LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA **MATEMATIK**

SVAR **KONTINUERLIGA SYSTEM** **2013-08-22**

1. Modell

$$\begin{cases} u'_t - Du''_{xx} = 0, & 0 < x < 2L, t > 0, \\ u'_x(0,t) = u'_x(2L,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} q, & 0 < x < L, \\ 2q, & L < x < 2L. \end{cases} \end{cases}$$

Cosinusutveckling ger att koncentrationen blir

$$\frac{3q}{2} - \frac{2q}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{k} e^{-Dk^2\pi^2 t/(4L^2)} \cos(\frac{k\pi x}{2L})$$

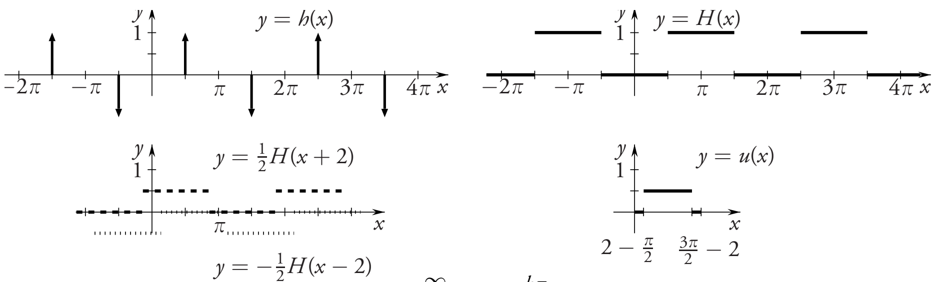
med $3q/2$ som stationär koncentration.

2. En tolkning kan vara att modellen beskriver små transversella svängningar i en sträng som är fastsatt i $(0,0)$ och $(0,\pi)$. Strängen befinner sig vid tiden $t = 0$ längs x-axeln och får genom ett hammarslag i $\pi/2$ en transversell hastighet $u'_t(x,0) = \delta(x - \pi/2)$. Vågutbredningshastigheten $c = 1$.

Låt h vara en udda och 2π-periodisk funktion sådan att $h(x) = \delta(x - \pi/2) - \delta(x + \pi/2)$ då $-\pi < x < \pi$. Enligt d'Alemberts formel är då

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y)\, dy \quad \text{då} \quad 0 < x < \pi.$$

Speciellt blir $u(x,1) = \frac{1}{2}(\theta(x + 1 - \pi/2) - \theta(x - 1 - \pi/2))$ då $0 < x < \pi$.



Lösningen kan även skrivas $u(x,t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sin\frac{k\pi}{2}}{k\pi} \sin(kt)\sin(kx)$ då $0 < x < \pi$, $t > 0$.

3. Enligt projektionssatsen blir integralen som minst då $c_k = 2^{-k-1}, k = 0, 1, 2, \ldots n$. Gränsvärdet av integralens minimivärde blir $\ln 2/2 - 1/3 \approx 0{,}013$. (Eftersom gränsvärdet inte blir 0 utgör $\{\varphi_k\}_0^\infty$ ingen ortogonal bas.)

4. Tidsoberoende värmeledningsproblem där $q = 70$, $\lambda = 0{,}2$ och $\alpha = (1,2)$.

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{q}{\lambda}\delta_\alpha, & x^2 + y^2 < 25, \\ u = 20, & x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$$

Efter homogenisering och spegling till $\tilde{\alpha} = (5,10)$ ger Greenfunktionen lösningen

$$u(x,y) = 20 - \frac{1}{2\pi}\frac{70}{0{,}2}(\ln|(x,y) - (2,1)| - \ln(\frac{1}{\sqrt{5}}|(x,y) - (5,10)|))$$

med temperaturen i origo $u(0,0) = 20 + \frac{350}{4\pi}\ln 5 \approx 64{,}8°\ C$.

5. Operatorn är Sturm-Liouville då den kan skrivas $\mathcal{A}u = -\frac{1}{e^{2x}}\left(e^{2x}u'\right)'$, $u(0) = u(L) = 0$, och den har egenfunktioner $\varphi_k(x) = e^{-x}\sin\frac{k\pi x}{L}$ med motsvarande egenvärden $\lambda_k = 1 + \frac{k^2\pi^2}{L^2}$ vilket gör att lösningen kan skrivas

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(c\sqrt{\lambda_k}t)\varphi_k(x), \quad \text{med} \quad c_k = \frac{2(1-(-1)^k)}{k\pi c\sqrt{\lambda_k}}.$$

6. I rymdpolära koordinater blir lösningen blir oberoende av φ. Då är det lämpligt att göra ansatsen $u(r,s) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(r)P_k(s)$, där P_k är Legendrepolynomet av grad k och $s = \cos\theta$. Det blir dock enklar räkningar om man först sätter $v = u - 3z^2$. Då gäller att v bara beror av r. Lösningen blir $u = 2 - 2r^2 + 3z^2 = 2 - 2x^2 - 2y^2 + z^2$.