題目:紅綠燈隊列的馬可夫鏈分析

姓　　名：蔡宗義
學　　號：2018270031

1. 問題描述

交通擁堵是城市治理中的重要問題。交通擁堵往往發生在路口。當一個路口的車輛通過能力小於車輛到達量，就容易發生交通堵塞。到達路口的車輛會按照到達順序依次排列成一個佇列。當路口狀態為綠燈時，車輛按照先到先出的原則依次通過路口。

以上問題可以用一個先到先出的隊列建模。該隊列到達滿足泊松分佈，離開狀態有 2 種。當紅燈亮時，沒有車輛離開。當綠燈亮時，車輛依次離開。考慮到每個車輛的離開速度具有隨機性，車輛離開也可以用泊松分佈來描述。

這裡我們考慮一種簡單的情況：隊列長度更新是分時隙的。這樣就可以用離散的馬可夫過程對隊列更新建模。

每一輪紅燈都分為 1, 2, 3, ……, L 編號的時隙，而每一輪綠燈也有 L+1, ……, 2L 編號的時隙。L 為可變參數。車輛數在每個時隙最多更新 1 輛。

2. 數學分析

1) 假設當紅燈時，每個時隙一輛車到來的概率為 p，沒有車到來的概率為 q。不考慮一個時隙到來多輛車的情況。在綠燈時，每個時隙走一輛車的概率為 q，車輛數維持不變的概率為 p。假設隊列的數量變化是一個馬可夫過程，每一個狀態代表當前隊列的數量，則紅燈和綠燈的狀態概率轉移矩陣為：

   先紅燈在綠燈，則：
   - 每輪的紅燈、綠燈各有 L 個時間間隙，且紅(1~L)，綠(L+1~2L)
   - 每個間隙更新一輛車

   訂出其一步轉移概率為:

   紅： $P_{i,j} = \{ \begin{matrix} p: & j = i+1 & (一輛車到來) \\ q: & j = i & (沒有車輛到來) \end{matrix}$

   綠： $P_{i,j} = \{ \begin{matrix} q: & j = i-1 & (一輛車離去) \\ p: & j+i & (沒有車輛離去) \end{matrix}$

   可以訂出狀態轉移矩陣為：

$$P_{red}=\begin{bmatrix} q & p & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & q & p & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & q & p & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & q & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}^{L}$$ 為 L 次方，無限維的矩陣

$$P_{green}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ q & p & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & q & p & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & q & p & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}^{L}$$ 為 L 次方，為無限維的矩陣

2）考慮一種最簡單的情況，L=1（每一輪紅燈或者綠燈只有 1 個時隙）。把紅燈時的隊列車輛數單獨抽離出來，組成一個 Markov 鏈，則轉移矩陣為：

L=1，因此狀況變成紅綠相間：紅、綠、紅、綠、紅、綠、紅、綠、、、、、、
相隔一時間間隙時，將紅燈時的狀態轉移矩陣為前一輪交替的結果
因此，抽離出來的狀態轉移概率矩陣為：

$$P_{red}^{L=1}=P_{red}P_{green}=\begin{bmatrix} q+pq & p^2 & 0 & 0 & \cdots \\ q^2 & 2pq & p^2 & 0 & \cdots \\ 0 & q^2 & 2pq & p^2 & \cdots \\ 0 & 0 & q^2 & 2pq & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$P_{green}^{L=1}=P_{green}P_{red}=\begin{bmatrix} q & p & 0 & 0 & \cdots \\ q^2 & 2pq & p^2 & 0 & \cdots \\ 0 & q^2 & 2pq & p^2 & \cdots \\ 0 & 0 & q^2 & 2pq & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

3） 當我們把紅燈時的隊列單獨拿出來構成一個子鏈時，便可以處理紅綠燈交替帶來的狀態狀態轉移矩陣輪換更替的問題。此時可以推導出該馬可夫鏈的穩態狀態概率分佈π_k（穩態時隊列長度為 k 的概率）

令穩定狀態分佈 $\pi = (\pi_1 , \pi_2 , \pi_3 , \dots \dots)$
且： $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \dots \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1$

穩定狀態時有：

$$(\pi_1 , \pi_2 , \pi_3 , \dots \dots)\begin{bmatrix} q+pq & p^2 & 0 & 0 & \cdots \\ q^2 & 2pq & p^2 & 0 & \cdots \\ 0 & q^2 & 2pq & p^2 & \cdots \\ 0 & 0 & q^2 & 2pq & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = (\pi_1 , \pi_2 , \pi_3 , \dots \dots)$$

先由穩定狀態求出：

$$\pi_k = \left(\frac{p^2}{q^2}\right)^k \pi_0$$

再由上面兩式解出：

$$\pi_0 = 1 - \frac{p^2}{q^2}$$

帶回，可以解得：

$$\pi_k = \left(1 - \frac{p^2}{q^2}\right)\left(\frac{p^2}{q^2}\right)^k$$

1） 並可以證明，M_n為 t=n 時馬可夫隊列的最大隊列長度，$\mathrm{P}(M_n < k)$

$\mathrm{P}(M_n < k) \approx \exp(-(q-p)\,\pi_k n)$
由(3)求得：

$$\pi_k = \left(1 - \frac{p^2}{q^2}\right)\left(\frac{p^2}{q^2}\right)^k$$

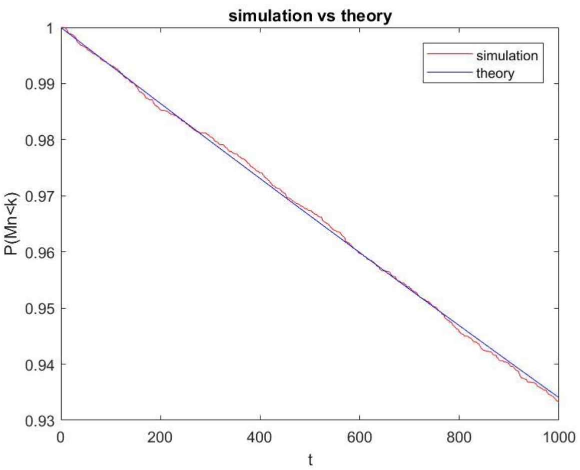
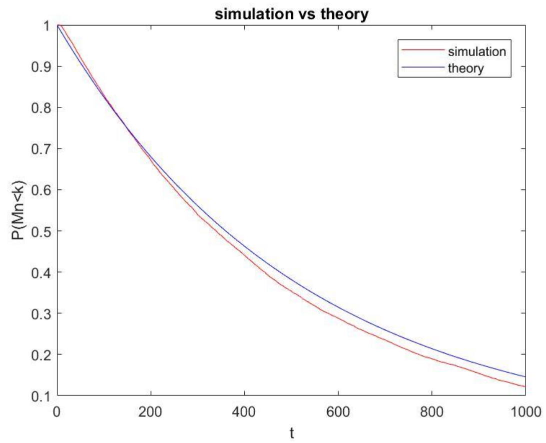
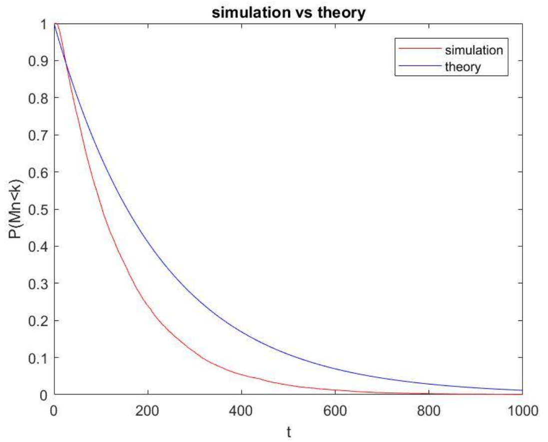
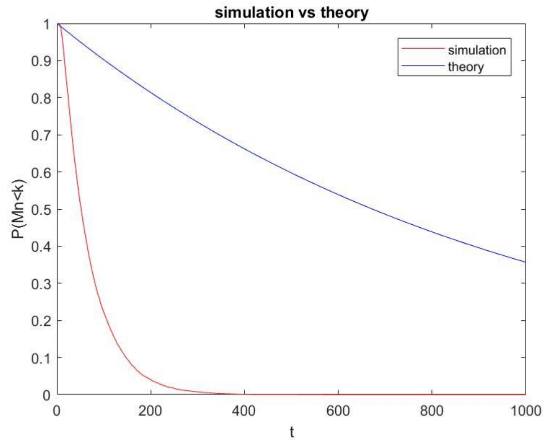
帶入$\mathrm{P}(M_n < k)$，可以得：

$$\mathrm{P}(M_n < k) \approx \exp(-(q-p)\left(1 - \frac{p^2}{q^2}\right)\left(\frac{p^2}{q^2}\right)^k n)$$

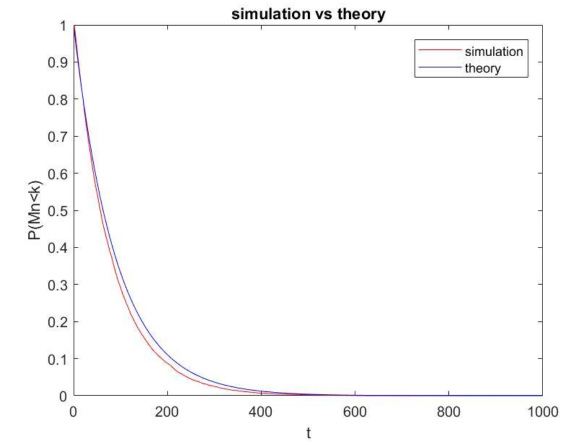
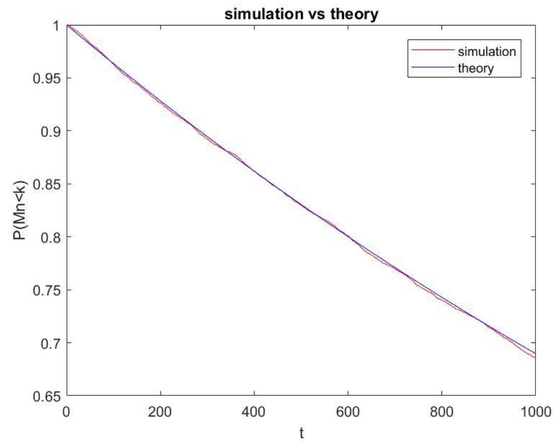
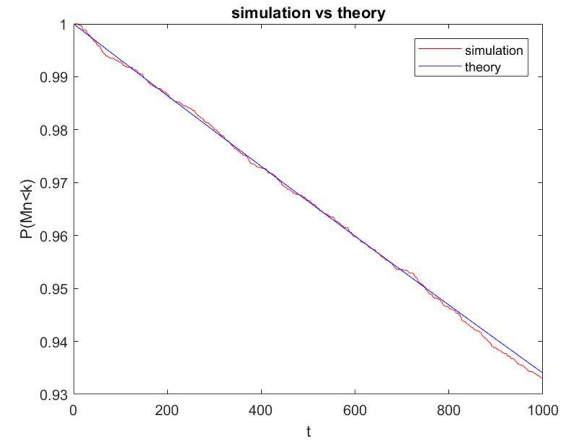
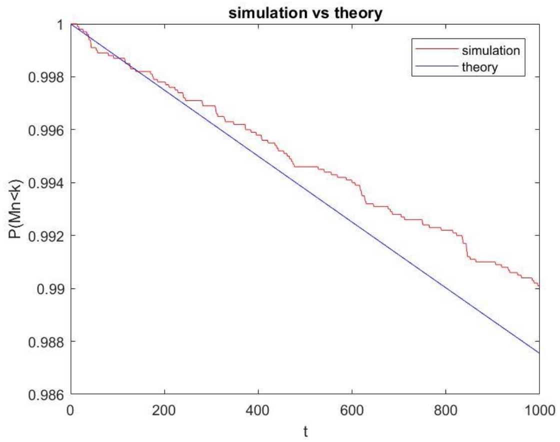
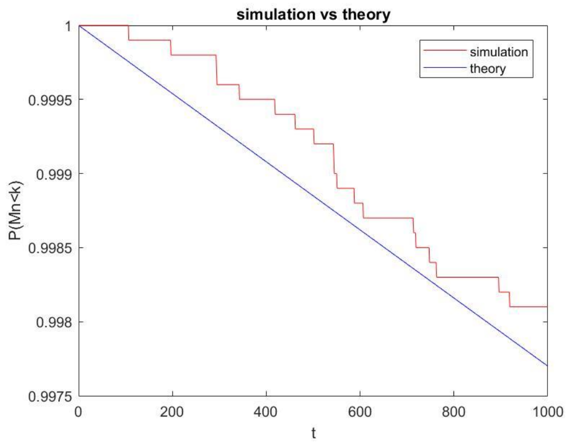
即：

$$\mathrm{P}(M_n < k) \approx e^{\left[-(q-p)\left(1-\frac{p^2}{q^2}\right)\left(\frac{p^2}{q^2}\right)^k n\right]}$$

3. 模擬結果

<table>
<tr><th colspan="2">固定 k=5</th></tr>
<tr><th>p ＝ 0.3 ， q ＝ 0.7</th><th>p ＝ 0.4 ， q ＝ 0.6</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><th>p ＝ 0.45 ， q ＝ 0.65</th><th>p ＝ 0.49 ， q ＝ 0.51</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

由於達到穩定狀態的條件為 p ＜ q （ 車子到達的機率 ＜ 車子沒有到達的機率 ），由圖可以看出，當 p 越大時，理論計算結果與模擬結果越不吻合，當 p 取到 0.49 時，理論計算結果與模擬結果已經幾乎沒有重迭的部分

<table>
<tr><th colspan="2">固定 p=0.3 q=0.7</th></tr>
<tr><td>K=2</td><td>K=4</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>K=5</td><td>K=6</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>K=7</td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
</table>

由結果可以發現，k 在一定的範圍內時，理論計算結果與模擬結果是差不多的，但當 k 大過某一值時(大於 6 時)，兩者的圖行會開始有不重和的現象

參考文獻

[1] 樊平毅. 隨機過程理論與應用. 清華大學校內講義. 2018