LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Funktionsteori
2013-10-23 kl 8–13

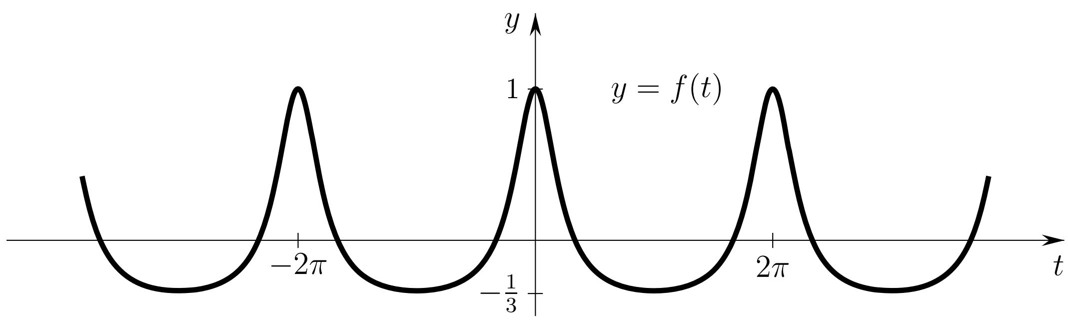
Hjälpmedel: Utdelat formelblad.
Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Lös rekursionsekvationen
$$x_{n+2} + 2x_{n+1} - 15x_n = 12n + 8$$
med begynnelsevillkoren $x_0 = 1$, $x_1 = -4$.

2. En av följande serier är den trigonometriska fourierserien till den periodiska funktionen $f(t)$, vars graf ses nedan. Vilken? Motivera svaret ordentligt!

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cos 2kt$ **b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cos kt$ **c)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \sin kt$

d) $\displaystyle 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cos kt$ **e)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos kt$



3. Bestäm funktionen g så att
$$u(x, y) = (e^y + e^{-y})g(x)$$
blir realdelen av en hel analytisk funktion f sådan att $f(0) = 0$ och $f'(0) = 1$. Bestäm också $f(z)$, där $z = x + iy$.

4. a) Utveckla $\dfrac{1}{x+2}$ i potensserie kring $x = 0$ och ange konvergensradien.
Vad blir seriens summa för $x = 1$? (0.5)

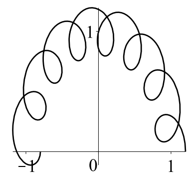
b) Bestäm konvergensradien R för potensserien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} z^k$.
Visa att serien konvergerar även för $|z| = R$. (0.5)

Var god vänd!

5. a) Antag att du har tillgång till en funktion `argument` som returnerar $\arg(z)$ för principalgrenen. Skapa en funktion `logaritm` som använder grenen med $-\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{3\pi}{2}$ ("texasgrenen"). Du kan skriva i maple-, matlab- eller pseudokod. (0.5)

b) Beräkna integralen

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz,$$



där γ ges av $z(t) = \left(\cos(t) + \frac{1}{5}\cos(16t)\right) + i\left(\sin(t) + \frac{1}{5}\sin(16t)\right)$, $0 \le t \le \pi$ enligt figur. Kom ihåg att motivera väl ditt svar väl. (0.5)

6. Beräkna

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/4}}{(4+x)^2}\, dx\,.$$

Svaret skall ges i reell form.

LYCKA TILL!