LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGSFÖRSLAG
ENDIMENSIONELL ANALYS
DELKURS B2/A3
2013–12–20

1. a) $\int_0^1 x^2 e^x dx = [e^x x^2]_0^1 - \int_0^1 e^x 2x dx = e - 2([e^x x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx) = e - 2e + 2(e-1) = e - 2.$

b) $\int_0^\infty x e^{-x^2} dt = [\begin{array}{c} t = x^2 \\ dt = 2xdx \end{array}] \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t} dt = \frac{1}{2}(-\lim_{X\to\infty} e^{-X} + 1) = \frac{1}{2}.$

2. a) Skriv $z = re^{i\theta}$. Ekvationen är då ekvivalent med $r^7 e^{i7\theta} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ vilket betyder dels att $r^7 = 2 \Leftrightarrow r = 2^{1/7}$, dels att $7\theta = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{42} + k\frac{2\pi}{7}$. Lösningarna är därför

$$z_k = 2^{1/7} e^{i(-\frac{\pi}{42} + k\frac{2\pi}{7})},\ k = 0, \dots, 6$$

och dessa utgör hörn i en regelbunden sjuhörning på cirkeln med centrum i origo och radien $2^{1/7}$ där den första punkten har argumentet $-\pi/42$.

b) Eftersom koefficienterna är reella är också $1 + 2i$ ett nollställe, och polynomet därför delbart med

$$(z - (1 - 2i))(z - (1 + 2i)) = (z - 1)^2 + 4 = z^2 - 2z + 5.$$

Polynomdivision ger att polynomet kan skrivas $(z^2 - 2z + 5)(z^2 + 7z - 30)$, så de övriga nollställena är lösningen på ekvationen $z^2 + 7z - 30 = 0$. Denna har de reella lösningarna $z = 3$ och $z = -10$.

3. a) För den sökta volymen ska vi beräkna integralen

$$\int_0^1 \pi(x^2\sqrt{\frac{x}{1+x^2}})^2 dx = \pi \int_0^1 \frac{x^5}{1+x^2} dx = \pi \int_0^1 \frac{x^5 - x + x}{1+x^2} dx = \pi \int_0^1 (x^3 - x + \frac{x}{1+x^2}) dx$$

där vi använt att $x^5 - x = x(x^2+1)(x^2-1)$. Integralen blir därför

$$\pi[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)]_0^1 = \pi(\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4}).$$

b) Vi får $r'(t) = (3\cos^2 t(-\sin t), 3\sin^2 t \cos t) = 3\sin t\cos t(-\cos t, \sin t) = \frac{3}{2}\sin 2t(-\cos, \sin t)$, så $|r'(t)| = \frac{3}{2}|\sin 2t|$. Absolutbeloppet kan tas bort då sinus är positiv i intervallet $[0, \pi]$ och vi får längden till

$$\frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} \sin(2t)\, dt = \frac{3}{4}[-\cos(2t)]_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}.$$

4. a) Den karakteristiska ekvationen har rötterna 2 och 3. Den homogena lösningen är därför $y_h(x) = Ae^{2x} + Be^{3x}$. För att hitta en partikulärlösning ansätter vi $y_p(x) = (Cx + D)e^x$. Vi får då

$$y_p'' - 5y_p + 6y_p = e^x(2Cx + 2D - 3C).$$

Jämför vi med högerledet i ekvationen får vi att $2C = 1$ ch $2D - 3C = 0$, alltså $C = 1/2,\ D = 3/4$. Den allmänna lösningen till ekvationen är därför

$$y(x) = Ae^{2x} + Be^{3x} + (\frac{x}{2} + \frac{3}{4})e^x.$$

Det följer att

$$e^{-2x}y(x) = A + Be^x + (\frac{x}{2} + \frac{3}{4})e^{-x}$$

och för att detta ska ha ett ändligt gränsvärde när $x \to \infty$ måste $B = 0$. För att gränsvärdet ska vara ett måste $A = 1$, så vi får svaret

$$y(x) = e^{2x} + (\frac{x}{2} + \frac{3}{4})e^x.$$

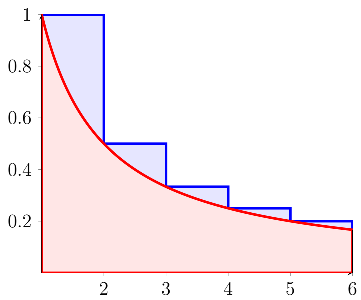
b)

Med hjälp av figuren till höger (ritad för $n = 6$) får vi att

$$\int_1^n f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \le \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

där $f(x) = 1/x$. Integralen är $\ln n$ vilket ger olikheten.

Eftersom $\ln n \to \infty$ då $n \to \infty$ följer att serien är divergent.



5. a) Se läroboken

b)

$$f(x) = 2 - \int_0^{x^2} f(t)\,dt.$$

Från integralekvationen får vi att $f(0) = 2$. Vidare ger analysens huvudsats att

$$f'(x) = -f(x^2)2x \ \Rightarrow\ f'(0) = 0.$$

Deriverar vi vidare får vi att

$$f''(x) = -f'(x^2)(2x)^2 - 2f(x^2) \ \Rightarrow\ f''(0) = -2f(0) = -4.$$

Maclaurinpolynomet av grad 2 är därför

$$p_2(x) = 2 - 4x^2/2 = 2(1 - x^2).$$

6. Låt först $V(t)$ vara mängden (liter) vatten i tanken vid tiden t. Enligt förutsättningarna har vi då att

$$V'(t) = -k\sqrt{V(t)}$$

vilket är en separabel differentialekvation som löses till

$$2\sqrt{V} = -kt + C.$$

Sätter vi in $t = 0$ får vi att $C = 2\sqrt{100} = 20$, så lösningen är $V(t) = (10 - kt/2)^2$. För att bestämma k använder vi att $64 = V(1) = (10 - k/2)^2 \;\Leftrightarrow\; k = 4$. Vi får därför

$$V(t) = (10 - 2t)^2,$$

och detta är noll då $t = 5$. Det är då tanken är tom, så egentligen är defintionsmängden för $V(t)$ endast intervallet $0 \leq t \leq 5$.

För att få reda på hur vattnet på golvet ändrar sig inför vi nu $U(t)$ som mängd vatten på golvet vid tiden t. Då gäller att $U(0) = 0$ och enligt massbalans får vi ekvationen

$$U'(t) = k\sqrt{V(t)} - 0.1U(t) = 4(10 - 2t) - 0.1U(t).$$

Omskrivning ger $U' + 0.1U = 4(10 - 2t)$ som efter multiplikaton med den integrerande faktorn $e^{0.1t}$ blir att

$$e^{0.1t}U(t) = 4\int (10 - 2t)e^{0.1t}dt = 40((10 - 2t)e^{0.1t} - \int e^{0.1t}(-2)dt) = 40(30 - 2t)e^{0.1t} + C.$$

Vi bestämmer C genom att sätta $t = 0$: $C = -1200$. Vi ser alltså att

$$U(t) = 40(30 - 2t) - 1200e^{-0.1t} = 1200(1 - e^{-0.1t}) - 80t.$$

Vi beräknar detta för $t = 5$:

$$U(5) = 1200(1 - 0.61) - 400 = 68.$$

Noggrannare beräkning av $1/\sqrt{e}$ ger svaret 72 liter.