LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Linjär analiys för D. Lösningar.
2012-8-29

1. a) Eftersom $F(t) = \frac{1}{2}e^{2t}$ är en primitiv till e^{2t} har vi att $(F(t) - F(0))\theta(t)$ är en primitiv till $f(t)$ och svaret är $\frac{e^{2t}-1}{2}\theta(t)$.

b) Vi har

$$\left(e^{2t}\theta(t)\right)' = \left(e^{2t}\right)'\theta(t) + e^{2t}(\theta(t))' = 2e^{2t}\theta(t) + e^{2t}\delta(t) = 2e^{2t}\theta(t) + \delta(t).$$

$$\left(e^{2t}\theta(t)\right)'' = \left(2e^{2t}\theta(t) + \delta(t)\right)' = 2\left(e^{2t}\theta(t)\right)' + \delta'(t) = 4e^{2t}\theta(t) + 2\delta(t) + \delta'(t).$$

c) Om $X = \mathcal{L}f$ har vi

$$sX = 2X + \frac{1}{s-2} \Rightarrow X = \frac{1}{(s-2)^2} \Rightarrow x = te^{2t}\theta(t).$$

2. a) $f(t-1)$ och $f'(t)$.

b) Ja, t.ex. $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

c) A är ortogonal om $A^{-1} = A^T$.

d) $f(x,y) = -8(x+y)^2 + (8+a)y^2 \Rightarrow 8 + a < 0 \Rightarrow a < -8$.

e) $C = 1 + i \cdot 0 = 1$.

3. a) Eftersom $\operatorname{tr} A = 1 - 1 + a = 1$ är $a = 1$. Vi har

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda^2 - 2\lambda) \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2.$$

För $\lambda_1 = -1$ har vi ekvationsystemet

$$\begin{cases} -2x & +0y & -z = 0 \\ 0x & +0y & +0z = 0 \\ -x & +0y & -2z = 0 \end{cases}$$

och egenvektorena är

$$X_1 = t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ t_1 \neq 0.$$

För $\lambda_2 = 0$ har vi ekvationsystemet

$$\begin{cases} -x & +0y & -z = 0 \\ 0x & -y & +0z = 0 \\ -x & +0y & -z = 0 \end{cases}$$

och egenvektorena är

$$X_2 = t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t_2 \neq 0.$$

För $\lambda_3 = 2$ har vi ekvationsystemet

$$\begin{cases} x & +0y & -z = 0 \\ 0x & -y & +0z = 0 \\ -x & +0y & z = 0 \end{cases}$$

och egenvektorena är

$$X_3 = t_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t_3 \neq 0.$$

b) Om vi $t_1 = 1, t_2 = t_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ bildar egenvekotrerna tillsammans en ortogonal matris och $S^{-1} = S^T$. Därför är

$$e^{At} = Se^{Dt}S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & e^{2t} \\ \sqrt{2}e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{2t}+1 & 0 & e^{2t}-1 \\ 0 & 2e^{-t} & 0 \\ e^{2t}-1 & 0 & e^{2t}+1 \end{pmatrix}.$$

c) $X(t) = e^{At}X(0) =$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{2t}+1 & 0 & e^{2t}-1 \\ 0 & 2e^{-t} & 0 \\ e^{2t}-1 & 0 & e^{2t}+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3e^{2t}-1 \\ 2e^{-t} \\ 3e^{2t}+1 \end{pmatrix}.$$

4. a) $h(t) * \sin(5t)\theta(t) = 2\cos(5t)\theta(t) \Rightarrow$

$$H(s)\frac{5}{s^2+25} = \frac{2s}{s^2+25} \Rightarrow H(s) = \frac{2s}{5}.$$

b) $h(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(s)) = \frac{2\delta'(t)}{5}$.

c) Eftersom $\mathcal{L}w_1(t) = \frac{1}{s-5i}$ är

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(s)\mathcal{L}w_1(t)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s}{5(s-5i)}\right) =$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{5} + 2\frac{5i}{5(s-5i)}\right) = \frac{2}{5}\delta(t) + 2ie^{5it}\theta(t).$$

d) $\mathcal{S}e^{3it} = H(3i)e^{3it} = \frac{6i}{5}e^{3it}$.

5. Vi gör först Gausselimination:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1=1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2=1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix}$$

och $d_3 = -13$.

a) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 = -13$.

b) Eftersom precis två av d_i är positiva är precis två av egenvärdena positiva.

c) Vi gör Gausselimination för $A - 2I$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1=-1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2=1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

och $d_3 = -1$. Eftersom endast en av d_i är positivt har matrisen endast ett egetvärde som är större än 2.

6. Om $x = 0$ får vi $0 = f(0) + 1 \Rightarrow f(0) = -1$. Om vi byter x mot t och y mot τ får vi efter multiplication med $\theta(t)$:

$$f(t)\theta(t) * \sin(t)\theta(t) = f(t)\theta(t) + \theta(t).$$

Om $F(s) = \mathcal{L}(f(t)\theta(t))$ har vi:

$$F(s) \cdot \frac{1}{s^2+1} = F(s) + \frac{1}{s} \Rightarrow -F(s)\frac{s^2}{s^2+1} = \frac{1}{s} \Rightarrow$$

$$F(s) = -\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^3}\right) \Rightarrow f(t)\theta(t) = -\left(1 + \frac{t^2}{2}\right)\theta(t).$$

Vi fick $f(x) = -\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)$ och eftersom $f(0) = -1$ gäller lösningen.