LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
FLERDIMENSIONELL ANALYS
2015-01-13 kl 8-13

1. Området D kan uttryckas i polära koordinater som $D = \{(r, \phi);\ 0 \le r \le 2,\ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}\}$.
Vi får

$$\iint_D x\, y^3\, dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} r\cos\phi\ (r\sin\phi)^3\ r\, d\phi \right) dr$$

$$= \int_0^2 r^5 \left[\frac{\sin^4\phi}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} dr = \frac{1}{16}\int_0^2 r^5 dr = \frac{1}{16}\left[\frac{r^6}{6}\right]_0^2 = \frac{2}{3}.$$

2. Vi har

$$grad f(x, y) = (2x - 3\sin y, -3x\cos y)\,,$$

som ger

$$grad f(1, \pi) = (2, 3).$$

a) Ekvationen av tangentplanet är $z = 1 + 2(x-1) + 3(y-\pi)$, dvs

$$2x + 3y - z = 1 + 3\pi.$$

b) Ekvationen av tangentlinjen är $(2, 3)\cdot(x-1, y-\pi) = 0$, dvs

$$2x + 3y = 2 + 3\pi.$$

c) Längden av riktningsvektoren är $\sqrt{3^3 + 4^2} = 5$, och $grad f(1, \pi) = (2, 3)$.
Så är

$$f'_{\mathbf{v}}(1, \pi) = (2, 3)\cdot(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}) = 18/5.$$

3. a) Eftersom funktionen f har kontinuerliga partiella derivator i $\mathbf{R}^2$, vet vi att en lokal extrempunkt av f måste vara en stationär punkt. Vi söker efter stationära punkter. Systemet

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 3x^2 - 6y = 3(x^2 - 2y) = 0 \\ f'_y(x, y) = -6x + 12y = 6(-x + 2y) = 0 \end{cases}$$

har två lösningar $(0, 0)$ och $(1, 1/2)$, som är stationära punkter.
Runt $(0, 0)$ gäller det att $f(x, 0) = x^3$ är positiv då $x > 0$ och negativ då $x < 0$. Så är punkten $(0, 0)$ en sadelpunkt till f.
För $(1, 1/2)$ har vi

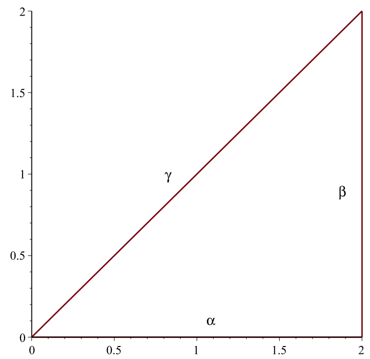
$$Q(h, k) = f''_{xx}(1, 1/2)h^2 + 2f''_{xy}(1, 1/2)hk + f''_{yy}(1, 1/2)k^2$$

$$= 6h^2 - 12hk + 12k^2 = 6(h-k)^2 + 6k^2,$$

som är positivt definit. Så är $(1, 1/2)$ en lokal minimipunkt till f.

b) Eftersom funktionen är kontinuerlig i den kompakta triangelskivan, finns det

både ett största och ett minsta värde. Vi söker nu efter intressanta punkter.
Stationära punkter:
Punkten $(1, 1/2)$ ligger inom triangelskivan och alltså är en stationär punkt.
Punkten $(0, 0)$ ligger på randet av triangelskivan och alltså inte är en stationär punkt.



Randpunkter: tre hörnen $(0, 0)$, $(2, 0)$ och $(2, 2)$ och tre sträckorna α, β, γ.
På α gäller $f(t, 0) = t^3$, där $0 < t < 2$, som har ingen stationär punkt i $0 < t < 2$.
På β gäller $f(2, t) = 8 - 12t + 6t^2$, där $0 < t < 2$, som har en stationär punkt vid $t = 1$. Vi får en punkt $(x, y) = (2, 1)$.
På γ gäller $f(t, t) = t^3$, där $0 < t < 2$, som har ingen stationär punkt i $0 < t < 2$.
Eftersom $f(1, 1/2) = -1/2$, $f(0, 0) = 0$, $f(2, 0) = f(2, 2) = 8$ och $f(2, 1) = 2$, så får vi det största värdet 8 och det minsta värdet $-1/2$.

4. a) Eftersom

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^y - x - x^2\right) = -1 - 2x = \frac{\partial}{\partial y}\left(\cos x - 2\,x\,y - y\right)$$

och $\mathbf{R}^2$ är enkelt sammanhängande, så är $\mathbf{F}(x, y)$ konservativt i hela $\mathbf{R}^2$.
b) Eftersom $\mathbf{F}(x, y)$ är konservativt i $\mathbf{R}^2$, kan man byta integrationsväg. Vi väljer vägen $\gamma: \ (x, y) = (t, 0), t: -1 \to 1$. Så gäller

$$\int_{\gamma_1} (\cos x - 2\,x\,y - y)\,dx \ + \ (e^y - x - x^2)\,dy$$

$$= \int_{\gamma} (\cos x - 2\,x\,y - y)\,dx \ + \ (e^y - x - x^2)\,dy = \int_{-1}^{1} \cos t\,dt = 2\sin 1.$$

c) Greens formel och ett polärt koordinatbyte medför att

$$\int_{\gamma_2} (\cos x - 2\,x\,y)\,dx \ + \ (e^y - x)\,dy$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \le 1} \left(\frac{\partial}{\partial x}(e^y - x) - \frac{\partial}{\partial y}(\cos x - 2\,x\,y)\right)\,dxdy$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1} (-1+2x)\, dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (-1+2r\cos\phi)\, r\, d\phi \right) dr = -\pi.$$

5. a) Kedjeregeln medför att

$$f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = f'_u + f'_v$$

$$f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y = f'_u - f'_v.$$

Insättning i differentialekvationen ger

$$f'_u = \frac{u+v}{2},$$

som medför att $f = \frac{(u+v)^2}{4} + \psi(v)$. Så har vi lösningar

$$f(x,y) = x^2 + \psi(x-y),$$

där ψ är en godtycklig kontinuerligt deriverbar funktion.

b) Differentialekvationen kan omskrivas som

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial g}{\partial x} + g \right) = 2x.$$

Så är

$$x\frac{\partial g}{\partial x} + g = 2xy + \phi(x),$$

dvs

$$\frac{\partial (xg)}{\partial x} = 2xy + \phi(x).$$

Alltså har vi

$$xg(x,y) = x^2 y + \Phi(x) + \Psi(y),$$

där Φ och Ψ är godtyckliga två gånger kontinuerligt deriverbara funktioner.

6. Enhetsklotet har volymen $\frac{4\pi}{3.}$ Så gäller

$$\frac{1}{2}\frac{4\pi}{3} = \iint_{x^2+y^2\le b^2} \left(\sqrt{1-x^2-y^2} - \left(-\sqrt{1-x^2-y^2} \right) \right) dxdy,$$

som ger

$$\frac{\pi}{3} = \iint_{x^2+y^2\le b^2} \sqrt{1-x^2-y^2} dxdy.$$

Genom att införa polära koordinater vet vi att den sista integralen är lika med

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^b r\sqrt{1-r^2}\, dr \right) d\phi$$

$$= 2\pi \left[\frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{-3} \right]_0^b = \frac{2\pi}{3}\left(1-(1-b^2)^{\frac{3}{2}} \right).$$

Alltså

$$\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}\left(1-(1-b^2)^{\frac{3}{2}} \right) \quad \Longrightarrow \quad b = \sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}}.$$