SVAR
LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

ENDIMENSIONELL ANALYS
A3 (FMAA01)/B2 (FMAA05)
2015–05–06 kl. 08–13

1. a) Lösningarna är 1 och $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

b) 0.

2. a) Se boken för första delen. För den andra duger till exempel $\int xe^x\,dx$, $\int x \sin x\,dx$ eller $\int \ln x\,dx$, men förstås oändligt många andra exempel också.

b) 1.

3. Nej. (Lösningen ges av $u(t) = (1+t)\cos t$, som är obegränsad.)

4. Maclaurinpolynomet till $f(x) = \sin(x)$ av ordning sex ges av precis $p(x)$. Därför finns för alla x i det aktuella intervallet ett ξ mellan 0 och x, sådant att

$$|\sin x - p(x)| = \left|\frac{f^{(7)}(\xi)}{7!}x^7\right| = \frac{|-\cos(\xi)|}{5040}|x|^7 \leq \frac{1}{5040}(\pi/4)^7,$$

vilket uppenbarligen är mindre än $1/1000$.

5. a) $f'(x) = 1/(x \ln x) > 0$ då $x > 1$, så f är växande.

b) $R(t) = k \times 2^{-e^{-t}}$, så $R(t) \to k$ då $t \to +\infty$.

Ettan kom, tvåan kom, trean kom, fyran kom, femman kom, sexan kommer så småningom (vänd blad).

6. (Detaljer i lösningen numera (11 januari 2016) adderade) Vi visar att

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\,dx = \frac{4\sqrt{3}\pi}{9}.$$

Genom att sätta $u = \sqrt{x}$ slipper vi generaliseringen i nollan, och får integralen

$$\int_0^{+\infty} \frac{2}{1+u^3}\,du = \int_0^{+\infty} \frac{2}{(1+u)(1-u+u^2)}\,du = \int_0^{+\infty} \frac{2}{3}\frac{1}{1+u} + \frac{2}{3}\frac{2-u}{1-u+u^2}\,du$$

i retur. Låt oss stanna upp ett ögonblick och ställa oss några frågor (i ren julanda). Hur löser vi detta? Skall vi splitta integralen? Vad gör vi med den andra delen? Lugn bara lugn, vi fixar detta!

Den första delen ger $\frac{2}{3}\ln|1+u|$ som primitiv funktion, så den behöver vi inte bekymra oss över. För den andra delen noterar vi att

$$D(1-u+u^2) = -1+2u.$$

Detta kan vi utnyttja genom att skriva (lär dig detta knep!)

$$\frac{2}{3}\frac{2-u}{1-u+u^2} = -\frac{1}{3}\frac{-1+2u}{1-u+u^2} + \frac{1}{1-u+u^2}$$

Från $\int f'/f = \ln|f|$ följer det att den första delen har primitiv

$$-\frac{1}{3}\ln|1-u+u^2|.$$

Kvar har vi $1/(1-u+u^2)$, och nu luktar det invers tangens! Vi kvadratkompletterar och använder dödligt vapen 2 (multiplicerar med $1 = (4/3)/(4/3)$. Om ni gick på föreläsningarna fick ni förmodligen vid upprepade tillfällen påtalat att man i denna situation önskar något i kvadrat plus ett i nämnaren),

$$\frac{1}{1-u+u^2} = \frac{1}{(u-1/2)^2+3/4} = \frac{4}{3}\frac{1}{\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}.$$

Här ser vi direkt (den knäsvage bör göra substitution $s = (2u-1)/\sqrt{3}$) att en primitiv blir

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right).$$

Nu vidare till insättning av gränser. Integralen under uträkning blir

$$\left[\frac{2}{3}\ln|1+u| - \frac{1}{3}\ln|1-u+u^3| + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{+\infty},$$

där den övre gränsen som vanligt skall tolkas som ett gränsvärde. Skriver vi de otympliga logaritmerna tillsammans som

$$\frac{1}{3}\ln\left|\frac{(1+u)^2}{1-u+u^2}\right|$$

finner vi att de inte ger något bidrag alls då det innanför absolutbelopp blir 1 vid båda gränserna. Noterar vi vidare att $\arctan X \to \pi/2$ då $X \to +\infty$ och att $\arctan(-1/\sqrt{3}) = -\pi/6$ så får vi slutligen att vår ursprungliga integral har värdet

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{4\sqrt{3}\pi}{9}.$$