

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar.
Lämna tydliga svar om så är möjligt.

1. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}, \quad D = \{(x, y); x+y \leq 3, x \geq 1, y \geq 1\}.$$

2. Låt $f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{-(x^2+y^2)/2}$.

- a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till f :s graf i punkten $(1, 1, 0)$. (0.2)
b) Bestäm en ekvation för tangenten i punkten $(2, 1)$ till den nivåkurva till f som går genom punkten $(2, 1)$. (0.2)
c) Bestäm det största och minsta värdet av f i området $x^2 + y^2 \leq 4$. (0.6)

3. a) Beräkna kurvintegralen $\int_{\gamma} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$ då γ är cirkeln $x^2 + y^2 = r^2$ med radien r genomlöst ett varv moturs. (0.2)

- b) Bestäm kurvintegralen i a) om γ är randen till området till höger, genomlöst i positiv omloppsriktning. (0.3)

- c) Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} 3x^2(x+y)dx + (x^3 + 3y)dy$$

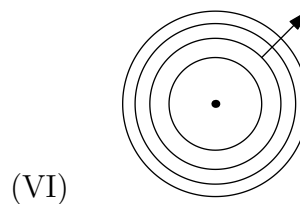
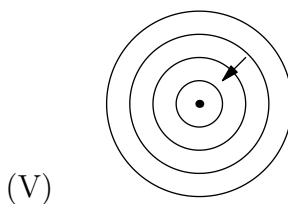
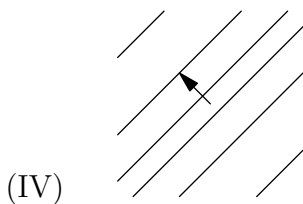
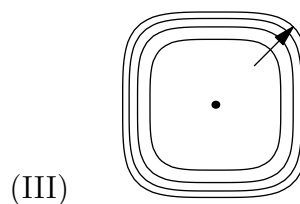
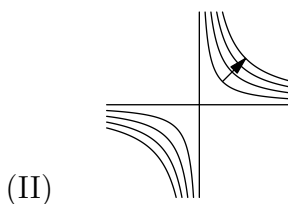
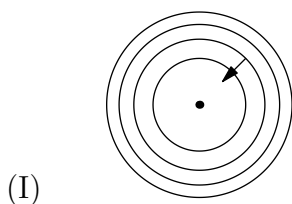
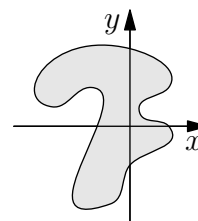
då γ går från $(0, 0)$ till $(2, 0)$ längs cirkelbågen $x^2 - 2x + y^2 = 0$ i 1:a kvadranten. (0.5)

4. a) Beräkna integralen

$$\iiint_K ze^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz,$$

där K är det övre halvklotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, z \geq 0$. (0.6)

- b) Para ihop funktionerna $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = 4 - x^2 - y^2$, $h(x, y) = xy$ med motsvarande nivåkurvor. Varje pil representerar riktningen av en gradient i en punkt. Kurvorna är ritade för nivåerna 0, 1, 2, 3, 4. (0.4)



Var god vänd!

5. a) Bestäm den funktion $f(x, t)$ som uppfyller

$$\frac{\partial f}{\partial t} + x \frac{\partial f}{\partial x} = -f, \quad f(x, 0) = x,$$

genom att införa koordinatbytet $\begin{cases} u = xe^{-t} \\ v = t. \end{cases}$ (0.5)

- b) Bestäm största och minsta värde av $f(x, y) = xy$ på kurvan $x^4 + y^4 - 3xy = 9$ i första kvadranten ($x \geq 0, y \geq 0$). (0.5)
6. En insektshona, som befinner sig i punkten $(0, 0)$, sänder ut feromoner för att locka till sig hannar. Feromonkoncentrationen i punkten (x, y) ges (i lämpliga enheter) av uttrycket $C(x, y) = e^{-2x^2-3y^2}$.
- a) Skissera några nivåkurvor till C i området $|x| \leq 2, |y| \leq 2$. Beskriv i ord vad det är för sorts kurvor och ange vilka koncentrationer de svarar mot. (0.2)
- b) En hanne av samma art befinner sig i punkten $(1, 2)$. I vilken riktning uppfattar han det som att koncentrationen växer snabbast, och hur stor är denna koncentrationsökning? (0.2)
- c) Hannen söker sig nu mot honan på så sätt att han hela tiden rör sig i den riktning i vilken koncentrationen ökar mest. Den väg han rör sig längs kan ges som grafen till en funktion, $y = \phi(x)$. Bestäm denna funktion ϕ och rita sedan ut vägen i den figur som du ritade i a). (0.6)

Lycka till!