LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
LINJÄR ALGEBRA
2015-01-12 kl 8–13

INGA HJÄLPMEDEL.
Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Alla koordinatsystem får antas vara ortonormala och positivt orienterade om inget annat anges.

1. Låt $\bar{u} = (1, 2, 2)$, $\bar{v} = (1, 1, 0)$ och $\bar{w} = (1, -1, 4)$.

a) Beräkna $\bar{u} \bullet \bar{v}$, $|\bar{u}|$, $|\bar{v}|$ och bestäm vinkeln mellan $\bar{u}$ och $\bar{v}$. (0.4)

b) Beräkna determinanten
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$
(0.3)

c) Avgör om vektorerna $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ är linjärt oberoende samt bestäm volymen av parallellepipeden med kanterna $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$. (0.3)

2. Avgör för vilka värden på a som systemet
$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x + 3y + az = 8 + a \\ 2x + ay = -8 \end{cases}$$
har oändligt många lösningar.

3. Bestäm en positivt orienterad ortonormerad bas $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$ sådan att $\hat{e}_2$ är ortogonal mot planet $\pi : x + z + 5 = 0$ och $\hat{e}_3$ är ortogonal mot linjen $l : (x, y, z) = (5 + t, -2 + 2t, -1 + 2t)$.

4. En linjär avbildning $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ avbildar vektorerna $\bar{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\bar{v}_2 = (0, 1, 1)$, $\bar{v}_3 = (-1, -2, -2)$ på $F(\bar{v}_1) = (4, 8, 0)$, $F(\bar{v}_2) = (2, 3, -1)$, $F(\bar{v}_3) = (-5, -8, 2)$. Bestäm avbildningsmatrisen, dess rang och nolldimension samt avgör om avbildningen är inverterbar.

V.G.V.

5. Låt P vara en kvadratisk matris

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix},$$

där $p_{11} + p_{21} = 1$ och $p_{12} + p_{22} = 1$.

a) Låt λ vara ett egenvärde till P med egenvektor $\bar{\mathrm{v}} = (v_1, v_2)$. Visa att antingen är $\lambda = 1$ eller så är $v_1 + v_2 = 0$. (0.4)

b) I ett visst fall har man

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Beräkna P^{2015}. (0.6)

6. a) Vilka av rummets punkter hamnar på $Q_1 : (1, 1, 0)$ vid ortogonal projektion på planet $\pi_1 : x + y + z - 2 = 0$? Ange svaret på parameterform. (0.2)

b) Den ortogonala projektionen av punkten P på planet $\pi_1 : x+y+z-2 = 0$ blir $Q_1 : (1, 1, 0)$. Den ortogonala projektionen av samma punkt P på planet $\pi_2 : 2x+y+2z-9 = 0$ blir $Q_2 : (2, 3, 1)$. Vad blir den ortogonala projektionen av P på planet $\pi_3 : 4y + 3z = 0$? (0.8)

LYCKA TILL!