LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

SVAR OCH ANVISNINGAR
FUNKTIONSTEORI
2014-08-27 kl 8-13

1. $x_n = 1 - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$

2. $b = 2$ och $f(z) = z^2 + C\,i$, där C är ett godtyckligt reellt tal.

3. **a)** Grafen till $f(t) = t$ för $-\pi < t \leq \pi$ är en sträcka genom origo. Rita grafen till $f(t)$ i de tre perioderna.

b) Den trigonometriska Fourierserien är $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin kt.$

c) Fourierserien är punktvis konvergent på intervallet $-\infty < t < \infty$, enligt sats 7.18 i läroboken.

d) Fourierserien är inte likformigt konvergent på intervallet $-\infty < t < \infty$, ty enligt sats 7.18 vet vi att summan av Fourierserien inte är kontinuerlig på $-\infty < t < \infty$.

e) Med hjälp av Parsevals formel får vi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. **a)** konvergent, **b)** konvergent, **c)** divergent, **d)** konvergent, **e)** konvergent

5. **a)** Poler till funktionen $f(z)$: $(1 + \pi + 2k\pi)i$, där $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

b) Potensseriens konvergensradie är lika med avståndet från origo till närmaste pol och alltså är $\pi - 1$.

c) Det finns tre poler $1+\pi,\ 1-\pi,\ 1-3\pi$ inom området $|z| < 10$. Residysatsen medför

$$\int_\gamma f(z)dz = -6\pi\left(\sin 1 + i\cos 1\right).$$

6. Med hjälp av samma kontur och samma lösningsmetod som Exempel 10.16 i läroboken kan man få likheten

$$\left(1 - e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{3}}}{(1+x^2)^2}\,dx = 2\pi i\left(Res_{z=i}\left(\frac{z^{\frac{1}{3}}}{(1+z^2)^2}\right) + Res_{z=-i}\left(\frac{z^{\frac{1}{3}}}{(1+z^2)^2}\right)\right),$$

som medför att

$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{3}}}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\sqrt{3}\pi}{9}.$$