# Многомерные статистические методы 2020

Золотарев Антон Олегович, БСТ182

17 сентября 2020 г.

## 1 Домашнее задание по лекции №1. Доказательства свойств корреляции

### 1.1 $-1 \leq \rho \leq 1$

Вспомним определение коэффициента корреляции Пирсона :

$$\rho = \frac{cov_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Раскроем представленные величины:

$$\frac{cov_(XY)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{M[(X - M[X]) \cdot (Y - M[Y])]}{\sigma_X \sigma_Y} = M\left(\frac{X - M[X]}{\sigma_X} \cdot \frac{Y - M[Y]}{\sigma_Y}\right)$$

Рассмотрим две стандартизованных величины:

$$Z_1 = \frac{X - M[X]}{\sigma_X}, Z_2 = \frac{Y - M[Y]}{\sigma_Y}$$

$$\forall i = \{1{,}2\} M[Z_i] = 0, D[Z_i] = 1$$

Изучим ковариацию двух рассматриваемых величин:

$$cov_{Z_1 Z_2} = M[(Z_1 - M[Z_1])(Z_2 - M[Z_2])] = M[(Z_1 - 0)(Z_2 - 0)] = M[Z_1 \cdot Z_2]$$

Теперь рассмотрим дисперсию суммы рассматриваемых величин, поскольку там используются все необходимые нам для доказательства величины (дисперсии каждой из величин в отдельности и ковариация):

$$D(Z_1 + Z_2) = D(Z_1) + D(Z_2) + 2 \cdot cov Z_1 Z_2 = 1 + 1 + 2 \cdot M(Z_1 \cdot Z_2)$$

Методом пристального взгляда становится очевидно, что последняя часть полученного выражения является нашим изначальным коэффициентом корреляции Пирсона. Также, вспомнив про одно из основных свойств дисперсии (D[x]>0 для любой случайно величины), получим следующее неравенство:

$$2 + 2 \cdot \rho_{XY} \geqslant 0$$

$$\rho_{XY} \geqslant -1$$

Аналогично покажем вторую часть исходного неравенства:

$$D(Z_1 - Z_2) = D(Z_1) + D(Z_2) - 2 \cdot cov Z_1 Z_2 = 1 + 1 - 2 \cdot M(Z_1 \cdot Z_2)$$

$$2 - 2 \cdot \rho_{XY} \geqslant 0$$

$$\rho_{XY} \leqslant 1$$

## 1.2 В случае, если случайные величины подчиняются нормальному закону распределния и некоррелированны, то они являются независимымыми

Необходимо доказать следующее:

$$\left\{ \begin{aligned} cov_X Y = M(XY) - M(X) \cdot M(Y) = 0 \\ X \sim N(\mu_X, \sigma_X) \\ Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y) \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x, y) = f(x) \cdot f(y)$$

Вспомним, как описывается плотность вероятности для двумерного нормального распределения:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \cdot \left[ \frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} \right] \right\}$$

Поскольку $cov_X Y = 0$, то $\rho = 0$, поэтому совместная плотность вероятности принимает вид:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X} \cdot \exp\left\{ \frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} \right\} \times \frac{1}{2\pi\sigma_Y} \cdot \exp\left\{ \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} \right\} = f(x) \times f(y)$$

## 1.3 При $\rho = \pm 1$ и только тогда связь между X и Y становится функциональной ($y = f(x)$)