1. Determinanten av ekvationssystemets koefficientmatris är (utveckling efter rad 1):

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a-1 & 1-a & 2 \\ a & -a & 3 \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 1-a & 2 \\ -a & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} a-1 & 2 \\ a & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} a-1 & 1-a \\ a & -a \end{vmatrix}$$
$$= a(3-3a+2a) - (3a-3-2a) + (-a^2+a-a+a^2)$$
$$= a(-a+3) - a + 3 = (a+1)(-a+3).$$

Enligt Huvudsatsen finns alltså endast den triviala lösningen $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ när $a \neq -1$, $a \neq 3$. Dessutom fås oändtligt många lösningar för $a = -1$ och för $a = 3$. Vi bestämmar nu lösningarna i dessa fall. För $a = -1$ gäller

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -2x + 2y + 2z = 0 \\ -x + y + 3z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 2z = 0 \\ 0 = 0, \end{cases}$$

vilket ger oändtligt många lösningar: $(x, y, z) = (t, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.

För $a = 3$ gäller

$$\begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ 3x - 3y + 3z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 4y - 2z = 0 \\ 0 = 0, \end{cases}$$

vilket ger oändtligt många lösningar: $(x, y, z) = (-\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

2. **a)** Skärningen mellan planen finns genom att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x - y + z - 5 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -3y + 3z = 3. \end{cases}$$

Skärningen är alltså linjen $l : (x, y, z) = (2, -1 + t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

b) Planet π går genom O och vi har $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP} = (1, -11, 5)$. Vektorn $\mathbf{n} = (1, 3, -2)$ är normalvektor till planet och projektionen $\mathbf{u}'$ av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{n}$ ges enligt projektionsformeln av

$$\mathbf{u}' = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\right)\mathbf{n} = \left(\frac{(1, -11, 5) \cdot (1, 3, -2)}{1^2 + 3^2 + (-2)^2}\right)(1, 3, -2) = \frac{-42}{14}(1, 3, -2) = (-3, -9, 6).$$

Låt S vara spegelbilden av P i π. Då gäller $\overrightarrow{PS} = -2\mathbf{u}'$ vilket ger

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{OP} - 2\mathbf{u}' = (1, -11, 5) - 2(-3, -9, 6) = (7, 7, -7).$$

Spegelbilden är alltså $S : (7, 7, -7)$.

3. **a)** Påståendet är sant. Ett homogent linjärt ekvationssystem har alltid minnst en lösning (den triviala lösningen). Vid Gausselimination av ett homogent linjärt ekvationssystem med 3 ekvationer och 4 obekanta fås maximalt 3 pivotelement. Alltså fås minnst 1 parameter, så det finns oändtligt många lösningar.

   b) Påståendet är falskt, t.ex. är vektorerna $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$, $(0,0,0,1)$ linjärt oberoende (de bilder en bas för $\mathbb{R}^4$).

   c) Påståendet är sant. Enligt Dimensionssatsen gäller rang A + nolldim $A = 5$ (då A har 5 kolonner), vilket ger nolldim $A = 5 -$ rang $A = 5 - 2 = 3$.

   d) Påståendet är sant. Vi har $F(F(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}$, spegelbilden av spegelbilden av $\boldsymbol{x}$ är jo $\boldsymbol{x}$. Ekvationen $F(\boldsymbol{x}) = \mathbf{y}$ har därför den entydiga lösningen $\boldsymbol{x} = F(\mathbf{y})$ för alla $\mathbf{y}$, så F är bijektiv.

   e) Påståendet är falskt. Att 0 är ett egenvärde till A betyder enligt definitionen att det finns $X \neq 0$ så att $AX = 0$. Enligt Huvudsatsen är detta ekvivalent med att A inte är inverterbar.

4. Om $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ gäller

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{x}) = (1,2,3) \times (x_1, x_2, x_3) &= \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ x_1 & x_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (-3x_2 + 2x_3, 3x_1 - x_3, -2x_1 + x_2). \end{aligned}$$

   Avbildningsmatrisen för F är därför

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Vi har

$$F(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \iff (1,2,3) \times \boldsymbol{x} = \mathbf{0} \iff \boldsymbol{x} \parallel (1,2,3).$$

   Detta betyder att $AX = 0$ har lösningen

$$X = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

   Alltså är nolldim $A = 1$. Det följar nu av Dimensionssatsen att

$$\text{rang A} = 3 - \text{nolldim } A = 3 - 1 = 2.$$

5. **a)** Låt $S = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ vara matrisen vars kolonner är $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$. Då

$$\det S = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2 \neq 0$$

   ger Huvudsatsen att $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ är en bas för $\mathbb{R}^2$. Enligt definitionen är S basbytesmatrisen.

b) Enligt satsen om basbyte (Sats 7.6) gäller koordinatsambandet

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

vilket ger

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 + \frac{3}{2}x_2 \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix},$$

dvs. $x_1' = -2x_1 + \frac{3}{2}x_2$ och $x_2' = x_1 - \frac{1}{2}x_2$. Insättning i ekvationen för l ger

$$0 = x_1' + x_2' + 1 = \left(-2x_1 + \frac{3}{2}x_2\right) + \left(x_1 - \frac{1}{2}x_2\right) + 1 = -x_1 + x_2 + 1.$$

Linjen har alltså ekvationen $l : -x_1 + x_2 + 1 = 0$.

6. Vi börjar med att diagonalisera A. Karakteristiska polynomet blir (vi utför först en kolonnoperation, sedan en radoperation och utvecklar därefter efter kolonn 3):

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda-7 & 6 & 6 \\ -4 & \lambda+4 & 4 \\ 1 & -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda-7 & 6 & 0 \\ -4 & \lambda+4 & -\lambda \\ 1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda-7 & 6 & 0 \\ -3 & \lambda+2 & 0 \\ 1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda \begin{vmatrix} \lambda-7 & 6 \\ -3 & \lambda+2 \end{vmatrix} \\ &= \lambda\big((\lambda-7)(\lambda+2) + 18\big) \\ &= \lambda(\lambda^2 - 5\lambda - 14 + 18) \\ &= \lambda(\lambda^2 - 5\lambda + 4) \\ &= \lambda(\lambda-1)(\lambda-4). \end{aligned}$$

Egenvärdena för A är alltså 0, 1 och 4. Motsvarande egenvektorer fås genom att lösa $(\lambda I - A)X = 0$. För $\lambda = 0$ gäller

$$(0I - A)X = 0 \iff \begin{cases} -7x_1 + 6x_2 + 6x_3 = 0 \\ -4x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ \quad - 4x_2 - 4x_3 = 0 \\ \quad 0 = 0, \end{cases}$$

vilket ger egenvektorerna

$$\lambda = 0 : \qquad X = \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \neq 0.$$

För $\lambda = 1$ gäller

$$(1I - A)X = 0 \iff \begin{cases} -6x_1 & + & 6x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \\ -4x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & - & 3x_2 & & & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0, \end{cases}$$

vilket ger egenvektorerna

$$\lambda = 1 : \qquad X = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \neq 0.$$

För $\lambda = 4$ gäller

$$(4I - A)X = 0 \iff \begin{cases} -3x_1 & + & 6x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \\ -4x_1 & + & 8x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ & & & & 12x_3 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0, \end{cases}$$

vilket ger egenvektorerna

$$\lambda = 4 : \qquad X = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ t \neq 0.$$

Då A har 3 olika egenvärden är A diagonaliserbar och med

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

gäller att S är inverterbar och att $S^{-1}AS = D$. Om nu

$$D' = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}$$

var $\mu_1^2 = 0$, $\mu_2^2 = 1$ och $\mu_3^2 = 4$ gäller $D'^2 = D$. Med $X = SD'S^{-1}$ gäller då

$$X^2 = (SD'S^{-1})^2 = SD'^2S^{-1} = SDS^{-1} = A.$$

Beräkning ger

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Detta ger de 4 lösningar

$$X = \pm S \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} S^{-1} = \pm \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

och

$$X = \pm S \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} S^{-1} = \pm \begin{pmatrix} -5 & 6 & 6 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vi bevisar nu att detta är de enda lösningarna — detta är dock inte en del av uppgiften. Antag att $X^2 = A$ och att $\mu = 0$, $\mu = 1$ eller $\mu = 2$. Då är $\mu^2 = 0$, $\mu^2 = 1$ eller $\mu^2 = 4$, så μ^2 är ett egenvärde till A. Ekvationen

$$(\mu I - X)(-\mu I - X) = -(\mu^2 I - X^2) = -(\mu^2 I - A)$$

kombinerat med produktregeln för determinanter ger att

$$\begin{aligned} \det(\mu I - X)\det(-\mu I - X) &= \det\big((\mu I - X)(-\mu I - X)\big) \\ &= \det\big(-(\mu^2 I - A)\big) \\ &= -\det(\mu^2 I - A) \\ &= 0, \end{aligned}$$

så $\pm\mu$ är ett egenvärde till X. Matrisen X har alltså 3 olika egenvärden: $\pm 0 = 0$, ± 1 och ± 2, så X är diagonaliserbar. Dessutom ser vi att om V är en egenvektor för X med tilhörande egenvärde $\mu' = \pm\mu$ gäller $XV = \mu' V$ vilket ger

$$AV = X^2 V = X(\mu' V) = \mu'(XV) = \mu'^2 V = \mu^2 V.$$

Detta betydar att V är en egenvektor för A med egenvärdet μ^2. Matriserna X och A har alltså samma egenvektorer, så SXS^{-1} måsta vara en diagonalmatris på formen

$$D' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2 \end{pmatrix}.$$

De 4 lösningar ovan utgör alltså alla lösningarna.