Условия:

$f(x, y) = \arctan(x + y)$

$G = [-9, 31] \times [-8, 81]$

Импортируем необходимые библиотеки и введём константы:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

X_START = -9
X_END = 31
Y_START = -8
Y_END = 81
```

Посмотрим на график:

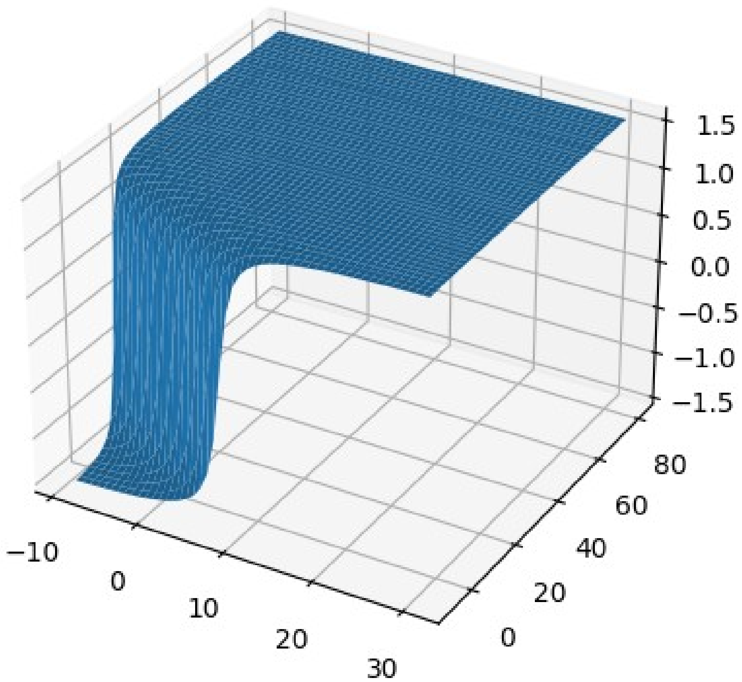
```
plt_x = np.linspace(X_START, X_END, 50)
plt_y = np.linspace(Y_START, Y_END, 50)

plt_x, plt_y = np.meshgrid(plt_x, plt_y)

plt_z = np.arctan(plt_x + plt_y)

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot_surface(plt_x, plt_y, plt_z)

plt.show()
```



Функция arctan **- непрерывная, можем найти интеграл:**

$\int\limits_{ -9}^{ 31} dx \int\limits_{ -8}^{ 81} \arctan(x+y) dy = -264\arctan(23) - 144\arctan(17) - 56\log(12545) + 36\log(5185) - 5183\arctan(72)/2 + 17\log(290)/2 + 23\log(530)/2 + 12543\arctan(112)/2 \approx 5039.357 $

Определим функцию вычисления интеграла при помощи нижней или верхней суммы Дарбу:

```
def calc_integral(axis_div_num, x_start=X_START, y_start=Y_START,
x_end=X_END, y_end=Y_END, lower=True):
    # Подстраиваем входные значения области, чтобы они не выходили за
пределы G
    x_start = np.clip(x_start, X_START, X_END)
    y_start = np.clip(y_start, Y_START, Y_END)
    x_end = np.clip(x_end, X_START, X_END)
    y_end = np.clip(y_end, Y_START, Y_END)

    x_step = (x_end - x_start) / axis_div_num
    y_step = (y_end - y_start) / axis_div_num
    mu = x_step * y_step # Мера Жордана одна для всех участков
    integral = 0
    for x in np.linspace(x_start, x_end, axis_div_num,
endpoint=False):
        for y in np.linspace(y_start, y_end, axis_div_num,
endpoint=False):
            if lower:
```

```
                integral += np.arctan(x + y) * mu # Из свойств нашей
функции понятно, что для нахождения минимального значения на участке
нужно брать наименьшие x и y
            else:
                integral += np.arctan((x + x_step) + (y + y_step)) *
mu # Для максимальных значений - максимальные x и y
    return integral
```

Протестируем её:

```
axis_div_num = 1000

print(calc_integral(axis_div_num))
print(calc_integral(axis_div_num, lower=False))
```

```
5035.915941997595
5042.787421285308
```

что похоже на правду

Вычислим ошибку:

$$I=\int_{-9}^{31} dx \int_{-8}^{81} \arctan(x+y)\,dy=\sum_{i=1}^{k-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \sum_{j=1}^{l-1}\int_{y_j}^{y_{j+1}} \arctan(x+y)\,dy=\sum_{i=1}^{k-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \sum_{j=1}^{l-1}\int_{y_j}^{y_{j+1}} \left(\arctan(x_i+y_j)+o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)\right)$$

$$¿\, I_{¿}+\sum_{i=1}^{k-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \sum_{j=1}^{l-1}\int_{y_j}^{y_{j+1}} o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)dy=I_{¿}+o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)S$$

$S=(31-(-9))\cdot(81-(-8))=3471$ - площадь области

$I-I_{¿}=3471\cdot o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$ - ошибка

$$3471\cdot o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)\le 3471\cdot C\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\underset{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}{\to}0$$

Для верхнего интеграла Дарбу ошибка аналогична

Вывод:

Я научился численно находить многомерные интегралы и оценивать для них ошибку.