

Hjälpmedel: Bifogat formelblad.

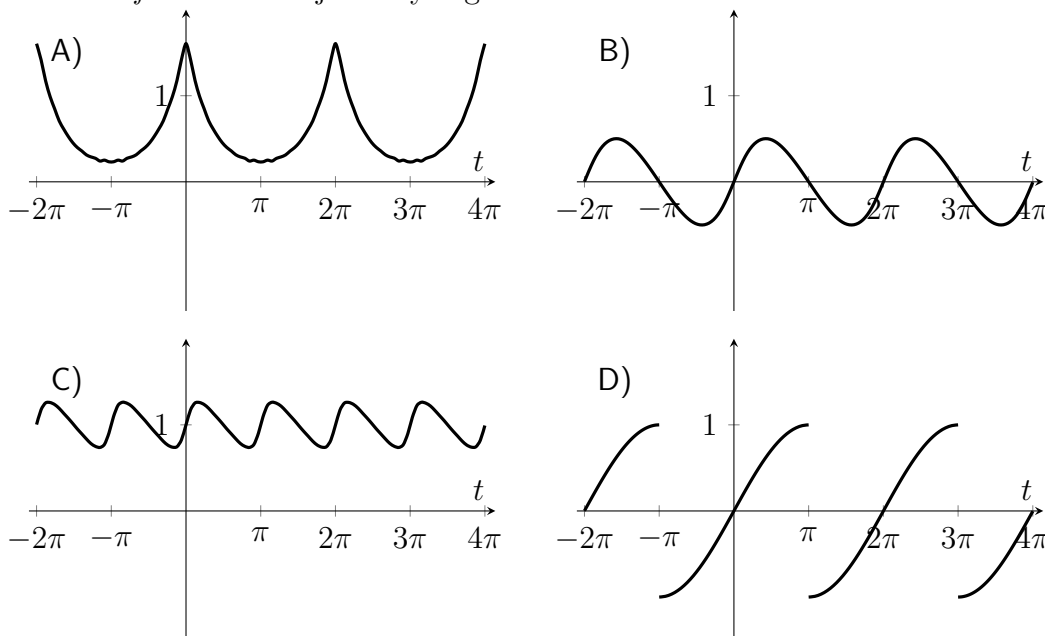
Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Skriv fullständiga meningar och förklara dina beteckningar. Ge tydliga och enkla svar där så är möjligt.

1. Lös rekursionsekvationen  $x_{n+2} + x_{n+1} = 2x_n + 1$ ,  $x_0 = x_1 = 1$ .

2. Funktionen  $f$  har Fourierserien

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k^4 + 1}.$$

a) Grafen till  $f$  är en av följande fyra grafer. Vilken? Motivera ditt svar. (0.5)



b) Bestäm värdet av  $c_0$  (du får ta hjälp av svaret i uppgift a). (0.2)

c) Beräkna

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(4t) dt \quad (0.3)$$

3. Vilka av följande serier är konvergenta respektive divergenta? Motivera noggrant! ( $5 \times 0.2$ )

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{2^k + 4^k}$	b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 - 1}{k^3 + 2k^2 + 3}$	c) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$
d) $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin k}{k^2 + 1}$	e) $\sum_{k=4}^{\infty} e^{ik}$	

4. Utveckla funktionen  $f(z) = \frac{1}{z^2}$  i en potensserie kring  $z = 1$  och ange seriens konvergensradie. Konvergerar serien för  $z = 2$  och vad blir i så fall seriens summa?

5. Låt  $g(z) = \frac{e^{2iz}}{(z^2 + 9)^2}$ .

a) Bestäm alla singulariteter (glöm inte att ange vilken *typ* av singularitet det rör sig om) för  $g$  och beräkna residyn i dessa punkter. (0.6)

b) Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2 + 9)^2} dx. \quad (0.4)$$

6. Beräkna kurvintegralen

$$\int_C \frac{z}{z^2 + 4} dz,$$

där  $C$  är den övre halvan av cirkeln  $|z - 3i| = 1$  från punkten  $z = 1 + 3i$  till punkten  $z = -1 + 3i$ .

