LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
System och Transformer
2015-06-03 kl 8-13

1. a) Det karaktäristiska polynomet $det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)^2 - 4$ har två nollställe $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = 3$. En egenvektor med egenvärdet $\lambda_1 = -1$ är $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, och en egenvektor med egenvärdet $\lambda_2 = 3$ är $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Skriv $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Så är $S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, som medför att

$$e^{t\,A} = S \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t} + e^{3t} & -e^{-t} + e^{3t} \\ -e^{-t} + e^{3t} & e^{-t} + e^{3t} \end{pmatrix}.$$

b) Den allmänna lösningen är

$$\mathbf{x}(t) = e^{t\,A} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} c_1(e^{-t} + e^{3t}) & c_2(-e^{-t} + e^{3t}) \\ c_1(-e^{-t} + e^{3t}) & c_2(e^{-t} + e^{3t}) \end{pmatrix}.$$

Alt.

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Systemet är instabil, därför att $Re(\lambda_2) = 3 > 0$.

2. a) Det karaktäristiska polynomet $det(\lambda I - A) = \lambda^2 - 6\lambda + 8$ har två nollställe $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = 4$. En egenvektor med egenvärdet $\lambda_1 = 2$ är $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, och en egenvektor med egenvärdet $\lambda_2 = 4$ är $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vi får en allmänn lösning

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = c_1\, 2^k \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\, 4^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ur begynnelsevillkoret $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ har vi

$$c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

som ger att $c_1 = 1$ och $c_2 = -1$. Den sökta lösningen är

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = 2^k \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 4^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Låt konstantvektorn $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vara en partikulärlösning till systemet. Så gäller

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Alltså

$$\begin{cases} -3b = 3 \\ a - 4b = 2, \end{cases}$$

som medför att $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. En allmänn lösning av systemet är

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = c_1\, 2^k \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\, 4^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. a)

$$f'(t) = \begin{cases} 0, & \text{för} \quad -\infty < t < 0 \\ (0^2 - 1 - 1)\,\delta(t), & \text{för} \quad t = 0 \\ 2t, & \text{för} \quad 0 < t < 1 \\ (0 - 1^2 + 1)\,\delta_1(t), & \text{för} \quad t = 1 \\ 0, & \text{för} \quad 1 < t < \infty \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{för} \quad -\infty < t < 0 \\ -2\delta(t), & \text{för} \quad t = 0 \\ 2t, & \text{för} \quad 0 < t < 1 \\ 0, & \text{för} \quad 1 < t < \infty\,, \end{cases}$$

dvs

$$f'(t) = -2\delta(t) + 2t\Big(\theta(t) - \theta(t-1)\Big).$$

Så är

$$f''(t) = -2\delta'(t) + 2\Big(\theta(t) - \theta(t-1)\Big) + 2t\Big(\delta(t) - \delta(t-1)\Big)$$

$$= -2\delta'(t) + 2\Big(\theta(t) - \theta(t-1)\Big) - 2\delta(t-1)\Big).$$

Alt.

$$f''(t) = \begin{cases} 0, & \text{för} \quad -\infty < t < 0 \\ -2\delta'(t) + (0-0)\delta(t), & \text{för} \quad t = 0 \\ 2, & \text{för} \quad 0 < t < 1 \\ (0 - 2)\,\delta_1(t), & \text{för} \quad t = 1 \\ 0, & \text{för} \quad 1 < t < \infty \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{för} \quad -\infty < t < 0 \\ -2\delta'(t), & \text{för} \quad t = 0 \\ 2, & \text{för} \quad 0 < t < 1 \\ -2\,\delta_1(t), & \text{för} \quad t = 1 \\ 0, & \text{för} \quad 1 < t < \infty\,. \end{cases}$$

b) Derivering av båda leden medför att

$$y' = y' * \theta' = (y' * \theta)' = \Big(\sin\Big(\theta(t)\Big)\Big)',$$

som ger

$$y(t) = \sin\Big(\theta(t)\Big) + c.$$

En direkt verifiering medför att lösningarna till ekvationen är $y(t) = \sin\Big(\theta(t)\Big) + c$.

Alt. Vi börjar med att söka efter en kausal lösning $y_0(t)$. Eftersom $y_0' * \theta(t) = y_0 * \theta'(t) = y_0(t)$, så är $y_0(t) = \sin\Big(\theta(t)\Big)$ en partikulärlösning. En allmän lösning till ekvationen är

$$y(t) = \sin\Big(\theta(t)\Big) + c = \theta(t)\sin 1 + c.$$

c) Vi vet från b) att ekvationen $y'' * \theta(t) = \sin\Big(\theta(t)\Big)$ är ekvivalent med

$$y'(t) = \theta(t)\sin 1 + c_1,$$

som medför att

$$y(t) = t\,\theta(t)\sin 1 + c_1 t + c_2.$$

4. Laplacetransformering av ekvationen ger

$$s^4\mathcal{L}(y)(s) - \mathcal{L}(y)(s) = s^3,$$

ur vilken får vi

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{s^3}{s^4-1},$$

som har fyra enkla poler $\pm 1,\ \pm i$. Residyerna till funktionen $\frac{e^{ts}s^3}{s^4-1}$ i dessa punkter är

$$Res\left(\frac{e^{ts}s^3}{s^4-1}, 1\right) = \left.\frac{e^{ts}s^3}{(s^4-1)'}\right|_{s=1} = \frac{e^t}{4},$$

$$Res\left(\frac{e^{ts}s^3}{s^4-1}, -1\right) = \left.\frac{e^{ts}s^3}{(s^4-1)'}\right|_{s=-1} = \frac{e^{-t}}{4},$$

$$Res\left(\frac{e^{ts}s^3}{s^4-1}, i\right) = \left.\frac{e^{ts}s^3}{(s^4-1)'}\right|_{s=i} = \frac{e^{t\,i}}{4},$$

$$Res\left(\frac{e^{ts}s^3}{s^4-1}, -i\right) = \left.\frac{e^{ts}s^3}{(s^4-1)'}\right|_{s=-i} = \frac{e^{-t\,i}}{4}.$$

Den sökta kausala lösningen är

$$y(t) = \theta(t)\left(\frac{e^t}{4} + \frac{e^{-t}}{4} + \frac{e^{t\,i}}{4} + \frac{e^{-t\,i}}{4}\right) = \frac{\theta(t)}{4}\Big(e^t + e^{-t} + 2\cos t\Big).$$

5. a) Från Formelbladet har vi

$$\mathcal{F}\left(e^{-4t^2+i\,t}\right)(w) = \mathcal{F}\left(e^{-4t^2}\right)(w-1) = \frac{1}{2}\mathcal{F}\left(e^{-t^2}\right)\left(\frac{w-1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{(w-1)^2}{16}}$$

och

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-4t^2+i\,t}\right)(w) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left(e^{-4t^2+i\,t}\right)(-w) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(w+1)^2}{16}}.$$

b) Från formeln

$$\Big((\mathcal{F}\circ\mathcal{F})(f)\Big)(t) = 2\pi f(-t)$$

har vi

$$f_{100}(t) = (2\pi)^2 f_{96}(t) = (2\pi)^4 f_{92}(t) = \ldots = (2\pi)^{50} f_0(t) = (2\pi)^{50}\, t\, e^{-4t^2}$$

och

$$f_{101}(t) = (2\pi)^{50} f_1(t) = (2\pi)^{50} \mathcal{F}\Big(s\, e^{-4s^2}\Big)(t) = (2\pi)^{50} i \frac{d}{dt} \mathcal{F}\Big(e^{-4s^2}\Big)(t)$$

$$= \frac{(2\pi)^{50} i}{2} \frac{d}{dt} \mathcal{F}\Big(e^{-s^2}\Big)(\frac{t}{2}) = \frac{(2\pi)^{50} i}{2} \frac{d}{dt}\Big(\sqrt{\pi} e^{-\frac{t^2}{16}}\Big) = -\frac{(2\pi)^{50}\sqrt{\pi}\, t\, e^{-\frac{t^2}{16}}}{16}\, i.$$

c) Parsevals formel ger

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Big(g * g(t)\Big)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\widehat{g * g}(w)\Big)^2 dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\widehat{g}(w)\Big)^4 dw$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\sqrt{\pi} e^{-\frac{w^2}{4}}\Big)^4 dw = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2}\, dw = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i0w} e^{-w^2}\, dw$$

$$= \frac{\pi}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{0^2}{4}} = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{2}.$$

6. Förutsättningarna implicerar

$$\begin{cases} h * y = \Big(1 - \cos t\Big)\theta(t) \\ h * ty = \Big(t - \sin t\Big)\theta(t). \end{cases}$$

Laplacetransformering medför

$$\begin{cases} \mathcal{L}(h)\, \mathcal{L}(y) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s(s^2+1)} \\ \mathcal{L}(h)\, \mathcal{L}(ty) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{s^2(s^2+1)}. \end{cases}$$

Men $\mathcal{L}(ty) = -\mathcal{L}'(y)$. Så är

$$\begin{cases} \mathcal{L}(h)\, \mathcal{L}(y) = \frac{1}{s(s^2+1)} \\ \mathcal{L}(h)\, \mathcal{L}'(y) = -\frac{1}{s^2(s^2+1)}, \end{cases}$$

som ger $s\mathcal{L}'(y) + \mathcal{L}(y) = 0$, dvs $(s\mathcal{L}(y))' = 0$ som medför att $s\mathcal{L}(y) = c$ för någon konstant c. Alltså får vi $y(t) = c\theta(t)$. Men villkoret $y(1) = 2$ ger att

$$y(t) = 2\theta(t).$$

Vi har

$$\mathcal{L}(h)\, \frac{2}{s} = \mathcal{L}(h)\, \mathcal{L}(y) = \frac{1}{s(s^2+1)},$$

som ger

$$\mathcal{L}(h) = \frac{1}{2(s^2+1)}$$

och alltså

$$h(t) = \frac{1}{2} \sin t\, \theta(t).$$

Alternativt, från

$$h * (2\theta) = \Big(1 - \cos t\Big)\theta$$

vet vi att

$$2h(t) = (2h * \theta)' = \sin t\, \theta(t) + \Big(1 - \cos t\Big)\delta(t) = \sin t\, \theta(t) + 0\delta(t) = \sin t\, \theta(t).$$