LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

SVAR OCH LÖSNINGAR
ENDIMENSIONELL ANALYS
DELKURS A1
2013–10–25, 14–19

1 **a)** Man ser efter några försök att $x = -1$ är en lösning. Polynomdivision ger att $x^3 + x^2 - 3x - 3 = (x+1)(x^2-3)$. Sålunda gäller

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x+1)(x^2-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x+1 = 0 \text{ eller } x^2 - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -1 \text{ eller } x = -\sqrt{3} \text{ eller } x = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Svar: Lösningarna är $x = -1, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$.

b) Vänsterledet i ekvationen $\ln(x-1) + \ln(x+1) - \ln x = 1$ är definierat om och endast om $x > 1$. Det finns alltså inga lösningar $x \leq 1$. Antag att $x > 1$. Då är

$$\begin{aligned} \ln(x-1) + \ln(x+1) - \ln x = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln\Big(\frac{(x-1)(x+1)}{x}\Big) = \ln e \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x^2-1}{x} = e \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - ex - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{e}{2} \pm \sqrt{\frac{e^2}{4} + 1}. \end{aligned}$$

Men $\sqrt{\frac{e^2}{4} + 1} > \sqrt{\frac{e^2}{4}} = \frac{e}{2}$, varför

$$\frac{e}{2} - \sqrt{\frac{e^2}{4} + 1} < 0 < 1.$$

Sålunda är endast $x = \frac{e}{2} + \sqrt{\frac{e^2}{4} + 1} > 1$ en lösning.

Svar: Ekvationen har lösningen $x = \frac{e}{2} + \sqrt{\frac{e^2}{4} + 1}$.

2 **a)** På intervallet $[-1, 2]$ är $|x - 2| = 2 - x$. Sålunda är $f(x) = \sqrt{2-x}$. Det framgår att värdemängden är $[0, \sqrt{3}]$. Om y ligger i värdemängden så kan vi lösa ekvationen $y = f(x)$ sålunda:

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = \sqrt{2-x} \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 - y^2.$$

Alltså är får vi
Svar: $f^{-1}(x) = 2 - x^2$, och inversens definitionsmängd är $[0, \sqrt{3}]$ och dess värdemängd är $[-1, 2]$.

b) Vi har med trigonometriska ettan att

$$\begin{aligned} 4\cos x - 4\sin^2 x + 1 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 4\cos x + 4\cos^2 x - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \cos x + \cos^2 x - \frac{3}{4} = 0 \end{aligned}$$

Detta är en andragradsekvation i $\cos x$ och vi har därför ekvivalent att

$$\cos x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} \pm 1.$$

Men cosinus antar endast värden mellan -1 och 1, varför $\cos x = -\frac{3}{2}$ saknar lösningar. Ekvationen är alltså ekvivalent med $\cos x = \frac{1}{2}$ och denna har lösningarna $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ där n betecknar ett godtyckligt heltal.

Svar: Lösningarna är $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, där $n \in \mathbb{Z}$.

3 a) Vi har att

$$\frac{2}{x-1} + 5 \geq 2x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-2x^2 + 7x - 3}{x-1} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-(x-3)(2x-1)}{x-1} \geq 0.$$

Vi studerar nu vänsterledets tecken, vilket kan göras med en så kallad teckentabell: För $x \leq \frac{1}{2}$ är vänsterledet icke negativt; För $\frac{1}{2} < x < 1$ är vänsterledet negativt; För $x = 1$ är vänsterledet inte definierat; För $1 < x \leq 3$ är vänsterledet icke negativt; För $x > 3$ är vänsterledet negativt.

Svar: För $x \leq \frac{1}{2}$ eller för $1 < x \leq 3$.

b) Vi delar upp i de tre fallen $x \leq 1$, $1 < x < 2$ och $x \geq 2$.

När $x \leq 1$ är $|x-1| - |x-2| = -x+1-(-x+2) = -1$. Vi ser att ekvationen saknar lösningar i detta fall.

När $1 < x < 2$ är $|x-1| - |x-2| = x-1-(-x+2) = 2x-3$. Ekvationen blir $2x - 3 = 3$, vilken har lösningen $x = 3$. Men $x = 3$ uppfyller inte $1 < x < 2$ och ekvationen saknar därför lösningar i detta fall.

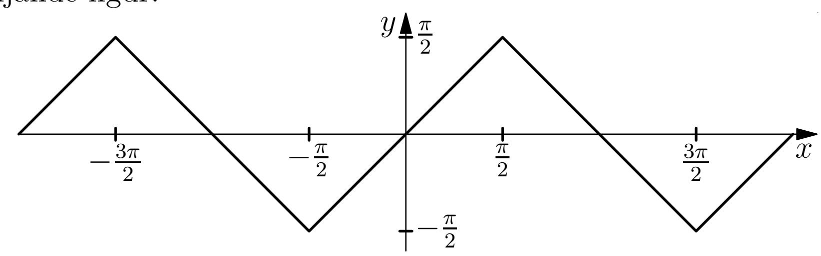
När $x \geq 2$ är $|x-1| - |x-2| = x - 1 - (x-2) = 1$. Vi ser att ekvationen saknar lösningar i detta fall.

Svar: Ekvationen saknar lösningar.

4 a) Man drar en enhetscirkel och erhåller följande.

Svar: $\arcsin(\sin(\frac{\pi}{4})) = \frac{\pi}{4}$, $\arcsin(\sin(\frac{3\pi}{4})) = \frac{\pi}{4}$ och $\arcsin(\sin(\frac{5\pi}{4})) = -\frac{\pi}{4}$.

b) Värdemängden är $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ty $\sin(x)$ antar alla värden i $[-1, 1]$ och på detta intervall antar arcsin alla värden i $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Funktionen är inte växande vilket framgår av de beräknade värdena i föregående uppgift. Funktionen är begränsad vilket framgår ur funktionens värdemängd. Grafens utseende framgår i följande figur.



5 a) Antag att $QR = r$ och drag radien MQ. Trianglarna MPQ och MQR är likbenta. Enligt sats är därför $\angle MPQ = \angle MQP$ och $\angle QMR = \angle QRM = \alpha$.

Ur vinkelsumman i en triangel följer att $\angle MQR = 180° - 2\alpha$. Men $\angle MQR + \angle MQP = 180°$, varför $\angle MPQ = \angle MQP = 2\alpha$. Vi drar slutsatsen att $\angle PMQ = 180° - 4\alpha$. Slutligen ger $\phi + \angle PMQ + \angle QMR = 180°$ att $\phi = 3\alpha$.

b) Se läroboken.

6 Eftersom $e < 4$ så medför $e^x = 4$ att $x > 1$. Sålunda gäller $A \Rightarrow B$. Vi ser också att $B \not\Rightarrow A$.

Nu löser vi ekvationen $e^x = 4$ på två sätt. Vi har tydligen att

$$\begin{aligned} e^x = 4 \quad &\Leftrightarrow \quad 2^{{}^2\log(e^x)} = 2^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{x \cdot {}^2\log e} = 2^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x \cdot {}^2\log e = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2}{{}^2\log e}. \end{aligned}$$

Sålunda gäller att $A \Rightarrow C$ och $C \not\Rightarrow A$. Eftersom $2/{}^2\log e > 1$ så har vi att $C \Rightarrow B$ och $B \not\Rightarrow C$.

Vidare är

$$e^x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2\ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{x} = \frac{1}{\ln 2}.$$

Det följer att $A \Rightarrow D$ och $D \not\Rightarrow A$.

Räkningarna ovan visar att $2\ln 2 = \frac{2}{{}^2\log e}$. Sålunda är

$$C \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 2\ln 2 \quad \Rightarrow \quad D\colon \frac{2}{x} \leq \frac{1}{\ln 2},$$

men $D \not\Rightarrow C$, ty D är sann och C är falsk när x är negativ. Vi ser samtidigt att $D \not\Rightarrow B$ och $B \not\Rightarrow D$.

Sammanfattningsvis har vi
Svar: $A \Rightarrow C \Rightarrow D$, $C \Rightarrow B$ (och sålunda även $A \Rightarrow D$, $A \Rightarrow B$).

Figuren nedan kan vara till hjälp för att se vilka implikationer som gäller. Den illustrerar de fyra mängderna $\{\, x : A \text{ gäller} \,\}$, $\{\, x : B \text{ gäller} \,\}$, $\{\, x : C \text{ gäller} \,\}$, $\{\, x : D \text{ gäller} \,\}$.