

吉林大学通信工程学院期中模拟考试试题册

《微积分 B I》

注意事项:

1. 答题前, 考生务必在试题册及答题卡指定位置上填写姓名、学号和考生姓名。
2. 选择题的答案必须填写在答题卡相应题号的指定位置, 非选择题的答案必须填写在答题卡指定位置的边框区域内。超出答题区域内书写的答案无效; 在草稿纸、试题册上答题无效。
3. 填(书)写部分必须使用黑色字迹签字笔书写, 字迹工整, 笔迹清楚。
4. 考试结束, 将答题卡和试题册按规定交回。

一、选择题: 本题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 若 $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 $k =$
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
2. 已知 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某个邻域内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 2$, 则 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处
 (A) 不可导 (B) 可导, 且 $f'(0) \neq 0$ (C) 取得极大值 (D) 取得极小值
3. 设函数 $f(x) = \frac{\ln |x|}{|x - 1|} \sin x$, 则 $f(x)$ 有
 (A) 1 个可去间断点, 1 个跳跃间断点 (B) 1 个可去间断点, 1 个无穷间断点 (C) 2 个跳跃间断点 (D) 2 个无穷间断点
4. 已知极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x + xf(x)}{\sin x^3} = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + f(x)}{x^2} =$
 (A) $\frac{13}{9}$ (B) 4 (C) $\frac{10}{3}$ (D) $-\frac{8}{3}$
5. 设 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 可导, 且 $f'(x) > f(x) > 0$, 则
 (A) $\frac{f(-2)}{f(-1)} > 1$ (B) $\frac{f(0)}{f(-1)} > e$ (C) $\frac{f(1)}{f(-1)} < e^2$ (D) $\frac{f(2)}{f(-1)} < e^3$
6. 设 $f(x) = (x - 1)^n x^{2n} \sin \frac{\pi}{2} x$, 则 $f^{(n)}(1) =$
 (A) 1 (B) 0 (C) $(n - 1)!$ (D) $n!$

二、填空题：本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分。

7. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 3x}{\ln \sin 2x} =$ _____。
8. 设 $y = (1 + \sin x)^x$, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\pi} =$ _____。
9. 设 $f(x) = \ln(1 - x)$, 则 $f^{(n)}(0) =$ _____。
10. 曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 的渐近线的条数为_____。
11. 由方程 $xe^{f(y)} = e^y \ln 39$ 可确定函数 $y = y(x)$, 其中 f 具有二阶导数, 且 $f' \neq 1$, 则有 $\frac{d^2 y}{dx^2} =$ _____。
12. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 的某邻域内连续, 且满足 $f(x) = 1 + 2x + o(x - 1)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f\left(1 - \frac{4}{n}\right)}{f(1)} \right]^n =$ _____。

三、解答题：本题共 5 小题，共 44 分。解答应写出必要的文字说明及演算步骤。

13. (本小题满分 8 分) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\arctan \frac{2}{n} - \arctan \frac{2}{n+1} \right)$ 。
14. (本小题满分 8 分) 设 $f(x)$ 在点 $x = 1$ 处导数连续, 且 $f'(1) = 1$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} f(\cos^2 2x)$ 。
15. (本小题满分 10 分) 试确定常数 a, b 的值, 使函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{\pi}{x}, & x < 0, \\ ax^2 + b, & x \geq 0 \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处可导, 并求出此时的 $f'(x)$ 。

16. (本小题满分 10 分) 设函数 $y = y(x)$ 由

$$\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) + 1, \\ y = 2 \arctan t - (t + 1)^2 \end{cases}$$

确定, 求 $\frac{dy}{dx}$ 与 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 。

17. (本小题满分 8 分) 设 $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} (x \neq 0), f(0) = 0$, 求 $f^{(n)}(0)$

四、证明题：本题共 1 小题，共 8 分。证明时应写出必要的文字说明及证明过程。

18. (本小题满分 8 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 证明:

- (1) $\exists t \in (0, 1)$, 在 $f(0) = f(1) = 0$ 时, 满足 $tf'(t) + 2f(t) = 0$;
- (2) $\exists \xi, \eta \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{f'(\eta)}{2\eta}$ 。