

Hjälpmedel: Bifogat formelblad.

Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Skriv fullständiga meningar och förklara dina beteckningar. Ge tydliga och enkla svar där så är möjligt.

1. a) Hitta den allmänna lösningen till systemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y. \end{cases}$$

Är systemet stabilt? (0.5)

- b) Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 3y + 3e^{2t} \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y + 6e^{2t} \end{cases}$$

där $x(0) = 0$ och $y(0) = -1$. (0.5)

2. a) Definiera $f(t) = e^{-|t|}$. Beräkna f' och f'' (i distributionsmening). (0.4)

- b) Sätt $g(t) = t\theta(t)$. Beräkna $g * g(t)$ och $g * f''(t)$. (0.6)

3. Låt

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

- a) Är A diagonaliserbar? (0.2)

- b) Är det tidsdiskreta systemet $v_{n+1} = Av_n$ stabilt? (0.2)

- c) Lös det tidsdiskreta systemet $v_{n+1} = Av_n$, där $v_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. (0.6)

4. Betrakta funktionen $f(t) = (e^{t+1} \sin t)\theta(t)$.

- a) Bestäm Laplacetransformen till f . Glöm inte att ange definitionsstrimlan för $\mathcal{L}f$. (0.5)

- b) Bestäm en begränsad funktion g vars Laplacetransform har samma formel som $\mathcal{L}f$. Vad blir definitionsstrimlan i detta fall? (0.5)

5. Systemet S är linjärt, kausalt och tidsinvariant. Systemets svar på insignalen $w(t) = (\sin t)\theta(t)$ är $te^{-t}\theta(t)$. Vilken signal ska man skicka in i systemet för att få utsignalen $(\sin t)\theta(t)$?

6. a) Bestäm Fouriertransformen av $\frac{\sin at}{t}$. (0.2)

- b) Anta att f ligger i både L^1 och L^2 och att f är deriverbar i punkten $t = 0$. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) \sin at}{t} dt. \quad (0.8)$$