**LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA**
**MATEMATIK**

**TENTAMENSSKRIVNING**
**Funktionsteori**
**2013–08–28 kl 8–13**

*Hjälpmedel: Bifogat formelblad.*
*Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Skriv fullständiga meningar och förklara dina beteckningar. Ge tydliga och enkla svar där så är möjligt.*

**1.** Bestäm den reella konstanten $a$ så att

$$v(x, y) = x^2 + ay^2 + 6y$$

blir imaginärdelen av någon analytisk funktion $f$. Bestäm också alla sådana möjliga funktioner $f$. (Svara på formen $f(z)$, där $z = x + iy$.)

**2.** Lös rekursionsekvationen $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 1$, om $a_0 = a_1 = 0$.

**3.** Vilka av följande serier är konvergenta respektive divergenta? Motivera noggrant! $(5 \times 0.2)$

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k-\pi}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{k!}$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+\sqrt{k}}$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ik}}{k^2+\ln k}$ e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sin\big(\frac{1}{k}\big) - \frac{1}{k}\Big)$

**4.** Funktionen $f$ är jämn och $2\pi$-periodisk och uppfyller att

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$$

a) Skissa funktionsgrafen $y = f(t)$ för $-2\pi < t < 4\pi$. (0.1)

b) Bestäm $f$:s trigonometriska Fourierserie. (0.5)

c) Beräkna $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$, där $a_k$ är ”cosinusdelen” av Fourierkoefficienterna till $f$. (0.4)

**5.** Funktionen $f(z) = \dfrac{z}{\cos z}$ kan utvecklas i en potensserie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

a) Bestäm $a_0$ och $a_1$. (0.3)

b) Vilken konvergensradie har potensserien? (0.3)

c) Beräkna $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. (0.4)

Vänd!

**6.** Anta att $f$ är en funktion som är analytisk på området $D \subset \mathbb{C}$. Då gäller som bekant att $f$ har en primitiv funktion på $D$ om och endast om

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

för alla slutna kurvor $\gamma$ i $D$.

a) Bevisa ena halvan av detta påstående, dvs att *om* $f$ har en primitiv funktion på $D$, *så* är $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ för varje sluten kurva $\gamma$ i $D$. (0.4)

Låt nu $f$ vara en funktion som är analytisk på hela $\mathbb{C}$ och sätt

$$g(z) = \frac{f(z)}{z^2 - 1}.$$

Under vilka förutsättningar (på $f$) har $g$ en primitiv funktion på

b) området $\{|z| < 2, z \neq \pm 1\}$ ? (0.3)

c) området $\{|z| > 2\}$ ? (0.3)