LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Tredimensionell vektoranalys
2013–08–23 kl 14–16

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Sätt $\boldsymbol{u} = (1, x+y+z, xyz)$ och låt K vara den kropp som beskrivas av

$$z^2 \geq x^2 + y^2, \quad 0 \leq z \leq 2.$$

a) Bestäm divergensen och rotationen av vektorfältet $\boldsymbol{u}$. (0.2)

b) Rita en skiss av kroppen K och beräkna arean av randen till K. (0.4)

c) Beräkna flödet av $\boldsymbol{u}$ ut ur K. (0.4)

2. Betrakta vektorfältet

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2}.$$

a) Är $\boldsymbol{F}$ konservativt i $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$? (0.2)

b) Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ där γ är kurvan given av

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(\cos t, 2\sin t, \sqrt{t/\pi}\,\right), \quad 0 \leq t \leq 3\pi. \qquad (0.3)$$

c) Låt $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ vara ett $\mathcal{C}^1$-fält definierat i en öppen mängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Antag att Y är ett orienterat ytstycke i Ω med orienterad rand ∂Y.

Formulera Stokes' sats för fältet $\boldsymbol{u}$ och ytstycket Y. (0.2)

d) Visa att

$$\int_\gamma e^x \cos y\, dx - e^x \sin y\, dy + xyz^2 dz = 0$$

för alla enkla slutna $\mathcal{C}^1$-kurvor γ som ligger i xy-planet. (0.3)

LYCKA TILL !