LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
ANALYS DELKURS A3/B2
2015-06-05 kl 8-13

1. a) Derivera $f(x) = e^x \cos x$: $f'(x) = e^x(\cos x - \sin x)$, $f''(x) = -2e^x \sin x \quad \Rightarrow$

$$p_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = \boxed{1+\mathrm{x}}.$$

b) Skriv ner några första termer för Maclaurinutvecklingar till täljarens funktioner

$$\begin{aligned} e^t &= 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \dots & \stackrel{t=x/2}{\Longrightarrow} \qquad e^{x/2} &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \dots \\ (x+1)^{1/2} &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{x^2}{2} + \dots & &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots \end{aligned}$$

för att se att det räcker med utvecklingen till ordning två (eftersom andragradstermer *inte tar ut varandra*), dvs

$$\frac{e^{x/2} - \sqrt{1+x}}{x^2} = \frac{\frac{x^2}{8} - \left(-\frac{x^2}{8}\right) + B(x)x^3}{x^2} = \frac{1}{4} + B(x)x \to \boxed{\frac{1}{4}} \quad \text{då } x \to 0.$$

2. a) Vi löser den binomiska ekvationen $z^6 = -1$ på polär form. Ansats $z = re^{i\theta}$ ger

$$r^6 e^{i6\theta} = -1 = e^{i\pi} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r^6 = 1, \\ 6\theta = \pi + 2\pi k \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r = 1, \\ \theta = \theta_k = \dfrac{\pi + 2\pi k}{6}. \end{cases}$$

Vi får 6 olika lösningar $z_k = e^{i\theta_k} = \cos\theta_k + i\sin\theta_k$ då $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, dvs

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2},\ z_2 = i,\ z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2},\ z_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2},\ z_5 = -i,\ z_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}.$$

Svar: $\boxed{\pm i,\ \sqrt{3}/2 \pm i/2 \text{ och } -\sqrt{3}/2 \pm i/2.}$

b) Lösningar till den linjära differentialekvationen bildas som $y = y_p + y_h$.
$\boxed{y_p}$ Man ser omedelbart att $y_p = x^2$.
$\boxed{y_h}$ Det karakteristiska polynomet för $y^{(6)} + y = 0$ är $p(r) = r^6 + 1$ med 3 par komplexkonjugerande rötter (se ovan i 2a) som ger upphov till baslösningar:

$$\begin{aligned} \pm i \quad &\rightsquigarrow \quad A_1\cos(x) + B_1\sin(x), \\ \sqrt{3}/2 \pm i/2 \quad &\rightsquigarrow \quad e^{\sqrt{3}x/2}(A_2\cos(x/2) + B_2\sin(x/2)), \\ -\sqrt{3}/2 \pm i/2 \quad &\rightsquigarrow \quad e^{-\sqrt{3}x/2}(A_3\cos(x/2) + B_3\sin(x/2)). \end{aligned}$$

Sammanlagd får vi

$$y_h = A_1\cos(x) + B_1\sin(x) + e^{\sqrt{3}x/2}(A_2\cos(x/2) + B_2\sin(x/2)) + e^{-\sqrt{3}x/2}(A_3\cos(x/2) + B_3\sin(x/2)).$$

Svar: $\boxed{y(x) = x^2 + y_h(x) \text{ där } y_h(x) \text{ ges ovan.}}$

3. a) Lägg märke till att vänsterledet är egentligen redan derivata av produkt[1]

$$(2+\sin(x))y' + \cos(x)y = (2+\sin(x))y' + (2+\sin(x))'y = \big((2+\sin(x))y\big)'$$

vilket ger direkt (OBS att $F(x) = x+1$ tas som en primitiv till $f(x) = 1$.)

$$\begin{aligned} (2+\sin(x))y &= \int \ln(x+1)\,dx = [\text{partialintegration med } f(x)=1,\ g(x)=\ln(x+1)] = \\ &= (x+1)\ln(x+1) - \int (x+1)\frac{1}{x+1}\,dx = (x+1)\ln(x+1) - x + C. \end{aligned}$$

För att bestämma konstanten sätter vi in $x = 0$ och använder $y(0) = 1$

$$(2+0)\cdot 1 = 1\cdot 0 - 0 + C = C \qquad \Rightarrow \qquad C = 2.$$

Svar: $\boxed{y(x) = \dfrac{(x+1)\ln(x+1) - x + 2}{2+\sin x}.}$

b) Eftersom skivan är homogen kan vi anta att dess densitet är 1, dvs $\rho = 1$, och uttrycka massan dm av en liten bit av skivan mellan x och $x + dx$ som

$$dm = \rho\, dA = dA = \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx.$$

För att beräkna skivans massa M skall vi integrera dm

$$M = \int dm = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = \Big[2\sqrt{x+1}\Big]_0^3 = 2\sqrt{4} - 2 = 2.$$

Nu använder vi formeln (OBS att vi *byter gränser* vid variabelbyte[2])

$$\begin{aligned} x_{mc} &= \frac{1}{M}\int x\,dm = \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{x+1},\ x = t^2 - 1 \\ dx = 2t\,dt \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{t^2-1}{t} 2t\,dt = \int_1^2 (t^2-1)\,dt = \left[\frac{t^3}{3} - t\right]_1^2 = \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1 = \boxed{\frac{4}{3}.} \end{aligned}$$

4. Enligt definitionen har vi att

$$\int_1^\infty \frac{2x+6}{(x+1)(x^2+2x+5)}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{2x+6}{(x+1)(x^2+2x+5)}\,dx.$$

För att beräkna den sista integralen skall vi använda insättningsformeln och måste således bestämma en primitiv till integranden. För rationella funktioner använder vi partialbråksuppdelning. Eftersom $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4$ saknar reella nollställen har partialbråksuppdelning endast två termer

$$\frac{2x+6}{(x+1)(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \qquad 2x+6 = (x^2+2x+5)A + (x+1)(Bx+C) \qquad (*)$$

[1] Det går även att följa standardreceptet med *integrerande faktor* som ger exakt samma vänsterled.

[2] Alternativt: partialintegrera eller använda omskrivningen $\frac{x}{\sqrt{x+1}} = \frac{x+1-1}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

Insättning $x=-1$ i (*) ger $4=4A+0 \Rightarrow A=1$. Nu kan (*) omskrivas som

$$(x+1)(Bx+C)=2x+6-(x^2+2x+5)=1-x^2=(1+x)(1-x).$$

Efter förkortning med $x+1$ fås $Bx+C=-x+1$, dvs partialbråksuppdelningen blir[3]

$$\frac{2x+6}{(x+1)(x^2+2x+5)}=\frac{1}{x+1}+\frac{-x+1}{x^2+2x+5}.$$

Nu kan vi prova integrera bråket

$$\int \frac{2x+6}{(x+1)(x^2+2x+5)}\,dx=\int \frac{1}{x+1}+\frac{-x+1}{x^2+2x+5}\,dx=\ln(x+1)+\int \frac{-x+1}{x^2+2x+5}\,dx. \quad (**)$$

För att beräkna den andra integralen behöver man jobba lite mer

$$\begin{aligned}\int \frac{-x+1}{(x+1)^2+4}\,dx &= [t=x+1]=\int \frac{-t+2}{t^2+4}\,dt=-\int \frac{t}{t^2+4}\,dt+\int \frac{2}{t^2+4}\,dt=\\ &= -\frac{1}{2}\ln(t^2+4)+\int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}\,dt=-\ln\sqrt{t^2+4}+\arctan\frac{t}{2}+c=\\ &= -\ln\sqrt{x^2+2x+5}+\arctan\frac{x+1}{2}+c.\end{aligned}$$

Tillsammans med (**) ger detta en primitiv till vår integrand då $c=0$

$$\ln(x+1)-\ln\sqrt{x^2+2x+5}+\arctan\frac{x+1}{2}=\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}+\arctan\frac{x+1}{2}$$

och integralen beräknas med hjälp av insättningsformeln

$$\left[\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}+\arctan\frac{x+1}{2}\right]_1^b=\ln\frac{b+1}{\sqrt{b^2+2b+5}}+\arctan\frac{b+1}{2}-\ln\frac{2}{\sqrt{8}}-\arctan 1=$$

$$=\ln\frac{1+\frac{1}{b}}{\sqrt{1+\frac{2}{b}+\frac{5}{b^2}}}+\arctan\frac{b+1}{2}+\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}\overset{b\to\infty}{\longrightarrow}\ln 1+\frac{\pi}{2}+\frac{\ln 2}{2}-\frac{\pi}{4}=\boxed{\frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2}.}$$

5. a) Se boken, sid 315, 317.

b) Vi delar med x och sedan deriverar m.h.a. analysens huvudsats

$$\frac{1}{x}y(x)+x^2+\int_1^x y(t)\,dt=0 \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{1}{x^2}y(x)+\frac{1}{x}y'(x)+2x+y(x)=0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \qquad -\frac{1}{x}y(x)+y'(x)+2x^2+xy(x)=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y'+\underbrace{\left(x-\frac{1}{x}\right)}_{g(x)}y=-2x^2.$$

Vi skall använda integrerande faktor. En primitiv till $g(x)$ är $G(x)=\frac{x^2}{2}-\ln x$, således integrerande faktor kan väljas som

$$e^{G(x)}=e^{x^2/2-\ln x}=\frac{e^{x^2/2}}{x}.$$

[3]Alternativt: A, B och C kan fås genom att likställa koefficienterna i höger- och vänsterledet av (*).

Efter att ha multiplicerat båda led av differentialekvationen ovan med den integrerande faktorn får vi

$$\left(\frac{e^{x^2/2}}{x}y(x)\right)' = -2xe^{x^2/2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^{x^2/2}}{x}y(x) = -2\int xe^{x^2/2}\,dx = -2e^{x^2/2} + C \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x) = -2x + Cxe^{-x^2/2}.$$

Observera att insättning $x = 1$ i den ursprungliga integralekvationen ger att $y(1)+1+0 = 0$, dvs $y(1) = -1$. Med detta begynnelsevärde kan man bestämma konstanten $-1 = -2 + Ce^{-1/2} \Rightarrow C = e^{1/2}$, och lösningen blir då

$$y(x) = -2x + e^{1/2}xe^{-x^2/2} = \boxed{x\big(e^{(1-x^2)/2} - 2\big).}$$

6. a) Intervallet $[0, 2\pi]$ delas i små bitar med längd ds mellan $[t, t+dt]$ och integreras

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt \quad \Rightarrow \quad L = \int ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt.$$

Vi deriverar $x'(t) = 1 - \cos t$, $y'(t) = \sin t$ och beräknar uttrycket under rottecknet

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = (1-\cos t)^2 + \sin^2 t = 1 - 2\cos t + \underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{=1} = 2(1-\cos t).$$

Eftersom vi behöver ta roten ur detta är det bekvämt att omskriva $1 - \cos t$ som en *kvadrat* med hjälp av formeln för dubbelvinkel $1 - \cos t = 2\sin^2(t/2) \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{4\sin^2(t/2)} = 2\,|\sin(t/2)| = \big[0 \le t \le 2\pi\big] = 2\sin(t/2).$$

Nu blir integralen för kurvlängden lätt

$$L = 2\int_0^{2\pi} \sin(t/2)\,dt = 4\int_0^{2\pi} \frac{\sin(t/2)}{2}\,dt = 4\big[-\cos(t/2)\big]_0^{2\pi} = 4(1+1) = \boxed{8.}$$

b) Om man strimlar ytan i små remsor så kan en small remsa som motsvarar kurvstycket mellan t och $t + dt$ approximeras med en rektangel $2\pi y \times ds$ med area[4]

$$dA = 2\pi y\,ds = 2\pi y(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt.$$

Integrationen över alla remsor ger rotationsarean som integral

$$A = \int dA = 2\pi \int_0^{2\pi} y(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt = 2\pi\int_0^{2\pi} (1-\cos(t))2\sin(t/2)\,dt.$$

Vi använder först samma formel som ovan $1 - \cos t = 2\sin^2(t/2)$

$$A = 2\pi\int_0^{2\pi} 2\sin^2(t/2)\cdot 2\sin(t/2)\,dt = 8\pi\int_0^{2\pi}\sin^3(t/2)\,dt.$$

Udda potenser av sinus integreras m.h.a. kedjeregeln efter omskrivningen

$$\begin{aligned} A &= 8\pi\int_0^{2\pi}\sin^2(t/2)\sin(t/2)\,dt = 16\pi\int_0^{2\pi}\big(1-\cos^2(t/2)\big)\frac{\sin(t/2)}{2}\,dt = \\ &= 16\pi\left[-\cos(t/2) + \frac{\cos^3(t/2)}{3}\right]_0^{2\pi} = 16\pi\left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right) = \boxed{\frac{64\pi}{3}.} \end{aligned}$$

[4] Detta är helt analogt med approximationen i boken, sid 350, där man har ett specialfall $y(t) = f(x)$.