1. Funktionen u är harmonisk. Detta ger att

$$0 = \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = -e^y \sin x + 6x + e^y \sin x + 2ax = 2x(3+a) \quad \text{för alla} \quad x, y$$

Alltså är $a = -3$.
Ett nödvändigt utseende på u är alltså

$$u(x,y) = e^y \sin x + x^3 - 3xy^2 + 4xy$$

Sätt $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Vi bestämmer nu v med hjälp av Cauchy-Riemanns ekvationer.

$$\begin{cases} v_x = -u_y = -e^y \sin x + 6xy - 4x \\ v_y = u_x = e^y \cos x + 3x^2 - 3y^2 + 4y \end{cases} \iff \begin{cases} v(x,y) = e^y \cos x + 3x^2 y - 2x^2 + g(y) \\ v_y = e^y \cos x + 3x^2 - 3y^2 + 4y \end{cases}$$

Första och andra ekvationen ger oss nu två uttryck för v_y. Alltså är

$$e^y \cos x + 3x^2 - 3y^2 + 4y = e^y \cos x + 3x^2 + g'(y) \iff g'(y) = 4y - 3y^2 \iff g(y) = 2y^2 - y^3 + K$$

där K är en reell konstant. Alltså är $v(x,y) = e^y \cos x + 3x^2 y - 2x^2 + 2y^2 - y^3 + K$. Detta ger att

$$f(z) = e^y \sin x + x^3 - 3xy^2 + 4xy + i(e^y \cos x + 3x^2 y - 2x^2 + 2y^2 - y^3 + K)$$

Speciellt ger $y = 0$ att

$$f(x) = \sin x + x^3 + i \cos x - i2x^2 + iK$$

Enligt identitetssatsen är då

$$f(z) = \sin z + z^3 + i \cos z - i2z^2 + iK = z^3 + i(e^{-iz} - 2z^2 + K)$$

Eftersom $f(0) = 2i$ är $K = 1$.

2. Den homogena ekvationen

$$2x_{n+2} - 5x_{n+1} + 2x_n = 0$$

har den karakteristiska ekvationen $2r^2 - 5r + 2 = 0$ med rötterna $r = 2$ och $r = 1/2$. Alltså är

$$x_n^{\text{hom}} = A \cdot 2^n + B \cdot 2^{-n},$$

där A och B är konstanter.
Som partikulärlösning till

$$2x_{n+2} - 5x_{n+1} + 2x_n = 10 \cdot 3^{-n} \tag{1}$$

prövar vi med ansatsen $x_n^{\text{par}} = C \cdot 3^{-n}$, där C är en konstant. Insättning i (1) ger att $C = 18$.
Den allmänna lösningen till (1) är då

$$x_n = x_n^{\text{hom}} + x_n^{\text{par}} = A \cdot 2^n + B \cdot 2^{-n} + 18 \cdot 3^{-n}.$$

Serien $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ är då konvergent precis då $A = 0$. Seriens summa (två geometriska summor) blir då $2B + 27$, vilken är 1 då och endast då $B = -13$.

3. a) Funktionen f är rationell. Vi partialbråksuppdelar:

$$f(z) = \frac{4z}{(3z+1)(z-1)} = \frac{1}{3z+1} + \frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-(-3z)} - \frac{1}{1-z}.$$

Nu kan vi använda den kända geometriska serien och får att

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} ((-3)^k - 1) z^k$$

b) Funktionen har två poler, $z = 1$ och $z = -1/3$. Konvergensradien är avståndet från origo till den närmaste polen, alltså lika med $1/3$.

c) Vi har $f^{(n)}(0) = n!a_n$, där a_n är koefficienten som står med z^n i potensserien. Således är

$$f'(0) = a_1 = -4, \quad f''(0) = 2a_2 = 16.$$

4. Se förberedelseuppgift till datorlaboration 2 (med faktorn 2^{-1} i relationen $a_{n+2} \leq 2^{-1}a_{n+1}$ utbytt mot 3^{-1}).

5. Genom att sätta $z = e^{ix}, 0 \leq x \leq 2\pi$, ser man att

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{2+\cos\theta}\,d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})}{2+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})}\,\frac{dz}{iz} =$$
$$= \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{z^2+1}{(z^2+4z+1)z}.$$

Integranden $f(z)$ har enkla poler i $0, -2+\sqrt{3}$ och $-2-\sqrt{3}$ + (utanför $|z|=1$). Residysatsen ger alltså att

$$I = 2\pi \sum_{|z|<1} \operatorname{Res} f(z) = 2\pi\left(1 + \left.\frac{z^2+1}{z(z-(-2-\sqrt{3}))}\right|_{z=-2+\sqrt{3}}\right)$$
$$= 2\pi\left(1 + \frac{-4(-2+\sqrt{3})}{(-2+\sqrt{3})2\sqrt{3}}\right) = 2\pi\left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

6. a) Eftersom f är jämn förkommer enbart cosinustermer i den trigonometriska Fourierutvecklingen av f. Enligt formelbladet blir

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|\,dt = \frac{\pi}{2}$$

och

$$a_k = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|\cos kt\,dt = [f \text{ jämn }] = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos kt\,dt = \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{t\sin kt}{k}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin kt}{k}\,dt\right) =$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos kt}{k^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2((-1)^k-1)}{\pi k^2}$$

Svar: Den trigonometriska Fourierserien blir $\displaystyle\frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2((-1)^k-1)}{\pi k^2}\cos kt$.

b) Sätt $u_k(t) = \dfrac{2((-1)^k-1)}{\pi(k^4+k^2)}(\cos kt + k\sin kt)$ och $y(t) = \dfrac{\pi}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)$.

Om vi kan visa att

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)$ är punktvis konvergent

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(t)$ konvergerar likformigt överallt

så följer att y är en deriverbar funktion och att derivatan kan erhållas genom termvis derivation.
För att visa 1. noterar vi först att

$$|u_k(t)| \leq \frac{2\cdot 2}{\pi k^2(1+k^2)}(1+k\cdot 1) \leq \frac{2}{k^2}$$

Eftersom $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2}$ är konvergent följer att serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)$ är absolutkonvergent och därmed konvergent.
För att visa 2. använder vi oss av en variant av Weierstrass majorantsats:

$$|u_k'(t)| \leq \frac{2\cdot 2}{\pi k^2(k^2+1)} \cdot |-k\sin kt + k^2\cos kt| \leq \frac{4}{\pi k^2}\cdot\frac{k+k^2}{k^2+1} \leq \frac{8}{\pi k^2} \leq \frac{3}{k^2} = m_k$$

där $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} m_k$ är konvergent.

Vi får då avslutningsvis att

$$y'(t)+y(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(u_k'(t)+u_k(t)) =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2((-1)^k-1)}{\pi k^2(k^2+1)}(-k\sin kt + k^2\cos kt + \cos kt + k\sin kt) =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2((-1)^k-1)}{\pi k^2}\cos kt = f(t).$$