LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
FLERDIMENSIONELL ANALYS
2015-01-13 kl 8-13

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga och tydliga motiveringar.

1. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D x\, y^3\, dxdy,$$

där området D är den cirkelsektor i första kvadraten, som begränsas av kurvorna $x^2 + y^2 = 4$ och $y = x$ samt x-axeln.

2. Låt $f(x, y) = x^2 - 3x \sin y$.

a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till funktionsytan $z = f(x, y)$ i punkten $(1, \pi, 1)$. (0.4)

b) Bestäm en ekvation för tangentlinjen till nivåkurvan $f(x, y) = 1$ i punkten $(1, \pi)$. (0.3)

c) Bestäm riktningsderivatan av f i punkten $(1, \pi)$ i riktningen $(3, 4)$. (0.3)

3. Låt $f(x, y) = x^3 - 6xy + 6y^2$.

a) Bestäm alla lokala extrempunkter till funktionen f i $\mathbf{R}^2$. (0.4)

b) Bestäm största och minsta värdet av funktionen f i triangelskivan med hörn i $(0, 0)$, $(2, 0)$ och $(2, 2)$. (0.6)

4. a) Visa att vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y) = \Big(\cos x - 2\, x\, y - y,\ e^y - x - x^2 \Big)$$

är konservativt i $\mathbf{R}^2$. (0.2)

b) Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma_1} (\cos x - 2\, x\, y - y)\, dx \ +\ (e^y - x - x^2)\, dy,$$

om kurvan γ_1 är den undre halvan av enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ moturs från $(-1, 0)$ till $(1, 0)$. (0.3)

V.g. vänd!

c) Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma_2} (\cos x - 2\,x\,y)\,dx \;+\; (e^y - x)\,dy,$$

om kurvan γ_2 är enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ genomlöpt ett varv i positiv led. (0.5)

5. a) Lös den partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 2x,$$

till exempel genom att införa nya variabler $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}.$ (0.5)

b) Lös den partiella differentialekvationen

$$x\,\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 2x, \qquad x > 0.$$ (0.5)

6. Ur enhetsklotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ borras ett cylindrisk hål med radie b och z-axeln som symmetriaxel. Bestäm radien b så att volymen av den återstående delen är häften av volymen av hela klotet.

LYCKA TILL!