Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar. Lämna tydliga svar.

1. a) Definiera absolutbeloppet av det reella talet x. (0.2)

   b) Bestäm alla reella tal x sådana att $|x| + |x-1| = 1$. (0.4)

   c) Beräkna $\sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} 3^{20-k}(-2)^k$. (0.4)

2. Låt $u(r) = 4r^3 + 3r^{-4}$, $r > 0$.

   a) Visa att

   $$r^2u''(r) + 2ru'(r) - 12u(r) = 0, \quad r > 0.$$

   (Detta betyder att u uppfyller Eulers differentialekvation.) (0.5)

   b) Bestäm största och minsta värde (i den mån de existerar) av u på intervallet $0 < r \leq 3$. (0.5)

3. Skeppet S befinner sig vid en viss tidpunkt 19 sjömil väster om Marianergraven. Jollen J befinner sig vid samma tidpunkt 8 sjömil söder om Marianergraven. S rör sig med konstant hastighet 12 knop i ostlig riktning och J rör sig med konstant hastighet 5 knop i nordlig riktning. Det är dimmigt i området, så sikten är endast en tiondels sjömil. Kommer de att kunna se varandra? Kommer de rent av att krocka? En knop är en sjömil per timme, och du kan räkna med att båtarna och Marianergraven är punktformiga.

4. a) Låt $a > 0$ och $b > 0$. Visa att $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, t. ex. med hjälp av potenslagarna. (0.3)

   b) Beräkna $\lim_{h\to 0} \dfrac{3^h - 1}{h}$. (0.3)

   c) Beräkna $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{5x^2+1}{3x-2} \sin\left(\dfrac{2}{x}\right)$. (0.4)

5. a) Låt $0 < x < 1$. Visa att

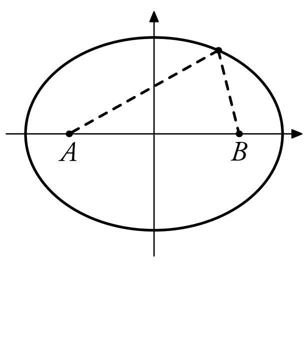
   $$\sin(\arctan x) < x < \tan(\arcsin x). \quad (0.5)$$

   b) Låt ABC vara en triangel sådan att $BC = 2AB$. Låt vidare punkten D dela BC på mitten och E dela BD på mitten. Visa att AD är en bisektris till $\angle CAE$. (0.5)

6. Den här uppgiften går ut på att visa att den triangel med given omkrets (summan av sidlängderna) som har störst area är liksidig. Vi gör det i två steg.

   a) Visa att bland alla *likbenta* trianglar med given omkrets ℓ så har den som är *liksidig* störst area. (0.7)

   b) En ellips består av alla punkter vars avstånd till två givna punkter (de så kallade brännpunkterna) har en konstant summa. I figuren ser vi en ellips med brännpunkter A och B. Använd detta för att visa att bland alla trianglar med omkrets ℓ så är det den *liksidiga* som har störst area. (0.3)



Lycka till!