LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

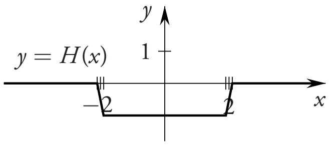
SVAR
KONTINUERLIGA SYSTEM
2015-01-09

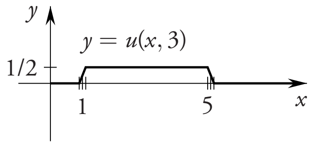
1. Modell

$$\begin{cases} u''_{tt} - u''_{xx} = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x > 0, \\ u'_t(x,0) = h(x), & x > 0. \end{cases}$$

Låt $\tilde{h}$ vara den udda fortsättningen av h och låt $H(x) = \int_{-\infty}^{x} \tilde{h}(y)\,dy$ är en primitiv till $\tilde{h}$. Då är lösningen för $x > 0$ och $t > 0$

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y)\,dy = \frac{1}{2}(H(x+3) - H(x-3)).$$





2. U består av fjärdegradspolynom utan konstant och linjär koefficient och de är en delmängd av det linjära rummet $L_2([-1,1])$. Låt $u(x) = x^2p(x)$ och $v(x) = x^2q(x)$ vara polynom i U. Då ligger $(u+v)(x) = x^2(p(x)+q(x))$ i U och om λ är en skalär så ligger även $\lambda u(x) = x^2(\lambda p(x))$ i U.

En ortogonala bas är x^2, x^3, $x^4 - \frac{5}{7}x^2$ och polynomet $\frac{7}{5}x^3$ minimerar integralen.

3. Lösningen blir $u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(\operatorname{erf}\Big(\frac{x+1}{\sqrt{4at}}\Big) - \operatorname{erf}\Big(\frac{x-1}{\sqrt{4at}}\Big)\Big)$ då $x > 0$ och $t > 0$.

4. Modell

$$\begin{cases} u'_t - u''_{xx} = 1, & 0 < x < L, t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < L. \end{cases}$$

med lösningen

$$u(x,t) = 2L^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{k^3\pi^3}(1 - e^{-k^2\pi^2 t/L^2})\sin(k\pi x/L).$$

5. Greenfunktionen är

$$G((x,y);(1,1)) = -\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\big((x-1)^2+(y-1)^2\big)\big((x+2)^2+(y-2)^2\big)}{\big((x+1)^2+(y-1)^2\big)\big((x-2)^2+(y-2)^2\big)}.$$

6. Om Ω betecknar cylindern så är en modellen

$$\begin{cases} u'_t - a\,\Delta\,u = 0, & \mathbf{x} \in \Omega, t > 0, \\ u(\mathbf{x},t) = 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(\mathbf{x},0) = 20, & \mathbf{x} \in \Omega. \end{cases}$$

och lösningen blir i cylindriska koordinater $0 < r < R$, $0 < \varphi < 2\pi$ och $0 < z < h$

$$u(r,z,t) = \sum_{n,k=1}^{\infty} c_{kn}\, e^{-\lambda_{kn}t} J_0\big(\alpha_{0n}\frac{r}{R}\big)\sin\big(\frac{k\pi z}{h}\big), \quad c_{nk} = \frac{40(1-(-1)^k)\int_0^R J_0\big(\frac{\alpha_{0n}r}{R}\big)\,r\,dr}{k\pi\int_0^R J_0^2\big(\frac{\alpha_{0n}r}{R}\big)\,r\,dr}.$$