LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
LINJÄR ALGEBRA
2014-05-30 kl 8–13

INGA HJÄLPMEDEL.
Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Bestäm samtliga lösningar till ekvationssystemet $AX = B$ där

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ och } B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Bestäm också rangen och nollrummet till A.

2. Låt Π vara planet $x - y - z = 8$ i $\mathbb{R}^3$ och l linjen $(x, y, z) = t(1, 1, 1) + (1, 2, 3)$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Skär linjen planet och i så fall var? (0.2)

b) Bestäm avståndet mellan planet Π och punkten $P : (2, 3, 4)$. (0.4)

c) Bestäm den ortogonala projektionen av linjen l på planet Π. (0.4)

3. Låt $\overline{x} = (1, 3, 2)$ och $\overline{y} = (-1, 1, 4)$, och $\overline{z} = (3, 0, -1)$ (uttryckta i standardbasen).

a) Beräkna $\overline{x} \cdot \overline{y}$ och $\overline{x} \times \overline{y}$. (0.3)

b) Bestäm $\overline{x} \cdot (\overline{y} \times \overline{z})$ och ange den geometriska tolkningen av svaret. (0.3)

c) Bevisa att $\|\overline{u}\|^2\|\overline{v}\|^2 = (\overline{u} \cdot \overline{v})^2 + \|\overline{u} \times \overline{v}\|^2$, för godtyckliga vektorer $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^3$. (0.4)

4. a) Ge definitionen av att vektorerna $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_m$ (i $\mathbb{R}^n$) är linjärt oberoende. (0.4)

b) Avgör huruvida vektorerna $\overline{v}_1 = (1, 2, 3, 4)$, $\overline{v}_2 = (1, -1, 1, -1)$, $\overline{v}_3 = (2, 5, 0, 1)$, och $\overline{v}_4 = (1, 1, 1, 1)$ utgör en bas för $\mathbb{R}^4$. (0.6)

5. Låt A vara matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 5 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer för A. Beräkna också A^5.

6. Låt Π vara ett plan genom origo med normalvektor $\overline{n}$. Låt $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den ortogonala projektionen på detta plan och $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara vridningen med $\pi/2$ radianer runt normalen $\overline{n}$ moturs sett från normalens spets (så att $\overline{n}, \overline{x}, V(\overline{x})$ är positivt orienterade). Låt C vara avbildningsmatrisen i standardbasen för sammansättningen $V \circ P$. Visa att C är *skevsymmetrisk*, dvs att den uppfyller $C^T = -C$.
Ledning: Uttryck först $V \circ P$ i en lämplig ON-bas och gå därefter över till standardbasen.

LYCKA TILL!