1. a) $$\lim_{x\to\infty} \frac{4\cdot 2^x + 3\ln x}{x^5 - 2^{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2^x}{2^x} \cdot \frac{4 + 3\cdot \frac{\ln x}{2^x}}{\frac{x^5}{2^x} - 2} \right) = 1 \cdot \frac{4+0}{0-2} = -2.$$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\ln(1+3x)}{3x} \cdot \frac{1}{\frac{\sin 2x}{2x}} \cdot \frac{3}{2} \right) = 1 \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

c) $$\lim_{x\to -\frac{1}{3}^+} \frac{\ln(1+3x)}{\sin 2x} = \text{"}\, \frac{-\infty}{\underbrace{\sin(-2/3)}_{<0}} \,\text{"} = \infty.$$

d) Eftersom $-1 \le \cos 2x \le 1$ så gäller det (för $x > 0$) att

$$-\frac{1}{\ln(1+3x)} \le \frac{\cos 2x}{\ln(1+3x)} \le \frac{1}{\ln(1+3x)}.$$

Eftersom $\frac{1}{\ln(1+3x)} \to 0$ då $x \to \infty$, så följer det av instängning att $\frac{\cos 2x}{\ln(1+3x)} \to 0$ då $x \to \infty$.

e) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-2}{x} = \frac{1-2}{1} = -1.$$

2. Vi börjar med att derivera, och får

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}(2x+1) - e^{-x}\cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{-e^{-x}(2x+3)}{(2x+1)^2}, \qquad x \ne -1/2,$$

med det enda nollstället $x = -3/2$. Teckentabellen blir

x		$-3/2$		$-1/2$	
$-e^{-x}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$2x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(2x+1)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}e^{3/2}$	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$

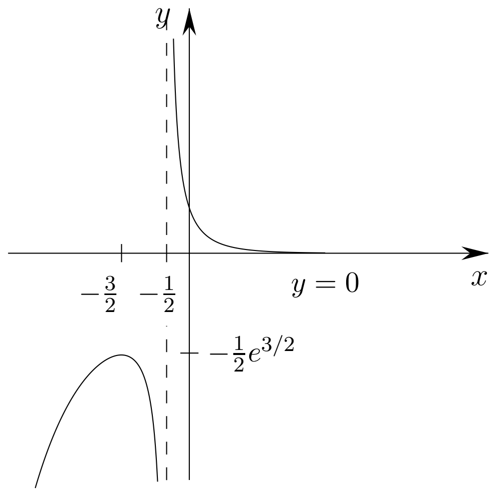
Vi ser att vi får en lokal maximipunkt $x = -3/2$ med motsvarande lokala maximivärde $-\frac{1}{2}e^{3/2}$.

Vi bestämmer nu gränsvärden då $x \to \pm\infty$ och $x \to -1/2$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{2x+1} = \text{"}\,\frac{0}{\infty}\,\text{"} = 0, \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{e^{-x}}{2x+1} \overset{t=-x}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{e^t}{1-2t} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}^-} \frac{e^{-x}}{2x+1} = \text{"}\,\frac{e^{1/2}}{0^-}\,\text{"} = -\infty, \qquad \lim_{x\to -\frac{1}{2}^+} \frac{e^{-x}}{2x+1} = \text{"}\,\frac{e^{1/2}}{0^+}\,\text{"} = \infty.$$

Från dessa beräkningar kan vi dra slutsatsen att $y = 0$ är en asymptot då $x \to \infty$. Funktionskurvan saknar asymptot då $x \to -\infty$ eftersom $\frac{f(x)}{x} = \frac{e^{-x}}{x(2x+1)} \to \infty$ då $x \to -\infty$. Vi är nu redo att rita grafen:



Värdemängden ges av $]-\infty, -\frac{1}{2}e^{3/2}] \cup]0, \infty[$.

3. a) Ekvationen är binomisk, så vi löser den genom att skriva om på polär form. Sätter vi $z = |z|e^{i\theta}$ så får vi

$$|z|^6 e^{i6\theta} = 64e^{i\pi} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |z|^6 = 64 \\ 6\theta = \pi + 2\pi k \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |z| = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k \end{cases}$$

där $k \in \mathbb{Z}$. Det är endast $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ som ger olika rötter, så dessa blir

$$z_0 = 2e^{i\pi/6} = \sqrt{3} + i, \qquad z_1 = 2e^{i\pi/2} = 2i, \qquad z_2 = 2e^{i5\pi/6} = -\sqrt{3} + i,$$

$$z_3 = 2e^{i7\pi/6} = -\sqrt{3} - i, \qquad z_4 = 2e^{i3\pi/2} = -2i, \qquad z_5 = 2e^{i11\pi/6} = \sqrt{3} - i.$$

b) Vi faktoriserar $x^6 + 64$ i komplexa faktorer med hjälp av resultatet i a), och parar sedan "konjugatvis" ihop faktorerna två och två:

$$\underbrace{(x-2i)(x+2i)}_{x^2+4}\underbrace{(x-(\sqrt{3}+i))(x-(\sqrt{3}-i))}_{x^2-2\sqrt{3}x+4}\underbrace{(x-(-\sqrt{3}+i))(x-(-\sqrt{3}-i))}_{x^2+2\sqrt{3}x+4} =$$

$$= (x^2+4)(x^2-2\sqrt{3}x+4)(x^2+2\sqrt{3}x+4).$$

4. a) Se läroboken sidan 206.

b) Se läroboken sidan 220.

c)

$$\sum_{k=2}^{\infty}(2x)^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}(2x)^k = \lim_{n\to\infty}\left((2x)^2 \cdot \sum_{k=0}^{n-2}(2x)^k\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left((2x)^2 \cdot \frac{1-(2x)^{n-1}}{1-2x}\right) = (2x)^2 \cdot \frac{1-0}{1-2x} = \frac{4x^2}{1-2x}.$$

Gränsvärdet ovan existerar (ändligt) precis då $-1 < 2x < 1$, dvs. serien är konvergent precis då $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$. Vi sätter nu seriens summa lika med 2:

$$\frac{4x^2}{1-2x} = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 + x - \tfrac{1}{2} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

Eftersom $-\frac{1}{2} < \frac{-1+\sqrt{3}}{2} < \frac{1}{2}$ men $\frac{-1-\sqrt{3}}{2} < -\frac{1}{2}$, så är det endast $x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ som ger summan 2.

5. a) Vi Maclaurinutvecklar först funktionerna e^{x^2}, $\sin 2x$ och $\cos x$ (samtliga funktioner $B_i(x)$ nedan är begränsade nära $x = 0$):

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + B_1(x)x^2 \quad \Rightarrow \quad e^{x^2} = 1 + x^2 + B_2(x)x^4, \\ \sin x &= x - \tfrac{1}{6}x^3 + B_3(x)x^5 \quad \Rightarrow \quad \sin 2x = 2x - \tfrac{4}{3}x^3 + B_4(x)x^5, \\ \cos x &= 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + B_5(x)x^4. \end{aligned}$$

Gränsvärdet blir nu

$$\lim_{x\to 0} \frac{2xe^{x^2} - \sin 2x}{x(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x(1 + x^2 + B_2(x)x^4) - (2x - \frac{4}{3}x^3 + B_4(x)x^5)}{x(1 - (1 - \frac{1}{2}x^2 + B_5(x)x^4))} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{10}{3}x^3 + B_6(x)x^5}{\frac{1}{2}x^3 + B_7(x)x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{10}{3} + B_6(x)x^2}{\frac{1}{2} + B_7(x)x^2} = \frac{\frac{10}{3} + 0}{\frac{1}{2} + 0} = \frac{20}{3}.$$

b) Vi utvecklar först $\ln(1+x)$ med resttermen på Lagranges form:

$$\ln(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3(1+\theta x)^3}x^3, \qquad 0 \le \theta \le 1.$$

Ersätter vi nu x med $-x^2$ så får vi

$$\ln(1-x^2) = -x^2 - \tfrac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3(1-\theta x^2)^3}x^6, \qquad 0 \le \theta \le 1,$$

vilket ger

$$\left|\ln(1-x^2) + x^2 + \tfrac{1}{2}x^4\right| = \left|-x^2 - \tfrac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3(1-\theta x^2)^3}x^6 + x^2 + \tfrac{1}{2}x^4\right| =$$

$$= \left|-\frac{1}{3(1-\theta x^2)^3}x^6\right| = \frac{1}{3(1-\theta x^2)^3}|x|^6 \le \frac{1}{3(1-\frac{1}{4})^3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{3 \cdot \frac{3^3}{4^3}} \cdot \frac{1}{2^6} = \frac{1}{81} < \frac{1}{80}.$$

6. Eftersom $p(x)$ är deriverbar överallt så måste den lokala extrempunkten $x = 0$ vara en stationär punkt. Således måste det gälla att $p'(0) = 0$, och vidare att $p(0) = -1$. Då $p'(x) = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D$ drar vi slutsatsen att $D = 0$ och att $E = -1$.

Vi vet att $p(x)$ är en jämn funktion, vilket betyder att $p(-x) = p(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$, och eftersom

$$\begin{aligned} p(x) &= Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 - 1, \\ p(-x) &= A(-x)^4 + B(-x)^3 + C(-x)^2 - 1 = Ax^4 - Bx^3 + Cx^2 - 1, \end{aligned}$$

så måste det gälla att

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 - 1 = Ax^4 - Bx^3 + Cx^2 - 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2Bx^3 = 0.$$

Denna sista ekvation skall vara uppfylld för alla värden på x, varför vi kan dra slutsatsen att $B = 0$.

Att $|A| = 1$ innebär att $A = 1$ eller $A = -1$, men vi kan här utesluta fallet $A = 1$ eftersom detta skulle innebära att $\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \infty$, och $p(x)$ har då inte något största värde. Det vi har kvar att arbeta med är således

$$p(x) = -x^4 + Cx^2 - 1.$$

Det största värdet 3 antas speciellt i en lokal maximipunkt (dock ej i $x = 0$). Vi deriverar och tar fram de stationära punkterna (alternativt kan C bestämmas med hjälp av kvadratkomplettering):

$$p'(x) = -4x^3 + 2Cx = -4x\left(x^2 - \frac{C}{2}\right) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0 \text{ eller } x = \pm\sqrt{\frac{C}{2}}.$$

Vi ser nu att $C > 0$ och att $p\left(\pm\sqrt{\frac{C}{2}}\right) = -\frac{C^2}{4} + \frac{C^2}{2} - 1 = 3$, vilket ger $C = 4$. Funktionen blir alltså

$$p(x) = -x^4 + 4x^2 - 1.$$

(Det är lätt att se att $x = 0$ nu blir en lokal minimipunkt och att punkterna $x = \pm\sqrt{2}$ ger det största värdet 3.)