

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Beräkna nedanstående gränsvärden. Endast svar krävs i denna uppgift. (0.2p/styck)

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 2^x + 3 \ln x}{x^5 - 2^{x+1}} & \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{\sin 2x} & \text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}^+} \frac{\ln(1 + 3x)}{\sin 2x} \\ \text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos 2x}{\ln(1 + 3x)} & \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x}. \end{array}$$

2. Rita grafen till funktionen

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{2x + 1}, \quad x \neq -1/2.$$

Ange speciellt eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. Ange även värdemängden till  $f$ .

3. a) Bestäm alla komplexa rötter till ekvationen  $z^6 = -64$ . Rötterna skall ges på formen  $a + bi$ . (0.7)  
b) Faktorisera polynomet  $x^6 + 64$  så långt som möjligt i reella faktorer. (0.3)
4. a) Låt  $f$  vara en funktion definierad i en omgivning av en punkt  $a$ . Ge den matematiska definitionen av derivatan  $f'(a)$ . (0.2)  
b) Härled derivatan av funktionen  $f(x) = \sin x$  genom att utgå från derivatans definition. (Du får lov att direkt använda gränsvärdet  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0$ .) (0.3)  
c) För vilka värden på  $x$  är serien

$$\sum_{k=2}^{\infty} (2x)^k$$

konvergent? För vilka värden på  $x$  blir seriens summa lika med 2? (0.5)

5. a) Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^{x^2} - \sin 2x}{x(1 - \cos x)}$$

med hjälp av Maclaurinutveckling. (0.5)

- b) Visa att

$$|\ln(1 - x^2) + x^2 + \frac{1}{2}x^4| \leq \frac{1}{80}$$

för alla  $x$  som uppfyller  $|x| \leq \frac{1}{2}$ . (0.5)

VAR GOD VÄND!

6. Låt  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  och  $E$  beteckna reella tal. Polynomfunktionen

$$p(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E,$$

definierad på hela  $\mathbb{R}$ , uppfyller samtliga nedanstående villkor:

- punkten  $x = 0$  är en lokal extrempunkt till  $p(x)$  och motsvarande lokala extremvärde är  $-1$
- $p(x)$  är en jämn funktion
- $|A| = 1$
- $p(x)$  har det största värdet 3

Bestäm funktionen  $p(x)$ , dvs. bestäm alla möjliga uppsättningar av talen  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  och  $E$ .

GOD JUL OCH GOTT NYTT ÅR!