TENTAMENSSKRIVNING
LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

ENDIMENSIONELL ANALYS
A3 (FMAA01)/B2 (FMAA05)
2015–05–06 kl. 08–13

Inga hjälpmedel är tillåtna. För att du skall kunna erhålla full poäng skall dina lösningar vara läsbara och försedda med ordentliga motiveringar. Lämna tydliga svar.

1. a) Lös ekvationen $z^3 = 1$, och svara på rektangulär form, $a + bi$. (0.5)

b) Förenkla $(1 + i)^{20} - (1 - i)^{20}$ så långt det går. (0.5)

2. a) Skriv upp och bevisa formeln för partialintegration (utan gränser). Ge ett exempel *där man kan se direkt* att det är lämpligt att använda partialintegration för att beräkna en primitiv funktion. Du behöver inte göra själva räkningen. (0.6)

b) Låt $f(x) = x\sin(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$. Beräkna arean mellan x-axeln och grafen till $y = f(x)$, då x varierar mellan 0 och det första positiva nollstället till f. (0.4)

3. Funktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uppfyller begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} u''(t) + u(t) = -2\sin(t), & t \in \mathbb{R} \\ u(0) = 1, & \\ u'(0) = 1. & \end{cases}$$

Är u begränsad?

4. Jerran vill kunna beräkna värdet av $\sin(x)$ för alla x i intervallet $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ med ett fel som ej överstiger $1/1000$ genom att approximera $\sin(x)$ med ett polynom. Visa att polynomet $p(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$ duger för ändamålet.

5. a) Visa att funktionen $f(x) = \ln(\ln x)$ är växande då $x > 1$. (0.2)

b) Vid modellering av storleken på tumörer används ibland Gompertz differentialekvation,

$$R'(t) = -R(t)\ln\frac{R(t)}{k}.$$

Här betecknar $R(t)$ tumörens radie som funktion av tiden och k är en positiv konstant.

Vad händer med $R(t)$ efter lång tid om $R(0) = k/2$? (0.8)

6. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x} + x^2}\,dx$.

Lycka till!