LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

SVAR OCH ANVISNINGAR
SYSTEM OCH TRANSFORMER
2014–04–23

1.

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{2t} + te^{2(t-1)}\theta(t-1) \\ y(t) &= e^{2t} + (t-1)e^{2(t-1)}\theta(t-1)\,. \end{aligned}$$

Det är nog enklast att använda Laplacetransformation.

2.

(a)

(b) $f'(t) = (\theta(t) - \theta(t-\frac{\pi}{2}))\cos t - \delta(t-\frac{\pi}{2})$ och $f''(t) = -(\theta(t)-\theta(t-\frac{\pi}{2}))\sin t + \delta(t) - \delta'(t-\frac{\pi}{2})\,.$

(c) $f * g = T_\pi f$ och $f' * g' = T_\pi f''$.

3.

(a) Ej kausalt ty $h(t) \neq 0$ för något (alla!) $t < 0$.

(b) Ja, ty $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt = \pi < \infty$.

(c) $H(i\omega) = \pi e^{-|\omega|}$, $A(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$ och $\Phi(\omega) = 0$.

(d) $\frac{\pi}{e^2}\sin 2t$.

4.

(a)

$$e^{tA} = \frac{1}{2}e^{5t}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}e^{-t}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Nej. En sådan matris B kan bara ha egenvärdet noll. (Varför?) Den måste ges av

$$B = \frac{d}{dt}\,e^{Bt}\Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

För denna matris gäller emellertid $\mathrm{tr}B = 4 \neq 0$ så den har minst ett egenvärde som inte är noll.

5.

(a) Överföringsfunktionen är

$$H(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)}\,, \quad \mathrm{Re}\,s > 2\,.$$

(b)

$$y(t) = \frac{1}{6}(2e^{2t} - 3e^t + e^{-t})\theta(t)\,.$$

(c)

$$y(t) = \frac{1}{6}(3e^t - 2e^{2t})(1-\theta(t)) + \frac{1}{6}e^{-t}\theta(t)\,.$$

V.G.V

6.

(a) Använd att

$$A \begin{bmatrix} N \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N-1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad A \begin{bmatrix} 0 \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ N-1 \end{bmatrix}.$$

(b) Lösningen ges av

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \left(1 - \frac{2}{N}\right)^k \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

där $c_1 = c_2 = N/2$.

(c) Resultatet i b) ger

$$\frac{y_N}{N} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{N}\right)^N,$$

dvs

$$\lim_{N\to\infty} \frac{y_N}{N} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2}.$$