

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Beräkna nedanstående gränsvärden:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3\sqrt{x} + 2^{-x}}{\ln(x^3) + 3x^2}$ (0.3)

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 7x} - x)$ (0.4)

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 + x - 2}$ (0.3)

2. a) Låt $f(x) = \ln(x^2 + 4) - x \arctan\left(\frac{x}{2}\right)$. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = f(x)$ i den punkt som har x -koordinat 2. (0.6)

b) Låt g vara en deriverbar funktion som uppfyller att $g(x^3 + x + 1) = x^3$ för alla x . Beräkna $g'(1)$ och $g'(3)$. (0.4)

3. Skissera grafen till funktionen

$$f(x) = \frac{2x^2 - x + 12}{2x - 4}, \quad x \neq 2.$$

Ange speciellt eventuella lokala extrempunkter och sneda asymptoter.

4. a) Lös ekvationen $z^2 - 2iz + 2 + 4i = 0$. (0.5)

b) Skriv upp och härled Eulers formler. Använd sedan Eulers formler för att härleda den trigonometriska formeln $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$. (0.5)

5. a) Formulera medelvärdessatsen. Om f är en deriverbar funktion som uppfyller att $f(2) = 3$ och $f(4) = 8$, vad kan då medelvärdessatsen garantera oss för derivatan av denna funktion? (0.3)

b) Bevisa, med hjälp av medelvärdessatsen, att om en funktion definierad på ett intervall har en derivata som är positiv så är funktionen strängt växande. (0.2)

c) Visa att

$$\left| \sqrt{1+3x} - 1 - \frac{3}{2}x \right| \leq \frac{9}{16} \quad \text{då} \quad |x| \leq \frac{1}{4}. \quad (0.5)$$

6. En fyr (punkten Q) ligger på en liten ö, belägen 2 km från den närmsta punkten P på en rätlinjig strand. Från fyren skickas en smal ljusstråle från en roterande ljuskälla. Vid en viss tidpunkt t_0 träffar ljusstrålen punkten R på strandkanten, belägen 1 km från P , och då roterar ljuskällan med hastigheten 4 varv per minut. Beräkna den fart med vilken ljusstrålen rör sig längs strandkanten vid tiden t_0 ?

LYCKA TILL!