SVAR
LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

ENDIMENSIONELL ANALYS
A3 (FMAA01)/B2 (FMAA05)
2015–03–19 kl. 08–13

1. Det gäller att

$$\int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx = \frac{2}{3}, \quad \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{3}, \quad \int_0^1 \arctan x\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

2. Övriga nollställen är $1+i$ och $-3+i$.

3. Maclaurinpolynomet av ordning 4 är $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4$. (Funktionen är för övrigt $y(x) = 1 - e^{-\frac{1}{2}x^2}$.)

4. **a)** Se s. 349 i kursboken [MN].

b) Längden av den logaritmiska spiralen är $\sqrt{26}$ längdenheter.

5. **a)** Derivering ger

$$y_p'(x) = e^{-x}(\ln x - 1/x), \quad \text{och} \quad y_p''(x) = e^{-x}(1/x^2 + 2/x - \ln x).$$

Insättning ger nu

$$y_p''(x) - 2y_p'(x) - 3y_p(x) = \cdots = \frac{4x+1}{x^2}e^{-x}.$$

b) $y(x) = -e^{-x}(1 + \ln x)$.

6. Låt $u(t)$ beteckna antalet bakterier vid tidpunkten t, där $t = 0$ svarar mot tiden då bakterierna började tillföras. Då uppfyller u differentialekvationen

$$u'(t) = A - Bu(t)^2$$

där A och B är positiva konstanter. Dessutom är $u(0) = 0$. Detta är en separabel differentialekvation, med lösning

$$u(t) = \sqrt{\frac{A}{B}}\frac{1 - e^{-2\sqrt{AB}t}}{1 + e^{-2\sqrt{AB}t}},$$

varför

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = \sqrt{\frac{A}{B}}.$$

Antalet bakterier stabiliseras alltså vid denna nivå efter lång tid.

Referens

[MN] Månsson, J. och Nordbeck, P. Endimensionell analys. *Studentlitteratur*, 2011.