

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Beräkna följande gränsvärden. Endast svar krävs på denna uppgift. (0.2)/st.

$$\text{a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin 2x} \quad \text{b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\cos 2x} \quad \text{c)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \frac{e^{3x} - 1}{\cos 2x}$$

$$\text{d)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} \quad \text{e)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^3) + \left(\frac{1}{3}\right)^x}{x^2}$$

2. a) Rita i det komplexa talplanet alla komplexa tal z sådana att $|z + i| \geq 2$. (0.3)

- b) Polynomet $p(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 16z + 20$ har nollstället $z = 2 + i$. Lös ekvationen $p(z) = 0$ fullständigt. (0.7)

3. a) Härled, genom att utgå från derivatans definition, derivatan av funktionen $f(x) = x^2$. (0.2)

- b) Visa att funktionen $f(x) = \ln(1 + e^{2x}) - 2e^x \cdot \arctan(e^x)$ är avtagande för alla x . (0.3)

- c) Bestäm största och minsta värde av $f(x) = x \cdot e^{-x^2/2}$ då $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. (0.5)

4. a) Rita grafen till funktionen (0.7)

$$f(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2 - 2}.$$

Ange speciellt alla lokala extrempunkter och asymptoter.

- b) För vilka värden på konstanten a har ekvationen (0.3)

$$\frac{(x-1)e^x}{x^2 - 2} = a$$

precis en lösning?

5. a) Bestäm ett polynom $p(x)$ av grad 2 sådant att (0.7)

$$|\ln(1-x) - p(x)| \leq 3|x|^3 \quad \text{då} \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

Visa också att olikheten gäller med detta polynom.

- b) Bestäm konstanterna a och b så att funktionen (0.3)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-x) - ax}{x^2} & \text{då } x \neq 0, \\ b & \text{då } x = 0, \end{cases}$$

blir kontinuerlig i origo.

Var god vänd!

6. Två segelbåtar A och B kappseglar med konstant (men inte nödvändigtvis samma) fart mot en (fixerad) målmarkör M . Båt A närmar sig M rakt söderifrån med farten 15 km/h, och båt B närmar sig M rakt västerifrån. I ett visst ögonblick har båt B dubbelt så långt kvar till M som båt A har till M , och avståndet mellan båtarna minskar då med hastigheten 25 km/h. Bestäm farten för båt B . Avgör också vilken båt som vinner kappseglingen.

LYCKA TILL!