

*HJÄLPMEDEL: Utdelad formelsamling samt miniräknare.*

*Motivera lösningarna väl.*

1. Lös diffusionsproblemet

$$\begin{cases} u'_t - a u''_{xx} = 0, & x > 0, t > 0, \\ u'_x(0, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = \theta(x - 1), & x > 0. \end{cases}$$

där diffusionskonstanten  $a$  är positiv.

2. En halvoändlig, elastisk sträng längs positiva  $x$ -axeln är fast inspänd i  $x = 0$  och har vågutbredningshastighet 2. Vid tiden  $t = 0$  är strängen i vila och har formen

$$g(x) = 4(1 - |x - 4|)(\theta(x - 3) - \theta(x - 5)).$$

Ställ upp en matematisk modell för strängens transversella utböjning, lös problemet och rita strängen då  $t = 6$ . Rita även strängen då  $t = 6$  om strängen modifieras till att vara fast inspänd i både  $x = 0$  och  $x = 10$  men med samma vågutbredningshastighet och begynnelsevillkor.

3. Betrakta operatorn

$$\mathcal{A}u = -\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \frac{du}{dx} \right) + u, \quad D_{\mathcal{A}} = \{u \in C^2([1, 2]); u(1) = u(2) = 0\}.$$

Ange en skalärprodukt i vilken  $\mathcal{A}$  är symmetrisk och visa att  $\mathcal{A}$  är symmetrisk och positivt semidefinit i denna skalärprodukten. Visa att  $u(x) = \sin(\pi(x^2 - 1))$  är en egenfunktion till  $\mathcal{A}$  och beräkna motsvarande egenvärde.

4. En tråd av längd 2 dm med värmeisolerad mantelyta har vid tiden  $t = 0$  temperaturen  $20^\circ \text{C}$ . Vid denna tidpunkt ansluts tråden till en strömkälla varefter en, per tids- och längdenhet, konstant värmemängd utvecklas i tråden. Ändpunkterna hålls hela tiden vid temperaturen  $20^\circ \text{C}$ . Ställ upp en modell för temperaturförloppet i tråden samt lös problemet. Alla konstanter får sättas till 1.
5. Bestäm Greenfunktionen  $G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha})$  då  $\boldsymbol{\alpha} = (1, 0, 1)$  för Dirichlets problem i halvklotet  $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0$ .
6. Ett elastiskt cirkulärt trumskinn med radien 1 är fast inspänt längs kanten. Fram till tiden  $t = 0$  är trumskinnets i vila men träffas då i centrum av en flat cirkulär hammare med radie  $a$  som ger den del av trumskinnets som träffas hastigheten  $v$ . Formulera en matematisk modell för trumskinnets utböjning och lös problemet.

**LYCKA TILL!**