LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
FLERDIMENSIONELL ANALYS
2014-05-26 kl 8-13

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Betrakta funktionen $f(x,y,z) = xy^2z^3$ och punkten $P\colon (1,1,1)$.

a) Bestäm riktningsderivatan av f i punkten P i riktningen $\mathbf{v} = (2,2,1)$. (0.5)

b) Bestäm den maximala tillväxthastighet som funktionen f kan ha i punkten P. I vilken riktning uppnås denna? (0.5)

2. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D x^3 e^{y^3}\,dxdy,$$

där området D ligger i den första kvadranten och begränsas av $x = 0$, $y = 1$ och $y = x^2$.

3. Bestäm eventuellt största och minsta värde av $f(x,y) = (x^2+y^2-3)e^x$

a) i området $D = \{(x,y)\colon x^2+y^2 \leq 4\}$, (0.6)

b) i planet $\mathbf{R}^2$. (0.4)

4. Betrakta ytan $Y\colon\ z = x^2+y^2$ och planet $\Pi\colon\ 4x-2y+z-4 = 0$.

a) Bestäm i vilken punkt tangentplanet till ytan Y är parallellt med Π. Ange även tangentplanets ekvation. (0.4)

b) Beräkna volymen av den kompakta kropp som begränsas av Y och Π. (0.6)

5. a) Finn alla lösningar av formen $f(x,y) = g(xy)$ till differentialekvationen

$$xf'_x + yf'_y = 1, \qquad x > 0,\ y > 0.$$

(0.5)

b) Vissa flygbolag har kravet på incheckat bagage att dess yttermått skall uppfylla att summan av dess höjd, bredd och djup inte får överskrida 158 centimeter. Bestäm den maximala volym (om den existerar) som en rätvinklig låda kan ha för att få tas med som incheckat bagage. (0.5)

6. Betrakta vektorfältet $(P,Q) = \left(\dfrac{-y(x-y)}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \dfrac{x(x-y)}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)$.

a) Visa att kurvintegralen $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy$ har samma värde $(= A)$ för alla kurvor γ som ligger helt i den första kvadranten, börjar i punkten $(1,0)$ och slutar på linjen $y = x$ $(x > 0)$. (0.5)

b) Beräkna talet A från 6a). (Du får lov att använda resultatet i 6a) även om du inte visat det.) (0.5)

LYCKA TILL!