

Inga hjälpmedel är tillåtna. För att du skall kunna erhålla full poäng skall dina lösningar vara läsbara och försedda med ordentliga motiveringar. Lämna tydliga svar.

1. Beräkna integralerna

$$\int_0^1 \sqrt{1-x} \, dx, \quad \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} \, dx, \quad \text{och} \quad \int_0^1 \arctan(x) \, dx.$$

2. Polynomet $z^3 + (1-2i)z^2 - 6z + (4+2i)$ har nollstället $z = 1$. Vilka är dess övriga nollställen?

3. Funktionen y löser differentialekvationen

$$\begin{cases} y'(x) = x(1-y(x)), & x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Bestäm Maclaurinpolynomet för y av ordning 4, till exempel genom att först lösa differentialekvationen.

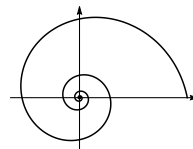
4. a) Låt r vara en deriverbar funktion, och sätt

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta) \cos \theta, \\ y(\theta) = r(\theta) \sin \theta. \end{cases}$$

$$\text{Visa att } x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2 = r(\theta)^2 + r'(\theta)^2. \quad (0.3)$$

- b) Beräkna längden av den logaritmiska spiralen

$$\begin{cases} x(\theta) = e^{-\theta/5} \cos \theta, \\ y(\theta) = e^{-\theta/5} \sin \theta, \end{cases} \quad 0 \leq \theta < +\infty. \quad (0.7)$$



5. a) Verifiera att funktionen $y_p(x) = -e^{-x} \ln x$ är en partikulärlösning till den linjära differentialekvationen

$$y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = \frac{4x+1}{x^2} e^{-x}, \quad x > 1. \quad (0.4)$$

- b) Bestäm den lösning y till differentialekvationen ovan som uppfyller $y'(1) = 0$ och $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$. (0.6)

6. I en burk finns en population med urdjur. Från och med en viss tidpunkt tillförs bakterier som föda, med ett konstant flöde. Det observeras att populationen med urdjur tillsammans slukar bakterier med en hastighet som vid varje tidpunkt är proportionell mot bakteriernas antal i kvadrat.

Inför lämpliga beteckningar och ställ upp en differentialekvation som beskriver situationen för bakterierna. Kommer antalet bakterier i burken att stabiliseras efter lång tid?

Lycka till!