LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
KONTINUERLIGA SYSTEM
2015-01-09, kl 8-13

HJÄLPMEDEL: Utdelad formelsamling samt miniräknare.
Motivera lösningarna väl.

1. En halvoändlig, elastisk sträng längs positiva x-axeln är fast inspänd i $x = 0$. Från början är strängen rak men ges vid tiden $t = 0$, med en hammare, den transversella hastigheten

$$h(x) = 5\,(\theta(x - 1{,}9) - \theta(x - 2{,}1)).$$

Anta att vågutbredningshastigheten i strängen är 1. Ställ upp en matematisk modell för strängens transversella utböjning, lös problemet och rita strängen då $t = 3$.

2. Visa att

$$U = \{p \mid p(x) = x^2 q(x) \text{ där } q \text{ är polynom med grad } q \le 2\}$$

är ett linjärt underrum i $L_2([-1, 1])$. Bestäm en ortogonal bas i U och bestäm det polynom p i U som minimerar integralen

$$\int_{-1}^{1} (x - p(x))^2\, dx.$$

3. Lös diffusionsproblemet

$$\begin{cases} u'_t - a\,u''_{xx} = 0, & x > 0, t > 0, \\ u'_x(0, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = \theta(x) - \theta(x - 1), & x > 0. \end{cases}$$

4. En tråd av längd L med värmeisolerad mantelyta har vid tiden $t = 0$ temperaturen 0. Vid denna tidpunkt ansluts tråden till en strömkälla varefter en, per tids- och längdenhet, konstant värmemängd utvecklas i tråden. Ändpunkterna hålls hela tiden vid temperaturen 0. Ställ upp en modell för temperaturförloppet i tråden samt lös problemet. Alla konstanter får sättas till 1.

5. Bestäm Greenfunktionen $G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha})$ då $\boldsymbol{\alpha} = (1, 1)$ för Dirichlets problem i halvcirkelskivan $\Omega :\ x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0$.

6. En rät cirkulär homogen cylinder med radien R och höjden h har från början temperaturen 20° C. Vid tiden $t = 0$ sänks cylinder ner i en stor behållare som innehåller vatten och is med temperaturen 0° C. Ställ upp en modell för temperaturen i cylindern för $t > 0$ och lös problemet.

LYCKA TILL!