**LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA**
**MATEMATIK**

**LÖSNINGAR**
**SYSTEM OCH TRANSFORMER**
**2013–06–03**

**1. a)** Överföringsfunktionen kan bestämmas t ex via Laplacetransformering eller via sats 12.2. Den ges av

$$H(s) = \frac{s+6}{s^2-4} = \frac{2}{s-2} - \frac{1}{s+2},$$

där $\mathrm{Re}\, s > 2$, ty definitionsstrimlan är ett högerhalvplan eftersom systemet är kausalt. Inverstransformering ger därför impulssvaret.

**Svar.** Impulssvaret är $(2e^{2t} - e^{-2t})\theta(t)$ .

**b)** Eftersom impulssvaret inte innehåller några $\delta$-termer blir den primitiva funktionen kontimuerlig. Den ges av

$$(e^{2t} - 1)\theta(t) + \frac{1}{2}(e^{-2t} - 1)\theta(t) = (e^{2t} + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{3}{2})\theta(t)\,.$$

Den primitiva funktionen kallas stegsvaret. Se sats 10.5.

**2. a)** Vi beskriver lösningen med hjälp av matriser.

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = 3^k \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 5^k \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Vi kan nu direkt avläsa att egenvärdena är 3 och 5 samt egenvektorerna $t(2,3)$ och $t(3,4), t \neq 0$.

**b)** Att $\mathsf{A}$ är diagonaliserbar följer antingen av att egenvärdena är olika eller av att egenvektorerna inte är parallella.

**c)** Matrisen $\mathsf{A}$ kan på grund av diagonaliserbarheten beräknas via $\mathsf{A} = \mathsf{S}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\mathsf{S}^{-1}$, där

$$\mathsf{S} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

vars kolonner är egenvektorerna. Detta ger att

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 21 & -12 \\ 24 & -13 \end{bmatrix}.$$

**3. Metod 1.** Vi multiplicerar båda leden med $\theta(t)$, förenklar $\theta(t)\delta(t-\pi)$ och Laplacetransformerar. Begynnelsevärdena beaktas via formel (31). Sätt $Y = \mathcal{L}(\theta y)$. Då gäller att

$$Y(s)(s^2 + 2s + 2) - s\,\underbrace{y(0)}_{=1} - \underbrace{y'(0)}_{=0} - 2y(0) = e^{-\pi s} \iff$$

$$Y(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2+1}e^{-\pi s}$$

Inverstransformering leder till att

$$y(t)\theta(t) = e^{-t}(\cos t + \sin t)\theta(t) + e^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi)\theta(t-\pi)$$

**Svar.** $y(t) = e^{-t}(\cos t + \sin t) - e^{\pi - t} \sin t\, \theta(t-\pi) \quad$ då $t > 0$.

**Metod 2.** Vi bestämmer först en partikulärlösning till differentialekvationen. Till denna lösning adderar vi sedan en godtycklig lösning till motsvarande homogena differentialekvation. Slutligen anpassas integrationskonstanterna så att värdena då $t = 0$ blir korrekta.
Laplacetransformering av

$$y_P''(t) + 2y_P'(t) + 2y_P(t) = \delta(t - \pi)$$

leder till

$$Y_P(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} e^{-\pi s},$$

där $Y_P(s) = \mathcal{L}(y_P)(s)$. Efter inverstransformering har vi att

$$y_P(t) = e^{-(t-\pi)} \sin(t-\pi)\theta(t-\pi) = -e^{\pi - t} \sin t\, \theta(t - \pi).$$

Den homogena ekvationen

$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0$$

har lösningen $y_H(t) = e^{-t}(A\cos t + B \sin t)$. Då blir den allmänna lösningen till den givna differentialekvationen

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t).$$

Anpassning till värdena i $t = 0$ ger att $A = B = 1$. Vi har därmed nått fram till samma svar som med metod 1.

**4. a)** Bestäm först en stationär lösning till

$$\frac{d\mathsf{x}}{dt} = \mathsf{A}\mathsf{x} + \mathsf{B}e^{st}$$

där $s = i$. Enligt sats 4.6 ges den stationära lösningen av

$$(s\mathsf{I} - \mathsf{A})^{-1}\mathsf{B}e^{st} = \begin{bmatrix} s-3 & 2 \\ -8 & s+5 \end{bmatrix}^{-1} \mathsf{B}e^{st} = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} s+5 & -2 \\ 8 & s-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{st} =$$

$$= \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} s+1 \\ 2(s+1) \end{bmatrix} e^{st} = [\text{Sätt } s = i] = \frac{\cos t + i \sin t}{i+1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{(1-i)(\cos t + i \sin t)}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Imaginärdelen

$$\frac{1}{2}(\sin t - \cos t) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

är då en stationär lösning till den givna ekvatonen

$$\frac{d\mathsf{x}}{dt} = \mathsf{A}\mathsf{x} + \mathsf{B}\sin t.$$

**b) Metod 1.** Stegsvaret $y$ ges av $y = h * \theta$, där $h$ är impulssvaret. Laplacetransformering ger då att $Y = H \cdot \frac{1}{s}$, där överföringsfunktionen $H$ kan bestämmas via formel (40). Alltså är

$$H(s) = \mathsf{C}(s\mathsf{I} - \mathsf{A})^{-1}\mathsf{B} + \mathsf{D}.$$

Här känner vi igen stora delar av räkningarna från uppgift a). Vi får att

$$H(s) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 = \frac{3-2}{s+1} + 1 = \frac{s+2}{s+1}.$$

Alltså är

$$Y = \frac{s+2}{(s+1)s} = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+1}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Inverstransformering ger stegsvaret $(2 - e^{-t})\theta(t)$.

**Metod 2.** Formel (39) ger oss impulssvaret $h(t)$. Stegsvaret kan därefter bestämmas som en kausal primitiv funktion till $h(t)$. Se sats 10.5.
För att bestämma impulssvaret behöver vi $e^{tA}$. Eftersom matrisen $A$ inte är diagonaliserbar använder vi sats 14.20 för att komma åt exponentialmatrisen. Räkningar från a) ger oss resolventmatrisen

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+1+4}{(s+1)^2} & \dfrac{-2}{(s+1)^2} \\ \dfrac{8}{(s+1)^2} & \dfrac{s+1-4}{(s+1)^2} \end{bmatrix}$$

Efter inverstransformering och analytisk fortsättning landar vi i

$$e^{tA} = e^{-t} \begin{bmatrix} 1+4t & -2t \\ 8t & 1-4t \end{bmatrix}.$$

Alltså blir

$$h(t) = Ce^{tA}B\theta(t) + 1 \cdot \delta(t) = e^{-t}\theta(t) + \delta(t).$$

Detta ger stegsvaret

$$\mathcal{S}\theta(t) = (1 - e^{-t})\theta(t) + \theta(t) = (2 - e^{-t})\theta(t).$$

**5. a)** Enligt sats 5.6 är 3 det enda egenvärdet och det är dubbelt.

**b)** Matrisen $A$ är inte diagonaliserbar eftersom det i elementen i $e^{tA}$ förkommer $t$-potenser framför exponentialfunktionerna.

**c)** Här blir (sats 3.13)

$$\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = (3)^2 = 9$$

och

$$\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 = 6.$$

**d)** Enligt sats 5.1 är $\dfrac{d}{dt}e^{tA} = A\,e^{tA}$. Om vi efter derivationen sätter $t = 0$ får vi $A$. Alltså blir

$$A = \begin{bmatrix} (1-6t)e^{3t} & f'(t) \\ (1+3t)e^{3t} & g'(t) \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} 1 & f'(0) \\ 1 & g'(0) \end{bmatrix}.$$

Alltså blir $\operatorname{tr} A = 1 + g'(0) = 6$, dvs $g'(0) = 5$. Dessutom är $9 = \det A = 5 - f'(0)$, dvs $f'(0) = -4$.

**Svar.** $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

**6. a)** Enligt formel (4) är

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\,dt.$$

Med $\omega = 0$ ger det att

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt.$$

**b)** Sätt $f(t) = \frac{1}{2}(\theta(t+1) - \theta(t-1))$. Enligt reglerna (20) och (13) är då

$$\mathcal{F}(f * f)(\omega) = \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2}.$$

För att bestämma faltningen Laplacetransformerar vi och använder därvid (30), (26) och (33). Alltså blir

$$\mathcal{L}(f * f)(s) = \left(\frac{e^s - e^{-s}}{2s}\right)^2 = \frac{e^{2s} - 2 + e^{-2s}}{4s^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Inverstransformering ger slutligen att den inversa Fouriertransformen av $\dfrac{\sin^2 \omega}{\omega^2}$ är

$$\frac{1}{4}((t+2)\theta(t+2) - 2t\theta(t) + (t-2)\theta(t-2)).$$

**Anmärkning.** Med resultatet i övning 10.7 fås att $\theta * \theta(t) = t\theta(t)$. I kombination med translationsregeln i övning 10.4 leder det till svaret.

**c) Metod 1.** Uppgift a) ger oss idén att tolka den givna integralen som den inversa Fouriertransformen av $\left(\dfrac{\sin \omega}{\omega}\right)^3$ i $\omega = 0$. Med beteckningar från b) gäller alltså att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \omega}{\omega}\right)^3 d\omega = 2\pi f * f * f(0). \tag{1}$$

Med samma teknik som i b) ser vi att

$$\mathcal{L}(f * f * f)(s) = \left(\frac{e^s - e^{-s}}{2s}\right)^3 = \frac{e^{3s} - 3e^s + 3e^{-s} - e^{-3s}}{8s^3}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Efter inverstransformering landar vi på

$$f * f * f(t) = \frac{1}{16}((t+3)^2\theta(t+3) - 3(t+1)^2\theta(t+1) + 3(t-1)^2\theta(t-1) - (t-3)^2\theta(t-3)).$$

Svaret får vi nu via (1).

$$2\pi f * f * f(0) = 2\pi \cdot \frac{1}{16}(3^2 - 3) = \frac{3\pi}{4}.$$

**Metod 2.** Denna metod bygger på Parsevals formel (6) och resultatet i b). (Konjugattecknen i (6) kan vi bortse från eftersom alla inblandade funktioner är reella.) Vi får att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \omega}{\omega}\right)^3 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \omega}{\omega}\right)^2 \cdot \frac{\sin \omega}{\omega}\, d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f * f(t) \cdot f(t)\,dt. \tag{2}$$

För att komma vidare med integralen i (2) är det nyttigt att observera dels att $f$ är jämn och 0 utanför intervallet $[-1, 1]$, dels att $f * f$ också är jämn men 0 utanför intervallet $[-2, 2]$. Därför blir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \omega}{\omega}\right)^3 d\omega = 4\pi \int_0^1 \frac{1}{4}(2-t) \cdot \frac{1}{2}\,dt = \frac{\pi}{2}\left[\frac{(2-t)^2}{-2}\right]_0^1 = \frac{3\pi}{4}.$$