LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Tredimensionell vektoranalys
2013–04–22 kl 8–10

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Låt K vara området som definieras av

$$K:\ 0 \le z \le 1 - x^2 - y^2.$$

a) Beräkna arean av randen ∂K. (0.4)

b) Antag att $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ är ett C^1-vektorfält definierat i hela $\mathbb{R}^3$.
Formulera divergenssatsen för $\boldsymbol{u}$ och området K. (0.2)

c) Beräkna flödet av vektorfältet

$$\boldsymbol{u} = (x^3 + z,\ x^2 z,\ y + x^2 z)$$

ut ur området K. (0.4)

2. Betrakta vektorfältet

$$\boldsymbol{F}_a(x,y,z) = \big(z - ae^{xy},\ a\sin z,\ ay(z + \cos z) + x\big)$$

där a är en konstant.

a) Bestäm $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}_a$ för varje $a \in \mathbb{R}$ och $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Visa speciellt att det finns en funktion $g(x,y)$ så att

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F}_a = a\big(z,\ 0,\ g(x,y)\big). \qquad (0.3)$$

b) Sätt $a = 0$ och beräkna $\int_\gamma \boldsymbol{F}_a \cdot d\boldsymbol{r}$ längs kurvan γ given av

$$\boldsymbol{r}(t) = \big(\cos t,\ \sin t,\ t^2(2\pi - t)\big), \quad 0 \le t \le 2\pi. \qquad (0.3)$$

c) Låt σ vara cirkeln

$$y^2 + (z-1)^2 = 1, \quad x = 1$$

genomlöpt ett varv i positiv led sedd från punkten $(0,0,1)$.
Beräkna $\int_\sigma \boldsymbol{F}_a \cdot d\boldsymbol{r}$ för alla $a \in \mathbb{R}$. (0.4)

LYCKA TILL !

1. K ges av $0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2$.

Så $\partial K = D + Y$ där D är cirkelskivan $x^2+y^2 \leq 1$, $z=0$

och Y är paraboloiden $z = 1-x^2-y^2$, $0 \leq z \leq 1$

a) arean av ∂K = arean av D + arean av Y $= \pi + \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1) = \underline{\frac{5\pi}{6}(1+\sqrt{5})}$

ty Y är en funktionsyta så

$$\text{arean av } Y = \iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dx\, dy$$

$$\overset{\text{pol. koord.}}{=} 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+4\rho^2}\cdot \rho\, d\rho = 2\pi \left[\frac{2}{3\cdot 8}(1+4\rho^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$$

b) $K \subseteq \mathbb{R}^3$ är ett kompakt område och ∂K består av två C^1-ytor, D och Y.

Divergenssatsen säger att om ∂K är orienterad med utåtriktad normal,

dvs. $N = (0,0,-1)$ på D och $N = \dfrac{(2x, 2y, 1)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$ på Y,

så är $\iint_{\partial K} u \bullet N\, dS = \iiint_K \operatorname{div} u\, dx\, dy\, dz$.

c) Om $u = (x^3+z,\, x^2 z,\, y + x^2 z)$ så är $\operatorname{div} u = 3x^2 + 0 + x^2 = 4x^2$.

Enligt divergenssatsen kan vi beräkna flödet av u ut ur K som

$$\iint_{\partial K} u \bullet N\, dS = \iiint_K 4x^2\, dx\, dy\, dz$$

$$= \iint_D \left(\int_0^{1-x^2-y^2} 4x^2\, dz \right) dx\, dy$$

$$= 4 \iint_D x^2(1-x^2-y^2)\, dx\, dy$$

$$\overset{\text{pol. koord.}}{=} 4 \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^2 \cos^2\theta\, (1-\rho^2)\, \rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= 4 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta \int_0^1 \rho^3(1-\rho^2)\, d\rho = 4\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) = \underline{\frac{\pi}{3}}$$

2 $\quad F_a(x,y,z) = (z - ae^{xy},\ a\sin z,\ ay(z+\cos z)+x)$

a) $$\operatorname{rot} F_a = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z-ae^{xy} & a\sin z & ay(z+\cos z)+x \end{vmatrix} = \left(a(z+\cos z) - a\cos z,\ 1-1,\ 0-(-xae^{xy})\right)$$

$$= \underline{(az,\ 0,\ axe^{xy})}$$

Om $\underline{g(x,y) = xe^{xy}}$ så är $\operatorname{rot} F_a = a(z, 0, g(x,y))$

b) Om $a=0$ så är $\operatorname{rot} F_a = \underline{0}$.

Eftersom $\mathbb{R}^3$ är enkelt sammanhängande är F_0 ett potentialfält i $\mathbb{R}^3$.

Speciellt gäller att $\underline{\int_\gamma F_0 \cdot dr = 0}$ ty γ är en sluten kurva.

$$\left(r(0) = (1,0,0) = r(2\pi) \right)$$

c) Låt Y vara cirkelskivan $y^2 + (z-1)^2 \leq 1$, $x=1$.

(centrum i $(1,0,1)$ och radie 1 i planet $x=1$)

Om $N = (-1,0,0)$ på Y då är Y ett orienterat ytstycke med orienterad rand σ. — tänk efter!

Enligt Stokes' sats är

$$\int_\sigma F_a \cdot dr = \iint_Y a\begin{pmatrix} z \\ 0 \\ xe^{xy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dS$$

$$= -a \iint_Y z\, dS$$

$$= \underline{-a\pi} \qquad \text{enligt symmetri}$$

$$\left(\text{eller } = -a\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (r\sin\theta + 1) r\, dr \right) d\theta \right)$$