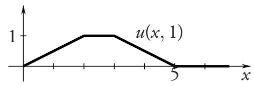
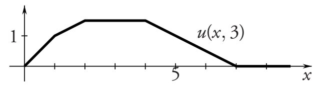
LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

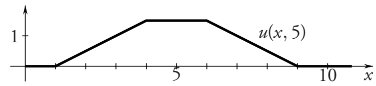
SVAR
KONTINUERLIGA SYSTEM
2014-01-07

1. Till exempel kan u vara utböjningen av en mycket lång (halvoändlig) elastisk sträng med vågutbredningshastighet 1 som är fast inspänd i änden ($x = 0$) och som ej påverkas av några yttre krafter. Vid tiden 0 är strängen i jämnviktläget och ges med ett hammarslag hastigheten $u_t'(x,0)$.

Om H är en primitiv funktion till den udda speglingen av $u_t'(x,0)$ så kan lösningen skrivas $u(x,t) = (H(x+t) - H(x-t))/2$.







2. Med skalärprodukten $(u|v) = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{u(x)} v(x)\,dx$ så ska $\|\theta(x) - a\cos x - b\sin x\|^2$ minimeras. I denna skalärprodukt är $\cos x$ och $\sin x$ ortogonala och enligt projektionssatsen blir normen minst då $a = \frac{(\cos x|\,\theta(x))}{(\cos x|\,\cos x)} = 0$ och $b = \frac{(\sin x|\,\theta(x))}{(\sin x|\,\sin x)} = \frac{2}{\pi}$. Minsta värdet blir

$$\|\theta(x) - b\sin x\|^2 = \|\theta(x)\|^2 - |b|^2\,\|\sin x\|^2 = \pi - 4/\pi.$$

3. Operatorn $\mathcal{A}u = -u''$ med $D_{\mathcal{A}} = \{u \in C^2([0,2])\,;\, u(0) = u'(2) = 0\}$ är en Sturm-Liouvilleoperator med egenvärden $\lambda_k = (1+2k)^2\pi^2/16$, med motsvarande egenfunktioner $\varphi_k(x) = \sin\big((1+2k)\pi x/4\big)$ då $k = 0, 1, 2, \ldots$ Egenfunktionerna bildar en bas i vilken δ_1 kan skrivas $\sum_{k=0}^{\infty} d_k \varphi_k(x)$ med

$$d_k = \frac{(\varphi_k(x)|\,\delta(x-1))}{(\varphi_k(x)|\varphi_k(x))} = \sin\big((1+2k)\pi/4\big).$$

Differentialekvationen ger på ansatsen $u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)\varphi_k(x)$ att $u_k(t) = c_k\, e^{-\lambda_k t} + d_k/\lambda_k$ där begynnelsevillkoret medför att $c_k = -d_k/\lambda_k$. Alltså kan lösningen skrivas

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{\lambda_k}\big(1 - e^{-\lambda_k t}\big)\varphi_k(x) \qquad \text{(även } x - (x-1)\,\theta(x-1) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{\lambda_k}\, e^{-\lambda_k t}\,\varphi_k(x).\text{)}$$

Problemet kan vara en modell för värmeledning i en smal, initialt 0-gradig stång, där mantelytan och änden, där $x = 2$, är isolerade. Den andra änden hålls hela tiden vid 0 grader. I mitten av stången har ett litet hål i mantelytans isolering gjorts och där värms staven upp av en smal och konstant låga. Värmediffusiviteten år 1.

4. Modell för temperaturen $u(x,t)$ i staven är

$$\begin{cases} u_t' - a\,u_{xx}'' = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(0,t) = 20, & t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x > 0. \end{cases}$$

Homogenisera randvillkoret genom att sätta $u - 20$ och låt sedan v vara den udda speglingen. Då uppfyller v värmeledningsystemet

$$\begin{cases} v_t' - a\,v_{xx}'' = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ v(x,0) = -20\,\mathrm{sgn}(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

som kan lösas med greenfunktionen. Lösningen blir $u(x,t) = 20 - 20\,\mathrm{erf}(x/\sqrt{4at})$.

5. Dela upp det givna problemet i problemen

$$\begin{cases} -\Delta u = \delta_{(2,1)} & \text{då } y \in \mathbb{R}, x > 0, \\ u(0,y) = 0 & \text{då } y \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{då } y \in \mathbb{R}, x > 0, \\ u(0,y) = u_0(y) & \text{då } y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

där $u_0(y) = \theta(y+2) - \theta(y-1)$. Första problemet löses efter spegling med Greenfunktion

$$u_1(x,y) = -\frac{1}{4\pi}\left(\ln\left((x-2)^2 + (y-1)^2\right) - \ln\left((x+2)^2 + (y-1)^2\right)\right)$$

och andra problemet kan lösas med Poissonkärnan P för halvplanet $y > 0$

$$u_2(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P(x, y-\eta)\, u_0(\eta)\, d\eta = \frac{1}{\pi}\left(\arctan\frac{y+2}{x} - \arctan\frac{y-1}{x}\right).$$

Då ges lösningen till det ursprungliga problemet av $u = u_1 + u_2$.

6. Trumskinnen uppfyller vågekvationen $u''_{tt} + c^2\,\Delta u = 0$ med randvillkor $u = 0$. Egenvinkelfrekvenserna ges då av $c\sqrt{\lambda}$ där λ är egenvärden till Δ. För en kvadrat med sidan L blir lägsta egenvinkelfrekvensen $c\pi\sqrt{2}/L$ och för en cirkelskiva med radien R blir den $c\alpha_{01}/R = c\alpha_{01}\sqrt{\pi}/L$ ty samma area och där α_{01} är det minsta positiva nollstället till J_0. Eftersom $\alpha_{01} < \sqrt{2\pi}$ följer att den cirkulära trumman har lägst egenvinkelfrekvens.