

HJÄLPMEDEL: Utdelade formelblad.

Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar. Skriv fullständiga meningar och förklara dina beteckningar. Alla svar ska förenklas så långt som möjligt.

1. Lös rekursionsekvationen $\begin{cases} x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = 2 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n, & n \geq 0, \\ x_0 = 0, & x_1 = 0. \end{cases}$
2. Undersök vilka av följande serier som konvergerar och vilka som divergerar. Ge ordentliga motiveringar. (0.2/st)

$$A: \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ik}}{k^2}, \quad B: \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+2}{2k} \right)^k, \quad C: \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k-1}{k^2+k+1},$$

$$D: \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2}{k^2+1}, \quad E: \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{\sqrt{k}}.$$

3. a) Bestäm alla möjliga värden av $(-2)^\pi$ och π^{-2} . (0.4)

- b) Bestäm en *analytisk* funktion f vars realdel är $u(x, y) = (e^x + e^{-x}) \sin y$ och som uppfyller $f(0) = 3i$. Uttryck f som funktion av z . (0.6)

4. a) Bestäm konvergensradie för funktionsserien $\sum_{n=0}^{\infty} (n + 2^n) z^n$. (0.4)

- b) Vilken analytisk funktion $f(z)$ beskriver serien? (0.4)

- c) Beräkna $f(1/4)$ och $f'(0)$. (0.2)

5. a) Formulera Residysatsen. (0.4)

- b) Beräkna $\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z^2+1} dz$ med residykalkyl, där γ är cirkeln $\left| z - \frac{i}{2} \right| = \sqrt{2}$, genomlöst ett varv i positiv led. (0.6)

6. En viss kontinuerlig funktion $f(t)$ har Fourierserien $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{ik e^{ikt}}{2^{|k|}}$.

- a) Vilken funktion $f(t)$ handlar det om? Konvergerar serien likformigt då $0 \leq t \leq 2\pi$? (0.4)

- b) Beräkna Fourierserien för $f'(t)$. Konvergerar serien likformigt då $0 \leq t \leq 2\pi$? (0.3)

- c) Beräkna $\int_0^{2\pi} \overline{f(t)} f'(t) dt$. (0.3)

Lycka till!