LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Funktionsteori
2013–03–12 kl 8–13

Hjälpmedel: Bifogat formelblad.
Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Skriv fullständiga meningar och förklara dina beteckningar. Ge tydliga och enkla svar där så är möjligt.

1. Lös rekursionsekvationen $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 3^n + 1$, om $a_0 = a_1 = 0$.

2. a) Bestäm alla möjliga värden av $(-1)^3$ och $(-1)^{1/3}$. (0.5)

b) Låt γ vara linjestycket från 1 till i. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma e^{2z}\,dz \qquad (0.5)$$

3. a) Vilka av följande serier är konvergenta respektive divergenta? Var noggrann med motiveringen. (0.2/styck)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \ln k \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!}{5^k(k!)^2} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k}}{k+5}$$

b) Visa att serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4+k}$ är konvergent. Ge en rimlig uppskattning av resttermen

$$r_{10} = \sum_{k=11}^{\infty}\frac{1}{k^4+k}. \qquad (0.4)$$

4. a) Hitta alla analytiska funktioner f sådana att $\operatorname{Re} f(z) = |z|^2$. (0.5)

b) Hitta alla analytiska funktioner g sådana att $g(x) = x\sin x - \cos x$ då $x \in \mathbb{R}$. (0.5)

5. Funktionen f är kontinuerlig och 2π-periodsk och har Fourierserien

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{ikt}}{2^k}.$$

a) Visa att Fourierserien konvergerar likformigt. (Dess summa blir därmed $f(t)$ för alla t.) (0.3)

b) Visa att f är deriverbar och bestäm Fourierserien för f'. (0.4)

c) Beräkna integralen

$$\int_0^{2\pi} f'(t)\cos 2t\,dt. \qquad (0.3)$$

Vänd!

6. Låt $f(z) = \dfrac{\operatorname{Log} z}{z^2 - 1}$, där Log betecknar *prinicpalgrenen* av den komplexa logaritmen.

a) Vilken slags singularitet har f i punkten $z = 1$? (0.2)

b) Beräkna integralen

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2 - 1}\, dx.$$

genom att integrera f längs randen till en stor kvartscirkelskiva i första kvadranten. Förklara varför det inte (utan vidare) fungerar att lösa denna integral genom att ta den naturliga grenen av log och integrera över den ”vanliga hålkakan”. (0.8)