LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
SYSTEM OCH TRANSFORMER
2013–08–23

1. Ensidig Laplacetransformering ger att

$$Y(s)(s-2)-1=-\frac{1}{(s-1)^2},$$

där $Y=\mathcal{L}y$. Därför

$$Y(s)=\frac{s}{(s-1)^2}=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{(s-1)^2}.$$

Inverstransformering ger $y(t)=(e^t+te^t)\theta(t)$ eller $y(t)=e^t(1+t)$ då $t>0$. Därför är svaret för alla $t\in\mathbb{R}$

$$y(t)=(e^t+te^t).$$

2. Förenkling ger

$$y'''(t)=\delta(t-1)-\delta(t-3).$$

Integrering ger

$$y''(t)=\theta(t-1)-\theta(t-3)+A$$
$$y'(t)=(t-1)\theta(t-1)-(t-3)\theta(t-3)+At+B$$
$$y(t)=\frac{1}{2}(t-1)^2\theta(t-1)-\frac{1}{2}(t-3)^2\theta(t-3)+\frac{A}{2}t^2+Bt+C.$$

$y'(0)=0 \implies B=0$, $y(0)=1 \implies C=1$ och $y(t)$ begränsad då $t\to-\infty$ ger $A=0$.
Alltså $y(t)=\frac{1}{2}(t-1)^2\theta(t-1)-\frac{1}{2}(t-1)^2\theta(t-3)+1$.

3 a) Faltningssatsen för Fouriertransformationen ger

$$\widehat{f*f'}(\omega)=\widehat{f}(\omega)\widehat{f'}(\omega)=i\omega(\widehat{f}(\omega))^2=i\omega\pi^2e^{-|2\omega|}=\frac{\pi}{2}i\omega\,\frac{1}{1/2}\pi e^{-|\frac{\omega}{1/2}|}$$

Inverstransformering ger

$$f*f'(t)=\frac{\pi}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1+(\frac{t}{2})^2}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{2\pi}{4+t^2}\right)=-\frac{4\pi t}{(4+t^2)^2}$$

b) Både $f(t)$ och $\widehat{f}(\omega)$ är reella. Parsevals formel ger att den sökta integralen blir

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(t)}\cdot f''(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\widehat{f}(\omega)}\cdot\widehat{f''}(\omega)\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)\cdot(i\omega)^2\widehat{f}(\omega)\,d\omega=$$
$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\pi^2\omega^2e^{-|2\omega|}\,d\omega=-\frac{\pi}{2}\cdot 2\int_0^{\infty}\omega^2e^{-2\omega}\,d\omega.$$

Denna sista integral kan man partialintegrera två gånger, och man får då resultatet $-\frac{\pi}{4}$. En annan möjlighet är att skriva

$$I=-\pi\int_0^{\infty}\omega^2e^{-2\omega}\,d\omega=-\pi\int_{-\infty}^{\infty}e^{-st}t^2\theta(t)\,dt \text{ där } s=2.$$

Om $g(t) = t^2\theta(t)$, så är $\mathcal{L}g(s) = \dfrac{2}{s^3}$ och $I = -\pi\mathcal{L}g(2) = -\pi\dfrac{2}{2^3} = -\dfrac{\pi}{4}$.

4. Med $f(t) = \sin(t) \cdot \theta(t)$ kan ekvationen skrivas

$$y(t) + y * f(t) = w(t).$$

Laplacetransformering ger att

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{s^2+1}{s^2+4} \cdot \mathcal{L}(w)(s).$$

a) Överföringsfunktion är

$$H(s) = \frac{s^2+1}{s^2+4}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 0.$$

b) Med $\mathcal{L}(\cos(t) \cdot \theta(t)) = \frac{s}{s^2+1}$ fås

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) = \cos(2t) \cdot \theta(t).$$

c) Frekvensfunktionen ges av

$$H(i\omega) = \frac{1-\omega^2}{4-\omega^2}.$$

Detta ger med $w(t) = \cos(3t)$

$$S(\cos(3t)) = |H(3i)| \cos(3t + \arg H(3i)) = \frac{8}{5}\cos(3t).$$

Anm.: Detta är ingen lösning i klassisk mening, eftersom integralen i faltningen då divergera. Genom lämplig "tolkning" av integralen kan man ändå se att lösningen stämmer. $H(s)$ kan därför utvidgas till $\mathrm{Re}(s) = 0$, dock inte $s = \pm 2i$ eller $s = \pm i$.

5. a) Systemet av differentialekvationer är stabilt precis då alla egenvärden till A ligger i vänster halvplan. Men matrisen A är symmetrisk. Därför är alla egenvärden reella. Vi ska alltså bestämma den reella konstanten k så att A får enbart negativa egenvärden. Men det är ekvivalent med att den kvadratiska formen $x^T A x$ är negativt definit, vilket i sin tur är ekvivalent med att alla pivåelement, som uppstår vid kvdratkomplettering av den kvadratiska formen, är negativa. Vi utför nu kvadratkompletteringen.

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & k \end{bmatrix} \overset{d_1=-\frac{1}{3}}{\longmapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & k \end{bmatrix} \overset{\text{Successiv el.}}{\longmapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & k+\frac{1}{3} \end{bmatrix} \overset{d_2=-\frac{1}{3}}{\longmapsto}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{6} & k+\frac{1}{3} \end{bmatrix} \overset{\text{Successiv el.}}{\longmapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & k+\frac{1}{3}+\frac{1}{12} \end{bmatrix} \overset{d_3=k+\frac{5}{12}}{\longmapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alla pivåelementen d_1, d_2 och d_3 är alltså negativa precis då $k < -\frac{5}{12}$

Svar: $k < -\dfrac{5}{12}$

b) Eftersom matrisen A är symmetrisk är systemet av differensekvationer stabilt precis då egenvärdena λ ligger i intervallet $-1 < \lambda < 1$. Eftersom vi utgår från k-värdena vi fann i a) gäller redan att $\lambda < 0$. Vi ska nu dessutom hitta krav på k så att $\lambda > -1$, dvs matrsien $A + I$ ska ha enbart positiva egenvärden. Detta är enligt Sylvesters tröghetslag ekvivalent med att den kvadratiska formen $x^T(A + I)x$ har enbart positiva pivåelement vid kvadratkomplettering. Vi utför nu kvadratkompletteringen.

$$A + I = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & k+1 \end{bmatrix} \overset{d_1=\frac{2}{3}}{\longmapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & k+1 \end{bmatrix} \overset{\text{Successiv el.}}{\longmapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & k+1-\frac{1}{6} \end{bmatrix} \overset{d_2=\frac{2}{3}}{\longmapsto}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{6} & k+\frac{5}{6} \end{bmatrix} \overset{\text{Successiv el.}}{\longmapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & k+\frac{5}{6}-\frac{1}{24} \end{bmatrix} \overset{d_3=k+\frac{19}{24}}{\longmapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Således är alla egenvärden till $A + I$ positiva precis då $k > -\dfrac{19}{24}$.

Svar: Det tidsdiskreta systemet och systemet av differentialekvationer är båda stabila precis då $-\dfrac{19}{24} < k < -\dfrac{5}{12}$.

6 a) Vi beräknar stegsvaret direkt och ansätter $y(t) = z(t) \cdot \theta(t)$. Då fås efter förenkling

$$(z''(t) - z(t)) \cdot \theta(t) + z'(0) \cdot \delta(t) + z(0) \cdot \delta'(t) = \delta(t) - \theta(t),$$

dvs.

$$z'' - z = -1, \qquad z'(0) = 1 \quad \text{och} \quad z(0) = 0.$$

Stegsvaret är då

$$S(\theta)(t) = \left(-e^{-t} + 1\right) \cdot \theta(t).$$

Överföringsfunktionen är $H(s) = \frac{1}{s+1}$, alltså är impulssvaret

$$h(t) = e^{-t}\theta(t).$$

Därför är

$$\mathcal{L}(S(S(\theta)))(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \mathcal{L}(S(\theta)) = \frac{1}{s+1}\left(-\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s}\right) = -\frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}.$$

Inverstransformering ger

$$S(S(\theta))(t) = \left(-te^{-t} - e^{-t} + 1\right) \cdot \theta(t).$$

Vi har att $h(t) = S(\theta)'(t)$ och

$$\begin{aligned} S(\theta) * S(\theta)' = S(\theta) * h(t) = h(t) * \left(-e^{-t} + 1\right) \cdot \theta(t) = \theta \cdot \int_0^t e^{-t+s} \cdot \left(-e^{-s} + 1\right)\, ds \\ = \left(-te^{-t} - e^{-t} + 1\right) \cdot \theta(t). \end{aligned}$$

b) Med en viss försiktighet (systemet antas uppfylla några lämpliga villkor) kan man resonera så:

$$\begin{aligned} S(r)' * S(r)' &= (r * h)' * (r * h)' = (r * h)'' * (r * h) = (r'' * h) * (r * h) \\ &= (\delta * h) * (r * h) = h * (r * h) = h * S(r) = S(S(r)). \end{aligned}$$