LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Endimensionell Analys A1
2014–04–28 kl 08–13

Lösningar

1. a) Förenkla som har $(a^{-3})^{-.5} \cdot (a^{-0.5})^2 = a^{1.5} \cdot a^{-1} = a^{0.5}$. Altså $a^{0.5}$ eller $\sqrt{a}$.
b) Förenkla som har ${}^2\log\left(\frac{7}{4}\right) + {}^2\log\left(\frac{8}{7}\right) = {}^2\log\left(\frac{7}{4}\cdot\frac{8}{7}\right) = {}^2\log 2 = 1$.
c) Vi ser direkt att $x = 1$ är nollställe for $p(x)$. After polynomdivision vi har att $p(x) = (x^3 + 2x^2 + 3x - 6)(x - 1)$. Igen vi gisar att $x = 1$ är nollställe for $x^3 + 2x^2 + 3x - 6$. After polynomdivision vi har att $p(x) = (x-1)(x-1)(x^2+3x+6)$. Vi ser direkt att vi kan inte lösa $x^2 + 3x + 6$ reellt. Vi stannar alltså här.

2. a) Det är klar att defininitionsmängd är alla reella tal for båda funktioner.
Vi vet att $e^x \to \infty$ och $e^{-x} \to 0$ om $x \to \infty$.
På andra sida,om $x \to -\infty$ vi har att $e^x \to 0$ och $e^{-x} \to \infty$.
Altså $-\infty < g(x) < \infty$. Men om $x = 0$ dar finns en minimum $f(x) = 2$. Altså $2 \leq g(x) < \infty$.
b) Det är klar att $f(x) = f(-x)$. Detta inebar att $f(x)$ är jämn. På andra sida $g(x) = -g(-x)$ som innebar att $g(x)$ är udda.
c) För att en funktion ska kunna ha en invers måste följande gälla: $x_1 \neq x_2$, $F(x_1) \neq f(x_2)$. Alltså $f(x)$ har ingen invers. Men $g(x)$ har invers. Vi sätter $y = e^x$ och skriver $y = t - t^{-1}$. Detta vi skriver om som $t^2 - yt - 1 = 0$. Den qvadradisk ekvation har lösnigar

$$t = e^x = \frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} + 1}.$$

Vi tar logarithm på t

$$x = \ln\left(\frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{y^2+4}{4}}\right).$$

Men logarithm är bara definierat då $\sqrt{\frac{y^2+4}{4}} > \frac{y}{2}$. Alltså

$$f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{y}{2} + \sqrt{\frac{y^2+4}{4}}\right).$$

3. a) Svar i din book.
b) Koefficient till $(a + 2x)^{10}$ framför x^8 är

$$\binom{10}{k} a^{10-k} 2^k x^k.$$

Vi ser att om $k = 8$ vi far då

$$\binom{10}{8} a^2 2^8 x^8 = \frac{10!}{8!2!} a^2 2^8 x^8 = 180 a^2 2^6 x^8.$$

Alltså koefficient för x^8 är $180a^2 2^6 = 180$. Lösning är $a = \pm 1/8$.

4. a) Summan är,

$$\sum_{k=0}^{n} ax^k = ax^0 + ax^1 + ax^2 + \ldots + ax^n = a\frac{x^{n+1}-1}{x-1}.$$

Bevis:

$$\begin{array}{rl} S & = 1 + x + x^2 + \ldots x^n \\ xS & = x + x^2 + x^3 + \ldots x^{n+1} \\ \hline xS - S & = x^{n+1} - 1 \end{array}$$

Alltså $S(x-1) = x^{n+1} - 1$. Detta innebar att

$$S = a\sum_{k=0}^{n} x^n = a\frac{x^{n+1}-1}{x-1}.$$

b) Efter 19 år vi har satt in 1000kr för 19 år i rad och våra första insättning har fått ränta i 18 år. Alltså

$$1000 + 1000 \cdot 1.02 + 1000 \cdot 1.02^2 + \ldots + 1000 \cdot 1.02^{18}.$$

Vi får $1000\frac{1.02^{19}-1}{1.02-1} = 50000(1.02^{19}-1)$kr.

5. a) Vi flyttar over 1 och sätter allt på samma bråkstreck.

$$-\frac{2x^2+1}{x^4+2x^2} < 0$$

Vi ska alltså se när $\frac{-(x^2+1)}{x^2(x^2+2)}$ är mindre än 0. Vi gör en teckentabell med x som enda intressanta punkt.

	$x<0$	0	$x>0$
$-(2x^2+1)$	$-$	-1	$-$
x^2	$+$	0	$+$
x^2+2	$+$	2	$+$

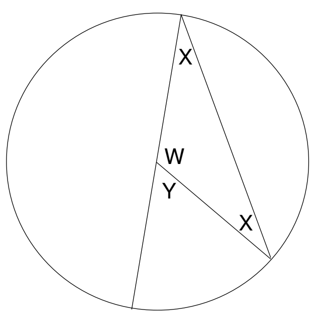
Vi ser att för alla x utom $x=0$ är $\frac{-(2x^2+1)}{x^2(x^2+2)}$ mindre än 0.

b) Vi ritar kurvan $y = |x-a| - 2|x-2|$ och ser för vilka y kurvan skärs 2 gånger. Vi börjar med att dela upp y i delar och intervaller. Om

$$\begin{array}{lcl} \text{om:} & x \geq 2 & \text{då } y = 3 - x \\ \text{om:} & 1 \leq x < 2 & \text{då } y = 3x - 5 \\ \text{om:} & x < 1 & \text{då } y = x - 3 \end{array}$$

Vi plottar funkionerna y och see att det finns precis två lösningar då $a < 1$.

6.

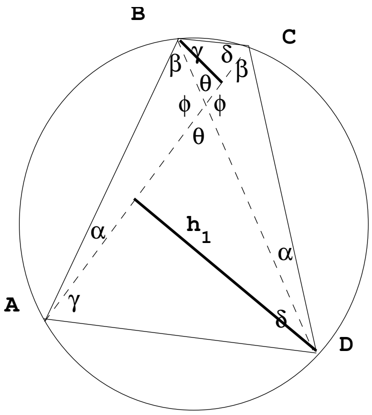


a) Special fall (se figuren): vi rita en randvinkel x och en mittenvinkel y (se figuren). Triangeln är likbent. Detta inebar att motstående vinklar är lika stora. Vilken w kan nu skrivas som

$$w = 180 - y \quad \text{och} \quad w = 180 - 2x$$

Alltså $2x - y = 0$ och $y = 2x$. Nu det är klar att randvinklar som står på samma cirkelbåge är lika stora därefor att derras mittenvinkel är samma. Men den räcker inte. General fall: i din bok.

b)



Note that since $BE = BC = CE = 9$ then all angles in the triangle EBC are 60^o. Furthermore since $\angle CEB = 60^0$ then $\angle DEC = 120^o$. Using the law of cosines in the triangle DEC we get

$$CD = \sqrt{CE^2 + ED^2 - 2 * ED * CE * \cos(120)} = 21$$

Applying the law of sines in the same triangle,

$$\frac{\sin(120)}{21} = \frac{\sin(\alpha)}{15} \text{ which gives } \sin(\alpha) = \frac{15}{21}\sin(120) = \frac{15}{21}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Note furthermore that several angles in $ABCD$ are similar due to the result we proved in part a) of this question. These angles are all marked in the figure above.

We calculate the area of $ABCD$ by splitting it into two triangles ACD and ABC and calculating the areas of each of those. To calculate the area of ACD we need the height for that triangle first. That height is denoted via h_1 in the figure above. Note that $h_1 = 21\sin(\alpha)$. Thus the area A_1 for that first triangle ACD is

$$A_1 = \frac{21h_1}{2} = \frac{(15+9)\sin(\alpha)21}{2} = 90\sqrt{3}.$$

Similarly we first calculate the height h_2 for triangle ABC as follows: $h_2 = 9\sin(60)$. Based on that the area A_2 for that triangle is

$$A_2 = \frac{24h_2}{2} = \frac{9\sin(60)24}{2} = 54\sqrt{3}.$$

Therefore the total area for $ABCD$ is $144\sqrt{3}$.