

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga och tydliga motiveringar.

1. Bestäm det största och det minsta värdet av funktionen

$$f(x, y) = 4xy - x - y$$

i triangelskivan med hörn i $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(0, 1)$.

2. a) Bestäm riktningsderivatan av $f(x, y) = x^3 + 3y^2$ i punkten $(-1, 1)$ i riktningen $(3, 4)$.
(0.4)

- b) Bestäm den riktning i vilken riktningsderivatan av funktionen $f(x, y) = x^3 + 3y^2$ är störst i punkten $(-1, 1)$, och ange den största riktningsderivatan.
(0.3)

- c) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ellipsoiden

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{2} = 1$$

i punkten $(1, 1, 1)$.
(0.3)

3. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D e^{-x-2y} dx dy$$

för följande område D .

- a) D är det triangelformade området med hörn i punkterna $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(1, 1)$.
(0.5)

- b) D är det obegränsade område, som definieras av $0 \leq y \leq x$.
(0.5)

4. a) Lös differentialekvationen

$$y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} = x y (x^2 + y^2), \quad \text{där } x > 0 \text{ och } y > 0,$$

genom att utföra variabelbytet $u = x^2 + y^2$, $v = x^2 - y^2$.
(0.7)

- b) Finns det någon lösning av differentialekvationen ovan, som har stationär punkt i området $\{(x, y); x > 0 \text{ och } y > 0\}$?
(0.3)

5. a) Bestäm volymen av den kropp K som definieras av olikheterna

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 8 \quad \text{och} \quad z \geq \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (0.7)$$

- b) Skärningskurvan mellan ytorna $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ och $z^2 = x^2 + y^2$ går genom punkten $(2, 0, 2)$. Bestäm en ekvation för tangentlinjen till skärningskurvan i punkten $(2, 0, 2)$.

(0.3)

6. a) Visa att vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{2x + y}{x^2 + y^2}, \frac{-x + 2y}{x^2 + y^2} \right)$$

uppfyller likheten

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-x + 2y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2x + y}{x^2 + y^2} \right) \quad \text{för alla } (x, y) \neq (0, 0). \quad (0.3)$$

- b) Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} \frac{2x + y}{x^2 + y^2} dx + \frac{-x + 2y}{x^2 + y^2} dy$$

om kurvan γ är ellipsen $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ genomlöst ett varv i positiv led. (0.5)

- c) Är vektorfältet $\mathbf{F}(x, y)$ konservativt i det punkterade planet $\{(x, y); (x, y) \neq (0, 0)\}$?
Motivera ditt svar! (0.2)