Egész számok definiálása HIT-kkel koherencia szabállyal és Kommutatív gyűrű tulajdonság formalizálása

Balázs Zoltán

Eötvös Loránd Tudományegyetem

2025. január 22.

Egész szám definíciók

- Normálforma (`zero`, `suc`, `pred` - Agda-ban `pos`, `negsuc`): pred (succ z) = ?
- HIT
  - Bi-Invertible (`zero`, `suc`, `predr`, `suc-predr`, `predl`, `predl-suc`) `predl`=`predr` kell!
  - Koherencia szabállyal (`zero`, `suc`, `pred`, `suc-pred`, `pred-suc`, `coh`)

Egész szám definíciók

- Normálforma (`zero`, `suc`, `pred` - Agda-ban `pos`, `negsuc`): pred (succ z) = ?
- HIT
  - Bi-Invertible (`zero`, `suc`, `predr`, `suc-predr`, `predl`, `predl-suc`) `predl`≡`predr` kell!
  - Koherencia szabállyal (`zero`, `suc`, `pred`, `suc-pred`, `pred-suc`, `coh`)

Egész szám definíciók

- Normálforma (`zero`, `suc`, `pred` - Agda-ban `pos`, `negsuc`): pred (succ z) $=$?
- HIT
  - Bi-Invertible (`zero`, `suc`, `predr`, `suc-predr`, `predl`, `predl-suc`) `predl`$\equiv$`predr` kell!
  - Koherencia szabállyal (`zero`, `suc`, `pred`, `suc-pred`, `pred-suc`, `coh`)

Egész szám definíciók

- Normálforma (`zero`, `suc`, `pred` - Agda-ban `pos`, `negsuc`): pred (succ z) $=$?
- HIT
  - Bi-Invertible (`zero`, `suc`, `predr`, `suc-predr`, `predl`, `predl-suc`) `predl`$\equiv$`predr` kell!
  - Koherencia szabállyal (`zero`, `suc`, `pred`, `suc-pred`, `pred-suc`, `coh`)

Kommutatív gyűrű

- Az egész számok, összeadás és szorzás gyűrűt alkotnak
  - Az egész számok és összeadás Abel-csoportot alkotnak
    - Összeadás egységeleme létezik
    - Összeadás inverz eleme létezik
    - Összeadás asszociatív
    - Összeadás kommutatív
  - Az egész számok és szorzás egységelemes félcsoportot alkotnak
    - Szorzás egységeleme létezik
    - Szorzás asszociatív
  - A szorzás disztributív az összeadás felett
- Szorzás kommutatív

Kommutatív gyűrű

- Az egész számok, összeadás és szorzás gyűrűt alkotnak
  - Az egész számok és összeadás Abel-csoportot alkotnak
    - Összeadás egységeleme létezik
    - Összeadás inverz eleme létezik
    - Összeadás asszociatív
    - Összeadás kommutatív
  - Az egész számok és szorzás egységelemes félcsoportot alkotnak
    - Szorzás egységeleme létezik
    - Szorzás asszociatív
  - A szorzás disztributív az összeadás felett
- Szorzás kommutatív

Kommutatív gyűrű

- Az egész számok, összeadás és szorzás gyűrűt alkotnak
  - Az egész számok és összeadás Abel-csoportot alkotnak
    - Összeadás egységeleme létezik
    - Összeadás inverz eleme létezik
    - Összeadás asszociatív
    - Összeadás kommutatív
  - Az egész számok és szorzás egységelemes félcsoportot alkotnak
    - Szorzás egységeleme létezik
    - Szorzás asszociatív
  - A szorzás disztributív az összeadás felett
- Szorzás kommutatív

Kommutatív gyűrű

- Az egész számok, összeadás és szorzás gyűrűt alkotnak
  - Az egész számok és összeadás Abel-csoportot alkotnak
    - Összeadás egységeleme létezik
    - Összeadás inverz eleme létezik
    - Összeadás asszociatív
    - Összeadás kommutatív
  - Az egész számok és szorzás egységelemes félcsoportot alkotnak
    - Szorzás egységeleme létezik
    - Szorzás asszociatív
  - A szorzás disztributív az összeadás felett
- Szorzás kommutatív

Kommutatív gyűrű

- Az egész számok, összeadás és szorzás gyűrűt alkotnak
  - Az egész számok és összeadás Abel-csoportot alkotnak
    - Összeadás egységeleme létezik
    - Összeadás inverz eleme létezik
    - Összeadás asszociatív
    - Összeadás kommutatív
  - Az egész számok és szorzás egységelemes félcsoportot alkotnak
    - Szorzás egységeleme létezik
    - Szorzás asszociatív
  - A szorzás disztributív az összeadás felett
- Szorzás kommutatív

Kommutatív gyűrű

- Az egész számok, összeadás és szorzás gyűrűt alkotnak
  - Az egész számok és összeadás Abel-csoportot alkotnak
    - Összeadás egységeleme létezik
    - Összeadás inverz eleme létezik
    - Összeadás asszociatív
    - Összeadás kommutatív
  - Az egész számok és szorzás egységelemes félcsoportot alkotnak
    - Szorzás egységeleme létezik
    - Szorzás asszociatív
  - A szorzás disztributív az összeadás felett
- Szorzás kommutatív

Kommutatív gyűrű

- Az egész számok, összeadás és szorzás gyűrűt alkotnak
  - Az egész számok és összeadás Abel-csoportot alkotnak
    - Összeadás egységeleme létezik
    - Összeadás inverz eleme létezik
    - Összeadás asszociatív
    - Összeadás kommutatív
  - Az egész számok és szorzás egységelemes félcsoportot alkotnak
    - Szorzás egységeleme létezik
    - Szorzás asszociatív
  - A szorzás disztributív az összeadás felett
- Szorzás kommutatív

Kommutatív gyűrű

- Az egész számok, összeadás és szorzás gyűrűt alkotnak
  - Az egész számok és összeadás Abel-csoportot alkotnak
    - Összeadás egységeleme létezik
    - Összeadás inverz eleme létezik
    - Összeadás asszociatív
    - Összeadás kommutatív
  - Az egész számok és szorzás egységelemes félcsoportot alkotnak
    - Szorzás egységeleme létezik
    - Szorzás asszociatív
  - A szorzás disztributív az összeadás felett
- Szorzás kommutatív

Kommutatív gyűrű

- Az egész számok, összeadás és szorzás gyűrűt alkotnak
  - Az egész számok és összeadás Abel-csoportot alkotnak
    - Összeadás egységeleme létezik
    - Összeadás inverz eleme létezik
    - Összeadás asszociatív
    - Összeadás kommutatív
  - Az egész számok és szorzás egységelemes félcsoportot alkotnak
    - Szorzás egységeleme létezik
    - Szorzás asszociatív
  - A szorzás disztributív az összeadás felett
- Szorzás kommutatív

Kommutatív gyűrű

- Az egész számok, összeadás és szorzás gyűrűt alkotnak
  - Az egész számok és összeadás Abel-csoportot alkotnak
    - Összeadás egységeleme létezik
    - Összeadás inverz eleme létezik
    - Összeadás asszociatív
    - Összeadás kommutatív
  - Az egész számok és szorzás egységelemes félcsoportot alkotnak
    - Szorzás egységeleme létezik
    - Szorzás asszociatív
  - A szorzás disztributív az összeadás felett
- Szorzás kommutatív

Kommutatív gyűrű

- Az egész számok, összeadás és szorzás gyűrűt alkotnak
  - Az egész számok és összeadás Abel-csoportot alkotnak
    - Összeadás egységeleme létezik
    - Összeadás inverz eleme létezik
    - Összeadás asszociatív
    - Összeadás kommutatív
  - Az egész számok és szorzás egységelemes félcsoportot alkotnak
    - Szorzás egységeleme létezik
    - Szorzás asszociatív
  - A szorzás disztributív az összeadás felett
- Szorzás kommutatív

Implementáció menete

- Egész számok definiálása

```
data ℤₕ : Set where
  zero : ℤₕ
  succ : ℤₕ → ℤₕ
  pred : ℤₕ → ℤₕ
  sec : (z : ℤₕ) → pred (succ z) ≡ z
  ret : (z : ℤₕ) → succ (pred z) ≡ z
  coh : (z : ℤₕ) → congS succ (sec z) ≡ ret (succ z)
```

- Izomorfizmus a normálforma definícióval
- Iterátor (+eliminátor) és induktív tulajdonság
- Műveletek definiálása
- Tulajdonságok formalizálása

Implementáció menete

- Egész számok definiálása
- Izomorfizmus a normálforma definícióval

```
ℤ-iso : Iso ℤ ℤₕ
ℤ-iso .Iso.fun       = ℤ→ℤₕ
ℤ-iso .Iso.inv       = ℤₕ→ℤ
ℤ-iso .Iso.rightInv = ℤₕ→ℤ→ℤₕ
ℤ-iso .Iso.leftInv  = ℤ→ℤₕ→ℤ
```

- Iterátor (+eliminátor) és induktív tulajdonság
- Műveletek definiálása
- Tulajdonságok formalizálása

Implementáció menete

- Egész számok definiálása
- Izomorfizmus a normálforma definícióval
- Iterátor (+eliminátor) és induktív tulajdonság
- Műveletek definiálása
- Tulajdonságok formalizálása

Implementáció menete

- Egész számok definiálása
- Izomorfizmus a normálforma definícióval
- Iterátor (+eliminátor) és induktív tulajdonság
- Műveletek definiálása
- Tulajdonságok formalizálása

Implementáció menete

- Egész számok definiálása
- Izomorfizmus a normálforma definícióval
- Iterátor (+eliminátor) és induktív tulajdonság
- Műveletek definiálása
- Tulajdonságok formalizálása

Ez miért új? Mi a haszna?

- Az egész számok tényleg kommutatív gyűrűt alkotnak
- Egyszerűbb bebizonyítani tulajdonságokat mint a normálforma definícióval
- Kézenfoghatóbb HIT definíció mint a Bi-Invertible egész számok
- Automatikus levezetés összeadást, negálást (kivonást) és szorzást használó egyenlőségekre
- Eddig csak elméleti síkon volt belátva koherencia szabállyal
- Eliminálhatunk magasabb univerzumba (típusok, Girard paradox, Russel paradox, System U)

Ez miért új? Mi a haszna?

- Az egész számok tényleg kommutatív gyűrűt alkotnak
- Egyszerűbb bebizonyítani tulajdonságokat mint a normálforma definícióval
- Kézenfoghatóbb HIT definíció mint a Bi-Invertible egész számok
- Automatikus levezetés összeadást, negálást (kivonást) és szorzást használó egyenlőségekre
- Eddig csak elméleti síkon volt belátva koherencia szabállyal
- Eliminálhatunk magasabb univerzumba (típusok, Girard paradox, Russel paradox, System U)

Ez miért új? Mi a haszna?

- Az egész számok tényleg kommutatív gyűrűt alkotnak
- Egyszerűbb bebizonyítani tulajdonságokat mint a normálforma definícióval
- Kézenfoghatóbb HIT definíció mint a Bi-Invertible egész számok
- Automatikus levezetés összeadást, negálást (kivonást) és szorzást használó egyenlőségekre
- Eddig csak elméleti síkon volt belátva koherencia szabállyal
- Eliminálhatunk magasabb univerzumba (típusok, Girard paradox, Russel paradox, System U)

Ez miért új? Mi a haszna?

- Az egész számok tényleg kommutatív gyűrűt alkotnak
- Egyszerűbb bebizonyítani tulajdonságokat mint a normálforma definícióval
- Kézenfoghatóbb HIT definíció mint a Bi-Invertible egész számok
- Automatikus levezetés összeadást, negálást (kivonást) és szorzást használó egyenlőségekre
- Eddig csak elméleti síkon volt belátva koherencia szabállyal
- Eliminálhatunk magasabb univerzumba (típusok, Girard paradox, Russel paradox, System U)

Ez miért új? Mi a haszna?

- Az egész számok tényleg kommutatív gyűrűt alkotnak
- Egyszerűbb bebizonyítani tulajdonságokat mint a normálforma definícióval
- Kézenfoghatóbb HIT definíció mint a Bi-Invertible egész számok
- Automatikus levezetés összeadást, negálást (kivonást) és szorzást használó egyenlőségekre
- Eddig csak elméleti síkon volt belátva koherencia szabállyal
- Eliminálhatunk magasabb univerzumba (típusok, Girard paradox, Russel paradox, System U)

Ez miért új? Mi a haszna?

- Az egész számok tényleg kommutatív gyűrűt alkotnak
- Egyszerűbb bebizonyítani tulajdonságokat mint a normálforma definícióval
- Kézenfoghatóbb HIT definíció mint a Bi-Invertible egész számok
- Automatikus levezetés összeadást, negálást (kivonást) és szorzást használó egyenlőségekre
- Eddig csak elméleti síkon volt belátva koherencia szabállyal
- Eliminálhatunk magasabb univerzumba (típusok, Girard paradox, Russel paradox, System U)

Köszönöm a figyelmet!