LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

SVAR OCH ANVISNINGAR
FUNKTIONSTEORI
2013–04–03 kl 08 – 13

1. Den homogena lösningen blir $x_h(n) = A \cdot 3^n + B \cdot 1^n$. Ansätt en partikulärlösning av typen $x_p(n) = C \cdot 2^n + Dn \cdot 3^n$.
Allmänna lösningen är: $x(n) = -3 \cdot 2^n + (n/3)3^n + A \cdot 3^n + B$. Begynnelsevillkor ger $\boxed{x(n) = 2 + (1 + n/3)3^n - 3 \cdot 2^n}$.

2. A: Absolut konvergent (och därmed konvergent).

B: Konvergent enl t ex rotkriteriet ty.

C: Divergent. Studera t ex $\lim_{k\to\infty} a_k/b_k$ med $b_k = 1/k$.
D: Divergent eftersom termerna inte går mot noll.
E: Konvergent enl Leibnitz. Observera att termernas absolutbelopp inte är avtagande i början, men att en undersökning visar att $\ln k/\sqrt{k}$ går monotont mot noll då $k \geq e^2$.

3. a) För det första uttrycket måste man gå "omvägen" via log och exp, dvs $(-2)^\pi = \boxed{e^{\pi \log(-2)} = e^{\pi(\log 2 + i\pi + 2k\pi i)} = 2^\pi e^{i\pi^2(1+2k)}}$, där k är ett godtyckligt heltal. (Alla dessa värden blir *olika* punkter på cirkeln $|z| = 2^\pi$.) Det andra uttrycket har givetvis bara ett värde, nämligen $\boxed{1/\pi^2}$.

b) C-R bestämmer $v(x, y) = \text{Im} f(x + iy)$ så när som på en (reell) konstant. Den senare bestäms av villkoret $f(0) = 3i$. Svar: $\boxed{f(z) = i(3 - 2\sinh z)}$.

4. a) Konvergensradien är $\boxed{R = 1/2}$.

b) Potensserier får deriveras termvis inom konvergensskivan. Speciellt gäller $\sum_{n=0} nz^n = z\frac{d}{dz}\sum_{n=0} z^n = z\frac{d}{dz}(1-z)^{-1} = z(1-z)^{-2}$, samt $\sum_{n=0}(2z)^n = (1-2z)^{-1}$.
Därmed blir $\boxed{f(z) = z(1-z)^{-2} + (1-2z)^{-1}}$.

c) $\boxed{f(1/4) = 22/9}$ och $\boxed{f'(0) = 3}$.

5. a) Se sats 13.1 i kompendiet.

b) Funktionen har två enkla poler i $z = \pm i$. Endast polen i $z = i$ innesluts av kurvan γ. Integralen blir $I = 2\pi i \text{Res}_{z=i} \frac{\cos z}{z^2+1} = 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{\cos z}{z+i}$, där Regel 3 har använts.
Slutligen, $\boxed{I = \frac{\pi}{2}(e + 1/e)}$.

6. a) Det gäller

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{ike^{ikt}}{2^{|k|}} = \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{ike^{ikt}}{2^{|k|}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{ike^{ikt}}{2^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-ine^{-int}}{2^n} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{ike^{ikt}}{2^k}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \overline{f_k(t)}\,,$$

där $||f_k|| = ||\overline{f_k}|| = k2^{-k}$. Mha exempelvis kvotkriteriet konstateras att serierna $\sum_{k=0}^{\infty} ||f_k||$ och $\sum_{k=0}^{\infty} ||\overline{f_k}||$ är konvergenta, så den givna serien är likformigt konvergent enligt sats 10.7.
På liknande sätt ses att serierna $\sum_{k=0}^{\infty} F_k(t)$ och $\sum_{k=0}^{\infty} \overline{F_k(t)}$, där

$$F_k(t) = \left(\frac{e^{it}}{2}\right)^k$$

är likformigt konvergenta. Dessa serier är geometriska och kan summeras direkt, och samtidigt är villkoren för termvis derivation uppfyllda med $F_k'(t) = f_k(t)$. Vi får
$$f(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-\frac{e^{-it}}{2}} + \frac{1}{1-\frac{e^{it}}{2}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{2-\cos t}{5-4\cos t}\right) = \boxed{-\frac{12\sin t}{(5-4\cos t)^2}}\,.$$
b)
Vi ser direkt att $f(t)$ får deriveras hur många gånger som helst. Speciellt är $f'(t)$ kontinuerlig, så dess Fourierkoefficienter ges av sambandet $c_k(f') = ikc_k(f)$. Fourierserien blir alltså

$$-\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k^2}{2^{|k|}} e^{ikt}\,.$$

Serien konvergerar likformigt eftersom f' har kontinuerlig andraderivata.
c)
Funktionen f är reellvärd så integranden kan skrivas

$$f(t)f'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}f(t)^2\right)\,.$$

Integralen blir alltså

$$\left[\frac{1}{2}f(t)^2\right]_0^{2\pi} = 0\,,$$

eftersom f är periodisk med perioden 2π. Man kan också använda att integranden är udda och 2π-periodisk, eller Parsevals formel.