LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
ANALYS A2
2015–03–20 kl 8–13

1. a) Förläng med konjugatet för att få (då $x \to +\infty$)

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+3x}-x &= \frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \frac{(x^2+3x)-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \\ &= \frac{3x}{x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1\right)} = \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1} \to \frac{3}{\sqrt{1}+1} = \boxed{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

b) $\dfrac{\ln(1+\cos x)}{x} \to \dfrac{\text{"}\ln 2\text{"}}{0^+} = \boxed{+\infty}$ då $x \to 0^+$.

c) Dominerande termer skall brytas ut: e^x i täljaren och $2^x \ln x$ i nämnaren

$$\begin{aligned}\frac{x^2\sin x - e^x}{2^x\ln x + e^{-x}} &= \frac{e^x(\frac{x^2}{e^x}\sin x - 1)}{2^x\ln x(1+e^{-x}\frac{1}{2^x\ln x})} = \frac{\left(\frac{e}{2}\right)^x}{\ln x}\cdot\frac{\frac{x^2}{e^x}\sin x - 1}{1+e^{-x}\frac{1}{2^x\ln x}} = \\ &= +\infty\cdot\frac{0-1}{1+0} = \boxed{-\infty} \text{ då } x\to+\infty.\end{aligned}$$

2. a) Derivera $f(x) = (x-1)^2e^{3-x}$ enligt produktregeln

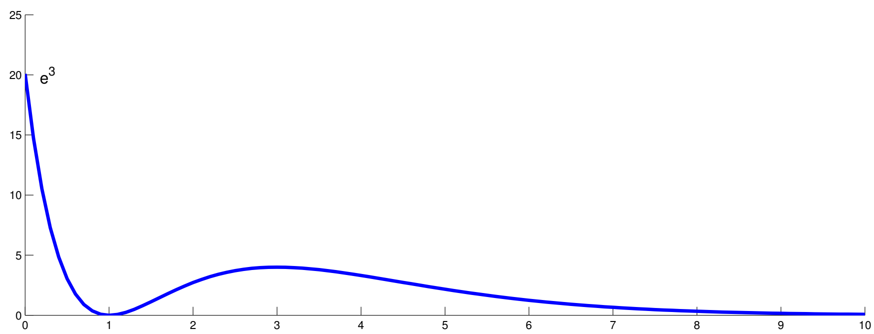
$$f'(x) = 2(x-1)e^{3-x} + (x-1)^2e^{3-x}(-1) = e^{3-x}(x-1)[2-(x-1)] = e^{3-x}(x-1)(3-x).$$

Stationära punkter: $x=1$ och $x=3$, inga singulära punkter. Teckentabell

x	0		1		3	
f'		$-$	0	$+$	0	$-$
f	e^3	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = (-1)^2e^3 = e^3$$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)^2}{e^{x-1}}e^2 = 0\cdot e^2 = 0 \Rightarrow y=0$ är asymptot (vågrät) då $x\to+\infty$. Observera att $e^3 > 2^3 = 8 > 4$. Skissera grafen



<u>Svar</u>: $V_f = [0, e^3]$.

b) Sätt $f(x) = \ln(1+x) - x$, $x > -1$. För att lösa $f(x) = a$ skisserar vi grafen till $f(x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-(1+x)}{1+x} = -\frac{x}{1+x}.$$

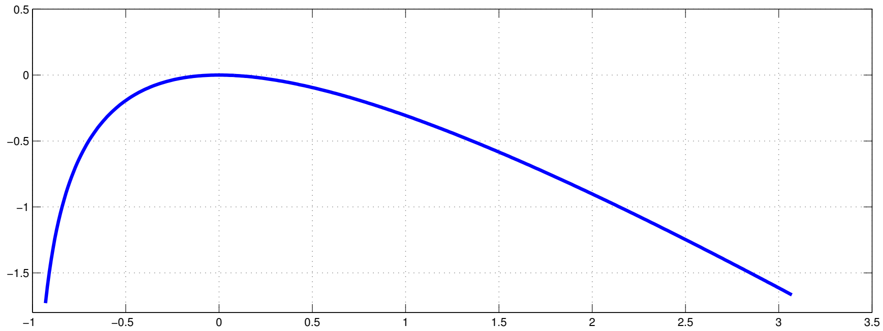
Stationär punkt: $x = 0$, singulär punkt: $x = -1$ (även ändpunkten). Teckentabell

x	-1		0	
f'		$-$	0	$+$
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = "\ln(0^+) + 1" = -\infty,$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln(1+x)}{x} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln(1+x)}{1+x}\cdot\frac{1+x}{x} - 1\right) = \\ &= +\infty\cdot(0\cdot 1 - 1) = -\infty.\end{aligned}$$

Skissera grafen



Härifrån ser vi svaret att

- $a < 0 \Rightarrow$ två lösningar,
- $a = 0 \Rightarrow$ en lösning,
- $a > 0 \Rightarrow$ lösning saknas.

3. a) Skriv om z på polär form

$$z = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2e^{i\pi/6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\pi/4-\pi/6)} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi/12}.$$

Rotationen bevarar absolutbeloppet $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$, och argumentet blir $\pi/12 - \pi/3 = \boxed{-\pi/4}$.

b) Enligt Satsen 6.4, sid 103, kan vi konstatera att även $z = -1-2i$ är roten, dvs polynomet $p(z) = z^5 + 2z^4 + 5z^3 + 8z^2 + 16z + 40$ har faktorn

$$(z+1-2i)(z+1+2i) = (z+1)^2 - (2i)^2 = z^2 + 2z + 5.$$

Polynomdivision ger $p(z) = (z^2+2z+5)(z^3+8)$, och ytterligare tre lösningar ges av $z^3 = -8$. Vi löser detta på polär form $z = re^{i\theta} \Rightarrow r^3e^{i3\theta} = 8e^{i(\pi+2\pi k)} \Rightarrow$

$$\begin{cases} r^3 &= 8, \\ 3\theta &= \pi + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r &= 2, \\ \theta &= \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}, \; k = 0,1,2 \end{cases} \Rightarrow$$

$z_1 = 2e^{i\pi/3}$, $z_2 = 2e^{i\pi}$ och $z_3 = 2e^{i5\pi/3} \Rightarrow z_1 = 1+\sqrt{3}i$, $z_2 = -2$ och $z_3 = 1-\sqrt{3}i$.

Svar: $-1 \pm 2i$, $1 \pm \sqrt{3}i$ och -2.

4. a) Maclaurinutveckla $\sin x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\cos(\theta x)}{5!}x^5 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{\cos(\theta x)}{120}x^4 \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \left|\frac{\sin x}{x} - 1 + \frac{x^2}{6}\right| = \frac{|\cos(\theta x)|}{120}x^4 \leq \frac{x^4}{120}, \qquad x \neq 0.$$

b) Vi måste untveckla så långt att minst en exakt term finns kvar i både täljaren och nämnaren. Vi börjar med täljaren först

$$\begin{aligned} (1+t)^{1/3} &= 1 + \frac{1}{3}t + \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{t^2}{2} + B_1(t)t^3 \quad \overset{t=3x}{\Rightarrow} \quad (1+3x)^{1/3} = 1 + x - x^2 + B_2(x)x^3 \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + B_3(x)x^3 \qquad \Rightarrow \\ \sqrt[3]{1+3x} - e^x &= 1 + x - x^2 + B_2(x)x^3 - 1 - x - \frac{x^2}{2} - B_3(x)x^3 = -\frac{3}{2}x^2 + B_4(x)x^3. \end{aligned}$$

Likadant för nämnaren

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + B_5(x)x^3 \qquad \Rightarrow \qquad x - \ln(1+x) = \frac{x^2}{2} - B_5(x)x^3.$$

Slutligen då $x \to 0$

$$\frac{\sqrt[3]{1+3x} - e^x}{x - \ln(1+x)} = \frac{-\frac{3}{2}x^2 + B_4(x)x^3}{\frac{x^2}{2} - B_5(x)x^3} = \frac{x^2\left(-\frac{3}{2} + B_4(x)x\right)}{x^2\left(\frac{1}{2} - B_5(x)x\right)} = \frac{-\frac{3}{2} + B_4(x)x}{\frac{1}{2} - B_5(x)x} \to \frac{-\frac{3}{2} + 0}{\frac{1}{2} + 0} = \boxed{-3}.$$

5. a) Se boken, Följdsats 9.1, sid 180.

b) Låt p vara ett tal så att x^p är definierad runt $x = 0$ (t.ex. ett heltal eller allmänt ett rationellt tal med udda nämnaren). Enligt definitionen bildar vi differenskvoten

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h^p \sin(1/h) - 0}{h} = h^{p-1}\sin(1/h).$$

- Om $p > 1$ så är gränsvärdet lika med noll enligt Satsen i 5a), dvs $f'(0) = 0$.
- Om $p = 1$ så pendlar $\sin(1/h)$ mellan -1 och 1, alltså saknas gränsvärde.
- Om $0 < p < 1$ så saknas gränsvärde, ty $\sin(1/h)$ pendlar mellan -1 och 1 och faktorn $h^{p-1} = \frac{1}{h^{1-p}}$ bara amplifierar svängningar då $h \to 0$.

Svar: $p > 1$.

c) Nödvändigt att $p > 1$. Då är $f'(0) = 0$ enligt 5b). Derivatan är kontinuerligt om $f'(x) \to f'(0) = 0$ då $x \to 0$. Beräkna derivata för $x \neq 0$

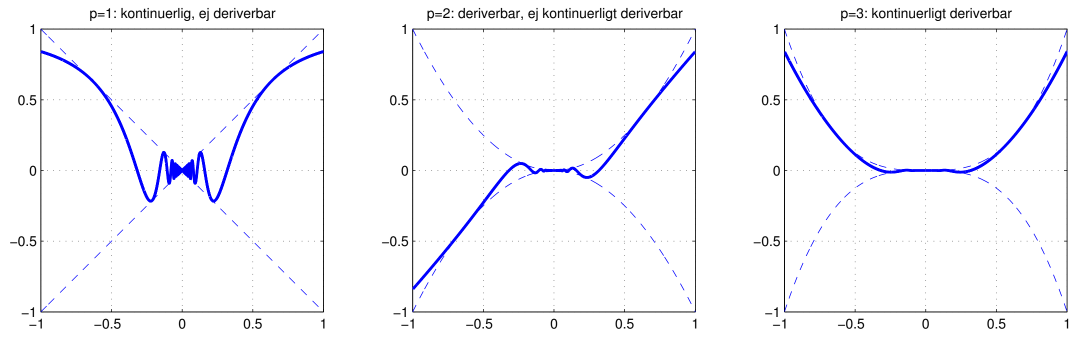
$$\begin{aligned} f'(x) &= Dx^p \sin\left(\frac{1}{x}\right) = px^{p-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^p\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \\ &= px^{p-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^{p-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Här ser man att den första termen går mot noll enligt 5a). Den andra termen

- går också mot noll om $p > 2$, dvs $f'(x) \to 0$ då $x \to 0 \Rightarrow$ kontinuerlig,
- saknar gränsvärde om $1 < p \leq 2$ (samma resonemang som i 5b).

Svar: $p > 2$.

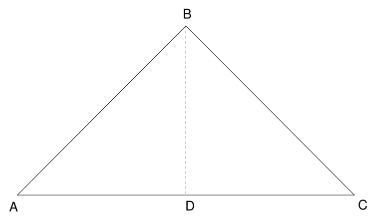
För att åskådliggöra skillnaden skissas funktionen för $p = 1$ (kontinuerlig, ej deriverbar), $p = 2$ (deriverbar, ej kontinuerligt deriverbar), och $p = 3$ (kontinuerligt deriverbar).



6. Beteckna omkretsen av den första triangeln P_1, den andra P_2 o.s.v. Vi skall beräkna

$$S = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \dots.$$

Man inser lätt att alla trianglar är likformiga. Betrakta triangeln ABC med nummer k och triangeln ADB med nummer $k + 1$.



Beteckna $|AB| = a \quad \Rightarrow \quad |AC| = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2} \quad \Rightarrow$

$$\frac{P_{k+1}}{P_k} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Alltså serien är geometrisk med kvoten $1/\sqrt{2}$. Den första termen $P_0 = 1 + 1 + \sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}$. Enligt formeln för summa av en geometrisk serie

$$\begin{aligned} S &= \frac{P_0}{1 - \text{kvoten}} = \frac{2+\sqrt{2}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \\ &= \frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{2-1} = \boxed{6 + 4\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Alternativ lösning: Skriv explicit några första omkretstar (2·katet + hypotenusa):

$$S = (2+\sqrt{2}) + (\sqrt{2}+1) + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{4}\right) + \dots$$

Vi summerar termer med och utan $\sqrt{2}$ separat (under förutsättningen att vi får lov att göra det)

$$S = 2 + 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} + 2\sqrt{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2 + 2 \cdot 2 + 2\sqrt{2} \cdot 2 = 6 + 4\sqrt{2}$$

där vi använder den geometriska serien $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-1/2} = 2$.