LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGSFÖRSLAG
LINJÄR ALGEBRA
2015–05–29

Om inget annat anges så kan samtliga baser antas vara ortonormerade och positivt orienterade

1. a) Planet har normal $\boldsymbol{n} = \vec{PQ} \times \vec{PR} = (2, -1, 1) \times (-1, -2, 0) = (2, -1, -5)$. Dess ekvation ges därför av $\boldsymbol{n} \cdot (x-1, y-2, z-1) = 0 \Leftrightarrow 2(x-1) - (y-2) - 5(z-1) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 5z + 5 = 0$. Avståndsformeln ger då avståndet som

$$\frac{|2 \cdot 1 - 1 - 5 \cdot 8 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-5)^2}} = \frac{34}{\sqrt{30}}.$$

b) Vi har att $\vec{RS} = (1, 1, 7)$ och $e = \vec{RQ}/|\vec{RQ}| = (3, 1, 1)/\sqrt{11}$ är riktningsvektor för linjen. Projektionen av $\vec{RS}$ på linjen ges då at $(1, 1, 7) \cdot (3, 1, 1)(3, 1, 1)/11 = (3, 1, 1)$ och avståndet därför av $|(1, 1, 7) - (3, 1, 1)| = |(-2, 0, 6)| = 2\sqrt{10}$.

2. $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 2 - 2 + 0 = 0$, varför det två första vektorerna är ortogonala, och därmed är alla tre det parvis enligt definitionen av vektorprodukt. Vidare är $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (1, -2, -5)$. För att bestämma koordinaterna skriver vi

$$(0, 0, 1) = x_1\boldsymbol{u} + x_2\boldsymbol{v} + x_3\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}.$$

Multiplicerar vi ekvationen skalärt med de tre basvektorerna får vi följande ekvationer:

$$x_1|\boldsymbol{u}|^2 = (0, 0, 1) \cdot (2, 1, 0) = 0, \ x_2|\boldsymbol{v}|^2 = (0, 0, 1) \cdot (1, -2, 1) = 1,$$

$$x_3|\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2 = (0, 0, 1) \cdot (1, -2, -5) = -5,$$

vilket ger att koordinaterna är $x_1 = 0, \ x_2 = 1/6, \ x_3 = -5/30 = -1/6$.

3. Kalla matrisen A. Då ges nollrummet $N(A)$ som lösning på systemet

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 & = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 & = 0 \\ x_1 + 11x_2 + 6x_3 - 7x_4 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 & = 0 \\ 2x_2 + x_3 - 2x_4 & = 0 \\ 8x_2 + 4x_3 - 8x_4 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 & = 0 \\ 2x_2 + x_3 - 2x_4 & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases}$$

Vi ser då att rangen är 2 och lösningen till systemet ges (t.ex.) av $(x_1, x_2, x_3) = s(1, 1, -2, 0) + t(-5, 0, 2, 1)$. En bas för det tvådimensionella nollrummet är därför $(1, 1, -2, 0)$ och $(-5, 0, 2, 1)$.

För att hitta en bas för värderummet observerar vi att dess dimension är lika med rangen, alltså två. De två första kolonnerna i A är inte proportionella, och utgör därför en bas. Så en bas för värderummet ges av (t.ex.) $(1, 1, 1)$ och $(3, 1, 11)$.

4. Vi börjar med att beräkna egenvärdena:

$$\begin{vmatrix} \lambda - \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \lambda - \frac{1}{2} \end{vmatrix} = (\lambda - \frac{2}{3})(\lambda - \frac{1}{2}) - \frac{1}{6} = \lambda^2 - \frac{7}{6}\lambda + \frac{1}{6} = 0.$$

Denna har lösningarna $\lambda = 1$ och $\lambda = \frac{1}{6}$.

Egenvektorn till $\lambda = 1$ fås som lösning till ekvationen $x_1 = x_2$, alltså $t(1,1)$, medan egenvektorn till $\lambda = \frac{1}{6}$ löser ekvationen $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = 0$, alltså $t(2,-3)$. Om vi därför sätter

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad S^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

så gäller att

$$S^{-1}AS = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Ur detta får vi nu

$$A^n = SD^nS^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6^n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \to \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

5. a) Om F är en linjär avbildning måste det gälla att $F(0) = 0$. Detta går inte om origo inte ligger i planet.

b) Normalvektorn till planet ska avbildas på noll, vilket betyder att 0 är ett egenvärde med normalvektorn som egenvektor. Vidare ska alla vektorer i planet avbildas på sig själva, vilket betyder att F har egenvärdet 1 och tillhörande egenvektorer är alla vektorer i planet.

c) Normalvektorn till planet (som måste gå genom origo enligt a) ska vara egenvektor till egenvärdet noll. Vi bestämmer därför $N(A)$:

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

som är ekvivalent med att $(x_1, x_2, x_3) = t(1, 2, -1)$. En normalvektor ges alltså av $(1, 2, -1)$ och planets ekvation blir

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0.$$

Alternativt ser vi att vektorerna $(5, -2, 1), (-1, 1, 1)$ spänner upp $V(A)$ som är planet ifråga. En normalvektor ges därför av deras vektorprodukt: $(-3, -6, 3) = -3(1, 2, -1)$.

6. Två alternativ som är ungefär lika besvärliga. Det första är att välja en positivt orienterad ON-bas för rummet så att $\boldsymbol{e}$ fungerar som z-axel. I den basen kan vi beräkna

$$(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e})\boldsymbol{e} = x_3(0,0,1), \quad \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{e} = (x_2, -x_1, 0).$$

I koordinater har vi alltså att $F(x_1, x_2, x_3) = (-x_2, x_1, x_3)$ och då gäller att

$$|F(x_1, x_2, x_3)|^2 = (-x_2)^2 + x_1^2 + x_3^2 = |x|^2$$

och vi ser att $(1,0,0)$ avbildas på $(0,1,0)$, $(0,1,0)$ på $(-1,0,0)$ och $(0,0,1)$ på $(0,0,1)$. Det innebär att avbildningen är en rotation 90° moturs, sett från spetsen av e.

Alternativt kan vi sätta $\boldsymbol{u''} = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e})\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{u'} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u''}$ och $\hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{u'}$. Då gäller att $|\hat{\boldsymbol{u}}| = |\boldsymbol{u'}|$ och att vektorerna $\boldsymbol{u'}, \hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{e}$ kommer att definiera en positivt orienterad bas av parvis vinkelräta vektorer i rummet. I de koordinaterna gäller att $\boldsymbol{u} = (1,0,1)$ medan $F(\boldsymbol{u}) = (0,1,1)$. Bilden har därför uppkommit genom rotation 90° grader moturs, och detta gäller för alla vektorer. Men en rotation är en isometrisk avbildning.

Vi kan också direkt visa att avbildningen är isometrisk genom att utnyttja att $F(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u''} + \hat{\boldsymbol{u}}$, där uppdelningen är ortogonal. Det följer att

$$|F(\boldsymbol{u})|^2 = |\boldsymbol{u}''|^2 + |\hat{\boldsymbol{u}}|^2 = |\boldsymbol{u}''|^2 + |\boldsymbol{u}'|^2 = |\boldsymbol{u}|^2.$$