LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Funktionsteori
2014–03–11 Svar och anvisningar

1. Svar: $x_n = 2 \cdot (-1)^n + (n+1) \cdot 2^n$.

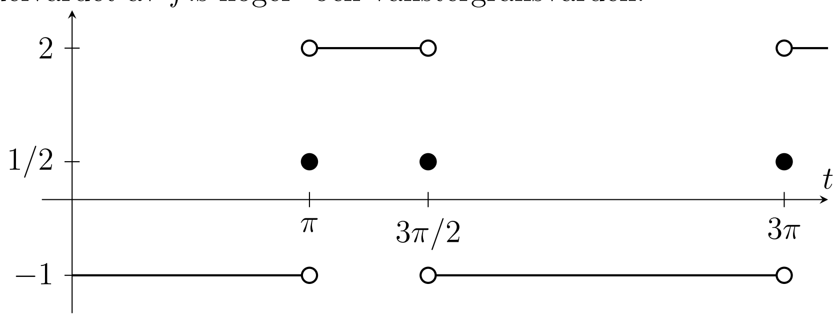
2. a) Utnyttja att $\tan z = (\sin z)/(\cos z)$ och använd Eulers formler.
Svar: $z = \frac{i}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{2} + \pi k$, där $k \in \mathbb{Z}$.

b) Svar: $e^{\mathrm{Log}(2+5i)} = 2+5i$ (enklast ur definitionen av komplexa logaritmer) och $\mathrm{Log}\left(e^{2+5i}\right) = 2 + (5 - 2\pi)i$ (tänk på argumentet).

3. a) Alla tre serier är konvergenta. Den första enklast via Leibniz, den andra via jämförelse (gärna på gränsvärdesform) med $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-3/2}$ och den tredje via kvot- eller rottestet.

b) Konvergensskivan är $|z+i| < \sqrt{2}$, enklast med rot- eller kvottestet. (Serien divergerar för alla z på randen av konvergensskivan, dvs. för alla z som uppfyller att $|z+i| = \sqrt{2}$. Det behöver inte kontrolleras.)

4. a) Lämpliga satser om Fourierseriers konvergens (sats 7.16 och 7.18) visar att Fourierserien konvergerar mot $f(t)$ utom i f:s språngpunkter, där serien konvergerar mot medelvärdet av f:s höger- och vänstergränsvärden:



b) Eftersom Fourierseriens summa inte är kontinuerlig på intervallet $[0, 2\pi]$ (se grafen ovan) och termerna i Fourierserien är kontinuerliga, så kan serien *inte* konvergera likformigt. (Enligt sats 6.26 som också finns på formelbladet.)

c) Sätt in $t = \pi$ i Fourierserien och utnyttja resultatet från a). Vi får

$$-\frac{1}{4} + \frac{3}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\sin\frac{k\pi}{2}}{k} (-1)^k = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin\frac{k\pi}{2}}{k} = -\frac{\pi}{4}.$$

5. Sätt $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^2(z^2+4z+5)}$ och integrera över randen till en stor halvcirkelskiva i övre halvplanet. Funktionen f har en dubbelpol i $z = i$ och en enkel pol i $z = -2+i$ med motsvarande residyer

$$\mathrm{Res}_{z=i}(f) = -\frac{1}{64} - \frac{i}{16} \qquad \text{och} \qquad \mathrm{Res}_{z=-2+i}(f) = \frac{1}{64}.$$

Residysatsen (tillsammans med en analys av vad som händer längs den tillagda halvcirkeln) visar att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4x+5)} = \frac{\pi}{8}.$$

6. a) Modifiera beviset av sats 1.19, eller utnyttja att operatorn $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ är linjär.

b) Sätt $h(x, y) = (x + y)/(x^2 + y^2)$. Derivation tillsammans med Cauchy–Riemanns ekvationer ger att

$$\begin{aligned} u'_x + v'_x &= u'_x - u'_y = h'_x \\ u'_y + v'_y &= u'_y + u'_x = h'_y \end{aligned}$$

vilket är ett ekvationssystem ur vilket vi kan lösa ut u'_x och u'_y. Därefter kan u och v bestämmas ”på vanligt sätt”. Flera förenklande trick är tänkbara längs vägen. Slutresultatet blir

$$f(z) = \frac{i}{z} + C(1 - i),$$

där C är en reell konstant.