LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
ENDIMENSIONELL ANALYS
DELKURS B2/A3
2013–12–20 8–13

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar. Lämna tydliga svar om så är möjligt.

1. Beräkna följande integraler

$$a)\quad \int_0^1 x^2 e^x \, dx \qquad (0.5) \qquad b)\quad \int_0^\infty x e^{-x^2} \, dx \qquad (0.5)$$

2. a) Lös den binomiska ekvationen

$$z^7 = \sqrt{3} - i.$$

Svaret ska anges på polär form. Rita också en figur som beskriver var i det komplexa talplanet lösningarna ligger. (0.5)

b) Om polynomet $z^4 + 5z^3 - 39z^2 + 95z - 150$ vet vi att det har nollstället $z = 1 - 2i$. Bestäm de övriga nollställena. (0.5)

3. a) Hur stor volym får den kropp som uppkommer när vi roterar området

$$0 \le y \le x^2 \sqrt{\frac{x}{1+x^2}}, \; 0 \le x \le 1,$$

runt x-axeln? (0.5)

b) Bestäm längden av kurvan $x(t) = \cos^3 t$, $y(t) = \sin^3 t$, $0 \le t \le \pi/2$. (0.5)

4. a) Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = xe^x$$

som är sådan att $\lim_{x\to\infty} e^{-2x} y(x) = 1$. (0.6)

b) Förklara med hjälp av en figur varför

$$\ln n \;\le\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

för alla heltal $n \ge 2$. Konvergerar eller divergerar $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$? (0.4)

5. a) Formulera och bevisa analysens huvudsats. (0.5)

b) Bestäm Maclaurinpolynomet av ordning 2 till den kontinuerliga funktion f som löser integralekvationen

$$f(x) = 2 - \int_0^{x^2} f(t) \, dt.$$

Ledning. Försök inte att lösa ekvationen! (0.5)

Var God Vänd!

6. En sluten behållare med 100 liter av en lättflyktig vätska springer läck varvid vätskan rinner ut på golvet där behållaren står. Hastigheten med vilken vätskan rinner ut ur behållaren antas vara proportionell mot kvadratroten ur volymen av vätskan i behållaren och 10% av den utrunna vätskan avdunstar per timme. Efter en timme återstår 64 liter i behållaren. Efter hur lång tid, från det att den sprang läck, är behållaren tom och hur mycket vätska finns då kvar på golvet? Du kan använda närmevärdet 0.61 för $1/\sqrt{e}$ om du vill beräkna uttrycket numeriskt.

God Jul och Gott Nytt År!