LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
FLERDIMENSIONELL ANALYS
2013-10-26 kl 08–13

INGA HJÄLPMEDEL.
Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D xy\,dx\,dy,$$

där D är triangeln med hörn i $(2, 0)$, $(0, 1)$ och $(0, -2)$.

2. a) Låt funktionen f ges av

$$f(x, y, z) = x(y^2 - 1) + z^2(y^3 - 3y) + 2.$$

Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $f(x, y, z) = 0$ i punkten $(2, 0, 1)$. (0.5)

b) Bestäm riktningsderivatan till funktionen f från deluppgift a) i punkten $(2, 0, 1)$ och i riktningen $(3, 4, 0)$. (0.5)

3. a) Bestäm alla lösningar $f(x, y)$ till den partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2xe^{x^2}, \qquad x > 0,$$

till exempel genom att göra variabelbytet $u = x^2$, $v = x + y$. (0.8)

b) Är $f(x, y) = (x + y)(e^{x^2} + 1)$ en lösning till ekvationen? (0.2)

4. En skål har formen av en (nedre) halvsfär med radien 1, och den placeras ut i ett koordinatsystem där z-axeln pekar uppåt, så att sfärens centrum hamnar i $(0, 0, 1)$. Efter att ha fyllts med vatten roteras skålen kring z-axeln, varvid vattenytan antar formen av paraboloiden $z = (1 + x^2 + y^2)/2$. Bestäm volymen av vattnet i skålen.

5. a) Beräkna kurvintegralen

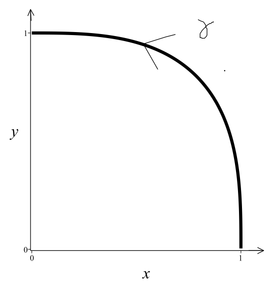
$$\int_\gamma (xy^2 - y)\,dx + x^2 y\,dy$$

där γ är enhetscirkeln, genomlöpt ett varv i positiv led. (0.5)

b) Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

där γ är kurvan $x^3 + y^3 = 1$ från $(1, 0)$ till $(0, 1)$ (se figur). (0.5)



VAR GOD VÄND!

6. a) Bestäm alla lokala extrempunkter till funktionen

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{12}x^3.$$

(0.4)

b) Bestäm största och minsta värde för funktionen i a) på (den sneda) ellipsskivan $x^2 + xy + y^2 \leq 36$. (0.6)

LYCKA TILL!