LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

SVAR OCH ANVISNINGAR
ENDIMENSIONELL ANALYS
DELKURS B2/A3
2015–08–17

1. 1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1,$

2. $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos(2x))dx = \frac{1}{4}(2x+\sin(2x)) + C,$

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx = \begin{bmatrix} y = \sin x \\ dy = (\cos x)dx \end{bmatrix} \int_0^1 (1-y^2)dy = \frac{2}{3}$

SVAR:

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 1$ b) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$ c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx = \frac{2}{3}.$

2. a) Vi får $e^{i\pi/3}z = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(1+3i) = \frac{1}{2}(1-3\sqrt{3}) + \frac{i}{2}(3+\sqrt{3}).$

b) Se läroboken.

c) Sätt $w = z^8$, som då uppfyller ekvationen $w^2 - w + 1 = 0$, dvs $w = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3}) = e^{\pm i\pi/3}$. De två ekvationerna $z^8 = e^{\pm i\pi/3}$ har nu lösningarna $z = re^{i\theta}$ där $r = 1$ och $8\theta = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \pm\frac{1}{24} + \frac{ik\pi}{4}, k = 0, 1, \dots, 7$. Dessa är därför de 16 lösningarna.

3. Den homogena lösningen ges av

$$y_h(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x).$$

För att hitta en partikulärlösning, bestämmer vi först en till ekvationen

$$z''(x) + 4z(x) = e^{(-1+2i)x}.$$

Pröva med $z_p(x) = Ce^{(-1+2i)x}$. Vi får då $z_p''(x) = (-1+2i)^2 y_p(x)$ och ur det ekvationen $C((-1+2i)^2+4) = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{1-4i} = \frac{1+4i}{17}$. Det följer att $z_p(x)$ är

$$\frac{e^{-x}}{17}(1+4i)(\cos(2x) + i\sin(2x)) = \frac{e^{-x}}{17}(\cos(2x) - 4\sin(2x) + i(4\cos(2x) + \sin(2x))).$$

Realdelen av denna löser ekvationen $y'' + 4y = e^{-x}\cos(2x)$ och imaginärdelen löser $y'' + 4y = e^{-x}\sin(2x)$. Vi ska därför ta realdelen minus imaginärdelen:

$$\frac{e^{-x}}{17}(\cos(2x) - 4\sin(2x) - (4\cos(2x) + \sin(2x))) = -\frac{e^{-x}}{17}(3\cos(2x) + 5\sin(2x))$$

Detta är en partikulärlösning till vår ekvation, och den allmänna lösningen ges därför av

$$y(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x) - \frac{e^{-x}}{17}(3\cos(2x) + 5\sin(2x)).$$

4. a) $V = \int_a^b A(x)\,dx$ där $A(x)$ är tvärsnittsarean som vi får när vi skär kroppen med planet med denna x-koordinat. Motiveringen är att volymen utgörs av en summa av tunna plattor med tjocklek dx och arean $A(x)$, alltså volym $A(x)dx$.

b) Funktionen som beskriver randen är växande då $0 \le x \le 1$. Skiva upp området längs y-axeln i cirkulära skivor vars radie ges av det x-värde som för givet y löser ekvationen $y = 3x/\sqrt{1+x^2}$, $0 \le x \le 1$. Detta ges av $x = y/\sqrt{9-y^2}$ och vi ska summera sådana från $y = 0$ till $y = 3/\sqrt{2}$. Enligt skivformeln ska vi därför beräkna integralen

$$\int_0^{3/\sqrt{2}} \pi(\frac{y}{\sqrt{9-y^2}})^2 dy = \pi \int_0^{3/\sqrt{2}} \frac{y^2 dy}{9-y^2} = \pi \int_0^{3/\sqrt{2}} \frac{9dy}{9-y^2} - \frac{3\pi}{\sqrt{2}}.$$

Den kvarvarande integranden partialbråksuppdelas:

$$\frac{9}{9-y^2} = \frac{3}{2}(\frac{1}{3-y} + \frac{1}{3+y}) \Rightarrow \int \frac{9dy}{9-y^2} = \frac{3}{2}\ln|\frac{3+y}{3-y}| + C.$$

Den bestämda integralen blir därför

$$\frac{3}{2}\ln|\frac{3+3/\sqrt{2}}{3-3/\sqrt{2}}| = \frac{3}{2}\ln|\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}|.$$

Denna kan snyggas till (men det behövs inte) genom att förlänga med konjugatet till nämnaren, så att vi får $3\ln(1+\sqrt{2})$. Lägger vi ihop vad vi kommit fram till får vi att volymen är

$$3\pi\ln(1+\sqrt{2}) - \frac{3\pi}{\sqrt{2}}.$$

5. a) Ett massbalansövervägande visar att om $y(t)$ är mängd ämne i sjön vid tiden t (räknat från när utsläppet startade) så är

$$y'(t) = a(t) - y(t)/10, \quad a(t) = \begin{cases} 1-t, & 0 \le t \le 1 \\ 0 & t > 1. \end{cases}$$

Vidare gäller att $y(0) = 0$. Vi löser ekvationen för $0 < t \le 1$ med integrerande faktor. Vi söker värdet då $t = 1$ så vi kan räkna med bestämda integraler. Med $k = 1/10$ har vi $(e^{kt}y(t))' = (1-t)e^{kt}$ och därför

$$e^k y(1) - y(0) = \int_0^1 (1-t)e^{kt}dt = \frac{1}{k}([(1-t)e^{kt}]_0^1 - \int_0^1 (-1)e^{kt}dt)$$

$$= \frac{1}{k}(-1 + \int_0^1 e^{kt}dt) = \frac{1}{k}(-1 + \frac{e^k - 1}{k}) = \frac{1}{k^2}(e^k - (k+1)).$$

Det följer att

$$y(1) = \frac{1}{k^2}(1 - (k+1)e^{-k}) = 100(1 - 1.1e^{-0.1}) \approx 0.45 \text{ kg}.$$

b) När $t > 1$ gäller att $y'(t) = -y(t)/10$. Om vi startar en ny klocka när läckan tätats (alltså efter en timme), så gäller att $y(t) = y(0)e^{-t/10}$. Vi ska lösa ekvationen $y(0)/3 = y(0)e^{-t/10}$, och den ger $t = 10\ln 3$ timmar. Räknat från när läckan tätades!

6. a) Maclaurinutvecklingen är

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + R_5(x), \quad R_5(x) = \cos(\theta x)\frac{x^5}{120}, \quad 0 \le \theta \le 1.$$

För detaljer se boken.

b) Vi har att integralen är lika med

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6} + R_5(\sqrt{x}))dx = [\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{15}]_0^1 + \int_0^1 R_5(\sqrt{x})dx = \frac{3}{5} + \int_0^1 R_5(\sqrt{x})dx.$$

Men $0 \le R_5(x) \le x^5/120$, så

$$0 < \int_0^1 R_5(\sqrt{x})dx \le \int_0^1 \frac{x^{\frac{5}{2}}}{120}dx = [\frac{x^{\frac{7}{2}}}{420}]_0^1 = \frac{1}{420},$$

så vi ser att

$$\frac{3}{5} < \int_0^1 \sin\sqrt{x}\, dx < \frac{3}{5} + \frac{1}{420}.$$

Slutligen är

$$\frac{1}{420} < \frac{1}{200} = 5 \cdot 10^{-3},$$

så vi har därför att

$$\int_0^1 \sin\sqrt{x}\, dx = 0.60 \pm 0.005$$