LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

SVAR OCH ANVISNINGAR
Linjär Algebra
2014–08–28 kl 14–19

(Svar, anvisningar och vissa kommentarer.)

1. *Svar:* Projektionen är punkten med koordinaterna $(3,0,3)$. Det sökta avståndet är $2\sqrt{3}$.

Anvisning. Standard.

2. *Svar:* Matrisen har rangen tre och nolldimensionen lika med två. Som bas för nollrummet kan vi välja vektorerna $(-3,6,0,1,0)$ och $(1,-3,1,0,0)$. Matrisens kolonnrum spänns upp av de tre vektorerna $(1,2,3),(1,1,1),(1,1,2)$.

Anvisning. Den givna matrisen betecknar vi $\boldsymbol{A}$. Efter successiv elimination erhåller vi matrisen

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

som har tre nollskilda pivotelement och därför rangen tre. Eftersom $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{B}$ är radekvivalenta har de samma rang, $\operatorname{rang}\boldsymbol{A} = \operatorname{rang}\boldsymbol{B} = 3$. Enlig dimensionssatsen blir nolldimensionen för $\boldsymbol{A}$ lika med antalet kolonner i $\boldsymbol{A}$ minus dess rang, alltså $5-3=2$. En bas för $\boldsymbol{A}$:s nollrum erhålls helt enkelt genom att lösa det homogena ekvationssystemet $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$, där $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix}^T$. Detta ekvationssystem är ekvivalent med systemet $\boldsymbol{BX} = \boldsymbol{0}$ som har parameterlösningen,

$$\boldsymbol{X} = s\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{där } s,t \in \mathbf{R}.$$

Kolonnvektorerna i lösningen är linjärt oberoende och utgör därför en bas för nollrummet till $\boldsymbol{A}$. Slutligen får man en bas för kolonnrummet till matrisen genom att välja de kolonner i $\boldsymbol{A}$ som svarar mot de kolonner i $\boldsymbol{B}$ som innehåller pivotelementen.

3. Linjens ekvation är $\ell : 3x_1 + 2x_2 - 6 = 0$. Koordinatbytet blir

$$\begin{cases} x_1 = -\hat{x}_1 + 3\hat{x}_2, \\ x_2 = -\hat{x}_1 - 2\hat{x}_2. \end{cases}$$

I det nya koordinatsystemet får linjen ekvationen $\ell : 5\hat{x}_1 - 5\hat{x}_2 + 6 = 0$.

Anvisning. Eftersom linjen ℓ inte går genom origo kan en ekvation på affin form bestämmas genom att t.ex. ansätta $\ell : ax_1 + bx_2 = 1$ och sen bestämma de reella koefficienterna a och b utifrån att linjen passerar genom punkterna $(2,0)$ och $(0,3)$. Multiplicerar man båda sidor av den resulterande ekvationen med koefficienternas minsta gemensamma nämnare, och flyttar högerledet till andra sidan likhetstecknet, så erhållar man ekvationen i svaret ovan. Alternativt kan man ställa upp en parameterframställning för ℓ (exempelvis $(x_1,x_2) = (0,3) + t(2,-3)$, $t \in \mathbf{R}$) och sen eliminera parametern (t).

Uttrycket för koordinatbytet är standard.

Linjens ekvation i det nya koordinatsystemet får man genom att *substituera* uttrycken för x_1 och x_2 i koordinatbytet på motsvarande platser i linjens ekvation i det gamla koordinatsystemet. Detta är en helt elementär operation.

4. **a)** *Svar:* Vinkeln blir $3\pi/4$ radianer, motsvarande $135°$.

b) *Svar:* Alla tre vinklar är lika stora, $2\pi/3$ radianer eller $120°$.

Lösning: Tar man skalärprodukten mellan vektorn $\mathbf{0} = \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ och var av vektorerna $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$ fås

$$\begin{cases} 0 = (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{u} = |\boldsymbol{u}|^2 + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u} \\ 0 = (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} + |\boldsymbol{v}|^2 + \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v} \\ 0 = (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} + |\boldsymbol{w}|^2 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 + \cos[\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}] + \cos[\boldsymbol{w},\boldsymbol{u}] = 0 \\ \cos[\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}] + 1 + \cos[\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}] = 0 \\ \cos[\boldsymbol{w},\boldsymbol{u}] + \cos[\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}] + 1 = 0 \end{cases},$$

där vi använt att $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} = \cos[\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}]$ etc. eftersom att $|\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{w}| = 1$. Vi har alltså tre ekvationer med de tre obekanta $\cos[\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}], \cos[\boldsymbol{w},\boldsymbol{u}]$ och $\cos[\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}]$. Lösningen till systemet är $\cos[\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}] = \cos[\boldsymbol{w},\boldsymbol{u}] = \cos[\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}] = -1/2$. Alla vinklarna är alltså lika stora, $[\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}] = [\boldsymbol{w},\boldsymbol{u}] = [\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}] = 2\pi/3$.

Anmärkning. Problemet kan lösas geometiskt om man inser att vektorerna $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$ bildar sidorna i en liksidig triangel. De sökta vinklarna är då triangelns tre yttervinklar som alla är lika stora, $120°$.

5. **a)** *Svar:* Matrisen $\boldsymbol{A}$ sägs vara diagonaliserbar om det finns en inverterbar matris $\boldsymbol{S}$ och en diagonal matris $\boldsymbol{D}$ sådan att $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{SDS}^{-1}$. Den sökta formeln är $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{SD}^n\boldsymbol{S}^{-1}$.

Anvisning. Definitionen av diagonaliserbarhet finns på sidan 247 i läroboken. Härledningen av formeln för $\boldsymbol{A}^n$ följer samma princip som i Exempel 11 på sidan 251.

b) *Svar:* Matrisen $\boldsymbol{A}$ är diagonaliserbar med $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$. Det sökte gränsvärdet är $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{A}^n = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$.

Anvisning. Diagonalisering är standard. Gränsvärdesberäkningen utnyttjar att $\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{A}^n = \lim_{n\to\infty}\boldsymbol{SD}^n\boldsymbol{S}^{-1} = \boldsymbol{S}\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{D}^n\boldsymbol{S}^{-1}$, där $\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{D}^n$ lätt evalueras.

6. *Svar:* Den sammansatta avbildningen $F \circ G$ har avbildningsmatrisen

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Eftersom att $\boldsymbol{C}$ är en ortogonal matris med determinant ett följer det att den sammansatta avbildningen är en vridning. Denna vridning sker kring axeln $(x,y,z) =$

$t(1,1,1)$, $t \in \mathbf{R}$, med vridningsvinkeln $2\pi/3$ radianer sett från spetsen av axelns riktningsvektor $(1,1,1)$.

Lösning: Avbildningsmatriserna $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{B}$ för vridningarna F och G fås genom att avläsa bilderna av koordinatsystemets basvektorer,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lägg märke till att båda $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{B}$ är ortogonala matriser med determinant ett. Avbildningsmatrisen för den sammansatta avbildningen $F \circ G$ beräknas då som matrisprodukten $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$.

Produkten av två ortogonala matriser år återigen ortogonal och $\det \boldsymbol{C} = \det \boldsymbol{AB} = \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{B} = 1 \cdot 1 = 1$, vilket visar att den sammansatta avbildningen är en vridning.

Varje punkt på vridningsaxeln för $F \circ G$ avbildas på sig själv, så om $\boldsymbol{X}$ är ortsvektor för en godtycklig punkt på axeln gäller alltså att $\boldsymbol{CX} = \boldsymbol{X}$. Lösningen till det ekvivalenta homogena ekvationssystemet $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ är $\boldsymbol{X} = t \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

För att bestämma vridningsvinkeln väljer vi en godtycklig nollskild vektor tillhörande det plan som går genom origo och som är vinkelrät mot vridningsaxeln, t.ex. vektorn $\boldsymbol{u} = (1,0,-1)$. Sen beräknar vi dess bild, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{Cu} = (-1,1,0)$. Då ligger $\boldsymbol{v}$ i samma plan och vi har,

$$\cos[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}] = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|} = \frac{(1,0,-1) \cdot (-1,1,0)}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = -\frac{1}{2},$$

och det följer att $[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}] = 2\pi/3$.

Slutligen kontrollerar man att vridningen sker i positiv led sett från spetsen av den valda riktningsvektorn för vridningsaxeln, $\boldsymbol{x} = (1,1,1)$. Här utnyttjas definitionen av vektorprodukten: eftersom att $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (1,0,-1) \times (-1,1,0) = (1,1,1)$ har samma riktning som $\boldsymbol{x}$ sker den vridning som avbildar $\boldsymbol{u}$ på $\boldsymbol{v}$ i positiv led.