**LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA**
**MATEMATIK**

**TENTAMENSSKRIVNING**
**Funktionsteori**
**2014-10-24 kl 14–19**

*Hjälpmedel: Utdelat formelblad.*
*Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.*

**1.** För ett visst värde på den reella konstanten $a$ är

$$u(x, y) = e^y \sin x + x^3 + axy^2 + 4xy$$

realdelen av en funktion $f(z) = f(x + iy)$ som är holomorf i hela det komplexa talplanet. Dessutom är $f(0) = 2i$. Bestäm $f(z)$ uttryckt som funktion av variabeln $z$.

**2.** Bestäm en lösning till rekursionsekvationen

$$2x_{n+2} - 5x_{n+1} + 2x_n = 10 \cdot 3^{-n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

sådan att serien $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ dels är konvergent, dels har summan 1.

**3. a)** Utveckla funktionen

$$f(z) = \frac{4z}{3z^2 - 2z - 1}$$

i en potensserie kring origo. (0.4)

**b)** Beräkna potensseriens konvergensradie. (0.4)

**c)** Bestäm $f'(0)$ och $f''(0)$. (0.2)

**4.** Talet $e^6$ skall approximeras med hjälp av

$$e^6 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6^k}{k!}$$

genom att summera ändligt många termer. Uppskatta antalet termer som behövs för att resttermen

$$r_n = \left| e^6 - \sum_{k=0}^{n} a_k \right|$$

ska uppfylla

$$r_n \leq \frac{3}{2} a_{n+1}.$$

**Var god vänd!**

**5.** Beräkna med residykalkyl

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{2+\cos\theta}\, d\theta.$$

**6.** Funktionen $f$ är periodisk med perioden $2\pi$ och då $|t| \leq \pi$ är $f(t) = |t|$.

**a)** Bestäm den trigonometriska Fourierserieutvecklingen av $f$. (0.3)

**b)** Visa (med fullständig motivering) att

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2((-1)^k - 1)}{\pi(k^4 + k^2)}(\cos kt + k \sin kt)$$

löser differentialekvationen

$$y'(t) + y(t) = f(t)\,. \qquad (0.7)$$

*LYCKA TILL!*