LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR OCH SVAR
SYSTEM OCH TRANSFORMER
2015–01–14 kl 14 – 19

1. Ensidig Laplacetransform motsvarar att multiplicera ekvationen med $\theta(t)$ och använda sedan "vanlig" Laplacetransform: $\mathcal{L}(\theta y') = s\mathcal{L}(\theta y) - y(0)$ samt $\mathcal{L}(\theta y'') = s\mathcal{L}(\theta y') - y'(0) = s^2\mathcal{L}(\theta y) - sy(0) - y'(0)$. Högerleden återfinns i tabellen, ekv. (35). Ekvationen blir:
$s^2\mathcal{L}(\theta y) - s + 1 + s\mathcal{L}(\theta y) - 1 + \mathcal{L}(\theta y) = \dfrac{1}{s+1}$ dvs $\mathcal{L}(\theta y) = \dfrac{1}{s+1}$ och därmed $\boxed{y(t) = e^{-t}}$.

2. a) Den andra matrisen kan inte vara en exponentialmatris eftersom vid $t = 0$ är den nedre icke-diagonalelement skild från noll. Den första matrisen, som vi kallar $\mathsf{B}(t)$, kan vara en exponential. Den uppfyller standardkontrollen $\mathsf{B}(0) = I$. Ur uttrycket för $\mathsf{B}(t)$ kan konstateras att matrisen A inte är diagonaliserbar eftersom kandidaten $\mathsf{B}(t)$ innehåller polynom av grad 1 i t. Dessutom skall matrisen A ha det dubbla egenvärdet $\lambda = -4$. Ur standardkontrollen $\{d\mathsf{B}(t)/dt\}_{t=0} = \mathsf{A}$, fås förslaget $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$. Vidare kan man konstatera att $e^{t\mathsf{A}} = \mathsf{B}(t)$ men det är aningen mer än vad frågan krävde.

b) Standardteknik från Kap. 4 ger:
$\mathsf{x}_p(t) = Im\{17(iI - A)^{-1}e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\} = \boxed{(4\sin t - \cos t)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$.

c) Den allmänna lösningen är $\mathsf{x}(t) = \mathsf{B}(t)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \mathsf{x}_p(t)$. Insättning av begynnelsevillkor ger $c_1 = -c_2 = 2$ och därmed:
$$\boxed{\mathsf{x}(t) = (2\mathsf{B}(t) + (4\sin t - \cos t)\mathsf{I})\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (2e^{-4t} + 4\sin t - \cos t)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}.$$

3. a) $f(t) = -t(\theta(t+1) - \theta(t)) + t(\theta(t) - \theta(t-1))$.

b) $f' = -(\theta(t+1) - \theta(t)) + (\theta(t) - \theta(t-1)) + \delta(t+1) - \delta(t-1)$ medan $T_1 f = f(t-1) = -(t-1)(\theta(t) - \theta(t-1)) + (t-1)(\theta(t-1) - \theta(t-2))$.

c) $f' * (\theta(t) - \theta(t-1)) = f * (\delta(t) - \delta(t-1)) = f(t) - f(t-1)$.

4. a) Sätt $W = \exp(st)$ och beräkna $H(s) = \frac{Y(\exp st)}{\exp(st)}$. I detta fall, $H(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+1} = \boxed{\frac{1}{s+1}}$.

b) $\boxed{h(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(s)) = \theta(t)e^{-t}}$. Systemet är insignal-utsignalstabilt eftersom $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt = 1$, dvs begränsad (alt: använd sats 14.17).

c) $y(t) = Re(H(i)e^{it}) = \boxed{\frac{1}{2}(\cos t + \sin t)}$.

d) $\theta(t)y(t) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s+1}\frac{s}{s^2+1}) = \mathcal{L}^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{s+1}{s^2+1} - \frac{1}{s+1}\right)\right) = \boxed{\theta(t)\frac{1}{2}(\cos t + \sin t - e^{-t})}$.

5. a) Låt $\begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix}_k$ beteckna antalet arbetande (w) och arbetslösa (u) invånare vid tiden $k \geq 0$. Begynnelsevillkoret är $w(0) = 2000$ samt $u(0) = 0$. Ekvationen blir: $\begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix}_{k+1} = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix}_k$.

b) $\mathfrak{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ är egenvektor till systemmatrisen med egenvärde $\lambda_2 = 1-a-b$. Ur spåret av systemmatrisen härleds att det andra egenvärdet är då $\lambda_1 = 1$, med egenvektor $\mathfrak{s}_1 = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$. Eftersom $0 < a+b < 2$, så är $-1 < 1-a-b < 1$ och det största egenvärdet är $\lambda_1 = 1$.

c) Lösningen är $\begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix}_k = c_1 1 \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} + c_2(1-a-b)^k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Begynnelsevillkoren ger $c_1 b + c_2 = 2000$ samt $c_1 a - c_2 = 0$, dvs $c_1 = \dfrac{2000}{a+b}$, $c_2 = ac_1$.

Därmed: $\boxed{\begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix}_k = \frac{2000}{a+b}\left[\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} + (1-a-b)^k \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix}\right]}$.

d) Lösningen är begränsad och via gränsvärdet för $k \to \infty$ fås att $w \to 2000\dfrac{b}{a+b}$ samt $u \to 2000\dfrac{a}{a+b}$.

6. a) Ur (10) och (20) i formelsamlingen fås: $\mathcal{F}((\theta(t+1) - \theta(t-1))e^{i\frac{\pi}{2}t}) = 2\dfrac{\sin(w-\frac{\pi}{2})}{w-\frac{\pi}{2}}$ och därefter $\boxed{\mathcal{F}(f) = \dfrac{\pi\cos w}{\frac{\pi^2}{4} - w^2}}$.

b) Ur resultaten ovan samt (20) i formelsamlingen kan man göra om integralen till en t-integral via Parseval. $I = \pi \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (\theta(t+1) - \theta(t-1))f(t)dt = 2\pi \int_0^1 \cos\frac{\pi}{2}t dt = \boxed{4}$.