LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Tredimensionell vektoranalys
2013–08–23 kl 14–16

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Sätt $\boldsymbol{u} = (1, x+y+z, xyz)$ och låt K vara den kropp som beskrivas av

$$z^2 \geq x^2 + y^2, \quad 0 \leq z \leq 2.$$

a) Bestäm divergensen och rotationen av vektorfältet $\boldsymbol{u}$. (0.2)

Svar: $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 1 + xy, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{u} = (xz - 1, -yz, 1)$.

b) Rita en skiss av kroppen K och beräkna arean av randen till K. (0.4)

Svar: K är en kon, $A = 4\pi(1 + \sqrt{2}\,)$.

c) Beräkna flödet av $\boldsymbol{u}$ ut ur K. (0.4)

Svar: $8\pi/3$.

2. Betrakta vektorfältet

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

a) Är $\boldsymbol{F}$ konservativt i $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$? (0.2)

Svar: Ja, ty $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \underline{0}$ och $\mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$ är enkelt sammanhängande.

b) Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ där γ är kurvan given av

$$\boldsymbol{r}(t) = \big(\cos t, 2\sin t, \sqrt{t/\pi}\,\big), \quad 0 \leq t \leq 3\pi. \qquad (0.3)$$

Svar: $\ln 2$. $\big[\ U(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ är en potential till $\boldsymbol{F}\ \big]$

c) Låt $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ vara ett $\mathcal{C}^1$-fält definierat i en öppen mängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Antag att Y är ett orienterat ytstycke i Ω med orienterad rand ∂Y.

Formulera Stokes' sats för fältet $\boldsymbol{u}$ och ytstycket Y. (0.2)

Svar: $\int_{\partial Y} \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_Y \operatorname{rot} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{N} dS$.

d) Visa att

$$\int_\gamma e^x \cos y \, dx - e^x \sin y \, dy + xyz^2 dz = 0$$

för alla enkla slutna $\mathcal{C}^1$-kurvor γ som ligger i xy-planet. (0.3)

Svar: Sätt $\boldsymbol{v} = (e^x \cos y, -e^x \sin y, xyz^2)$ och observera att

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = (xz^2, -yz^2, 0) \perp (0, 0, 1).$$

Använda Stokes' sats.