Лабораторная работа

Кербер Егор

3 мая 2022 г.

Содержание

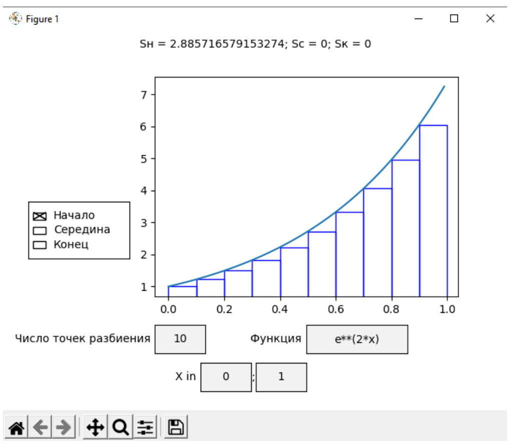
Цели

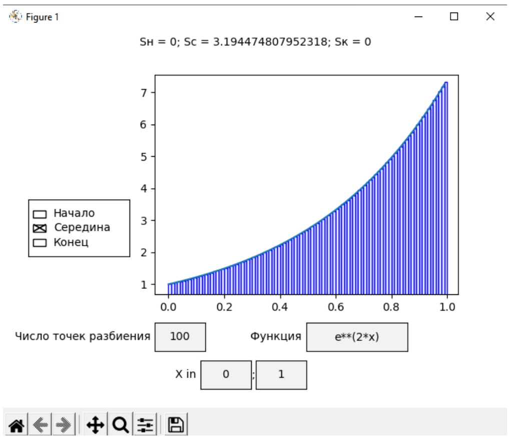
1. Доказать существование интеграла
2. Сделать программу, рисующую и вычисляющую интегральные суммы
3. Расчитать погрешность

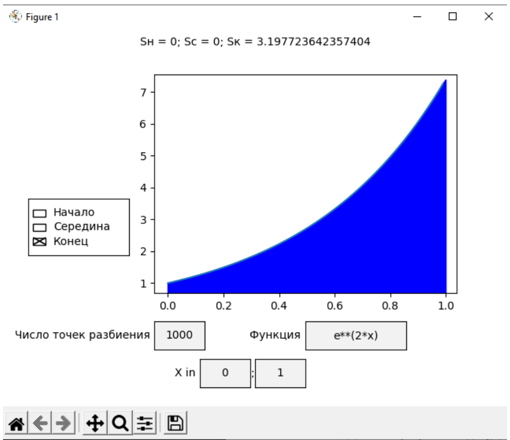
1 Ход работы

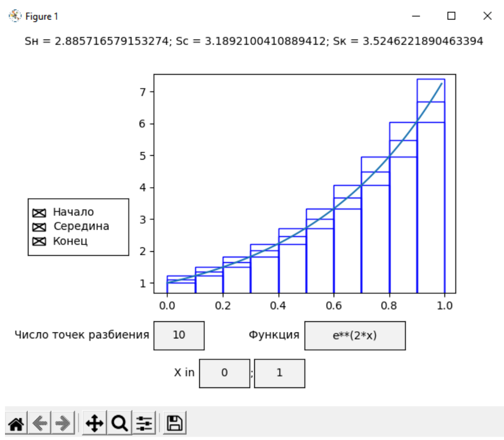
1.1 Программа

https://github.com/Zombie1995/MathIntegralLaba









1.2 Доказательство существования интеграла

$$f = e^{2x},\ x \in [0,1] \tag{1}$$

$$\begin{gathered} x_k = \frac{k}{n},\ k \in N \\ \overline{S} = \sum_{k=1}^{n} e^{2\frac{k}{n}} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} e^{2\frac{1}{n}} \frac{1-e^2}{1-e^{\frac{2}{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{n} \frac{1-e^2}{-\frac{2}{n}} = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \end{gathered} \tag{2}$$

$$x_k = \frac{k-1}{n},\ k \in N$$
$$\underline{S} = \sum_{k=1}^{n} e^{2\frac{k-1}{n}} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \frac{1-e^2}{1-e^{\frac{2}{n}}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{n} \frac{1-e^2}{-\frac{2}{n}} = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \tag{3}$$

$$|\overline{S} - \underline{S}| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \implies \exists \int_0^1 f dx \tag{4}$$

$$\int_0^1 e^{2x} dx = \left.\frac{e^{2x}}{2}\right|_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \tag{5}$$

1.3 Погрешность

$$R_n = 2e^{2\xi}(x - x_i)^2,$$
$n = 1$ - степень разложения,
k - число точек разбиения

$$\int_0^1 e^{2x} dx = \sum_{i=1}^{k-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{2x} dx =$$
$$\sum_{i=1}^{k-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (e^{2x_i} + 2e^{2x_i}(x - x_i) + 2e^{2\xi}(x - x_i)^2) dx =$$
$$\sum_{i=1}^{k-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{2x_i} dx + \sum_{i=1}^{k-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (2e^{2x_i}(x - x_i) + 2e^{2\xi}(x - x_i)^2) = \underline{S} + R \tag{6}$$
$$R = I - \underline{S} = \sum_{i=1}^{k-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (2e^{2x_i}(x - x_i) + 2e^{2\xi}(x - x_i)^2)$$

Для $\overline{S}$:

$$R = \sum_{i=1}^{k-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (2e^{2x_{i+1}}(x - x_{i+1}) + 2e^{2\xi}(x - x_{i+1})^2) \tag{7}$$

Для больших n можно отбросить R_n и тогда погрешность будет выражена в более явном виде (возможно).

2 Вывод

Интегральные суммы можно использовать для приближенного вычисления интеграла.
(Вспомнил Тейлора, хороший был мужик. Интегральные суммы вообще прикольные.)