LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
LINJÄR ALGEBRA
2015-08-27 kl 14–19

INGA HJÄLPMEDEL.
Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Alla koordinatsystem får antas vara ortonormala och positivt orienterade om inget annat anges.

1. Bestäm skärningen mellan planet som innehåller punkterna $P : (-1, 1, -1)$, $Q : (1, 2, -4)$, $R : (2, -6, 3)$ och linjen som ges av

$$\begin{cases} x &= 5 - t \\ y &= 3 + 3t \\ z &= 1 + 8t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. Bestäm en positivt orienterad ortonormal bas $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ sådan att $\hat{\mathbf{e}}_1$ är parallell med $(1, 2, -2)$ och $\hat{\mathbf{e}}_2$ är vinkelrät mot $(3, 2, 2)$. Avgör även vilka koordinater vektorn $\bar{\mathbf{v}} = (3, 6, 9)$ får i den nya basen.

3. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 14 & 8 \\ 3 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad X_p = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

a) Bestäm rangen, nolldimensionen och en bas för nollrummet till matrisen A. (0.7)

b) Beräkna AX_p samt bestäm samtliga lösningar till $AX = Y$. (0.3)

4. En linjär avbildning F avbildar vektorerna $\bar{\mathbf{u}}_1 = (1, -2, 1)$, $\bar{\mathbf{u}}_2 = (3, -5, 1)$, $\bar{\mathbf{u}}_3 = (2, -2, -1)$ på $F(\bar{\mathbf{u}}_1) = (1, -2, 3)$, $F(\bar{\mathbf{u}}_2) = (-1, 2, 1)$, $F(\bar{\mathbf{u}}_3) = (0, 0, 2)$. Bestäm avbildningsmatrisen till F samt avgör om den är inverterbar.

V.G.V.

5. a) Beräkna

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

(0.6)

b) Avgör om vektorerna $\bar{\mathbf{u}} = (1, -1, 1, -1)$, $\bar{\mathbf{v}} = (3, 0, 0, 1)$ och $\bar{\mathbf{w}} = (4, 4, 4, 2)$ är linjärt oberoende. (0.4)

6. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Diagonalisera A. (0.4)

b) Låt $p(x) = x^2 - 2x - 3$ och beräkna $p(\lambda)$ för alla egenvärden till A. Beräkna även $p(A) = A^2 - 2A - 3I$. (0.2)

c) Låt

$$q(x) = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0$$

och

$$q(B) = B^n + \alpha_{n-1}B^{n-1} + ... + \alpha_1 B + \alpha_0 I.$$

Visa att om B är diagonaliserbar och alla dess egenvärden uppfyller $q(\lambda) = 0$ så är även $q(B) = 0$. (0.4)

LYCKA TILL!