LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
ENDIMENSIONELL ANALYS
DELKURS B1
2013-10-25 kl 8–13

1. a) Ekvationen $|x-2| = |2x+1|$ är ekvivalent med $x - 2 = \pm(2x+1)$ som har lösningarna $\underline{x = -3}$ och $\underline{x = 1/3}$.

b) Eftersom $1 + \cos(2x) = 2\cos^2 x$ kan ekvationen skrivas som $2\cos^2 x = \cos x$. Härav följer det att $\cos x = 0$ eller $\cos x = 1/2$. Lösningarna är alltså $\underline{x = \pi/2 + k\pi}$ och $\underline{x = \pm\pi/3 + 2k\pi}$, där $k \in \mathbb{Z}$.

c) För $x > 0$ och $x \neq 3$ är

$$4\lg\sqrt{x} + \lg(x-3)^2 = 2\lg|x(x-3)|.$$

Det gäller att $x(x-3) = \pm 10$ om och endast om $x = -2$ eller $x = 5$. Men $\underline{x = 5}$ är den enda lösningen eftersom $\lg\sqrt{x}$ bara är definierad för $x > 0$.

2. a) Se boken §8.5.

b) Se boken §10.3 (och Sats 10.4).

c) Sätt $t = -x$. Då gäller det att

$$\frac{2x^3+1}{x^2+4^{-x}} = \frac{-2t^3+1}{t^2+4^t} = \frac{-2+\frac{1}{t^3}}{\frac{1}{t}+\frac{4^t}{t^3}} \to 0 \quad \text{då } t \to \infty,$$

ty $-2 + \frac{1}{t^3} \to -2$ och $\frac{1}{t} + \frac{4^t}{t^3} \to \infty$ då $t \to \infty$. Så linjen $\underline{y = 0}$ är en vågrät asymptot till kurvan då $x \to -\infty$.

Vi ser också att

$$\frac{2x^3+1}{x^2+4^{-x}} - 2x = \frac{1-2x\cdot 4^{-x}}{x^2+4^{-x}} \to 0 \quad \text{då } x \to \infty$$

eftersom $2x \cdot 4^{-x} \to 0$ och $x^2 + 4^{-x} \to \infty$ då $x \to \infty$. Så linjen $\underline{y = 2x}$ är en sned asymptot till kurvan då $x \to \infty$.

3. a) Det gäller att

$$\frac{e^x - \cos(4x)}{\ln x + 3e^x} = \frac{1 - \frac{\cos(4x)}{e^x}}{\frac{\ln x}{e^x} + 3} \to \underline{\frac{1}{3}} \quad \text{då } x \to \infty,$$

ty cos är begränsad och $\frac{\ln x}{e^x} \to 0$ då $x \to \infty$.

b) För $-\pi/2 < x < \pi/2$ och $x \neq 0$ är

$$\frac{x^2 + a\ln(1+x^2)}{x\sin x} = \frac{x}{\sin x} + \frac{a\ln(1+x^2)}{x^2}\cdot\frac{x}{\sin x}$$

Eftersom $\frac{\sin x}{x} \to 1$ och $\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \to 1$ då $x \to 0$, kommer vi att lösa ekvationen $1 + a = -2$. Det följer att $\underline{a = -3}$.

c) Det gäller att $g(x) = 0$ för $x > 0$ (ty $|x|/x = 1$ då $x > 0$) och $g(x) = 2\arctan(1/x)$ för $x < 0$ (ty $|x|/x = -1$ då $x < 0$). Eftersom

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0 \;\text{ och }\; \lim_{x\to 0^-} g(x) = 2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi \neq 0$$

är svaret NEJ, funktionen g saknar ett gränsvärde då $x \to 0$.

4. a) Enligt binomialsatsen är

$$(x+1)(x^2-2)^9 = \sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}(-1)^{k-1}2^{9-k}(x^{2k}+x^{2k+1}).$$

Vi har

$$2k+1 = 13 \;\Leftrightarrow\; k = 6 \quad (\text{och } 2k \neq 13 \text{ för alla } k).$$

Koefficienten för x^{13}-termen ges alltså av

$$\binom{9}{6}(-1)^{6-1}2^{9-6} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1}(-1)^5 2^3 = 84\cdot(-8) = \underline{-672}$$

b) Den totala prissumman ges av

$$10.000 \cdot \big(1 + 3/4 + (3/4)^2 + (3/4)^3 + \ldots + (3/4)^{32}\big) \text{ kr.}$$

Enligt formeln för en geometrisk summa är

$$\sum_{n=0}^{32} (3/4)^n = \frac{1-(3/4)^{33}}{1-3/4} = 4\big(1-(3/4)^{33}\big)$$

så svaret är $\underline{40.000 \cdot \big(1-(3/4)^{33}\big) \text{ kr}}$ (vilket motsvarar 39.997 kr eller knappt 40.000 kr).

5. a) Tangenten ges av ekvationen

$$y - f(1) = f'(1)(x-1).$$

Vi har $f(1) = -1$ och $f'(1) = 0$ eftersom $f'(x) = -e^{1-x}(x^2-5x+4)$ för $x > 0$. Så ekvationen för tangenten är $\underline{y = -1}$.

b) Genom att kvadratkomplettera ser vi att ekvationen kan skrivas som

$$(x+1)^2 + \left(\frac{y+1}{1/2}\right)^2 = 1.$$

Så ekvationen beskriver en ellips med medelpunkt i $\underline{(-1,-1)}$ och halvaxlar $\underline{1, 1/2}$. Denna ellips skär tangenten från a) då $(x+1)^2 = 1$, dvs. $x = -2$ eller $x = 0$. Skärningspunkterna är $\underline{(-2,-1)}$ och $\underline{(0,-1)}$.

c) Eftersom $x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$ ser vi att

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 1 \text{ eller } x = 4.$$

Dessutom gäller att f' är positiv på intervallet $]1,4[$ och negativ på intervallen $]0,1[$ och $]4,\infty[$. Så f är avtagande på intervallet $]0,1[$, växande på intervallet $]1,4[$ och avtagande på intervallet $]4,\infty[$. Vi noterar att

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = e \;\text{ och }\; \lim_{x\to\infty} f(x) = 0,$$

ty $x \mapsto e^{1-x}(x^2-3x+1)$ är kont. i $x = 0$ och $p(x)/e^x \to 0$ då $x \to \infty$ för varje polynom $p(x)$.

Genom att jämföra $f(1) = -1$ med $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ ser vi att funktionens minsta värde är -1. Eftersom $f(4) = 5e^{-3} < e = \lim_{x\to 0^+} f(x)$ ser vi att f saknar ett största värde. Slutsatsen blir därför att värdemängden ges av intervallet $\underline{[-1,e[}$.

6. a) Sätt $t = x^2$. Eftersom $(1-t)^5 = 1 - 5t + 10t^2 - 10t^3 + 5t^4 - t^5$ kan olikheten skrivas som

$$5t(t^3 - 2t^2 + 2t - 1) < 0.$$

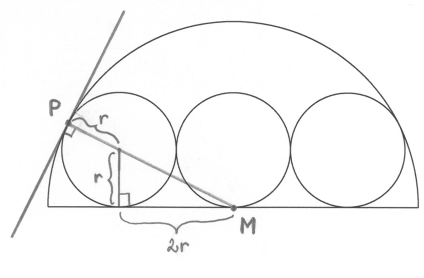
Vi ser att $t = 1$ är ett nollställe i polynomet $t^3 - 2t^2 + 2t - 1$ och polynomdivision ger att

$$t^3 - 2t^2 + 2t - 1 = (t-1)(t^2 - t + 1).$$

Eftersom $t^2 - t + 1 = (t - 1/2)^2 + 3/4 > 0$ är olikheten ekvivalent med att $t(t-1) < 0$.

Lösningen blir därför $t \in]0,1[$, dvs. $\underline{x \in]-1,1[\setminus \{0\}}$.

b) Låt M vara medelpunkten i halvcirkeln och P vara skärningen mellan den första av de tre cirklarna (kallad C_1) och periferin av halvcirkeln. Sträckan MP har längd R och går genom medelpunkten i C_1, ty halvcirkeln och C_1 har samma tangent i punkten P och vi vet att tangenten är vinkelrät mot radien (se figuren).



Med användande av Pythagoras sats får vi därför att

$$R = r + \sqrt{r^2 + (2r)^2} = r(1+\sqrt{5}).$$

Svar: $\underline{R/r = 1+\sqrt{5}}$