LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

SVAR
KONTINUERLIGA SYSTEM
2014-08-21

1. Efter jämn utvidgning och faltning med greenfunktionen kan lösningen skrivas

$$u(x,t) = 1 + \frac{1}{2}\Big(\operatorname{erf}\big(\frac{x-1}{\sqrt{4at}}\big) - \operatorname{erf}\big(\frac{x+1}{\sqrt{4at}}\big)\Big) \quad \text{då } x > 0 \text{ och } t > 0.$$

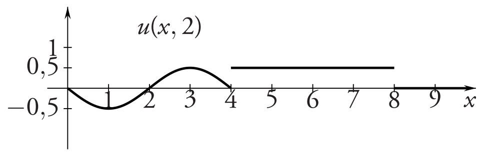
2. Modell

$$\begin{cases} u''_{tt} - u''_{xx} = 0, & x > 0,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \sin(\pi x/2)(\theta(x) - \theta(x-2)), & x > 0, \\ u'_t(x,0) = \delta_6(x), & x > 0. \end{cases}$$

Efter udda utvidgning av u m a p x och med $g(x) = \sin(\pi x/2)(\theta(x+2) - \theta(x-2))$ och $h(x) = \delta_6(x) - \delta_{-6}(x)$ med en primitiv $H(x) = \theta(x-6) - \theta(x+6)$ så ger d'Alemberts formel lösningen

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2}(H(x+t) - H(x-t))$$

med grafen



3. Egenvärdena är $\lambda_k = 9 + (k\pi)^2$ för $k = 1, 2, \ldots$ med egenvektorer $\varphi_k = e^{-3x}\sin(k\pi x)$. I skalärprodukten $(u|v) = \int_0^1 \overline{u(x)}v(x)\,e^{6x}\,dx$ blir $(\varphi_1|\varphi_2) = \int_0^1 \sin(\pi x)\sin(2\pi x)\,dx = 0$.

4. Utböjningen är

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}e^{-t/2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k\omega_k}\sin(\omega_k t)\sin(kx), \quad \text{där} \quad \omega_k = \sqrt{k^2 - 1/4}.$$

5. I polära koordinater kan lösningen skrivas $u(r,\theta) = \dfrac{1}{2J_2(2)}J_2(2r)\sin 2\theta$.

6. I den tredimensionella modellen med homogena dirichletvillkor i de öppna ändarna och homogena neumannvillkor i plåten blir egenfrekvenserna

$$f_{jkl} = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\big(\frac{j\pi}{L}\big)^2 + \big(\frac{\alpha'_{kl}}{R}\big)^2}, \qquad j, l = 1, 2, .., \ k = 0, 1, ...$$

och i den endimensionella modellen blir de

$$f_j = cj/2L, \qquad j = 1, 2, ...$$

De tre lägsta överensstämmer så länge

$$\frac{R}{L} < \frac{\alpha'_{11}}{\pi\sqrt{8}} \approx 0{,}2.$$