**LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA**
**MATEMATIK**

**TENTAMENSSKRIVNING**
**ENDIMENSIONELL ANALYS**
**DELKURS B1**
**2014–10–30 kl 8–13**

SVAR och ANVISNINGAR. [Svar på den andra varianten av uppgift 1 är skrivet i rött]

**1.** a) 37 [49] b) $y = -2x + 7$ [$+8$] c) $x = \frac{5}{2}$ [4] d) $-\frac{17}{6}$ e) $x < -2$ eller $x > 3$

f) $\frac{55}{16}$ g) $x = 4$ $\left[\frac{3}{2}\right]$ h) $\alpha = 240°, 300°$ [$150°, 210°$] i) $(x-4)^2 - 13$ [$-11$] j) $x = 1$

**2.** a) Vi har
$$\frac{\cos x}{x} \to 0 \text{ då } x \to \infty$$
eftersom $\frac{1}{x} \to 0$ då $x \to \infty$ och cos är begränsad.

b) Det gäller att
$$\frac{\ln(1+2\sin x)}{6x} = \frac{\ln(1+2\sin x)}{2\sin x} \cdot \frac{2\sin x}{6x} \to 1 \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ då } x \to 0$$
ty $\frac{\ln(1+t)}{t} \to 1$ då $t \to 0$ (och $t = 2\sin x \to 0$ då $x \to 0$) och $\frac{\sin x}{x} \to 1$ då $x \to 0$.

c) Vi noterar att
$$\frac{x^2 - |x|}{x} = x - \frac{|x|}{x}, \quad x \neq 0.$$
Eftersom
$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{då } x > 0 \\ -1 & \text{då } x < 0 \end{cases}$$
följer det att
$$x - \frac{|x|}{x} \to -1 \text{ då } x \to 0^+ \quad \text{och} \quad x - \frac{|x|}{x} \to 1 \text{ då } x \to 0^-.$$
Så uttrycket saknar gränsvärde då $x \to 0$.

**3.** a) Volymen av en burk med basdiameter $d$ och höjd $h$ ges av
$$V = \pi \cdot h \cdot (d/2)^2 = \frac{\pi}{4} \cdot h \cdot d^2$$
Om $d + h = 9$, dvs. $h = 9 - d$, så kan volymen skrivas som en funktion av $d$:
$$V(d) = \frac{\pi}{4}(9-d)d^2, \quad 0 < d < 9.$$
Funktionen $V(d)$ är deriverbar på intervallet $]0, 9[$ med derivatan
$$V'(d) = \frac{\pi}{4}(18d - 3d^2) = \frac{3\pi}{4} d(6-d).$$
Det gäller att
$$V'(d) = 0 \iff d = 0 \text{ eller } d = 6.$$
Endast $d = 6$ tillhör intervallet $]0, 9[$ och vi får följande teckentabell

| $d$ | 0 | | 6 | | 9 |
|---|---|---|---|---|---|
| $V'(d)$ | ≀ | $+$ | 0 | $-$ | ≀ |
| $V$ | ≀ | ↗ | | ↘ | ≀ |

Vi ser att $d = 6$ är en global maximipunkt till $V$ på intervallet $]0, 9[$ och det största volymen blir således

$$V(6) = \frac{\pi}{4} \cdot 6^2 \cdot (9 - 6) = \underline{27\pi}.$$

b) Se boken §10.6

**4.** a) Det gäller att

$$|2x + 4| = \begin{cases} 2x + 4 & \text{då } x \geq -2 \\ -2x - 4 & \text{då } x < -2 \end{cases} \quad \text{och} \quad |x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{då } x \geq 1 \\ 1 - x & \text{då } x < 1 \end{cases}$$

Vi får nu tre ekvationer att lösa:

$$\begin{aligned} x \geq 1: &\quad 2x + 4 - 3x + 1 = x - 1 \iff x = 3 \\ -2 \leq x < 1: &\quad 2x + 4 - 3x + 1 = 1 - x \iff 1 = 5 \\ x < -2: &\quad -2x - 4 - 3x + 1 = 1 - x \iff x = -1 \end{aligned}$$

Den enda lösningen är $\underline{x = 3}$ (ty $1 \neq 5$ och $-1 \not< -2$).

b) Enligt binomialsatsen är

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{2}{x}\right)^9 &= \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} \left(\frac{x^2}{2}\right)^k \left(\frac{2}{x}\right)^{9-k} \\ &= \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} 2^{-k+(9-k)} x^{2k-(9-k)} = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} 2^{9-2k} x^{3k-9}. \end{aligned}$$

Eftersom

$$3k - 9 = 0 \iff k = 3$$

ges den konstanta termen av

$$\binom{9}{3} 2^{9-2\cdot 3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} \cdot 2^3 = 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 = \underline{672}.$$

**5.** a) Vi vet att

$$\sin y = 0 \iff y = k\pi \text{ för något heltal } k.$$

Så ekvationen $f(x) = 0$ är ekvivalent med

$$e^x = k \text{ för något } k \in \mathbb{Z}.$$

Lösningarna är $\underline{x = \ln k, \text{ där } k = 1, 2, \ldots}$ och $f$ har alltså oändligt många nollställen.

b) Funktionen $f$ har precis <u>20 nollställen</u> på intervallet $[0, 3]$, nämligen

$$\ln 1, \ln 2, \ldots, \ln 20.$$

c) Det gäller att

$$f'(x) = \pi e^x \cos\bigl(\pi e^x\bigr), \quad x > 0.$$

Speciellt är

$$f'\Bigl(\ln \frac{3}{2}\Bigr) = \frac{3\pi}{2} \cos\Bigl(\frac{3\pi}{2}\Bigr) = 0.$$

d) Eftersom

$$f'\big(\ln(2k)\big) = 2k\pi \quad \text{och} \quad f'\big(\ln(2k+1)\big) = -(2k+1)\pi \quad \text{för } k = 1, 2, \ldots$$

följer det att $f'$ är obegränsad på intervallet $]0, \infty[$ och saknar ett gränsvärde då $x \to \infty$.

**6.** a) Det gäller att

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}, \qquad -1 < x < 1.$$

Så olikheten kan skrivas som

$$\frac{x}{1-x} \geq \sqrt{x}.$$

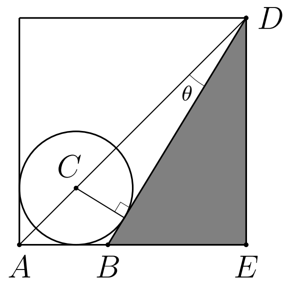
Vi ser direkt att $x = 0$ är en lösning, och för $0 < x < 1$ är olikheten ekvivalent med $1 - x \leq \sqrt{x}$. Genom att kvadrera båda sidorna (som är positiva!) fås

$$1 - 2x + x^2 = (1-x)^2 \leq x, \qquad \text{dvs. } x^2 - 3x + 1 \leq 0.$$

Andragradsekvationen $x^2 - 3x + 1 = 0$ har lösningarna $x = \frac{1}{2}\big(3 \pm \sqrt{5}\big)$ och det följer därför att

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{x}{1-x} \geq \sqrt{x} \\ x \in [0, 1[ \end{array}\right\} \iff \underline{x = 0} \text{ eller } \underline{\tfrac{1}{2}\big(3 - \sqrt{5}\big) \leq x < 1.}$$

b) Drag diagonalen $AD$ (se figuren nedan) och drag radien som skär $BD$ i en rät vinkel. Kom ihåg att $BD$ tangerar cirkeln.




Frågan om arean av det skuggade området kan formuleras som: Är $|BE| > 2/3$?

Pythagoras sats ger att $|AD| = \sqrt{2}$ och således är $|CD| = \frac{3\sqrt{2}}{4}$. Enligt sinussatsen är

$$\frac{|AB|}{\sin\theta} = \frac{|BD|}{\sin(\pi/4)}, \qquad \text{dvs. } |BD| = \frac{\sqrt{2}\,|AB|}{2\sin\theta}$$

Eftersom

$$\sin\theta = \frac{1/4}{|CD|} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

följer det att $|BD| = 3|AB|$. Så $|AB| > 1/3$ (ty $|BD| > 1$) och $|BE| < 2/3$.

Svaret är alltså <u>NEJ</u>. Arean av det skuggade området är *mindre* än $1/3$.