LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
ENDIMENSIONELL ANALYS A2
2013-03-11

1. **Svar:** a) $\dfrac{3}{2}$, b) $-\infty$, c) ∞, d) 0, e) $\dfrac{e^{3\pi/2}-1}{\pi}$.

2. Funktionen är definierad för alla $x \neq \pm 2$. Derivering ger (för $x \neq \pm 2$)

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(x^2-4) - (x-1)^2\, 2x}{(x^2-4)^2} = \ldots \frac{2(x-1)(x-4)}{(x^2-4)^2}.$$

Vi har nu underlag för följande teckentabell:

x		-2		1		2		4	
$f'(x)$	$+$	$\wr$	$+$	0	$-$	$\wr$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\wr$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\wr$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$

Punkten $x = 1$ är en lokal maximipunkt och $x = 4$ är en lokal minimipunkt.

Vi undersöker nu vad som händer där f ej är definierad, dvs. vid $x = \pm 2$. Vi har

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty \quad \text{och} \quad \lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty,$$

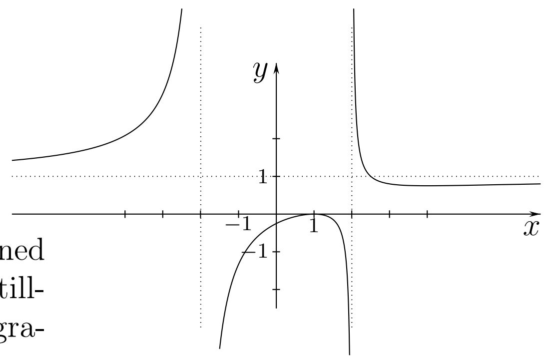
så $x = -2$ är lodrät asymptot. Vidare gäller det att

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \quad \text{och} \quad \lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty,$$

så även $x = 2$ är lodrät asymptot.

Det gäller att

$$f(x) = \frac{x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2}{x^2\left(1 - \frac{4}{x}\right)} \to \frac{(1-0)^2}{1-0} = 1$$



då $x \to \pm\infty$, så vi ser direkt att $y = 1$ är sned (vågrät) asymptot då $x \to \pm\infty$. Vi har nu tillräckligt med information för att kunna rita grafen.

Svar: Lokal maximipunkt $x = 1$ och lokal minimipunkt $x = 4$. Lodräta asymptoter $x = \pm 2$ och sned (vågrät) asymptot $y = 1$ då $x \to \pm\infty$.

3. Vi löser först $z^3 = 8$. Ansätt $z = re^{i\theta}$ och skriv högerledet av ekvationen på polär form:

$$(re^{i\theta})^3 = 8e^{i0} \quad \Leftrightarrow \quad r^3 e^{i3\theta} = 2^3 e^{ik2\pi} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{k2\pi}{3} \end{cases}.$$

Vi har alltså de tre lösningarna $z = 2e^{i\frac{k2\pi}{3}}$, $k = 0, 1, 2$, vilka på rektangulär form blir $z = 2$ och $z = 2(-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}) = -1 \pm i\sqrt{3}$. Eftersom $p(z)$ har reella koefficienter så måste de konjugerade $z = -1 \pm i\sqrt{3}$ vara de gemensamma nollställena. Således har $p(z)$ faktorn

$$(z - (-1 + i\sqrt{3}))(z - (-1 - i\sqrt{3})) = z^2 + 2z + 4.$$

Polynomdivision ger

$$p(z) = (z^2 - 2z + 5)(z^2 + 2z + 4),$$

och de övriga lösningarna till $p(z) = 0$ fås nu av

$$z^2 - 2z + 5 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z = 1 \pm 2i.$$

Svar: $z = -1 \pm i\sqrt{3}$ och $z = 1 \pm 2i$

4. **a)** Se läroboken sid. 212.

b) Exempelvis $f(x) = |x|$ är kontinuerlig men inte deriverbar i $x = 0$.

c) Funktionen är kontinuerlig överallt utom eventuellt i $x = 0$, så det är denna punkt vi måste undersöka. Det skall enligt definitionen av kontinuitet gälla att $f(x) \to f(0)$ då $x \to 0$, och eftersom

$$\arctan \tfrac{1}{x^2} \to \text{"}\arctan \infty\text{"} = \tfrac{\pi}{2} \qquad \text{då } x \to 0^-$$

så ser vi att vi måste ha $a = \pi/2$. Vidare gäller det att

$$\frac{1}{x}\Big(\sqrt{\frac{1}{x^2} + b} - \frac{1}{x}\Big) = \frac{1}{x}\,\frac{\big(\sqrt{\frac{1}{x^2} + b} - \frac{1}{x}\big)\big(\sqrt{\frac{1}{x^2} + b} + \frac{1}{x}\big)}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + b} + \frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{1}{x}\,\frac{\frac{1}{x^2} + b - \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}\big(\sqrt{1 + bx^2} + 1\big)} = \frac{b}{\sqrt{1 + bx^2} + 1} \to \frac{b}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{b}{2} \qquad \text{då } x \to 0^+.$$

Vi ser därför att $b/2 = \pi/2$, dvs. $b = \pi$.

Svar: $a = \pi/2$ och $b = \pi$.

5. **a)** Vi beräknar derivatorna upp till ordning 3 av $f(x) = (1+x)^{3/2}$ och får utvecklingen

$$f(x) = 1 + \tfrac{3}{2}x + \tfrac{3}{8}\,\frac{1}{\sqrt{1 + \theta x}}\,x^2, \qquad 0 \le \theta \le 1.$$

Detta leder till att

$$\left|f(x) - 1 - \tfrac{3}{2}\right| = \left|\tfrac{3}{8}\,\frac{1}{\sqrt{1+\theta x}}\,x^2\right| = \tfrac{3}{8}\,\frac{1}{\sqrt{1+\theta x}}\,x^2 \leq$$

$$\leq \tfrac{3}{8}\,\frac{1}{\sqrt{1-\tfrac{1}{2}}}\,x^2 = \tfrac{3}{8}\,\frac{1}{\sqrt{\tfrac{1}{2}}}\,x^2 = \tfrac{3}{8}\sqrt{2}\,x^2 \leq \tfrac{3}{8}\,2x^2 = \tfrac{3}{4}\,x^2$$

då $-1/2 \leq x \leq 1/2$ och $0 \leq \theta \leq 1$. Notera speciellt att det är $\theta x = -1/2$ som ger det värsta fallet.

b) Utvecklar vi $f(x)$ ovan ett steg längre så får vi, med den enklare formen av restterm,

$$(1-x^2)^{3/2} = f(-x^2) = 1 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{3}{8}x^4 + x^6B(x),$$

Detta ger

$$\frac{(1-x^2)^{3/2} - 1 + ax^2}{x^4} = \frac{1 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{3}{8}x^4 + x^6B(x) - 1 + ax^2}{x^4}$$

$$= \frac{\left(a - \tfrac{3}{2}\right)x^2 + \tfrac{3}{8}x^4 + x^6B(x)}{x^4}.$$

För att få ett ändligt gränsvärde måste vi ha $a - 3/2 = 0$, dvs. $a = 3/2$, och då gäller det att

$$\frac{(1-x^2)^{3/2} - 1 + ax^2}{x^4} = \frac{\tfrac{3}{8}x^4 + x^6B(x)}{x^4} = \tfrac{3}{8} + x^2B(x) \to \tfrac{3}{8} + 0$$

då $x \to 0$, eftersom funktionen B är begränsad nära 0.

Svar: a): $a = 3/2$ ger gränsvärdet $3/8$.

6. Cirkelbågens längd är θr, så cirkelsektorn omkrets ges av $O = 2r + \theta r$. Sektorns andel av en hel cirkelskiva med radie r är $\theta/2\pi$, så det skall gälla att $\pi r^2 \cdot \theta/2\pi = A$, eller ekvivalent att $\theta r^2/2 = A$. Vi löser här ut $\theta = 2A/r^2$, och kan därefter uttrycka omkretsen i enbart r:

$$O(r) = 2r + \frac{2A}{r^2}r = 2r + \frac{2A}{r}.$$

Derivering ger

$$O'(r) = 2 - \frac{2A}{r^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 = A \quad \Leftrightarrow \quad r = \pm\sqrt{A},$$

där vi såklart förkastar den negativa roten. Med hjälp av en teckentabell ser vi nu att $r = \sqrt{A}$ verkligen ger det minsta värdet på omkretsen. Slutligen beräknar vi för denna radie

r		$\sqrt{A}$	
$O'(r)$	$-$	0	$+$
$f(r)$	$\searrow$	$\wr$	$\nearrow$

$$\theta = \frac{2A}{r^2} = \frac{2A}{A} = 2.$$

Svar: Radien skall vara $\sqrt{A}$ meter, vinkeln 2 radianer.