LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
ENDIMENSIONELL ANALYS A2
2015–01–16 kl 8–13

1. a) Kvadratkomplettering ger

$$z^2 + iz + \tfrac{1}{2} - i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \big(\underbrace{z + \tfrac{1}{2}i}_{=w}\big)^2 - \big(\tfrac{1}{2}i\big)^2 + \tfrac{1}{2} - i = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad w^2 = -\tfrac{3}{4} + i,$$

och sätter vi $w = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) så får vi

$$a^2 - b^2 + 2abi = -\tfrac{3}{4} + i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = -\tfrac{3}{4}, \\ 2ab = 1. \end{cases}$$

Detta system, som förslagsvis löses med utnyttjande av hjälpekvationen $a^2+b^2 = |-3/4+i| = 5/4$, har lösningarna $(a, b) = \pm(1/2, 1)$. (Observera att systemets andra ekvation ger att a och b har *lika* tecken.) Återgång till z ger slutligen rötterna

$$z_1 + \tfrac{1}{2}i = \tfrac{1}{2} + i \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i,$$
$$z_2 + \tfrac{1}{2}i = -\tfrac{1}{2} - i \quad \Leftrightarrow \quad z_2 = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}i.$$

b) Räkneregler för absolutbelopp och argument ger

$$\left|\frac{(1+\sqrt{3}i)^7}{(-1+i)^5}\right| = \frac{\left|1+\sqrt{3}i\right|^7}{\left|-1+i\right|^5} = \frac{\left(\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}\right)^7}{\left(\sqrt{(-1)^2+1^2}\right)^5} = \frac{2^7}{2^{5/2}} = 2^{9/2},$$

respektive

$$\arg\frac{(1+\sqrt{3}i)^7}{(-1+i)^5} = 7\arg(1+\sqrt{3}i) - 5\arg(-1+i) =$$
$$= 7\cdot\tfrac{\pi}{3} - 5\cdot\tfrac{3\pi}{4} + 2\pi k = -\tfrac{17\pi}{12} + 2\pi k.$$

Således är absolutbeloppet lika med $2^{9/2}$, och ett argument är t.ex. $\frac{7\pi}{12}$ (efter addition av $\frac{24\pi}{12} = 2\pi$ till den uträknade vinkeln ovan).

2. Vi börjar med att derivera, och får

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1)^2 - 2x^3(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}.$$

De stationära punkterna är 0 och 3, och vi får följande teckentabell:

x		0		1		3	
x^2	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-1)^3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	$\wr$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\wr$	$\searrow$	$27/4$	$\nearrow$

Vi drar slutsatsen att den enda lokala extrempunkten är 3 (lokalt minimum). Notera att 0 är en terrasspunkt.

Polynomdivision av uttrycket för $f(x)$ ger

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2} = x + 2 + \frac{3x-2}{(x-1)^2}$$

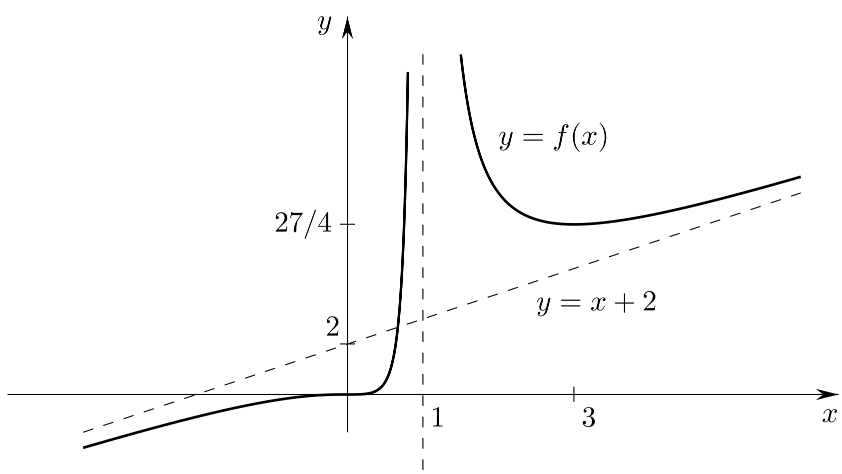
$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - (x+2) \big) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x-2}{(x-1)^2} = 0,$$

och vi drar slutsatsen att linjen $y = x + 2$ är sned asymptot till funktionskurvan både då $x \to \infty$ och $x \to -\infty$. (Vi kan nu även dra slutsatsen att $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ och $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.) Slutligen studerar vi vad som händer nära $x = 1$, och får

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \infty,$$

vilket speciellt betyder att linjen $x = 1$ är en lodrät asymptot.

Grafen får följande utseende:



3. a) Med förenklingen $f(x) = \ln\left(\sqrt{1+e^x}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(1+e^x\right)$ så blir det lättare att derivera. Kedjeregeln ger

$$f'(x) = \frac{e^x}{2(1+e^x)}.$$

En ekvation för tangenten ges nu av

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \quad \Leftrightarrow \quad y - \tfrac{1}{2}\ln 2 = \tfrac{1}{4}(x - 0)$$
$$\Leftrightarrow \quad y = \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{2}\ln 2.$$

b) Se läroboken.

c) Antag att f är deriverbar i x_0. Då gäller det att

$$\lim_{h\to 0} (\, f(x_0+h) - f(x_0)\,) = \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot h \right) = f'(x_0)\cdot 0 = 0,$$

dvs. det följer att $f(x_0+h) \to f(x_0)$ då $h \to 0$, vilket i sin tur betyder att f är kontinuerlig i x_0. Slutsatsen blir att implikationen $B \Rightarrow A$ är sann.

Den omvända implikationen gäller dock ej. Exempelvis är $f(x) = |x|$ kontinuerlig i 0, men saknar derivata i denna punkt eftersom

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 1 \neq -1 = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}.$$

4. a) Här misstänker vi att $p(x)$ kan väljas som Maclaurinpolynomet av $(1+3x)^{3/2}$ av första ordningen. Maclaurinutveckling ger att

$$(1+3x)^{3/2} = 1 + \frac{9}{2}x + \frac{27}{8} \cdot \frac{1}{(1+3\theta x)^{1/2}} x^2,$$

för något θ, $0 \leq \theta \leq 1$. Med $p(x) = 1 + \frac{9}{2}x$ kan vi nu visa den önskade olikheten:

$$\left| (1+3x)^{3/2} - \left(1 + \frac{9}{2}x\right) \right| = \frac{27}{8} \cdot \frac{1}{(1+3\theta x)^{1/2}} x^2 \leq \frac{27}{8} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{3}{8},$$

där vi har utnyttjat att $\frac{1}{(1+3\theta x)^{1/2}} \leq \frac{1}{(1+0)^{1/2}} = 1$ i det aktuella intervallet.

b) Vi Maclaurinutvecklar de ingående funktionerna (i fallet $e^{-x^2/2}$ underlättas räkningarna genom att först utveckla e^t, och sedan ersätta t med $-x^2/2$) och får

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2/2} - \cos x}{x(\sin x - x)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + B_1(x)x^6 - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + B_2(x)x^6\right)}{x(x - \frac{1}{6}x^3 + B_3(x)x^5 - x)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{12}x^4 + B_4(x)x^6}{-\frac{1}{6}x^4 + B_3(x)x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{12} + B_4(x)x^2}{-\frac{1}{6} + B_3(x)x^2} = \frac{\frac{1}{12} + 0}{-\frac{1}{6} + 0} = -\frac{1}{2}.$$

(Samliga funktioner $B_i(x)$ ovan är begränsade nära 0.)

5. a) Här rör det sig om en geometrisk serie. Vi ser att

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{x-1}\right)^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\tfrac{1}{x-1}\right)^k = \frac{1}{x-1}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\tfrac{1}{x-1}\right)^k =$$

$$= \frac{1}{x-1}\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{x-1}\right)^n}{1-\frac{1}{x-1}} = \frac{1}{x-1}\cdot\frac{1-0}{1-\frac{1}{x-1}} = \frac{1}{x-2},$$

där ändligt gränsvärde endast fås då

$$\left|\frac{1}{x-1}\right| < 1 \quad\Leftrightarrow\quad 1 < |x-1| \quad\Leftrightarrow\quad x > 2 \quad \text{eller} \quad x < 0.$$

Serien är alltså konvergent med summan $\frac{1}{x-2}$ precis då $x > 2$ eller $x < 0$.

b) Eftersom nämnaren går mot 0 då x går mot 1, så kan vi endast ha ändligt gränsvärde då även täljaren går mot 0, dvs. det måste gälla att

$$1^2 - 2(a+1)\cdot 1 + 3a - 1 = 0 \qquad\Leftrightarrow\qquad a = 2.$$

Insättning av $a = 2$ samt faktorisering av täljare och nämnare ger

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-6x+5}{x^2-x} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-5)}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x-5}{x} = \lim_{x\to 1}\frac{1-5}{1} = -4.$$

(Alternativt kan beräkningen underlättas med ett variabelbyte, t.ex. $t = x - 1$.)

6. Cylinderns ytarea ges av

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h,$$

och utnyttjar vi likformighet av trianglar så ser vi att

$$h = \frac{H(R-r)}{R}.$$

Kombinerar vi dessa två samband så får vi arean A som funktion av r:

$$A(r) = \ldots = 2\pi r^2\left(\tfrac{R-H}{R}\right) + 2\pi H r, \qquad 0 \le r \le R.$$

Vi vill nu maximera denna funktion, och börjar med att bestämma derivatan:

$$A'(r) = 4\pi r\left(\tfrac{R-H}{R}\right) + 2\pi H = 4\pi\left(\tfrac{R-H}{R}\right)\left(r - \frac{HR}{2(H-R)}\right), \qquad H \ne R.$$

Den enda stationära punkten är alltså $\alpha = \frac{HR}{2(H-R)}$. (I fallet $R = H$ blir derivatan $2\pi H$, och stationär punkt saknas.) Vi måste även undersöka om/när denna punkt ligger i det inre av vårt aktuella intervall $[0, R]$. Det är klart att $\alpha > 0$ om och endast om $H > R$, och en kontroll av olikheten $\alpha < R$ ger

$$\frac{HR}{2(H-R)} < R \qquad \underset{H>R}{\Leftrightarrow} \qquad H < 2(H-R) \qquad\Leftrightarrow\qquad H > 2R.$$

I fallet $H > 2R$ har vi alltså en stationär punkt $\alpha = \frac{HR}{2(H-R)}$ i det inre av vårt intervall, och en kontroll (teckentabell eller andraderivata) visar att denna är en global maximipunkt. I fallet $H \le 2R$ har vi ingen inre stationär punkt, och maximal ytarea ges i ändpunkten $r = R$ (förutsatt att vi betraktar en sådan ”urartad cylinder” som en cylinder, annars får svaret bli att maximum saknas).