Fonction exponentielle

Introduction :

La fonction exponentielle est une nouvelle fonction usuelle étudiée en première.

Dans un premier temps, nous allons donner sa définition, puis ses propriétés algébriques et enfin sa courbe représentative et ses propriétés graphiques.

Dans un deuxième temps, nous étudierons la suite (e^{na}) avec a un nombre réel, qui est définie à partir de la fonction exponentielle.

Enfin, dans un troisième temps, nous donnerons les représentations graphiques des fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{kt}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-kt}$, avec $k > 0$ un nombre réel, définies elles aussi à partir de la fonction exponentielle.

1 Définition de la fonction exponentielle

Définition

Fonction exponentielle :

La fonction exponentielle, notée $\exp$, est l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

- $f' = f$;
- $f(0) = 1$.

Nous avons donc : $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$.

2 Propriétés algébriques de la fonction exponentielle

a. Propriétés

Propriété

Pour tous les nombres réels x et y, et les entiers naturels n, on a :

- $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$
- $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$
- $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$

On utilise une notation moins lourde : $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.

Propriété

Pour tous les nombres réels x et y, et les entiers naturels n, on a :

- $\mathrm{e}^0 = 1$ et $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \approx 2,718$
- $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y$
- $\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$
- $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$
- $\mathrm{e}^{nx} = (\mathrm{e}^x)^n$

Propriété

1. La fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$: pour tout nombre réel x, $\mathrm{e}^x \neq 0$.
2. La fonction exponentielle est strictement positive et strictement croissante pour tout x réel.

Démonstration

1. **La fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$**

Pour tout nombre réel x, nous avons : $\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x} = 1$.

→ $\mathrm{e}^x \neq 0$, pour tout nombre réel x.

2. **La fonction exponentielle est strictement positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$**

$e^0 = 1$ et nous savons maintenant que la fonction exponentielle ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$.

$e^x = e^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}} \times e^{\frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geq 0$, car c'est un carré.

D'après ce qui précède, nous avons : $e^x > 0$, pour tout nombre réel x.

→ La fonction exponentielle est strictement positive.

Et comme $(x \mapsto e^x)' = (x \mapsto e^x)$, sa dérivée est aussi strictement positive.

→ La fonction exponentielle est strictement croissante.

Propriété

Pour x et y réels, on a :

- $x < y \Leftrightarrow e^x < e^y$
- $x = y \Leftrightarrow e^x = e^y$

b. Transformations d'expressions et équations

Simplifions les écritures suivantes :

1. $e^{2x} \times e^{-5x}$

→ On utilise la propriété : $e^x \times e^y = e^{x+y}$ (en donnant aux valeurs x et y d'autres expressions).

$$\begin{aligned} e^{2x} \times e^{-5x} &= e^{2x-5x} \\ &= e^{-3x} \end{aligned}$$

2. $\dfrac{e^{4x}}{e^{2x+1}}$

→ On utilise la propriété : $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$ (en donnant aux valeurs x et y d'autres expressions).

$$\begin{aligned} \frac{e^{4x}}{e^{2x+1}} &= e^{4x-(2x+1)} \\ &= e^{2x-1} \end{aligned}$$

3. $e^x \times e^{-x}$

➜ On utilise la propriété : $e^x \times e^y = e^{x+y}$ (en donnant aux valeurs x et y d'autres expressions).

$$\begin{aligned} e^x \times e^{-x} &= e^{x-x} \\ &= e^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Résolvons les équations suivantes :

1. $e^{-x+7} = e^{x+3}$

➜ On utilise la propriété : $x = y \Leftrightarrow e^x = e^y$ (en donnant aux valeurs x et y d'autres expressions).

$$\begin{aligned} e^{-x+7} &= e^{x+3} \\ -x+7 &= x+3 \\ 2x &= 7-3 \\ 2x &= 4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

2. $e^{3-x} = 1$

➜ On utilise la propriété : $x = y \Leftrightarrow e^x = e^y$ (en donnant aux valeurs x et y d'autres expressions).

$$\begin{aligned} e^{3-x} &= 1 \\ e^{3-x} &= e^0 \\ 3-x &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

3 Courbe représentative de la fonction exponentielle

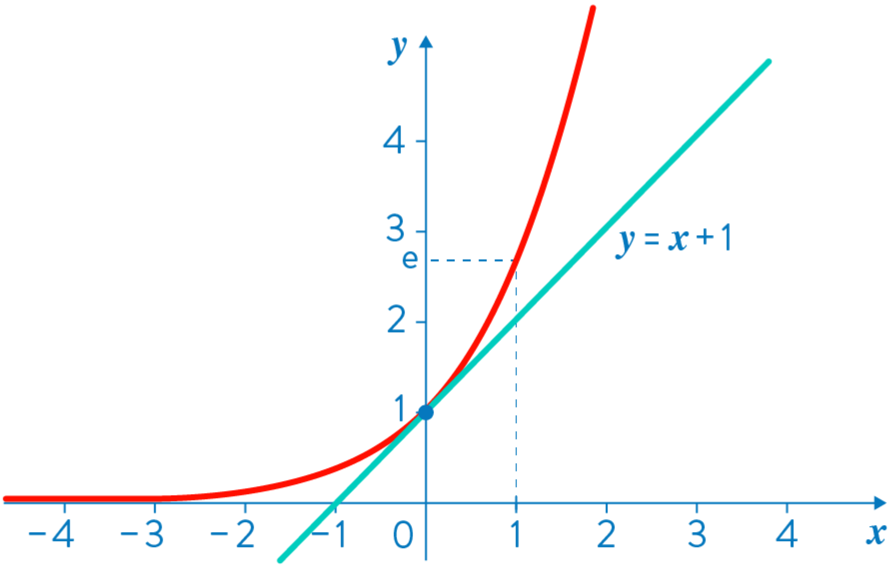
Théorème

- Pour tout nombre x, $e^x > 0$.
- La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

➜ En particulier, $e^0 = 1$ et $e^1 = e \approx 2,718$.

➜ La dérivée de $x \mapsto e^x$ est $x \mapsto e^x$: la fonction exponentielle est sa propre dérivée.

Tableau de variation et courbe représentative de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$



x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$(\exp)'(x)$		$+$	1	$+$	e	$+$	
$\exp(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

Remarques

- La tangente à la courbe au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x + 1$. Elle est représentée en vert ici.
- Cette tangente à la courbe au point d'abscisse 0 est toujours située au-dessous de la courbe représentative de la fonction exponentielle. (Voir cours « Variations et courbes représentatives de fonctions ».)

4 Suite (e^{na})

Théorème

Pour tout réel a, la suite (e^{na}) définie sur $\mathbb{N}$ est une suite géométrique.

Démonstration

Soit a un nombre réel.
Pour tout entier naturel n, $(\mathrm{e}^{na}) = (\mathrm{e}^a)^n$.

Pour tout entier naturel n, nous avons donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{(n+1)a} &= (\mathrm{e}^a)^{n+1} \\ &= (\mathrm{e}^a)^n \times \mathrm{e}^a \\ &= \mathrm{e}^a \times (\mathrm{e}^a)^n \\ &= \mathrm{e}^a \times (\mathrm{e}^{na})\end{aligned}$$

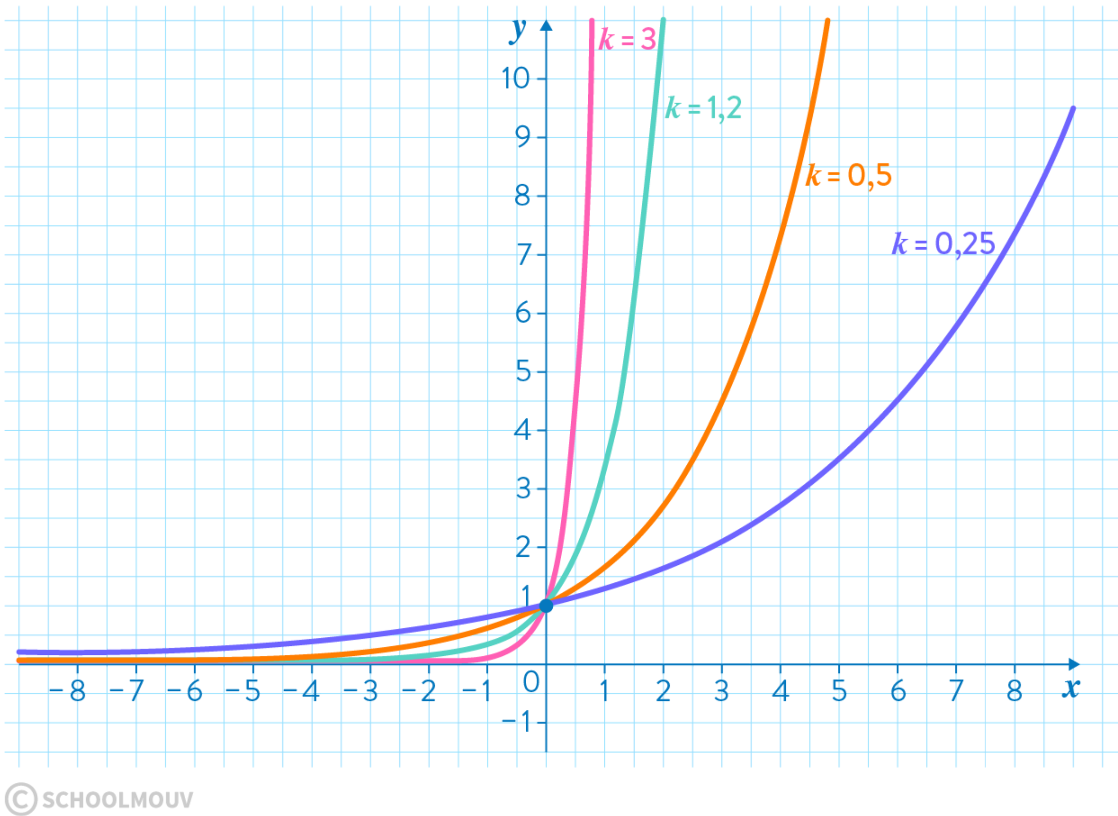
La suite (e^{na}) définie sur $\mathbb{N}$ est donc une suite géométrique de raison e^a (qui ne dépend pas de n) et de premier terme $\mathrm{e}^0 = 1$.

5 Fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{kt}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-kt}$

a. $t \mapsto \mathrm{e}^{kt}$

Soit $k > 0$ un nombre réel fixé.
La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{kt}$ est définie, strictement croissante et positive sur l'ensemble des nombres réels.

Exemples de représentations graphiques



Remarques

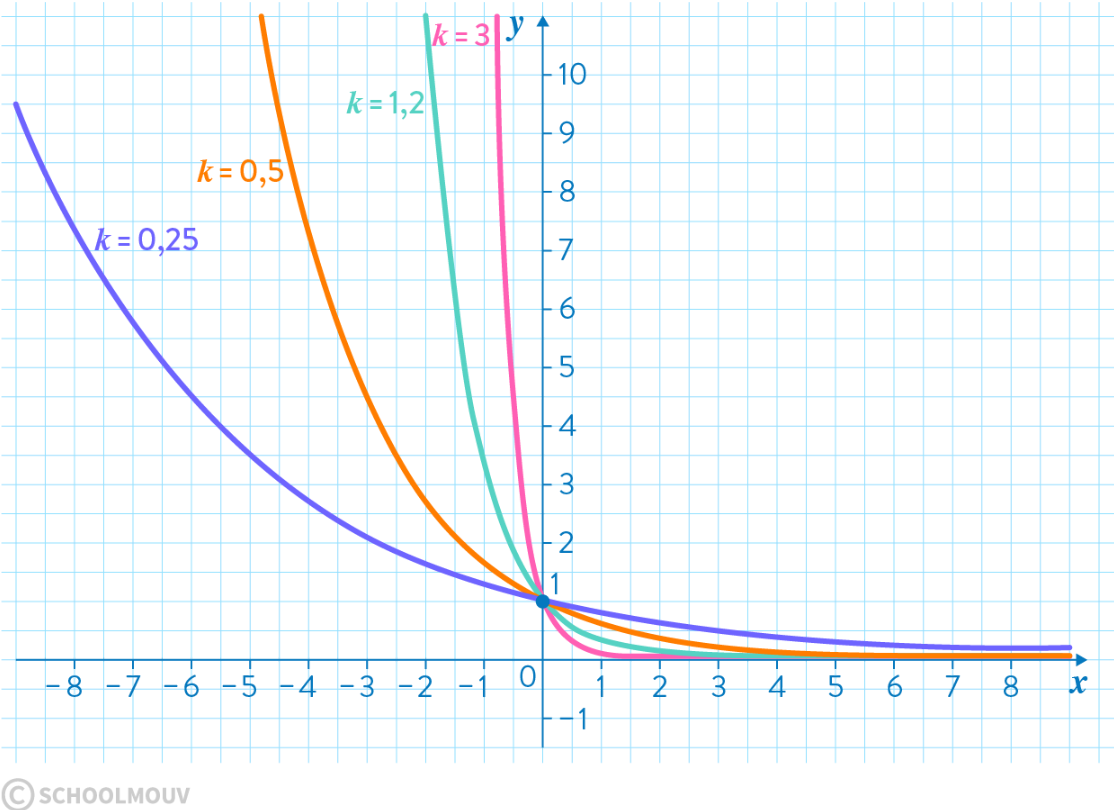
- L'image de 0 par ces fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{kt}$ est toujours 1.
- Plus k est grand, plus la croissance de cette fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{kt}$ est rapide.
- Une situation qui est modélisée par une fonction de ce type est dite à croissance exponentielle. Par exemple, l'évolution d'un capital à intérêts capitalisés placé à un taux fixe.

b. Fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{-kt}$

Soit $k > 0$ un nombre réel fixé.

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-kt}$ est définie, strictement décroissante et positive sur l'ensemble des nombres réels.

Exemples de représentations graphiques



Remarques

- L'image de 0 par ces fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{-kt}$ est toujours 1.
- Plus k est grand, plus la décroissance de cette fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-kt}$ est rapide.
- Une situation qui est modélisée par une fonction de ce type est dite à décroissance exponentielle. Par exemple, l'évolution du nombre de noyaux radioactifs lors de la

désintégration radioactive suit une décroissance exponentielle.