^{n+1}$, där $x_0 = 3$, $x_1 = 2$.

2. a) Lös ekvationen $\tan z = 3i$ fullständigt. (0.5)

b) Låt $\operatorname{Log} z$ beteckna principalgrenen av den komplexa logaritmen. Beräkna

$$e^{\operatorname{Log}(2+5i)} \qquad \text{och} \qquad \operatorname{Log}\left(e^{2+5i}\right).$$

Svara på formen $a + ib$. (0.5)

3. a) Vilka av följande serier är konvergenta respektive divergenta? Var noggrann med motiveringen. (0.2/styck)

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{\ln k}} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}}{k^2+1} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot (3+2i)^k}{(k+1) \cdot 4^k}$$

b) Bestäm konvergensskivan för potensserien

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(z+i)^{2k}}{2^k}\,. \qquad (0.4)$$

4. Funktionen f är 2π-periodisk och uppfyller att

$$f(t) = \begin{cases} 2, & -\pi < t < -\frac{\pi}{2} \\ -1, & -\frac{\pi}{2} < t < \pi. \end{cases}$$

Funktionens trigonometriska Fourierserie blir (det behöver du inte kontrollera)

$$-\frac{1}{4} + \frac{3}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\sin\frac{k\pi}{2}}{k} \cos kt + \frac{(-1)^k - \cos\frac{k\pi}{2}}{k} \sin kt.$$

a) Rita en graf som tydligt visar Fourierseriens summa på intervallet $0 \leq t \leq 3\pi$. För full poäng krävs att du motiverar grafens utseende. (0.4)

b) Konvergerar Fourierserien likformigt på intervallet $-0 \leq t \leq 2\pi$? (0.2)

c) Utnyttja Fourierserien för att beräkna summan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin\frac{k\pi}{2}}{k}. \qquad (0.4)$$

5. Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4x+5)}.$$

6. a) Anta att u och v är reellvärda funktioner sådana att $f = u + iv$ är holomorf (analytisk). Bevisa att funktionen $u + v$ måste vara harmonisk. (0.3)

b) Anta att u och v är reellvärda funktioner sådana att funktionen $f = u + iv$ är holomorf (analytisk) utom i punkten $z = 0$ och uppfyller att

$$u(x,y) + v(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}, \qquad \text{då } (x,y) \neq (0,0).$$

Bestäm alla sådana funktioner f (svara på formen $f(z)$, där $z = x + iy$). (0.7)