

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Российский университет дружбы народов имени  
Патриса Лумумбы»  
Инженерная академия  
Кафедра механики и процессов управления**

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА**

по дисциплине: «Механика космического полёта»

на тему: «Определение оскулирующих элементов орбиты искусственного  
спутника Земли»

Выполнил:

студент 2 курса, ИПМбд-01-23

Рябинин Владислав Денисович

Руководитель:

старший преподаватель, ведущий инженер

Морозова Татьяна Анатольевна

Лабораторная работа, 2025

## **Цель работы:**

Исследование влияния атмосферы и нецентральности гравитационного поля Земли на траекторию движения аппарата, перемещающегося по околокруговой орбите

## **Задачи:**

- 1) Изучить модель описания возмущенного движения спутника на орбите Земли, использующую метод оскулирующих элементов
- 2) Рассмотреть основные возмущающие факторы, возникающие на орбитах и исследовать модели, которые предлагаются для описания нецентральности гравитационного поля Земли и влияния атмосферы
- 3) Разработать программу на языке Python, которая бы численно интегрировала систему дифференциальных уравнений, задающих изменение оскулирующих элементов при возмущенном движении
- 4) Построить графики зависимостей элементов орбиты от аргумента широты в задачах возмущенного и невозмущенного движения
- 5) Проанализировать полученные результаты и выявить периодические и вековые составляющие возмущений
- 6) Составить таблицу значений, в которой будут содержаться результаты интегрирования системы дифференциальных уравнений

### **Актуальность:**

В настоящее время вокруг Земли вращаются тысячи искусственных спутников, выполняющих разнообразные функции, от связи и навигации до научных исследований и наблюдения Земли. Точное определение и прогнозирование их орбит критически важно для:

- предотвращения столкновений спутников с космическим мусором и другими аппаратами, особенно в условиях возрастающей загруженности околоземного пространства
- обеспечения качественной связи, точного позиционирования и своевременного получения данных
- стыковок, коррекций орбит, спуска аппаратов на Землю и т.д.

Оскулирующие элементы орбиты представляют собой удобный способ описания и прогнозирования движения спутника, учитывая возмущения, вызванные гравитацией Земли (неидеальность формы планеты), притяжением Луны и Солнца, атмосферным торможением и другими факторами

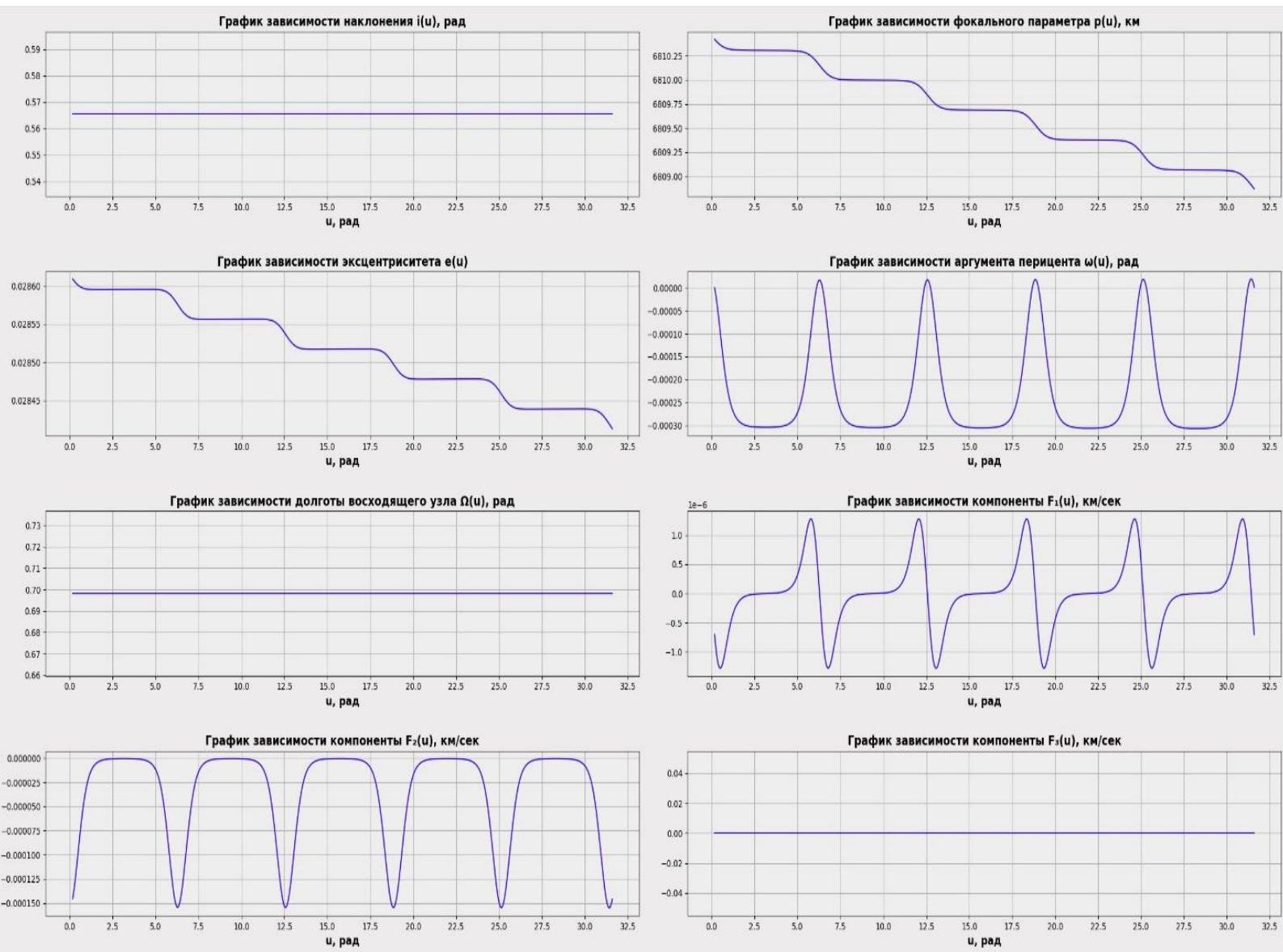
*Исходными данными являются:*

- 1) Высота апоцентра:  $h_a = 640$  километров
- 2) Высота перицентра:  $h_p = 250$  километров
- 3) Наклонение орбиты:  $i = 32.4^\circ$
- 4) Долгота восходящего узла:  $\Omega = 40^\circ$
- 5) Аргумент широты:  $u = 10^\circ$
- 6) Площадь искусственного спутника Земли:  $S_a = 12 \text{ м}^2$
- 7) Масса искусственного спутника Земли:  $m = 1200 \text{ кг}$
- 8) Баллистический коэффициент спутника:  $c_{ха} = 3.5$

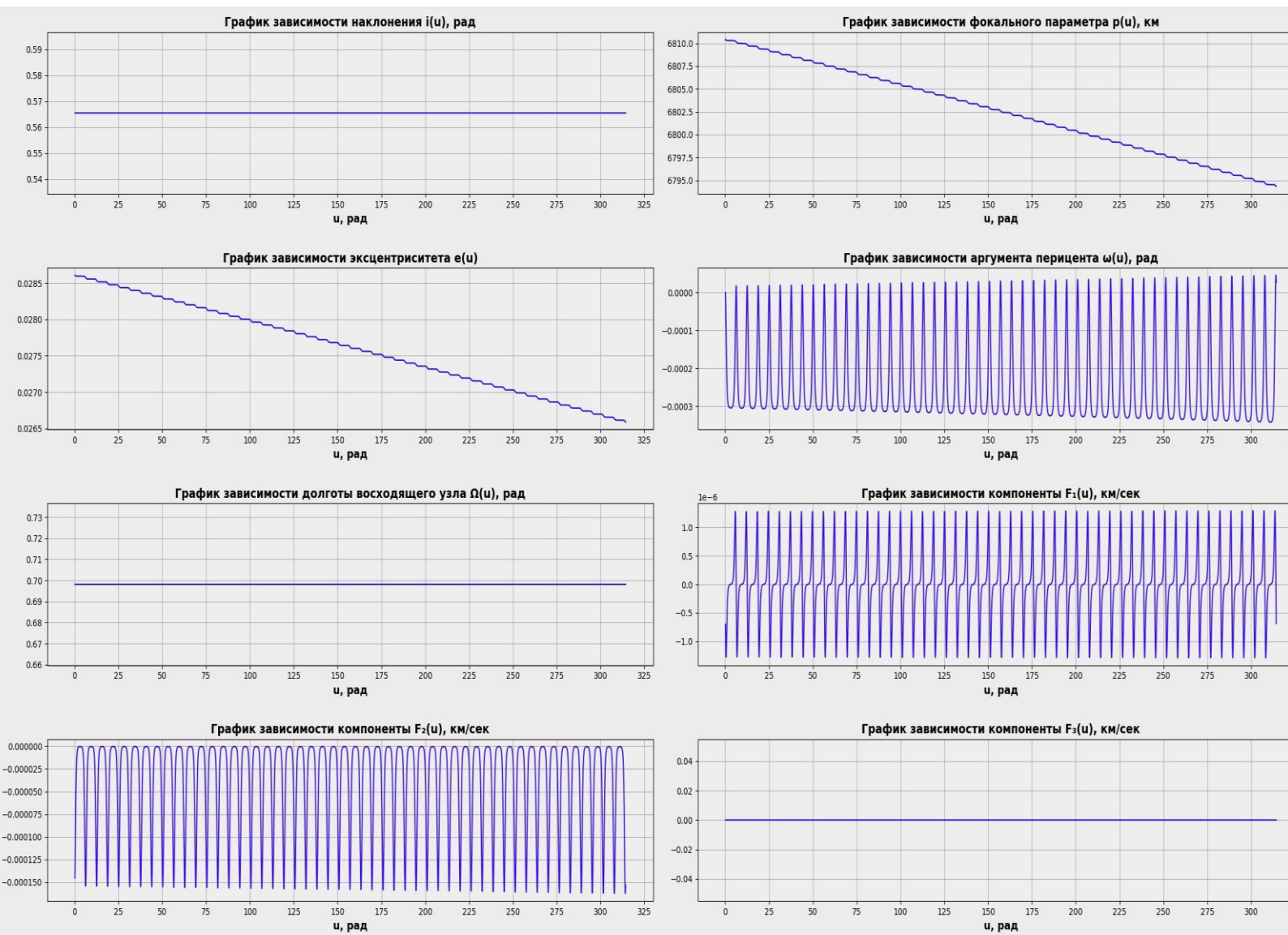
*Предварительные замечания:*

- при моделировании плотности атмосферы был выбран максимальный уровень солнечной активности
- в начальный момент время  $t_0 = 0$ , т. е. гринвичский меридиан совпадает с направлением на точку весеннего равноденствия
- изначально  $\omega = 0$  (это допустимо сделать, потому что орбита околокруговая и её перицентр не сильно выделяется на ней)
- для более удобного анализа и доступа таблицы с результат были помещены в файл *data.xlsx*
- для более четкого понимания эволюции оскулирующих элементов были построены графики для различных отрезков изменения аргумента широты, а также для полного ускорения и времени

# Анализ графиков (атмосферное возмущение)



графики зависимостей для  $u$  из  $[u_0, u_0 + 10\pi]$ ,  $t$  изменяется в  $[0, 27996.387]$  сек.



графики зависимостей для  $u$  из  $[u_0, u_0 + 100\pi]$ ,  $t$  изменяется в  $[0, 279501.70353]$  сек.

График зависимости наклона  $i(u)$ , рад

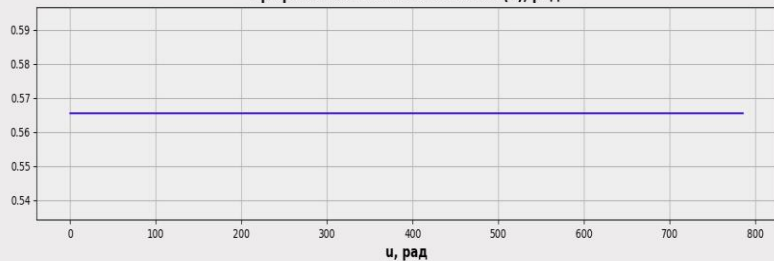


График зависимости фокального параметра  $p(u)$ , км



График зависимости эксцентриситета  $e(u)$



График зависимости аргумента перигея  $\omega(u)$ , рад

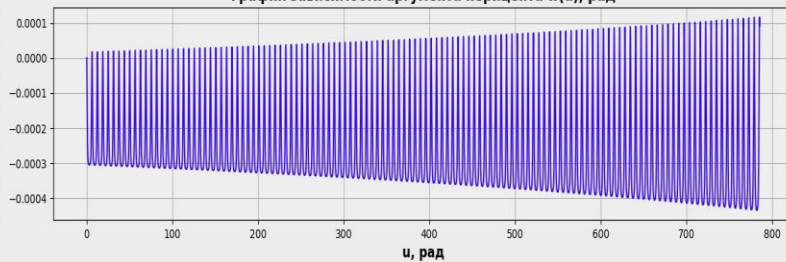


График зависимости долготы восходящего узла  $\Omega(u)$ , рад

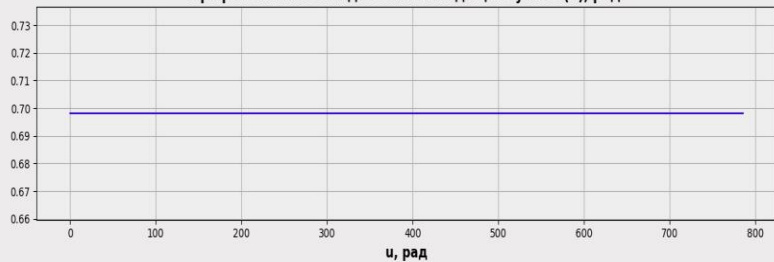


График зависимости компоненты  $F_1(u)$ , км/сек

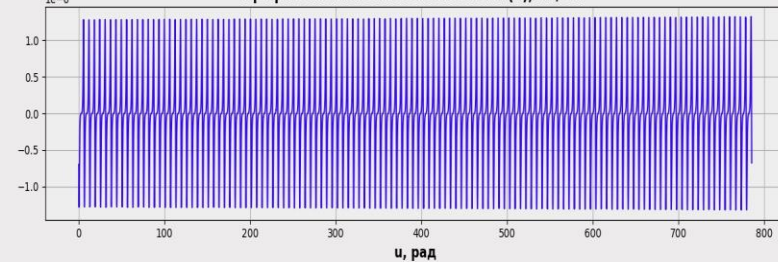


График зависимости компоненты  $F_2(u)$ , км/сек

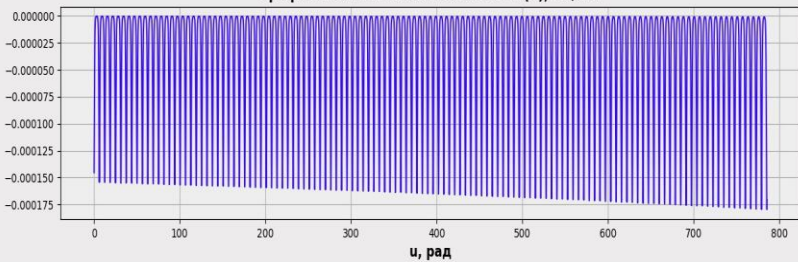
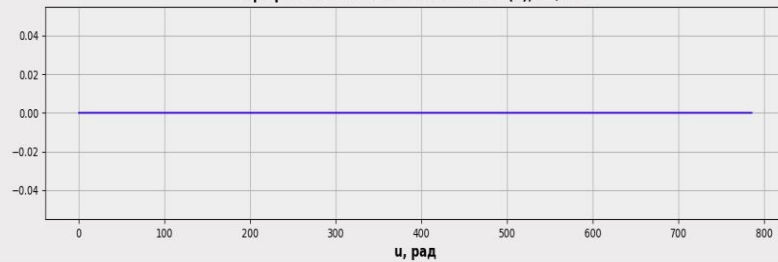
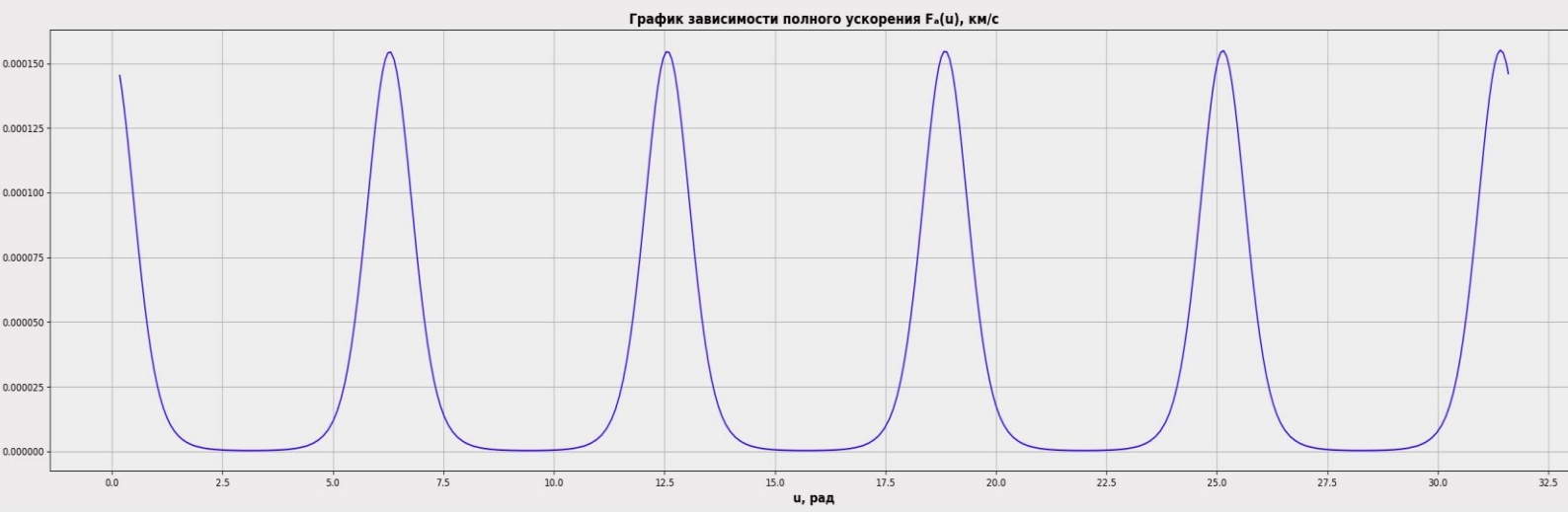
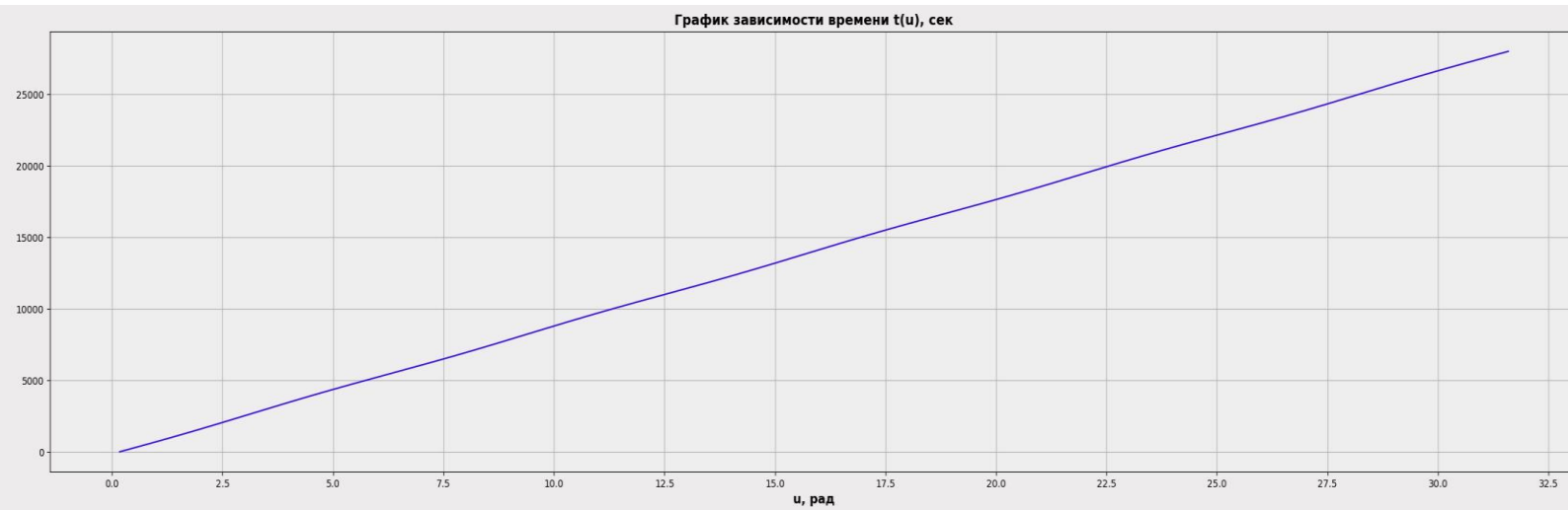


График зависимости компоненты  $F_3(u)$ , км/сек

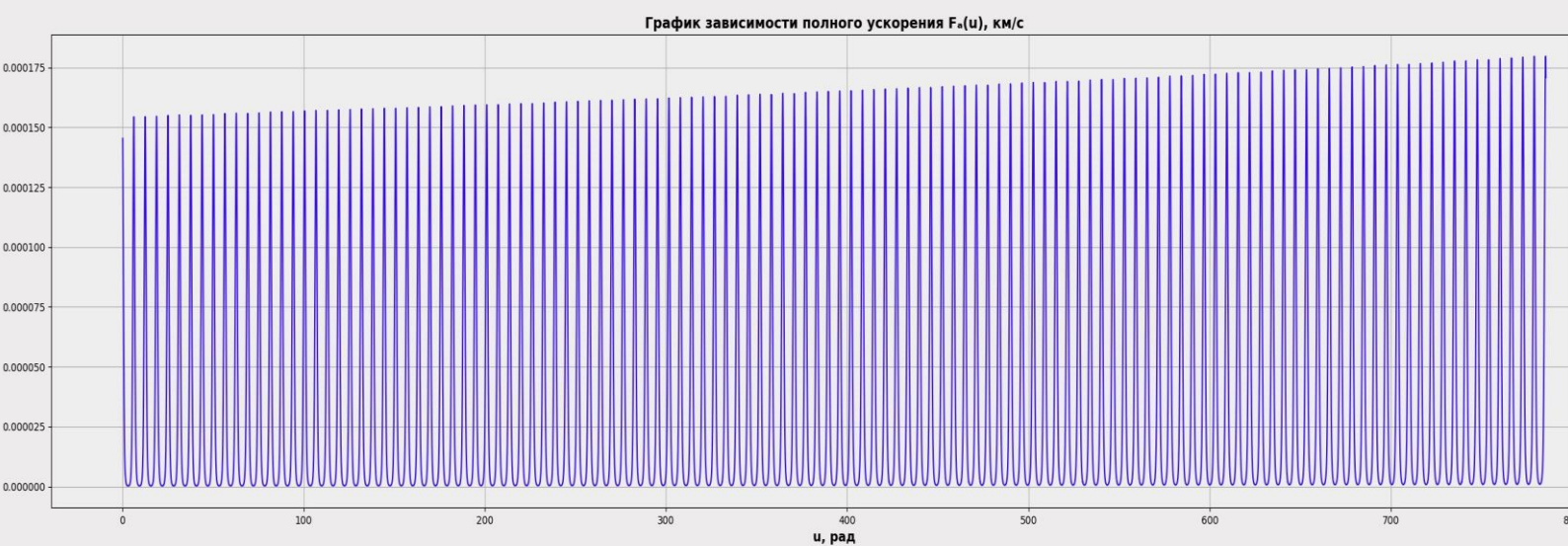
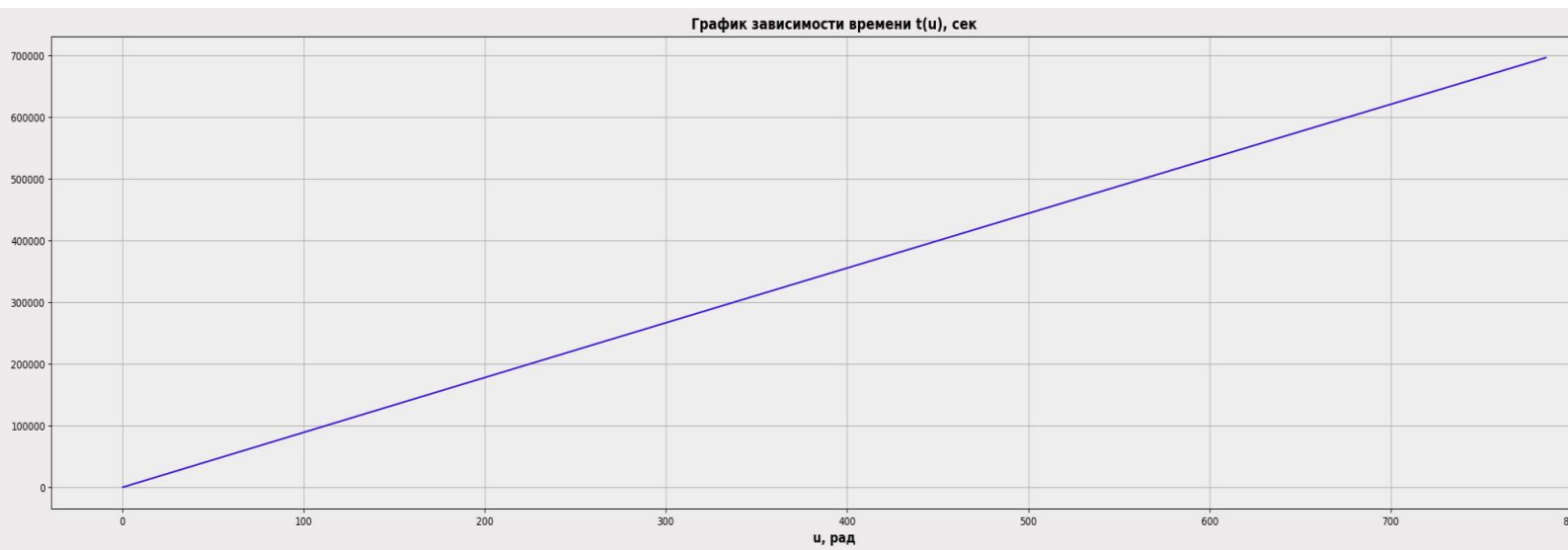


графики зависимостей для  $u$  из  $[u_0, u_0 + 250\pi]$ ,  $t$  изменяется в  $[0, 696686.209]$  сек.



графики зависимостей для  $u$  из  $[u_0, u_0 + 10\pi]$





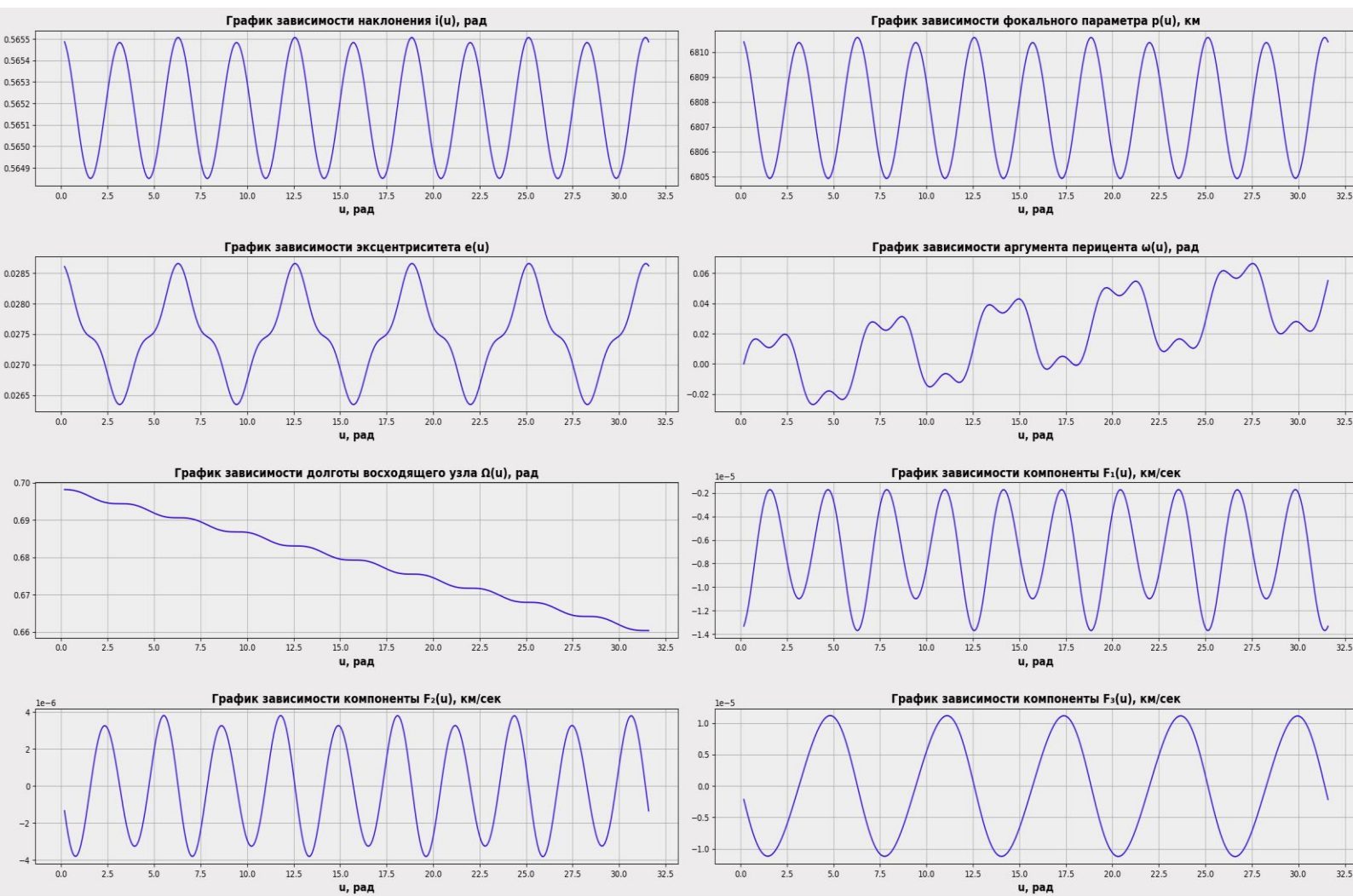
графики зависимостей для  $u$  из  $[u_0, u_0 + 250\pi]$

- Из графиков зависимостей видно, что *ориентация плоскости в пространстве не меняется при атмосферном возмущении*. Это следует из того, что  $i = \text{const}$ ,  $\Omega = \text{const}$ . Если внимательно посмотреть на дифференциальные уравнения, которые задают  $d\mathbf{i}/du$  и  $d\Omega/du$ , то можно заметить, что они зависят только от  $F_3$ , которая для атмосферного возмущения  $= 0$ . Однако стоит понимать, что такое допущение для  $F_3$  можно принять только в том случае, если считать, что атмосфера движется с Земле с одной скоростью (в реальности это не совсем так, небольшая разница всё-таки есть)
- Эксцентриситет и фокальный параметр испытывают вековые и периодические возмущения, поскольку на протяжении всего времени пребывания спутника на орбите они убывают. Из этого следует, что орбита стремится к круговой ( $e = 0$  для круговой орбиты). О наличии периодических возмущений свидетельствует то, что основные изменения этих параметров происходят вблизи перицентра (на  $0.015$  за  $0.06$  радиан), на протяжении остального времени полёта спутника они практически не изменяются (на  $0.001$  за  $0.11$  радиан). То есть изменение происходит в одном месте, при  $u$  близком к  $2\pi k$ . Из первого графика также видно, что  $de/du$  и  $dp/du$  практически равны нулю на протяжении всего периода, но при приближении аргумента широты к значению, кратному  $2\pi$  обе производные начинают *резко убывать*, а как только спутник проходит  $2\pi$  *резко возрастают*. Это также свидетельствует о поведении  $d^2e/du^2$  и  $d^2p/du^2$ . В точке  $u = 2\pi k$  они имеют экстремумы (минимумы), на остальном отрезке  $u$  они близки к нулю
- Аргумент перицентра испытывает только периодические возмущения, поскольку он постоянно меняется в окрестности  $-0.0002$  радиан (в среднем). Причем из третьего графика видно, что период этих колебаний не изменяется, а вот *амплитуда увеличивается со временем*. Максимального значения аргумент перицентра достигает при  $u = 2\pi k$ , а минимального при  $u = \pi k$ . При этом в этих точках  $d\omega/du = 0$ , а функция  $\omega(u)$  имеет максимум и минимум соответственно. На отрезках  $(\pi k; 2\pi k)$   $d\omega/du > 0$ , а на  $(2\pi k; \pi k)$   $d\omega/du < 0$

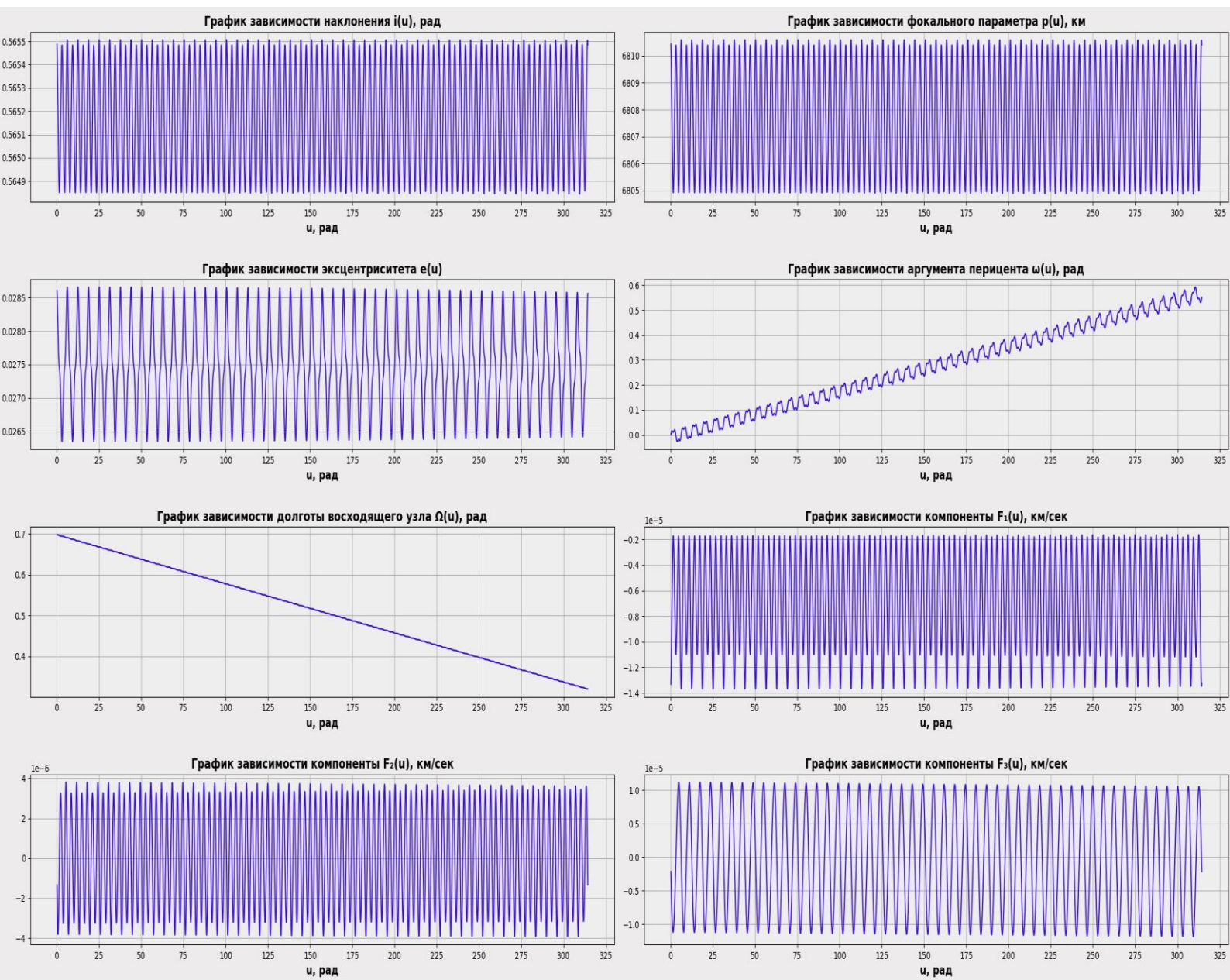
- Компонента  $F_1$  возмущающего ускорения изменяется периодически (амплитуда колебаний и период не изменяются), максимума ( $1.28184E-06$  км/с) она достигает при  $u = 11\pi k/6$ , минимума ( $-1.27995E-06$ ) при  $u = \pi k/6$ . В этих точках функция имеет экстремумы, причем  $dF_1/du > 0$  при  $u$  изменяющемся в  $(\pi k/6, 11\pi k/6)$ , а при  $u$  изменяющемся в  $(11\pi k/6, \pi k/6)$   $dF_1/du < 0$ . Основные изменения этой компоненты ускорения происходят в промежутке  $u \in [5\pi k/3, \pi k/3]$ , когда же аргумент широты удаляется от этой точки ближе к значению апоцентра, значения компоненты меняются очень медленно. В самом апоцентре (при  $u = \pi$ ) значения крайне близки к нулю. Таким образом, можно заключить, что при приближении  $u$  к  $2\pi k$  и при отдалении  $u$  от этого значения радиальная составляющая ускорения оказывать наибольшее влияние на движение спутника и оскулирующие элементы
- Компонента  $F_2$  изменяется также периодически, но при этом из третьего графика видно, что *с течением времени амплитуда возрастает*, т. е. с увеличением времени трансверсальная составляющая ускорения начинает сильнее действовать на ИСЗ. Из первого графика видно, что при  $u$  близком к  $\pi k$ , компонента близка к нулю и практически не изменяется. Она достигает минимума в точках  $2\pi k$  (то есть влияет на спутник сильнее всего), а при  $u \in [11\pi k/6, \pi k/6]$  изменяется сильнее всего. Производная  $dF_1/du > 0$ , когда  $u$  изменяется в первой и второй четверти,  $< 0$  в третьей и четвертой. Из сказанного следует, что эта компонента ускорения оказывает максимальное влияние на спутник при  $u \in [11\pi k/6, \pi k/6]$
- График зависимости  $t(u)$  был построен для того, чтобы убедиться в правильности интегрирования уравнений (например, если бы  $t$  уменьшался на каком-то интервале, то это бы говорило о грубой ошибке). Однако его графика видно, что он увеличивается с увеличением  $u$ , и практически линейно зависит от  $u$  (это связано с тем, что у орбиты маленький эксцентриситет  $\sim 0.002$ )

- График полной зависимости  $F_a(u)$  нужен, чтобы подвести итоги для атмосферного возмущения. Оно имеет периодический характер с увеличивающейся амплитудой и постоянным  $T$ . Максимальное воздействие оно оказывает, когда спутник приближается и отдаляется от перицентра ( $u=2\pi k$ ), и практически не оказывает влияния при  $u = \pi k$ . Это объясняется тем, что в точке перицентра ИСЗ находится максимально низко (т. е. близко к центру масс Земли), поэтому слои атмосферы вблизи этой точки оказывают наибольшее влияние и мешают движению спутника

# Анализ графиков (нецентральность гравитационного поля)

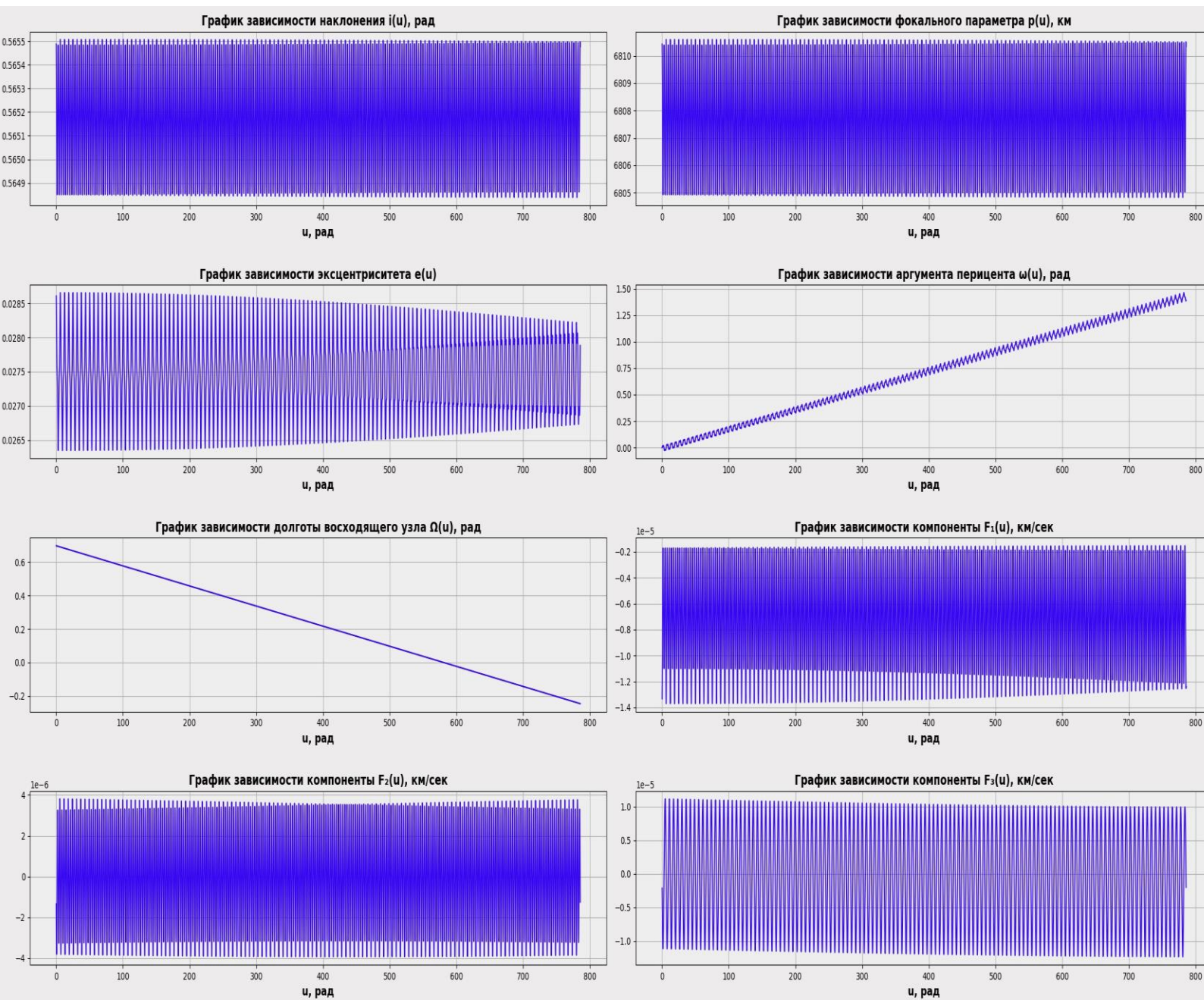


графики зависимостей для  $u$  из  $[u_0, u_0 + 10\pi]$ ,  $t$  изменяется в  $[0, 27910.5513]$  сек

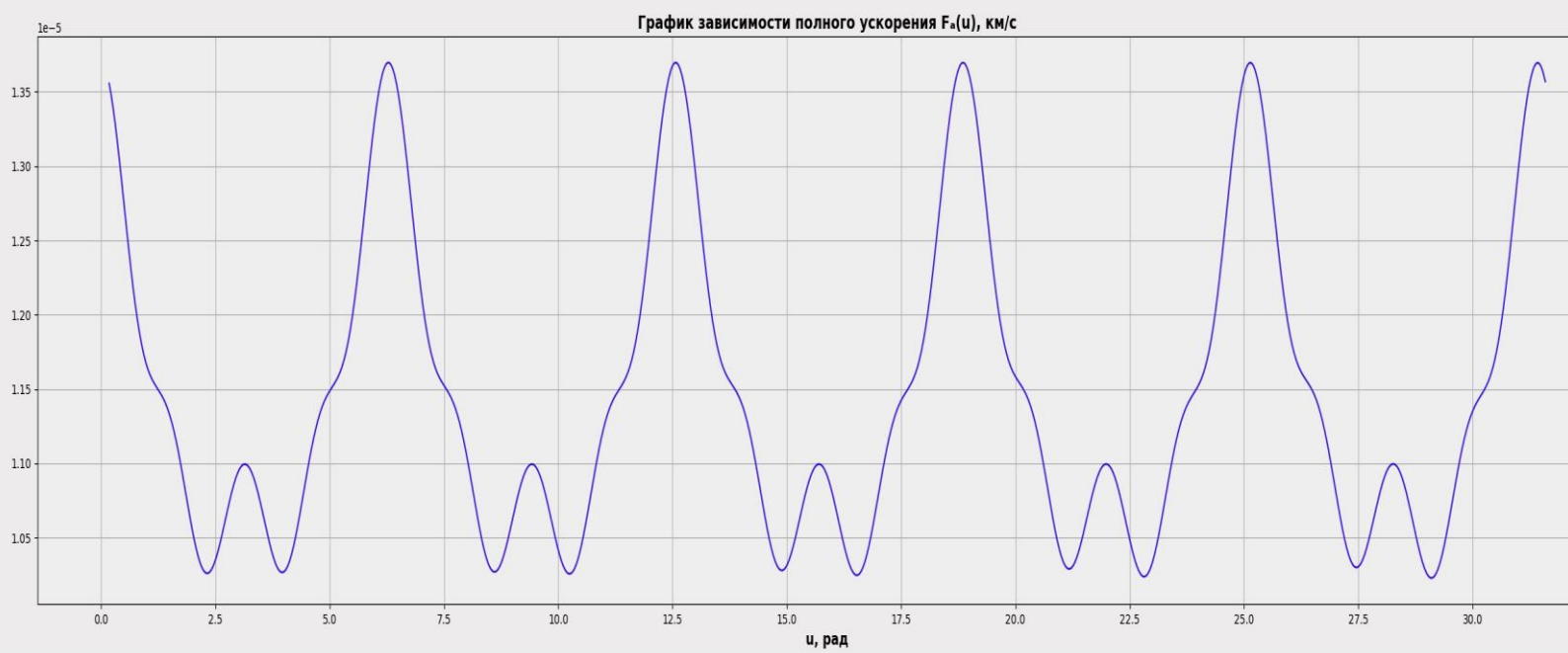
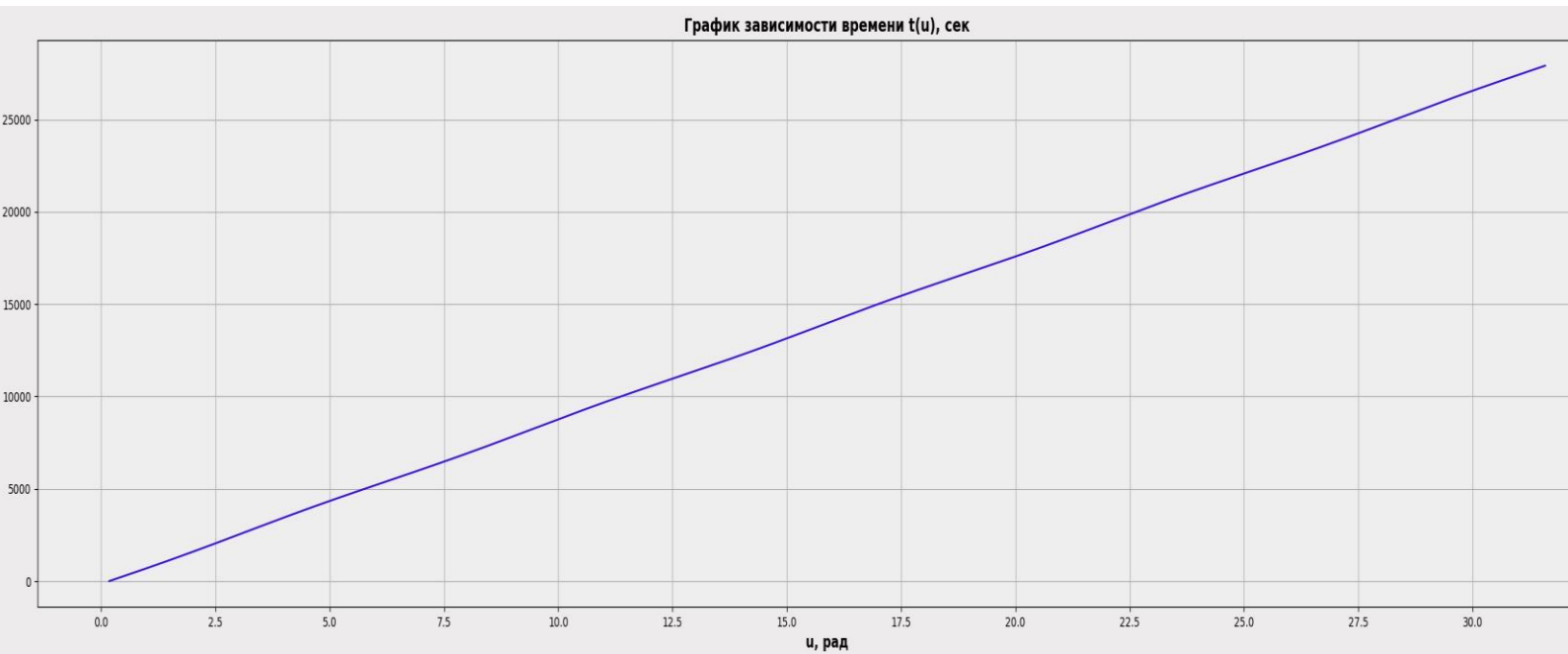


графики зависимостей для  $u$  из  $[u_0, u_0 + 100\pi]$ ,  $t$  изменяется в  $[0, 279105.3355]$  сек



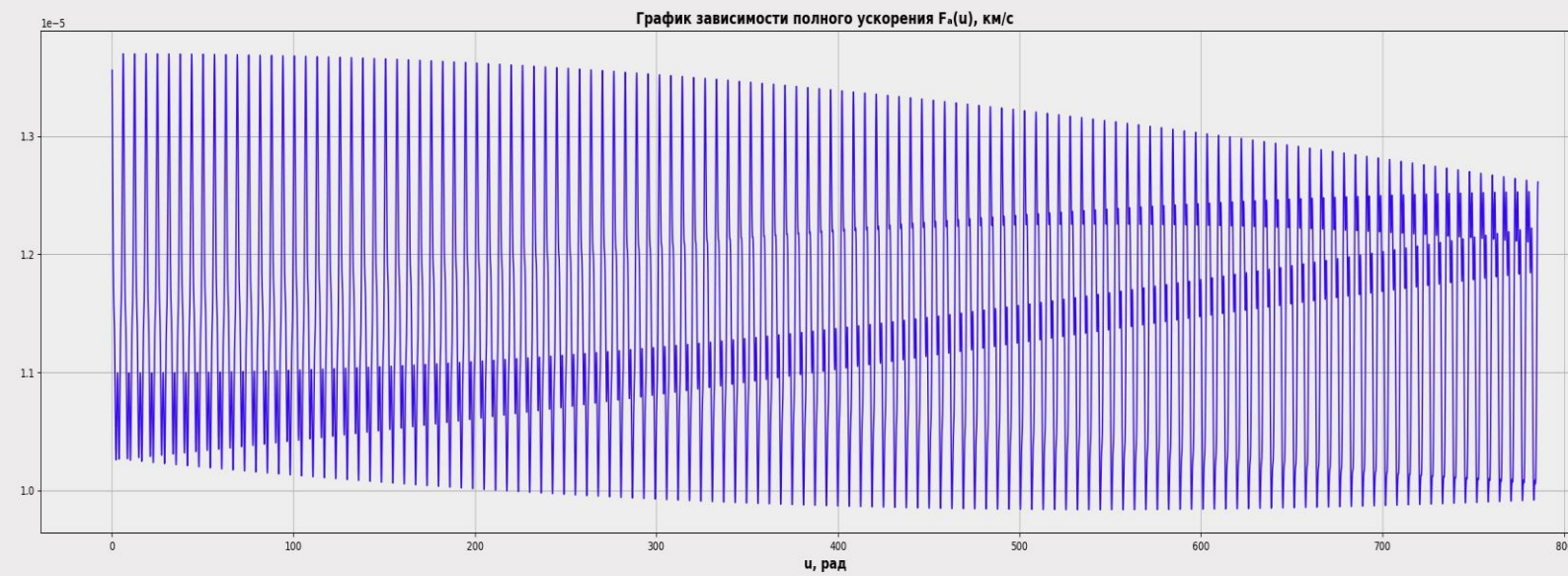
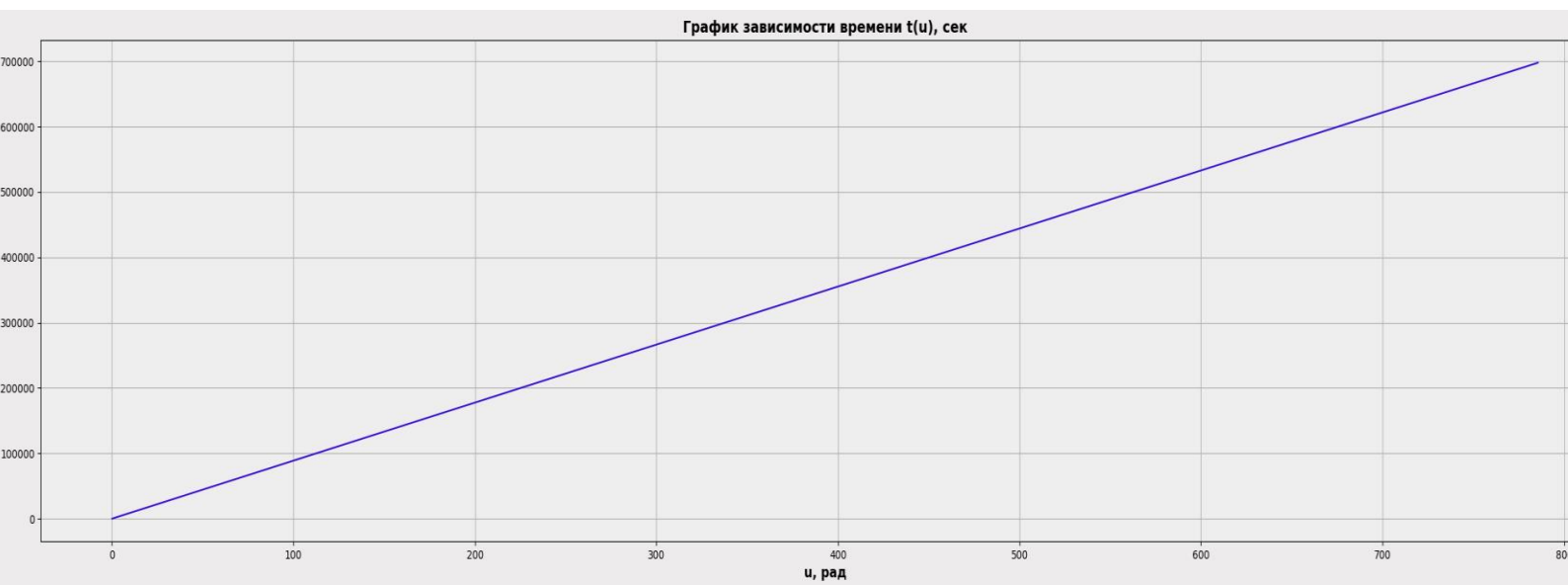


графики зависимостей для  $u$  из  $[u_0, u_0 + 250\pi]$ ,  $t$  изменяется в  $[0, 697750.6579]$  сек



графики зависимостей для  $u$  из  $[u_0, u_0+10\pi]$





графики зависимостей для  $u$  из  $[u_0, u_0 + 250\pi]$

- В соответствии с первым графиком функции, наклонение  $i(u)$  испытывает только периодические возмущения, причем видно, что амплитуда принимает два различных значения (период при этом не изменяется). Максимального значения ( $i_{\max 1} = 0.565506644$  рад) наклонение орбиты достигает при  $u = 2\pi k$ , второго по величине значения ( $i_{\max 2} = 0.565483015$  рад) при  $u = \pi k$ . Минимальных значений наклонения также два, при  $u = 3\pi k/2$  ( $i_{\min 1} = 0.564850729$ ) значение всегда будет меньше, чем при  $u = \pi k/2$  ( $i_{\min 2} = 0.564850749$  рад). Из третьего графика отчётливо видно, что при увеличении  $u$  второе максимальное значение стремится к первому, а второе минимальное наоборот уменьшается.  $di/du > 0$  при  $u \in (\pi k/2, \pi k)$  и при  $u \in (3\pi k/2, 2\pi k)$ , на остальных отрезках производная отрицательна. Из этого можно заключить, что плоскость орбиты колеблется относительно экватора, но при этом нет возмущений, которые бы заставили её отклониться к другим, сильно отличным от начального, положениям
- Совершенно аналогичная картина наблюдается и с фокальным параметром  $p(u)$ . Минимальное значение он принимает с теми же значениями для  $u = 3\pi k/2$  ( $p_{\min 1} = 6804.930119$  км) и  $u = \pi k/2$  ( $p_{\min 2} = 6804.930293$  км), как и максимальные ( $p_{\max 1} = 6810.389552$  км, и  $p_{\max 2} = 6810.593366$  км). Аналогичная картина наблюдается с производными и эволюцией наибольших и наименьших значений. Итак, мы получаем, что фокальный параметр орбиты изменяется, но при этом нет возмущений, которые бы смогли кардинально отклонить его от своих начальных значений. В точках перицентра и апоцентра ( $u = 2\pi k; \pi k$ ) он принимает максимальное значение, то есть орбита становится более скругленной, а в точках  $u = \pi k/2; 3\pi k/2$  приближается к эллипсу
- Эксцентриситет орбиты подвержен периодическим колебаниям, для которых период не изменяется с течением времени, а вот амплитуда (как видно из третьего графика) стремительно уменьшается. Минимальные значения эксцентриситет принимает при  $u = \pi k$ , то есть в этих точках орбита наиболее приближена к окружности. Максимальные же значения

эксцентриситет принимает при  $u = 2\pi k$ . На отрезке  $u \in (\pi k, 2\pi k)$   $de/du > 0$ , а при  $u \in (2\pi k, \pi k)$   $de/du < 0$ . Таким образом мы получаем, что чем больше времени спутник проводит на орбите, тем ближе она будет к круговой, это объясняется тем, что периодические колебания эксцентриситет имеют затухающий характер

- Аргумент перицентра испытывает как периодические, так и вековые возмущения. Вековое возмущение отчётливо видно на третьем графике, а периодические из первых двух. График зависимости содержит несколько локальных максимумов ( $u = 3\pi k/2$ ,  $u = 4\pi k/15$ ,  $u = \sim 23\pi k/30$ ) и минимумов ( $u = 5\pi k/2$ ,  $u = \sim 29\pi k/30$ ), причем наибольшее значение (в рамках одного периода) принимается в  $u = \sim 29\pi k/30$ , а наименьшее в  $u = 3\pi k/2$ . Таким образом мы получаем, аргумент перицентра орбиты ИСЗ будет постоянно увеличиваться, т. е. перемещаться по орбите
- Долгота восходящего узла подвержена действию как вековых, так и периодических возмущений (в этом можно убедиться при рассмотрении первого и третьего графиков). Период колебаний долготы равняется  $\pi$ , в отличии от ранее рассмотренных оскулирующих элементов (для всех их он равен  $2\pi$ ). Локальный максимум функция  $\Omega(u)$  достигает в точке  $u = \sim 248.5\pi k/180$ . Таким образом мы получаем, что на протяжении всего времени пребывания ИСЗ на орбите, долгота восходящего узла будет убывать, то есть линия узлов будет постоянно перемещаться относительно  $O_x$  АГЭСК
- Первая компонента ускорения изменяется периодически, период колебаний составляет  $2\pi$ , из третьего графика видно, что *минимальные значения увеличиваются с течением времени, а одно из максимальных уменьшается*. График зависимости функции  $F_1(u)$  достигает на отрезке  $[0; 2\pi]$  глобального минимума ( $-0.000013696445$  км/с<sup>2</sup>) при  $u = 2\pi k$  и локального ( $-0.00001099542$  км/с<sup>2</sup>) при  $u = \pi k$ . А максимумов ( $-1.7262771E-06$  км/с<sup>2</sup> и  $-1.72448859E-06$ ) достигает при  $u = 3\pi k/2$  и при  $u = \pi k/2$ , причём при  $u = 3\pi k/2$  максимум сохраняется с течением времени, а при  $u = \pi k/2$  максимальное значение уменьшается. Таким образом получаем, что в перицентре и

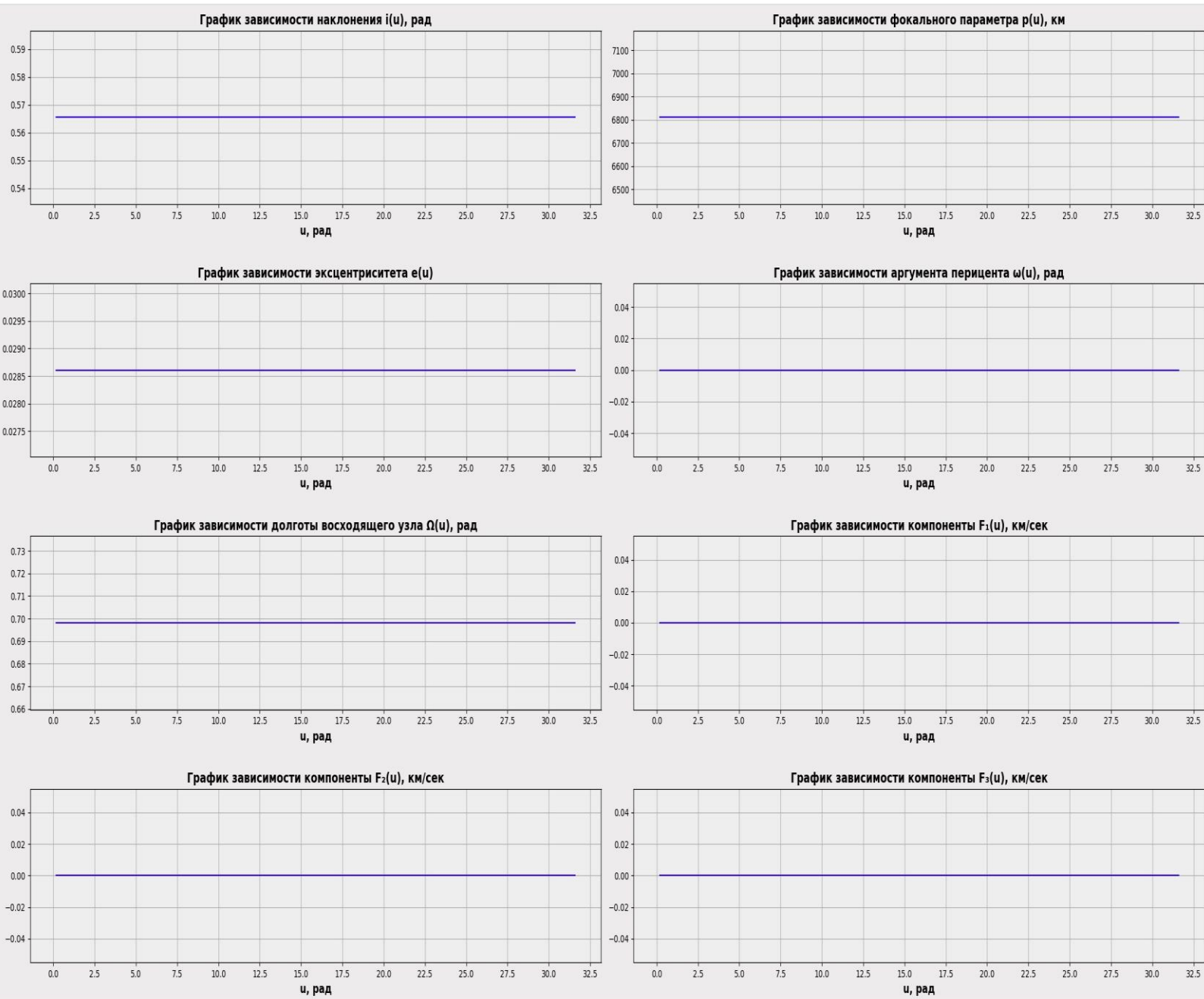
апоцентре спутник больше всего подвержен радиальному нецентральному возмущению, а в точках  $u = \pi k/2$  и  $u = 3\pi k/2$  меньше всего

- Функция  $F_2(u)$  изменяется также периодически с периодом  $2\pi$ . На отрезке  $2\pi$  функция достигает двух минимумов, одного локального (при  $u = 5\pi k/4$ ,  $F_2 = -3.2625659700E-06$  км/с<sup>2</sup>) и одного глобального (при  $u = \pi k/4$ ,  $F_2 = -3.8119938410E-06$  км/с<sup>2</sup>). Аналогичная ситуация наблюдается и с максимумами при  $u = 3\pi k/4$  достигается локальный максимум  $F_2 = 3.26032890440421E-06$  км/с<sup>2</sup>, а при  $u = 7\pi k/4$  глобальный  $F_2 = 3.80963691271548E-06$  км/с<sup>2</sup>. Интересная эволюция этих экстремальных значений наблюдается на третьем графике, а именно на большом промежутке времени максимальные значения ближе к середине отрезка становятся равными примерно одному значению, а вот минимальные наоборот принимают наибольшую разницу между собой, однако к концу отрезка всё возвращается к начальным значениям, то есть мы также наблюдаем колебания максимальных и минимальных значений функции  $F_2(u)$ . Из всего вышесказанного следует, что наибольшее влияние на космический аппарат трансверсальная составляющая ускорения оказывает во всех 4 точках экстремума функции

- Последняя, нормальная составляющая ускорения также изменяется периодически с  $T = 2\pi$ , причем амплитуда экстремальных значений уменьшается, минимальные становятся меньше, также как и максимальные. На отрезке  $[0, 2\pi]$ , функция достигает одного минимума ( $F_3 = -0.000011178857$  км/с<sup>2</sup>) при  $u = 7\pi k/15$  и одного максимума ( $F_3 = 1.11874E-05$  км/с<sup>2</sup>) при  $u = 23\pi k/15$ . Таким образом можно заключить, что наибольшее влияние на нормальную составляющую ускорения, а также на изменение оскулирующих элементов, отвечающих за изменение ориентации орбиты в пространстве, нецентральность оказывать в точках максимума и минимума, указанных выше и с течением времени стремится к большему влиянию в точках минимума

- График зависимости  $t(u)$  вновь был построен для того, чтобы убедиться, что интегрирование происходит корректно, что видно из первого и второго графиков для этой функции
- Рассмотрим полное ускорение и как оно изменяется в зависимости от  $u$ .  $F_a(u)$  является периодической с периодом  $T = 2\pi$ , из второго графика видно, что максимальные значения с течением времени уменьшаются, а минимальные описывают некоторую кривую, которую можно хорошо аппроксимировать параболой с большим коэффициентом  $a$  при  $x^2$ . На отрезке  $[0; 2\pi]$  функция достигает глобального максимума ( $F_a = 0.0000136971358334463 \text{ км/с}^2$ ) в точке  $u = 2\pi$ , а также локального максимума ( $F_a = 0.0000109952325663211 \text{ км/с}^2$ ) в точке  $u = \pi$ . У функции два минимума, один из которых локальный (при  $u = \sim 133\pi k/180$ ) и с течением времени увеличивает своё значение, а второй – глобальный и с течением времени он принимает ещё более маленькие значения (при  $u = 23\pi k/15$ ), однако не на всём интервале, ближе к концу значения снова начинают увеличиваться. Таким образом, можно заключить, что наибольшее влияние нецентральность гравитационного поля Земли оказывает на ИСЗ в перигеуме и апогеуме, причём в перигеуме много больше. С течением времени влияние в перигеуме уменьшается, но вырастает в точке  $u = \sim 133\pi k/180$  и апогеуме

После исследования графиков зависимостей оскулирующих элементов от возмущений в программе были выставлены значения  $F_1 = F_2 = F_3 = 0$ . То есть задача свелась к невозмущенному движению, однако она решалась по тем же формулам и тем же способом, что использовались при решении задачи возмущенного движения. Получившиеся графики выглядят следующим образом:



графики зависимостей для  $u$  из  $[u_0, u_0 + 10\pi]$

То есть мы получили тривиальное решение системы дифференциальных уравнений, для которого все функции тождественно равны нулю. Из этого можно сделать вывод, что задача невозмущенного движения является частным случаем более общей задачи, а именно системы дифференциальных уравнений для возмущенного движения. Результаты, которые были получены соответствуют действительности, поскольку в задаче двух тел элементы орбиты не изменяются и ИСЗ движется по фиксированной в пространстве траектории

## Заключение

В результате выполнения данной лабораторной работы были достигнуты поставленные цели и задачи. Была изучена модель описания возмущенного движения искусственного спутника Земли на основе метода оскулирующих элементов, рассмотрены основные возмущающие факторы, такие как атмосферное сопротивление и нецентральность гравитационного поля Земли, а также соответствующие модели для их описания.

Разработанная программа на языке Python успешно выполнила численное интегрирование системы дифференциальных уравнений, описывающих изменение оскулирующих элементов под действием возмущений. Полученные графики зависимостей элементов орбиты от аргумента широты позволили провести детальный анализ влияния каждого из возмущающих факторов по отдельности.

Анализ графиков позволил выявить характерные особенности влияния атмосферного сопротивления и нецентральности гравитационного поля на орбиту ИСЗ. В частности, было установлено, что:

- Атмосферное сопротивление приводит к вековому уменьшению эксцентриситета и фокального параметра, что свидетельствует о тенденции орбиты к скруглению и снижению высоты. Ориентация плоскости орбиты в пространстве при этом не изменяется
- Нецентральность гравитационного поля вызывает периодические колебания наклона, фокального параметра и эксцентриситета, а также вековые изменения аргумента перицентра и долготы восходящего узла. Эти эффекты обусловлены несимметричным распределением массы в теле Земли.

Проведенное моделирование и анализ позволили получить представление о сложном характере возмущенного движения ИСЗ

Кроме того, в работе было показано, что задача невозмущенного движения является частным случаем общей задачи возмущенного движения, что подтверждается совпадением полученных результатов для невозмущенной задачи с теоретическими ожиданиями