Lösningar till tentamen i Linjär algebra 2014.05.30

June 9, 2014

1. Koefficientmatrisen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

förvandlas genom Gausselimination till

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

varur ses att $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (3, -9, -2, 0)^T + t(-1, 4, 1, 1)^T$, $t \in \mathbb{R}$. Rangen är 3 (pga tre ettor som pivotelement) samt nollrummet är vektorerna $t(-1, 4, 1, 1)^T$, $t \in \mathbb{R}$.

2a. Sätter vi in koordinaterna för en godtycklig punkt på linjen i planets ekvation fås

$$t + 1 - (t + 2) - (t + 3) = 8$$

vilket ger en lösning $t = -12$. Alltså skär planet och linjen varandra i punkten $(x, y, z) = (-11, -10, -9)$.

2b. Planets normal är $\overline{n} = (1, -1, -1)$ Avståndsformeln ger

$$d = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot (-1) - 8|}{\|(1, -1, -1)\|} = \frac{13}{\sqrt{3}}.$$

2c. Projektionen av linjen på planet blir en ny linje l'. För att beräkna dess riktning räknar vi först ut projektionen av riktningsvektorn till l på normalen till planet:

$$\begin{aligned} proj_{\overline{n}}(1, 1, 1) &= \frac{(1, 1, 1) \cdot (1, -1, -1}{\|(1, -1, -1\|^3}(1, -1, -1) && (1) \\ &= \frac{-1}{3}(1, -1, -1) && (2) \\ & && (3) \end{aligned}$$

Riktningsvektorn för l' blir alltså $(1, 1, 1) - \frac{-1}{3}(1, -1, -1) = \frac{1}{3}(2, 1, 1)$ som är parallell med $(2, 1, 1)$. Eftersom vi vet att $(-11, -10, -9)$ tillhör l' blir dess ekvation

$$(x, y, z) = t(2, 1, 1) + (-11, -10, -9).$$

Observera att denna parameterform ej är unik. För att snygga till lite kan vi byta ut t mot tex $t+5$ och får

$$(x, y, z) = t(2, 1, 1) + (-1, -5, -4).$$

3a. $\overline{x} \cdot \overline{y} = -1 + 3 + 8 = 10$. Kryssprodukten fås genom Sarrus regel; $(1, 3, 2) \times (-1, 1, 4) = (10, -6, 4)$.

3b. $\overline{x} \cdot (\overline{y} \times \overline{z}) = (1, 3, 2) \cdot (-1, 11, -3) = 26$, som är volymen av den parallellepiped som spänns upp av de tre vektorerna.

3c. Låt θ beteckna vinkeln mellan $\overline{u}$ och $\overline{v}$. Vi har att $\overline{u} \cdot \overline{v} = \|\overline{u}\|\|\overline{v}\| \cos\theta$ samt $\|\overline{u} \times \overline{v}\| = \|\overline{u}\|\|\overline{v}\| \sin\theta$. Vi får därför

$$(\overline{u} \cdot \overline{v})^2 + \|\overline{u} \times \overline{v}\|^2 = \{ \text{ Trig. ettan } \} = \|\overline{u}\|^2\|\overline{v}\|^2.$$

4a. Se boken.

4b. Vektorerna utgör en bas om och endast om de är linjärt oberoende (efter de är 4 till antalet och rummet är $\mathbb{R}^4$). Linjärt oberoende i detta fall är ekvivalent med att determinanten av matrisen där vektorerna är rader (eller kolonner) är skild från noll. Alltså undersöker vi determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Den elementära radoperationen "multiplicera en rad med $a \neq 0$ och addera till en annan rad" ej ändrar determinanten. Således är ovanstående determinant lika med

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0,$$

där vi i andra likheten utvecklade determinanten efter första kolonnen. Alltså är vektorerna linjärt oberoende och utgör också en bas för $\mathbb{R}^4$.

5. Egenvärden ges av determinanten

$$det(A - \lambda I) = (2-\lambda)^2(-2-\lambda) - (-2-\lambda) = -(\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda-1).$$

Alltså har A egenvärdena $\lambda = 1, -2, 3$. Motsvarande egenvektorer fås genom att lösa ekvationen $(A - \lambda I)X = 0$. Om $\lambda = \lambda_1 = 1$ får vi

$$A - I = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

som genom Gausselimination kan överföras till

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Vi får alltså lösningen och egenvektorerna $X_1 = t(-1,0,1)^T$, $t \in \mathbb{R}$. För $\lambda_2 = -2$ fås på samma sätt egenvektorerna $X_2 = t(-1,1,1)^T$, $t \in \mathbb{R}$ och för $\lambda_3 = 3$ får vi egenvektorerna $X_3 = t(2,1,-1)^T$, $t \in \mathbb{R}$.

För att beräkan A^5 är det lämpligt att diagonalisera A (som är möjligt ty A har olika egenvärden). Vi får då $A = SDS^{-1}$, där

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ och } S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi får nu

$$A^5 = (SDS^{-1})^5 = SD^5S^{-1} = \text{ lite räkning.. } = \begin{pmatrix} 452 & 33 & 451 \\ 275 & -32 & 275 \\ -209 & -33 & -208 \end{pmatrix}.$$

6. Uttrycker vi avbildningen $C = V \circ P$ i en ON-bas $B' = \{\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \overline{e}'_3\}$ där ena basvektorn $\overline{e}'_3$ har samma riktning som normalen till planet och de övriga två därmed ligger i planet får vi avbildningsmatrisen för C is basen B':

$$[C]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Detta är f ö samma matris som skulle fås om själva planet Π är xy-planet och normalvektorn enhetsvektorn i z-led). Eftersom både B' och standardbasen B är ON-baser så finns en ortogonal basbytesmatris S så att $SX' = X$ där X är en vektor uttryckt i basen B och X' är samma vektor uttryckt i basen B'. Sambandet mellan avbildningsmatriserna är därmed

$$[C]_B = S[C]_{B'}S^{-1}.$$

där vi vet att $C_{B'}$ är skevsymmetrisk (se ovan), dvs $[C]_{B'}^T = -[C]_{B'}$. Eftersom S är ortogonal gäller också att $S^{-1} = S^T$ och vi får därmed

$$[C]_B^T = (S[C]_{B'}S^{-1})^T = (S^{-1})^T[C]_{B'}^T S^T = (S^T)^T(-[C]_{B'})S^{-1} = S(-[C]_{B'})S^{-1} = -[C]_B,$$

vilket skulle bevisas.