

Вычислительная математика

Осень 2021

Лабораторная работа 1, сдать до 5.11.2020 23:59

Преподаватель: Маловичко М. С.

Дано уравнение Лапласа в квадрате $\Omega = (0,1) \times (0,1)$:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1, \text{ в } \Omega \quad (1.1)$$

$$u = 0 \text{ на границе, } \partial\Omega. \quad (1.2)$$

Разобьём область Ω равномерной прямоугольной сеткой с шагом $h = 1/4$ и пронумеруем узлы, как показано на Рисунке 1. Таким образом, значения u в узлах можно обозначать в координатной записи (u_{ij}) , а можно в сквозной записи (u^n) , где $n = 5i + j$. Например, $u_{2,1} = u^{11}$.

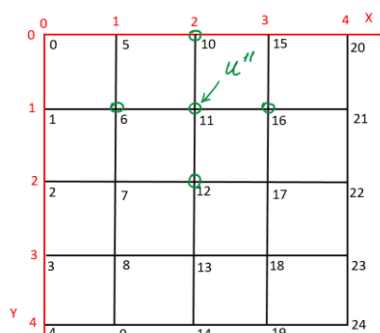


Рисунок 1. Расчётная область и сетка. Кружками показан шаблон «крест» в одном из положений.

Будем решать задачу (1.1)-(1.2) методом конечных разностей. Значения u в граничных узлах равны нулю по (1.2). Во всех внутренних узлах заменим частные производные на конечные разности по формулам

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{ij} \approx \frac{u_{(i+1),j} - 2u_{ij} + u_{(i-1),j}}{h^2}, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{ij} \approx \frac{u_{i,(j+1)} - 2u_{ij} + u_{i,(j-1)}}{h^2}. \quad (3)$$

Например, для узла 11 дифференциальное уравнение (1.1) заменяется линейным алгебраическим уравнением:

$$\frac{-u^6 + 2u^{11} - u^{16}}{h^2} + \frac{-u^{12} + 2u^{11} - u^{10}}{h^2} = 1. \quad (4)$$

Это классический пятиточечный шаблон «крест»: узлы 6,11,16,12, 10 образуют крест на сетке (Рисунок 1).

Если шаблон попадает некоторыми своими узлами на границу, то эти граничные значения исключаются, поскольку их значения известны из граничных условий. Например, в (4) u^{10} есть граничный узел, поэтому u^{10} переносится в правую часть (в нашей задаче $u^{10} = 0$):

$$\frac{-u^6 - u^{16} - u^{12} + 4u^{11}}{h^2} = 1. \quad (5)$$

Задание 1

(а) Выписать 9 линейных алгебраических уравнений, которые определяют значения u во внутренних узлах {6,7,8,11,12,13,16,17,18}.

(б) Записать эти 9 уравнений в матричном виде - в виде СЛАУ с матрицей 9x9. Визуализировать матрицу командой `spy` (Matlab: `spy`; Python: `matplotlib.pyplot.spy`). Пример работы `spy` приведён на Рисунке 2.

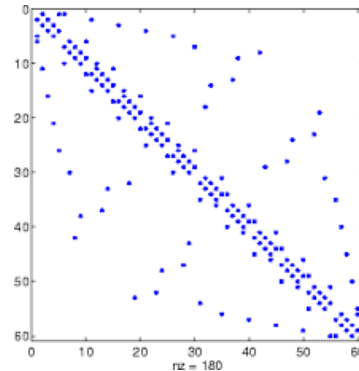


Рисунок 2. Пример визуализации матрицы командой `spy`.

(в) Решить СЛАУ любым способом (например, м. Гаусса из библиотеки).

Задание 2.

(а) Написать программу, которая формирует матрицу СЛАУ и правую часть для произвольного разбиения h . Можно размещать матрицу в памяти. Указание: программа должна состоять из двойного цикла по индексам i и j , внутри которого обрабатываются различные ситуации, когда некоторые соседние узлы (числом от 0 до 4) являются граничными.

(б) Задать шаг разбиения $h = 1/100$ (сетка 101x101 узел). Задать правую часть равную 1 в центральном узле и 0 в остальных узлах. Сформировать матрицу и правую часть.

(б) Решить СЛАУ (CG, МПИ(tau), Якоби, Зейдель – можно библиотечные) и нарисовать решение (образец – на Рисунке 3).

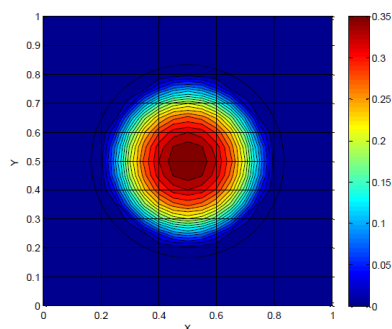


Рисунок 3. Образец визуализации решения.

Прислать:

- По заданию 1. PDF отчёт содержащий, кроме всего прочего, визуализацию матрицы командой `sru`; 9 дискретных уравнений (либо выписанную матрицу); решение в 9 узлах.
- По заданию 2. PDF отчёт содержащий, кроме всего прочего, визуализацию матрицы командой `sru`; визуализацию решения. **Код (один файл) в котором формируется матрица.**
- Оба отчёта можно объединить в 1 PDF документ.
- **ЗАГРУЗИТЬ ОДИН ZIP АРХИВ !!!**