LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
FUNKTIONSTEORI
2015–08–27 kl 8–13

HJÄLPMEDEL: Utdelat formelblad.
Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Undersök vilka av följande serier som konvergerar:

$$\textbf{a)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k \quad \textbf{b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+3} \quad \textbf{c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot k}{k+1} \quad \textbf{d)} \sum_{k=1}^{\infty} (1-i)^k \quad \textbf{e)} \sum_{k=2}^{\infty} [\ln k - \ln(k+1)].$$

2. Låt $\operatorname{Log} z$ vara principalgrenen av logaritmen.

a) Beräkna i^i. (0.3)

b) Ge exempel på tal z_1 och z_2 så att $\operatorname{Log} z_1 z_2 \neq \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2$. (0.3)

c) Vilken konvergensradie fås om $\operatorname{Log}(z+1)$ utvecklas i potensserie kring $z = i$. (0.2)

d) Vad blir $\int_C \operatorname{Log}(z+1)dz$ om C är den positivt orienterade cirkeln $|z-1| = \sqrt{2}$? (0.2)

3. Funktionen f är udda och periodisk med perioden 2. I intervallet $0 < t < 1$ är $f(t) = 2 - t$.

a) Rita grafen av $f(t)$ i intervallet $-3 < t < 3$. (0.2)

b) Beräkna Fourierkoefficienterna för funktionen f. (0.5)

c) Vilken eller vilka av följande serier är konvergenta? (0.3)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|, \quad \sum_{k=1}^{\infty} ikc_k \quad \text{och} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ic_k}{k}.$$

4. **a)** Uttryck $|e^z|$ och $\arg(e^z)$ med hjälp av realdel och imaginärdel av z. (0.2)

b) Lös ekvationen $e^{2z} - 2e^z + 2 = 0$ och rita ut lösningarna i det komplexa planet. (0.3)

c) Beräkna integralen

$$\int_C \frac{1}{e^{2z} - 2e^z + 2}\, dz$$

där C är cirkeln $|z| = 3$ genomlöpt ett varv i positiv led. (0.5)

Var god vänd!

5. **a)** Vad menas med att en komplex funktion f är deriverbar i en punkt z? (0.2)

b) Vad menas med att f är holomorf i ett område Ω? (0.2)

c) Vad menas med att en reellvärd funktion $u(x, y)$ är harmonisk i ett område Ω? (0.2)

d) Visa att om $f = u + iv$ är holomorf i Ω så är u och v harmoniska i Ω. (0.4)

6. Till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y''(x) - 2xy'(x) + y(x) = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

finns en lösning på formen $y(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, där $|x| < R$.

a) Bestäm en rekursionsekvation för koefficienterna c_k. (0.5)

b) Bestäm konvergensradien R. (0.5)

Lycka till!