Множественная проверка гипотез

Формулы

	H_0 не отвергается	H_0 отвергается	Итого
H_0 верна	V	U	m_0
H_0 неверна	S	T	$m - m_0$
Итого	R	$m - R$	m

- FWER $= P\{U > 0\} = E[I\{U > 0\}] = \frac{m_0 \cdot \alpha}{m}$
- FDR $= E[\frac{U}{max\{U+T,1\}}] =$
- поправка Бонферрони $\alpha_{ind} = \frac{\alpha}{m}$
- поправка Холма-Бонферрони $\alpha_k = \frac{\alpha}{m+1-k}$
- процедура Бенджамини-Хокберга $\alpha_k = \frac{\alpha \cdot k}{m}$

2.1 Равенство средних в 4 группах студентов

Условие задачи

Допустим, на факультете экономических наук у нас есть 4 типа студентов:

- Мужского пола, учащиеся на бюджете
- Мужского пола, учащиеся на коммерческой основе
- Женского пола, учащиеся на бюджете
- Женского пола, учащиеся на коммерческой основе

Мы хотим проверить гипотезу о том, что средний балл по курсу "Математическая статистика"для всех 4 типов студентов будет равен среднему значению за прошлый год (контролируем инфляцию оценок!). На полученных данных мы проверили уже известные нам гипотезы для конкретных выборок и получили следующие значения p-value:

- $p_1 = 0.01$
- $p_2 = 0.04$
- $p_3 = 0.02$
- $p_4 = 0.005$

Реализуйте алгоритм Бонферрони, Холма-Бонферрони и Бенджамини-Хокберга для осуществления выводов касательно выдвинутых гипотез на заданном исходном уровне значимости $\alpha = 0.05$

Решение

Алгоритм Бонферрони

$$\alpha_{ind} = \frac{\alpha}{m} = \frac{0.05}{4} = 0.0125$$

Сравнивая с заданными полученными значениями p-value для каждой из групп, мы отвергаем нулевую гипотезу для групп 1 и 4, не отвергаем для групп 2 и 3, даже несмотря на то, что p-value для данной группы ниже заявленного уровня значимости для нашей исходной задачи.

Алгоритм Холма-Бонферрони

Запишем вектор из имеющихся p-значений, отсортированных по возрастанию:

$$p_v = [0.005, 0.01, 0.02, 0.04]$$

Посчитаем индивидуальные значения α для каждого типа студентов:

- $\alpha_1 = \frac{0.05}{4+1-1} = 0.0125$
- $\alpha_2 = \frac{0.05}{4+1-2} = 0.0167$
- $\alpha_3 = \frac{0.05}{4+1-3} = 0.025$
- $\alpha_4 = \frac{0.05}{4+1-4} = 0.05$

Попарно сравниваем p-value и α_k для всех выборок, начиная с наименьшего p_k, останавливаясь в том случае, когда $p_k \geq \alpha_k$. Таким образом, получается, что с помощью модифицированного алгоритма Холма-Бонферрони мы отвергаем гипотезу о равенстве среднего балла в группах 1, 3, 4 среднему за прошлый год. При этом не отвергаем гипотезу о равенстве среднего в группе 2 среднему за прошлый год в силу обозначенной поправки, хоть и p-value для данной группы ниже заявленного уровня значимости для нашей исходной задачи.

Таким образом, мы можем заключить, что для обоих полученных результатов $FWER < \alpha = 0.05$, однако с помощью поправки Холма-Бонферрони вероятность ошибки второго рода (вероятность не отвергнуть одну или более неверную гипотезу) для полученного в этом пункте вывода ниже, нежели в первом пункте (что, в целом, и так интуитивно понятно).

Алгоритм Бенджамини-Хокберга

По вектору отсортированных p-value сравним с индивидуальными значениями α:

$$\alpha_k = \frac{\alpha \cdot k}{m}$$

- $\alpha_1 = \frac{0.05 \cdot 1}{4} = 0.0125$
- $\alpha_1 = \frac{0.05 \cdot 2}{4} = 0.025$
- $\alpha_1 = \frac{0.05 \cdot 3}{4} = 0.0375$
- $\alpha_1 = \frac{0.05 \cdot 4}{4} = 0.05$

В рамках аналогичного попарного сравнения можем убедиться, что во для каждой исследуемой группы $p_k < \alpha_k$. Таким образом, в соответствии с алгоритмом Бенджамини-Хокберга для всех групп гипотеза о равенстве среднего в группе среднему за прошлый год отвергается.

В соответствии со знанием с лекции, делаем вывод, что $FDR \leq \alpha = 0.05$. Но действительно ли это так для нашей задачи? Какое необходимое условие упущено из внимания?

2.2 Связь типа личности и интеллекта

Условие задачи

Чтобы продемонстрировать значимость поправок Бонферрони, рассмотрим следующий пример. Исследователь хочет выяснить, связана ли личность с интеллектом. Участники заполняют опросник личности, который измеряет пять черт: экстраверсию, невротизм, добросовестность, покладистость и открытость. Кроме того, участники проходят три теста на интеллект: тест на вербальные способности, тест на числовые способности и тест на абстрактные способности. Полученные p-значения для гипотезы об отсутствии корреляции между тестами и опросами представлены в таблице:

	Экстраверсия	Невротизм	Добросовестность	Покладистость	Открытость
Вербальные	0.10	0.29	0.004	0.56	0.15
Числовые	0.08	0.002	0.09	0.09	0.35
Абстрактные	0.04	0.57	0.04	0.15	0.30

Поправка Бонферрони

Уровень α для каждого теста становится равным $\frac{0.05}{0.15} = 0.003$. В данном случае только одно из значений p меньше 0.003. Следовательно, исследователь может сделать общий вывод из своего исследования: личность связана со способностями, ведь один из тестов не отвергается! Корректировка Бонферрони гарантирует, что вероятность того, что хотя бы один из 15 тестов может привести к ошибке первого рода, составляет заданный уровень значимости. Следовательно, поправка Бонферрони гарантирует, что вероятность того, что исследователи сделают ложный вывод о связи личности со способностями, не превысит 0.05.

Тем не менее, поправка Бонферрони заметно снижает мощность проводимого теста, то есть поправка уменьшает вероятность того, что будет допущена ошибка второго рода (не отвергнута ложная гипотеза).

Процедура Холма-Бонферрони

Отсортируем полученные p-value по возрастанию:

k	$_k$	α_k
1	0.002	0.0033
2	0.004	0.0036
3	0.04	0.0038
4	0.04	0.0042
5	0.08	0.0045
6	0.09	0.005
7	0.09	0.0056
8	0.10	0.0063
9	0.15	0.0071
10	0.15	0.0083
11	0.29	0.01
12	0.30	0.0125
13	0.35	0.0167
14	0.56	0.025
15	0.57	0.05

Таким образом, в результате полученных значений α_{ind} мы можем сделать вывод о том, что уже после второго попарного сравнения $p_k > \alpha_k$, что соотносится с исходным тестом Бонферрони и даёт нам возможность сделать аналогичный вывод: не отвергается лишь гипотеза о наличии связии между опросом по невротизму и результатом теста на работу с цифрами.

2.3 Доказательство $FDR \leq \alpha$ для процедуры Бенджамини-Хокберга

Оставим на самостоятельное изучение, здесь всё расписано.

2.4 Полезные ссылочки

- Статья на вики про разные методы множественной проверки гипотез
- Пример вычисления процедуры Бенджамини-Хокберга
- Немного про методы коррекции ошибок написано в Larry Wasserman - All of Statistics A Concise Course in Statistical Inference на 181 странице
- И ещё немнго в Thomas Baguley - Serious Stats A guide to advanced statistics for the behavioral sciences-Palgrave 2012 на 516 странице