

HJÄLPMEDEL: Bifogat formelblad.

Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Skriv fullständiga meningar och förklara dina beteckningar. Ge tydliga och enkla svar där så är möjligt.

1. Lös rekursionsekvationen

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = n$$

med begynnelsevillkoren  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 0$ .

2. Bestäm den positiva konstanten  $b$  så att funktionen

$$u(x, y) = x^2 - y^b$$

blir realdelen till en analytisk funktion i hela komplexa planet. Ange också för den konstant  $b$  alla sådana analytiska funktioner  $f(z)$ , där  $z = x + yi$ .

3. Funktionen  $f$  är  $2\pi$ -periodisk och uppfyller att  $f(t) = t$ , om  $-\pi < t \leq \pi$ .

a) Skissera grafen till funktionen  $f$  på intervallet  $-3\pi \leq t \leq 3\pi$ . (0.1)

b) Bestäm den trigonometriska Fourierserien för funktionen  $f$ . (0.2)

c) Är Fourierserien punktvis konvergent på intervallet  $-\infty < t < \infty$ ? Motivera noggrant! (0.2)

d) Är Fourierserien likformigt konvergent på intervallet  $-\infty < t < \infty$ ? Motivera noggrant! (0.2)

e) Utnyttja resultatet i b) för att beräkna värdet av serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad (0.3)$$

4. Vilka av följande serier är konvergenta respektive divergenta? Motivera noggrant! ( $5 \times 0.2$ )

$$a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \quad b) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin\left(\frac{1}{k!}\right) \quad c) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos\left(\frac{1}{k!}\right)$$

$$d) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^k} \quad e) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1+i)^k}$$

VAR GOD VÄND!

5. Låt

$$f(z) = \frac{1}{e^z + e^i}.$$

a) Bestäm alla poler till funktionen  $f(z)$ . Svara på formen  $a + bi$ . (0.3)

b) Funktionen  $f(z)$  kan utvecklas i en potensserie kring origo. Vad är potensseriens konvergensradie? (0.2)

c) Beräkna integralen

$$\int_{\gamma} f(z) dz$$

där  $\gamma$  är den positivt orienterade cirkeln  $|z| = 10$ . Svara på formen  $a + bi$ . (0.5)

6. Beräkna med residykalkyl

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{(1+x^2)^2} dx.$$

*LYCKA TILL!*