Теория случайных процессов (1 задание)
Логинин Семён 812

Часть 1

N1 $\Omega: \omega = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n, \ \alpha_i = 0, 1, \ i = \overline{1, n}$

$\xi(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{2^i}$ Найти $\{x_i\}$, распределение вероятностей

Решение: $\xi(\omega) = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{4} + \dots + \frac{\alpha_n}{2^n} =$

$= \frac{\alpha_1 \cdot 2^{n-1} + \alpha_2 \cdot 2^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} \cdot 2 + \alpha_n}{2^n}$

Множество значений: $0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \dots, \frac{2^n - 1}{2^n}$

Распр. вер.: $F_\xi(x_i) = \frac{1}{2^n}$ (всего 2^n вариантов, каждое значение можно получить только одним способом)

N2 Получить: $\frac{1}{i^5} \frac{\partial^5 \varphi_n(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial u_{k_1} \partial u_{k_2} \dots \partial u_{k_5}} \Big|_{u_1 = u_2 = \dots = u_n = 0} =$

$= \langle \xi(t_{k_1}) \xi(t_{k_2}) \dots \xi(t_{k_5}) \rangle = m_5(t_{k_1}, \dots, t_{k_5})$ $k_1, k_2, \dots, k_5 = 1, \dots, n$

Решение: характеристическая функция

$\varphi_n(u_1, \dots, u_n, t_1 \dots t_n) = \langle \exp(i \sum_{k=1}^{n} u_k \xi(t_k)) \rangle =$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i \sum_{k=1}^{n} u_k x_k) f_n(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n$

Дифференцирование интеграла по параметру

$\frac{\partial \varphi_n(\dots)}{\partial u_{k_1}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int i x_{k_1} \exp(i \sum_{k=1}^{n} u_k x_k) \cdot f_n(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots$

$$\frac{\partial^5 \varphi_n(\dots)}{\partial u_{x1}\dots\partial u_{x5}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int i^5 x_{k_1}\dots x_{k_5}\exp\left(i\sum_{k=1}^{n} u_k x_k\right)\cdot f_n(x_1\dots x_n, t_1\dots t_n)\,dx_1\dots dx_n$$

$$\cancel{\frac{1}{i^5}\frac{\partial^5\varphi(\dots)}{\partial u_{k_1}\dots\partial u_{x_5}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int i^5 x_{k_1}\dots x_{k_5}\exp\left(i\sum_{k=1}^{n} u_k x_k\right) f_n \, dx_1 \dots dx_n}$$

$$\frac{1}{i^5}\frac{\partial^5\varphi(\dots)}{\partial u_{k_1}\dots\partial u_{k_5}}\Bigg|_{u_1=0,\dots,u_n=0} = \int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int x_{k_1}\dots x_{k_5}\, f_n(x_1\dots x_n, t_1\dots t_n)\,dx_1\dots dx_n =$$

$$= \langle \xi(t_{k_1})\dots\xi(t_{k_5})\rangle = m_5(t_{k_1}\dots t_{k_5})$$

$\boxed{№3}$ $f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-(x-a(t))^2/2\sigma^2(t)\right)$

Найти $\varphi_\xi(y,t)$; $m_1 = M[\xi(t)]$ и $\mu_n(t)$ используя $\varphi_\xi(y,t)$;

Определить характеристическую функцию и плотность вероятности суммы независимых случайных величин $\xi(t_k)$ процесса $\eta = \sum_{k=1}^{n}\xi(t_k)$

Решение:

1) характеристическая функция

$$\varphi_\xi(y,t) = \langle e^{iy\xi}\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} f(x,t)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izy} e^{iay}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\cdot$$

$$\cdot\exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right)dz = \frac{e^{iay}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{z^2}{2\sigma^2} - izy\right)}dz =$$

$$= \frac{e^{iay}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{z}{\sqrt{2\sigma^2}} - iy\sqrt{\frac{\sigma^2}{2}}\right)^2} e^{-y^2\frac{\sigma^2}{2}}\,dz =$$

$$= \frac{e^{iay} \cdot e^{-y^2\sigma^2/2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{z^2}{\sqrt{2\sigma^2}} - iy\sqrt{\frac{\sigma^2}{2}}\right)^2} dz =$$

$$= \frac{e^{iay} \cdot e^{-y^2\sigma^2/2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2\sigma^2}\, e^{-u^2} du = \frac{e^{iay} \cdot e^{-y^2\frac{\sigma^2}{2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \sqrt{2\sigma^2}\sqrt{\pi} =$$

$$= \exp\left(iay - \frac{y^2\sigma^2}{2}\right)$$

2) $m_1 = \langle \xi(t) \rangle = \frac{1}{i} \frac{d\varphi_\xi(y,t)}{dy}\Big|_{y=0} =$

$$= \frac{1}{i}\left(\exp\left(iay - \frac{y^2\sigma^2}{2}\right) \cdot (ia - y\sigma^2)\right)\Big|_{y=0} = a -$$

$$\mu_n(t) = \langle (\xi(t) - m_1)^n \rangle = \langle (\xi(t) - a)^n \rangle =$$

$$= \langle (\eta(t))^n \rangle$$

$$\varphi_\eta(y,t) = \langle e^{iy\eta} \rangle = \langle e^{iy(\xi - a)} \rangle = \langle e^{iy\xi} \cdot e^{-iya} \rangle =$$

$$= e^{-iay} \varphi_\xi(y,t) = e^{-y^2\sigma^2/2}$$

$$\mu_n(t) = \frac{1}{i^n} \frac{d^n \varphi_\eta(y,t)}{dy^n}\Big|_{y=0}$$

$$e^{-y^2\sigma^2/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma^{2k}(-1)^k}{k!\,2^k} y^{2k}$$

$$\frac{d^n\left(e^{-\frac{y^2\sigma^2}{2}}\right)}{dy^n} = \sum_{k=p}^{\infty} \frac{(-1)^k \sigma^{2k} (2k)!}{k!\,2^k (2k-n)!} y^{2k-n} =$$

$$= \sum_{k=p}^{\infty} \frac{(i\sigma)^{2k}(2k)!}{k!\,2^k(2k-n)!} y^{2k-n}$$, где $p = \left[\frac{n}{2}\right]$ (округление до большего целого)

$$\frac{d^n\left(e^{-y^2\sigma^2/2}\right)}{dy^n}\Big|_{y=0} = \frac{(i\sigma)^{2p}(2p)!\; y^{2p-n}}{p!\,2^p(2p-n)!}\Big|_{y=0} = \begin{cases} \dfrac{(i\sigma)^n n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\,2^{\frac{n}{2}}}, & n-\text{чет} \\ 0 & -n-\text{нечет} \end{cases}$$

$$\mu_n(t) = \begin{cases} \dfrac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!}\left(\dfrac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)^n, & n-\text{четн} \\ 0, & n-\text{нечет} \end{cases}$$

3) $\eta = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi(t_k)$, $\xi(t_k)$ - независимая характеристическая функция, т.к. $\xi(t_k)$ - независимая, то $\varphi_\eta(y,t) = \prod\limits_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}(y,t) =$

$= \prod\limits_{k=1}^{n} \exp\left(ia(t_k)y - y^2\dfrac{\sigma^2(t_k)}{2}\right) = \exp\Big(iy\sum\limits_{k=1}^{n} a(t_k) -$

$- \dfrac{y^2}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma^2(t_k)\Big)$. Плотность вероятности является функцией, в которой

$a = \sum\limits_{k=1}^{n} a(t_k)$, $\sigma^2 = \sum\limits_{k=1}^{n}\sigma^2(t_k)$

$$f_\eta(x,t_1,\dots,t_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma^2(t_k)}}\exp\left(-\frac{\left(x-\sum\limits_{k=1}^{n}a(t_k)\right)^2}{2\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma^2(t_k)}\right)$$

N4 Показать: для непрерывного случайного процесса с независимыми приращениями $\xi(t)$, $t \geq 0$ ковариационная функция $B_\xi(t_1,t_2)$ связана с дисперсией $D_\xi(t)$ соотношением $B_\xi(t_1,t_2) = D_\xi(t_{min})$, $t_{min} = \min(t_1,t_2)$

Решение: 1) $\xi(t), t \geq 0$; $\xi(t_i) = \xi_i$, $t_2 > t_1$ тогда

$B_\xi(t_1,t_2) = \langle(\xi(t_1) - \langle\xi(t_1)\rangle)(\xi(t_2) - \langle\xi(t_2)\rangle)\rangle =$

$= \langle(\xi_1 - \langle\xi_1\rangle)((\xi_2-\xi_1) - \langle\xi_2-\xi_1\rangle + \xi_1 - \langle\xi_1\rangle)\rangle =$

$= \langle(\xi_1 - \langle\xi_1\rangle)((\xi_2-\xi_1) - \langle\xi_2-\xi_1\rangle)\rangle + \langle(\xi_1 - \langle\xi_1\rangle)^2\rangle$

$= \langle (\xi_1 - \langle \xi_1 \rangle)^2 \rangle = D_\xi(t_1) \Rightarrow B_\xi(t_1, t_2) = b_1 \Big|_{t_{min}}$

$t_{min} = \min(t_1, t_2)$

2) а) Винеровский СП, $\xi(t), t \geq 0, m(t) = 0$

$B(t_1, t_2) = \min(t_1, t_2), \xi(0) = 0$

$\eta = \xi(t) - \xi(s), \langle \eta \rangle = 0$

$D_\eta = \langle (\xi(t) - \xi(s))^2 \rangle = t + s - 2\min(t, s) = |t - s|$

$$f_\eta = (y, t, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(\frac{-y^2}{2(t-s)}\right)$$

$f_{\vec{\eta}}(y_1 \ldots y_n, t_1 \ldots t_n) = f_{\eta_1}(y_1) \ldots f_{\eta_n}(y_n)$

$\xi(t_1) = \eta_1, \xi(t_2) = \eta_1 + \eta_2$

$\xi(t_n) = \eta_1 + \ldots + \eta_n$

$$f_{\vec{\xi}}(\vec{x}, \vec{t}) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_k - t_{k-1})}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left|\frac{x_k - x_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}\right|^2\right] \quad x_0 = 0, \; t_0 = 0$$

б) Пуассоновский случайный процесс

$P(\xi(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \lambda > 0, k = 0, 1, \ldots$

$P(\xi(s) - \xi(t) = k) = \frac{\lambda (s-t)^k}{k!} e^{-\lambda(s-t)}, s > t$

Считаем $p_1 \simeq \lambda \Delta t_1, \; p_{>1} \equiv 0$

$\xi(t) = \sum_{k=1}^{n} \Delta \xi_k$

$U_n(z) = (1 - \frac{t}{n}\lambda) + z\lambda \frac{t}{n} + 0 = 1 + \frac{\lambda t}{n}(z - s)$

$U_\xi(z) = [U_1(z)]^n \equiv \left(\frac{1 + \lambda t(z-1)}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} e^{\lambda t(z-1)}$

$P(\xi(t_1) = k_1, \ldots \xi(t_n) = k_n) = P(\xi(t_1) = k_1, \ldots \xi(t_2) -$

$- \xi(t_1) = k_2 - k_1 \ldots) =$

$$= \frac{(\lambda t_1)^{k_1} (\lambda(t_2-t_1))^{k_2-k_1} \dots (\lambda(t_n-t_{n-1}))^{k_n-k_{n-1}}}{k!\,(k_2-k_1)! \dots (k_n-k_{n-1})!} \cdot$$

$$\cdot e^{-\lambda t_1} \cdot e^{-\lambda(t_2-t_1)} \cdot \dots \cdot e^{-\lambda(t_n-t_{n-1})} = \lambda^{k_n} e^{-\lambda t_n}$$

$$\cdot \frac{t_1^{k_1} (t_2-t_1)^{k_2-k_1} \dots (t_n-t_{n-1})^{k_n-k_{n-1}}}{k_1!\,(k_2-k_1)! \dots (k_n-k_{n-1})!}$$

$\boxed{N5}$ Пуассоновский поток частиц

$\xi_k = 0$ ни одной част за такт

$\xi_k = 1$ и более частиц за такт

τ - длительность такта

1) Средняя частота. Введем след СВ η_k - число частиц за k-той такт $\psi = \sum_{k=1}^{N} \xi_k$

Частота пуассоновского потока за k-тый такт: $\nu_k = \frac{\eta_k}{\tau}$

η_k подчиняется распределению Пуассона

$$P_{\eta_k}(\eta_k = y_k) = \frac{(\lambda\tau)^{y_k}}{y_k!} e^{-\lambda\tau}, \quad y_k \text{ - целое}$$

$\langle \eta_k \rangle = \lambda\tau$; тогда $\langle \nu_k \rangle = \lambda$

Найдем распределение ξ_k

$$P_{\xi_k}(\xi_k = 0) = P_{\eta_k}(\eta_k = 0) = e^{-\lambda\tau}$$

$$P_{\xi_k}(\xi_k = 1) = 1 - P_{\xi_k}(\xi_k = 0) = 1 - e^{-\lambda\tau}$$

$$\langle \xi_k \rangle = 0 \cdot e^{-\lambda\tau} + 1 \cdot (1 - e^{-\lambda\tau}) = 1 - e^{-\lambda\tau}$$

$$\langle \psi \rangle = \sum_{k=1}^{N} \langle \xi_k \rangle = N(1 - e^{-\lambda\tau}).$$

При больших N: $\psi \approx \langle \psi \rangle = N(1 - e^{-\lambda\tau})$

$$\langle \nu_k \rangle = \lambda = -\frac{1}{\tau} \ln\left(1 - \frac{\psi}{N}\right), \text{ где } \psi = \sum_{k=1}^{N} \xi_k$$

2 Полное оценки средней частоты

$$\nu_{ср} = \lambda = -\frac{1}{\tau}\ln\left(1-\frac{\psi}{N}\right) \approx \frac{\psi}{N\tau}$$

Неравенство Чебышева: $p(|\nu_{ср} - \langle\nu_{ср}\rangle| \ge \xi) \le \frac{D\nu_{ср}}{\xi^2}$

$$D\nu_{ср} = D\left(\frac{\psi}{N\tau}\right) = \frac{1}{N^2\tau^2} D\psi$$

$$D\psi = D\left(\sum_{k=1}^{N} \xi_k\right) = \sum_{k=1}^{N} D\xi_k$$

$$\langle\xi_k\rangle = 1 - e^{-\lambda\tau}$$

$$D\xi_k = \langle(\xi_k - \langle\xi_k\rangle)^2\rangle = \langle\xi_k^2\rangle - 2\langle\xi_k\rangle^2 + \langle\xi_k\rangle^2 =$$

$$= \langle\xi_k\rangle - \langle\xi_k\rangle^2 = 1 - e^{-\lambda\tau} - 1 + 2e^{-\lambda\tau} - e^{-2\lambda\tau} =$$

$= e^{-\lambda\tau} - e^{-2\lambda\tau}$ Тогда $D\psi = Ne^{-\lambda\tau}(1-e^{-\lambda\tau})$

$$D\nu_{ср} = \frac{e^{-\lambda\tau}}{N\tau}(1-e^{-\lambda\tau})$$

$$p(|\nu_{ср} - \langle\nu_{ср}\rangle| \ge \xi) \le \frac{e^{-\lambda\tau}}{N\tau^2\xi^2}(1-e^{-\lambda\tau})$$

$\boxed{№6}$ $\eta(t) = C(-1)^{\varepsilon(t)}, \; t \ge 0$

$\varepsilon(t),\; t \ge 0,\; \varepsilon(0) = 0$ - пуассон СП

$$\Delta\varepsilon(\Delta t) = \varepsilon(t+\tau) - \varepsilon(t) \ge 0$$

$$P(\Delta\varepsilon(\tau) = n) = \frac{(\lambda\tau)^n}{n!}e^{-\lambda\tau}, \; n = 0, 1, 2, \dots$$

1) Мат. ожидание

$\varepsilon(t) = \varepsilon(0) + \Delta\varepsilon(t) = \Delta\varepsilon(t) \Rightarrow p(\varepsilon(t) = n) =$

$= \frac{(\lambda\tau)^n}{n!}e^{-\lambda\tau}$ обозначим $\omega_1 - \varepsilon(t)$ - чёт

$\omega_2 - \varepsilon(t)$ - нечётное

$$p(w_1)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\tau)^{2k}}{(2k)!}e^{-\lambda\tau}=ch\,\lambda t\,e^{-\lambda t}=$$

$$=\frac{1}{2}(1+e^{-2\lambda t})$$

$$p(w_2)=1-p(w)=\frac{1}{2}(1-e^{-2\lambda t})$$

$$\langle\eta(t)\rangle=cp(w_1)+(-c)p(w_2)=c(p(w_1)-p(w_2))$$

$$\cdot c\,e^{-2\lambda t}$$

2. Корреляционная функция

$$R(t_1,t_2)=\langle\eta(t_1)\eta(t_2)\rangle=\langle C(-1)\xi(t_1)\cdot$$

$$\cdot C(-1)\xi(t_2)\rangle=\langle C^2(-1)(\xi(t_1)+\xi(t_2))\rangle=$$

$$=\langle C^2(-1)(\xi(t_2)-\xi(t_1))\cdot(-1)2\xi(t_2)\rangle=$$

$$=\langle C^2(-1)\Delta\xi(t_{1,2})\rangle,\quad \tau_{1,2}=t_2-t_1$$

Аналогично $R(t_1,t_2)=c^2e^{-2\lambda\tau_{12}}=ce^{-2\lambda(t_2-t_1)}$

$\boxed{№7}$ $\xi(t)=a_0+a_1\cos w_c t+a_2 \,sh\, w_c t$

$$\langle\xi(t)\rangle=\langle a_0\rangle+\langle a_1\cos w_c t\rangle+\langle a_2\,sh\,w_c t\rangle=$$

$$=\langle a_0\rangle=const$$

$$\langle a_0\rangle=c_1,\quad \langle a_1\rangle=\langle a_2\rangle=0$$

$$D_\xi=\langle(\xi(t)-\overline{\xi(t)}^2\rangle=\langle(a_0+a_1\cos w_c t+$$

$$+a_2\,sh\,w_c t-\langle a_0\rangle)\rangle=\langle a_0^2+a_0a_1\cos w_c t+$$

$$+a_0a_2\,sh\,w_c t-a_0\langle a_0\rangle+a_0a_1\cos w_c t+$$

$$+a_1^2\cos^2 w_c t+\frac{a_1a_2}{2}sh\,2w_c t-\langle a_0\rangle a_1\cos w_c t+$$

$$+a_0a_2\,sh\,w_c t+\frac{a_1a_2}{2}sh\,2w_c t+a_2^2\,sh^2w_c t-$$

$$-\langle a_0\rangle a_2\,sh\,w_c t-\langle a_0\rangle a_0-\langle a_0\rangle a_1\cos w_c t-\langle a_0\rangle a_2$$

$$sh\,w_c t+\langle a_0\rangle^2\rangle=const$$

$\langle a_1^2\rangle = \langle a_2^2\rangle = \sigma^2$

$\langle a_0^2\rangle = \sigma_0^2$, $\langle a_0 a_1\rangle = \langle a_0 a_2\rangle = \langle a_1 a_2\rangle = 0$

$R_\xi(t_1, t_2) = R_\xi(t_2 - t_1)$

$R_\xi(t_1,t_2) = \langle \xi(t_1)\xi(t_2)\rangle = \langle (a_0 + a_1\cos w_c t_1 + a_2 \sin w_c t_1)\cdot(a_0 + a_1\cos w_c t_2 + a_2\sin w_c t_2)\rangle =$

$\langle a_0^2 + a_0 a_1 \cos w_c t_2 + a_0 a_2 \sin w_c t_2 + a_0 a_1 \cos w_c t_1 + a_1^2 \cos w_c t_1 \cdot \cos w_c t_2 + a_1 a_2 \cos w_c t_1 \cdot \sin w_c t_2 + a_0 a_2 \sin w_c t_1 + a_1 a_2 \sin w_c t_1 \cdot \cos w_c t_2 + a^2 \sin w_c t_1 \cdot \sin w_c t_2\rangle = \sigma_0^2 + \sigma^2 \cos w_c \tau \mid \tau = t_2 - t_1$

$B_\xi(t_1,t_2) = \langle(\xi(t_1) - \overline{\xi(t_1)})(\xi(t_2) - \overline{\xi(t_2)})\rangle = \sigma_0^2 - c^2 + \sigma^2\cos w_c\tau$

$\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T (a_0 + a_1 \cos w_c t + a_2 \sin w_c t)\,dt =$

$= \lim\limits_{T\to\infty}\left(a_0 + \frac{a_1}{T}\frac{\sin w_c t}{w_c}\Big|_0^T - \frac{a_2}{T}\frac{\cos w_c t}{w_c}\Big|_0^T\right) =$

$= a_0 = \langle a_0\rangle \Rightarrow$ Эргодич. СП

Эрг-ть отн дисперсии

$\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(\sum_{k=1}^N (a_k \cos w_k t + b_k \sin w_k t)\right)^2 dt =$

$= \lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \sum_k \frac{a_k^2 + b_k^2}{2}\,dt + \lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\Big(\sum_k \cos 2w_k k$

$+ \sum_k \sin 2 w_k t(\ldots) + \sum_{k\neq m}\cos(w_k - w_m) + (\ldots) +$

$+ \sum_{k\neq m}\cos(w_k + w_m) + (\ldots) + \sum_{k\neq m}\sin(w_k - w_m) + (\ldots) +$

$+ \sum_{k\neq m}\sin(w_k + w_m) + (\ldots)\Big)\,dt = \sum_{k=1}^N \frac{a_k^2 + b_k^2}{2} + 0 =$

$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^N (a_k^2 + b_k^2) \neq \langle \xi^2\rangle$

$$\left(\langle \xi^2 \rangle = \sum_{k=1}^{N} \sigma_k^2 \right) \Rightarrow$$ процесс по эргодичен по дисперсии

$\boxed{№8}$ 1) $B(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|)$, $\alpha > 0$

$$p(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} B(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} \sigma^2 e^{(-i\omega+\alpha)} d\tau$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{+\infty} \sigma^2 e^{(-i\omega-\alpha)\tau} d\tau = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{e^{(-i\omega+\alpha)\tau}}{-(i\omega-\alpha)} \Bigg|_{\tau=-\infty}^{0} +$$

$$+ \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{e^{-(i\omega+\alpha)\tau}}{-(i\omega+\alpha)} \Bigg|_{\tau=0}^{+\infty} = \frac{-\sigma^2}{2\pi} \frac{1-0}{i\omega-\alpha} - \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{0-1}{i\omega+\alpha} =$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2} = \frac{\alpha\sigma^2}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}$$

2) $B(\tau) = \dfrac{\sigma^2}{1+\alpha^2\tau^2}$, $\alpha > 0$

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} B(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\omega\tau}{1+\alpha^2\tau^2} d\tau =$$

$$- \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i \sin\omega\tau}{1+\alpha^2\tau^2} d\tau = 2\frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos(\omega\tau)}{1+\alpha^2\tau^2} d\tau =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\pi\alpha^2} \frac{\pi}{2\left(\frac{1}{\alpha}\right)} e^{-\frac{1}{\alpha}|\omega|} = \frac{\alpha^2}{2\alpha} \exp\left(-\frac{|\omega|}{\alpha}\right)$$

3) $B(\tau) = \sigma^2 (1 + \alpha|\tau|) \exp(-\alpha|\tau|)$, $\alpha > 0$

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} B(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \cdot$$

$$\cdot e^{-i\omega\tau} d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 \alpha|\tau| e^{-\alpha|\tau|} e^{-i\omega\tau} d\tau =$$

$= I_1 + I_2$

$I_1 = \frac{\alpha\sigma^2}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}$; $I_2 = -\frac{\alpha\sigma^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\tau e^{-(i\omega-\alpha)\tau}d\tau +$

$+\frac{\alpha\sigma^2}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\tau e^{-(i\omega+\alpha)\tau}d\tau = \frac{\alpha\sigma^2}{2\pi(i\omega-\alpha)}\tau e^{-(i\omega-\alpha)\tau}\Big|_{\tau=-\infty}^{0} -$

$-\frac{\alpha\sigma^2}{2\pi(i\omega-\alpha)}\int_{-\infty}^{0}e^{-(i\omega-\alpha)\tau}d\tau - \frac{\alpha\sigma^2}{2\pi(i\omega-\alpha)}\int_{-\infty}^{0}e^{-(i\omega-\alpha)\tau}d\tau -$

$-\frac{\alpha\sigma^2}{2\pi(i\omega+\alpha)}\tau e^{-(i\omega+\alpha)\tau}\Big|_{0}^{+\infty} + \frac{\alpha\sigma^2}{2\pi(i\omega+\alpha)}\int_{0}^{+\infty}e^{-(i\omega+\alpha)\tau}d\tau =$

$= \frac{\alpha\sigma^2}{2\pi(i\omega-\alpha)\alpha}(1-0) - \frac{\alpha\sigma^2}{2\pi(i\omega+\alpha)}(0-1) = \frac{\alpha\sigma^2}{2\pi}\frac{2(\alpha^2-\omega^2)}{(\alpha^2+\omega^2)^2} =$

$= \frac{\sigma^2\alpha(\alpha^2-\omega^2)}{\pi(\alpha^2+\omega^2)^2}$

$g(\omega) = \frac{\sigma^2\alpha}{\pi(\alpha^2+\omega^2)} + \frac{\sigma^2\alpha(\alpha^2-\omega^2)}{\pi(\alpha^2+\omega^2)} = \frac{\sigma^2\alpha}{\pi}\cdot\frac{\alpha^2+\omega^2+\alpha^2-\omega^2}{(\alpha^2+\omega^2)^2} =$

$= \frac{2\alpha^3\sigma^2}{\pi(\alpha^2+\omega^2)^2}$

$\boxed{№9}$ $\xi(t) = \sum_{\nu} F(t-t_\nu)[a_\nu\cos(\omega_c(t-t_\nu)) +$
$+ b_\nu\sin(\omega_c(t-t_\nu))]$; $\omega_c = const$

$F(\theta) = \begin{cases} \beta\exp(-\beta\theta), & \theta \geq 0, \beta > 0 \\ 0, & \theta < 0 \end{cases}$

a_ν, b_ν – стат. независимые между собой

$\langle a_\nu \rangle = \langle b_\nu \rangle = 0, \ \langle a_\nu^2 \rangle = \langle b_\nu^2 \rangle = \sigma^2$

Пусть $\theta = t - t_\nu$, тогда $f(\theta) = F(\theta)[a_\nu \cos\omega_c\theta + b_\nu \sin\omega_c\theta]$ Тогда $\langle \xi(t) \rangle = n_1 \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{a_\nu} f_{b_\nu} db_\nu \cdot$

$\cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\theta)[a_\nu \cos\omega_c\theta + b_\nu \sin\omega_c\theta]\,d\theta =$

$= n_1 \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} a_\nu f_{a_\nu} da_\nu \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{b_\nu} db_\nu \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\theta)\cos\omega_c\theta\,d\theta + \right.$

$\left. + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} b_\nu f_{b_\nu} db_\nu \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{a_\nu} da_\nu \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\theta)\sin\omega_c\theta\,d\theta \right] = 0$

$D[\xi(t)] = n_1 \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{a_\nu} f_{b_\nu} da_\nu db_\nu \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^2(\theta)\,d\theta = n_1\sigma^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F^2(\theta) \cdot$

$\cdot \cos^2(\omega_c\theta)\,d\theta + n_1\sigma^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F^2(\theta)\sin^2(\omega_c\theta)\,d\theta =$

$= n_1\sigma^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F^2(\theta)\,d\theta = n_1\sigma^2\beta/2$

$B_\xi(t) = n_1 \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{a_\nu} f_{b_\nu} da_\nu db_\nu \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\theta) f(\theta\tau)\,d\theta =$

$= n_1 \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{a_\nu} f_{b_\nu} da_\nu db_\nu \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\theta)F(\theta+\tau)\{a_\nu^2 \cos\omega_c\theta \cos\omega_c(\theta\tau) +$

$+ b_\nu^2 \sin\omega_c(\theta+\tau) + a_\nu b_\nu \sin\omega_c\theta \cos\omega_c(\theta\tau) + a_\nu b_\nu \cos\omega_c\theta \cdot$

$\cdot \sin\omega_c(\theta+\tau)]\,d\theta = n_1\sigma^2\beta^2 \cos\omega_c\tau\, e^{-\beta t} \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\beta\theta} d\theta, & \tau \geq 0 \\ \int\limits_{+\tau}^{+\infty} e^{-2\beta\theta} d\theta, & \tau < 0 \end{cases} =$

$= n_1\sigma^2\beta^2 \cos\omega_c\tau \cdot e^{-\beta\tau} \cdot \begin{cases} \frac{1}{2\beta}, & \tau \geq 0 \\ \frac{1}{2\beta} e^{-2\beta|\tau|}, & \tau < 0 \end{cases} =$

$= \frac{n_1\sigma^2\beta}{2} \cos\omega_c\tau\, e^{-\beta|\tau|}$

$g(\omega) = \frac{n_1\sigma^2\beta}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos\omega_c\tau\, e^{-\beta|\tau|} e^{-i\omega\tau} d\tau =$

$= c \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos\omega_c\tau \cos\omega\tau\, e^{-\beta|\tau|} d\tau - ic \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega_c\tau) \sin\omega\tau -$

$$\cdot e^{-\beta|\tau|}d\tau = c\left[\int_0^{\infty} e^{-\beta\tau}\cos\omega_c\tau\cos\omega\tau\,d\tau + \int_{-\infty}^{0} e^{\beta\tau}\cos\omega_c\tau\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\cos\omega\tau\,d\tau\right] = c\,(I_1 + I_2)$$

Известно: $\int_0^{\infty} e^{\alpha\tau}\cos\beta\tau\,d\tau = e^{\alpha\tau}\dfrac{\alpha\cos\beta\tau + \beta\sin\beta\tau}{\alpha^2+\beta^2}\Big|_0^{\infty}$

Тогда $I_1 = \int_0^{\infty}\dfrac{e^{-\beta\tau}}{2}\left(\cos(\omega_c-\omega)\tau + \cos(\omega_c+\omega)\tau\right)d\tau =$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{e^{-\beta\tau}\left(-\beta\cos(\omega_c-\omega)\tau + (\omega_c-\omega)\sin(\omega_c-\omega)\tau\right)}{\beta^2+(\omega_c-\omega)^2}\Big|_0^{\infty} +\right.$$

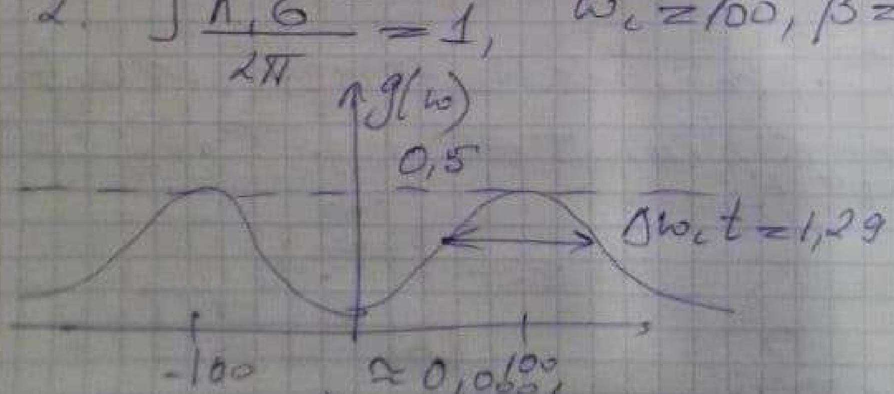
$$\left. + e^{-\beta\tau}\frac{\left(-\beta\cos(\omega_c+\omega)\tau + (\omega_c+\omega)\right)}{\beta^2+(\omega_c-\omega)^2}\cdot\sin(\omega_c+\omega)\tau\Big|_0^{\infty}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{\beta^2+(\omega_c-\omega)^2} + \frac{\beta}{\beta^2+(\omega_c-\omega)^2}\right)$$ Аналогично $I_2 = I_1$

Т.о. $g(\omega) = c\left\{\dfrac{\beta}{\beta^2+(\omega_c-\omega)^2} + \dfrac{\beta}{\beta^2+(\omega_c+\omega)^2}\right\} =$

$$= \frac{h_1\sigma^2}{2\pi}\cdot\frac{\beta^2(\beta^2+\omega^2+\omega_c^2)}{(\beta^2+(\omega_c-\omega)^2)(\beta^2+(\omega_c+\omega)^2)}$$

2. $\exists\ \dfrac{h_1\sigma^2}{2\pi} = 1,\quad \omega_c = 100,\ \beta = 1$



$\boxed{N10}$ 1 $\beta(\tau) = \begin{cases}\sigma^2, & |\tau| \le \tau_1\\ 0, & |\tau|\end{cases}$

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B(\tau)\,e^{-i\omega\tau}d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\tau_1}^{\tau_2}\sigma^2 e^{-i\omega\tau}d\tau =$$

$$B(t) = \langle \xi(t), \xi(t+\tau) \rangle = \frac{A^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega t + \varphi) \cdot$$

$$\cdot \cos(\omega|t-\tau| + \varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{A^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(\omega\tau + \cos(2\omega\tau + \omega\tau + 2\varphi))\, d\varphi = \frac{A^2}{2} \cos\omega\tau$$

$B(t)$ зависит только от τ

$\xi(t)$ – стационарный в широком смысле

$\boxed{N12}$ 1) $\langle \xi(t) \rangle = \langle A \rangle \langle e^{i\omega t} \rangle = 0$ – const

$$R_\xi(\tau) = \langle \xi(t) \xi(t+\tau) \rangle = \langle A e^{i\omega(t+\tau)} A^* e^{-i\omega t} \rangle$$

$$= \langle AA^* e^{i\omega\tau} \rangle = \langle AA^* \rangle \langle e^{i\omega\tau} \rangle =$$

$$= \sigma_A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} f(\omega)\, d\omega = \text{const}$$

$$D\varepsilon(t) = \langle (\varepsilon - \langle \varepsilon \rangle)^2 \rangle = \langle \varepsilon^*(t) \varepsilon(t) \rangle$$

$$= R_\xi(0) = \sigma_A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)\, d\omega = \sigma_A^2 = \text{const} \Rightarrow$$

$\varepsilon(t)$ яв. стац СП в широком смысле

2. Спектр. плотность

$$\rho(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} B(\tau) e^{-i\Omega\tau}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sigma_A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) e^{i\omega\tau}\, d\omega \right) e^{-i\Omega\tau}\, d\tau = \sigma_A^2 f(\Omega)$$

$\boxed{N13}$ $F(\theta) = \begin{cases} a \exp(-\beta\theta) e^{i\omega_c(1-\frac{u}{c})\theta} & \theta \geq 0, \beta > 0 \\ 0, & \theta < 0 \end{cases}$ $\quad a, \omega_c, \beta = \text{const}$

$$B_\xi(\tau) = h_1 \langle \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(\theta, u) F(\theta+\tau, u)\, d\theta \rangle_u =$$

$$= h_1 a^2 \int_0^{+\infty} e^{-\beta\theta} e^{-\beta(\theta+\tau)}\, d\theta \int e^{-i\omega_c(1-\frac{u}{c}\theta)} e^{i\omega_c(1-\frac{u}{c}) \cdot (\theta+\tau)}$$

$$= -\frac{\sigma^2}{2\pi(i\omega)} e^{-i\omega\tau}\Big|_{-\tau_1}^{\tau_1} = -\frac{\sigma^2}{i2\pi\omega}\left(e^{i\omega\tau_1} - e^{-i\omega\tau_1}\right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{\pi\omega}\sin\omega\tau_1$$

$g(\omega)\geq 0$ не выполняется $\Rightarrow$ такого стационарного СП не существует;

2) $B(\tau) = \sigma^2\frac{\sin\omega_0\tau}{\omega_0\tau}$, $\omega_0 > 0$ $\Rightarrow$ ищем $g(\omega)$ в виде

$$g_0(\omega) = \begin{cases} \alpha^2, & |\omega| \leq \omega_1 \\ 0, & |\omega| > \omega_1 \end{cases}$$

$$B_0(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_0(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \int_{-\omega_1}^{\omega_1} \alpha^2 e^{i\omega\tau} d\omega =$$

$$= \frac{\alpha^2}{i\tau} e^{i\omega\tau}\Big|_{-\omega_1}^{\omega_1} = \frac{2\alpha^2}{\tau}\sin\omega_1\tau.$$

Для $B(\tau) = B_0(\tau)$ требуется $\begin{cases} \omega_1 = \omega_0 \\ 2\alpha^2 = \frac{\sigma^2}{\omega_0} \end{cases}$

Спектр. плотность

$$g(\omega) = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{2\omega_0}, & |\omega| \leq \omega_0 \\ 0, & |\omega| > \omega_0 \end{cases}$$

$\boxed{№11}$ $\xi(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$,

$$f(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & |\varphi| \leq \pi \\ 0, & |\varphi| > \pi \end{cases}$$

$$\langle \xi(t) \rangle = A\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\cos(\omega t + \varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{A}{2\pi}\sin(\omega t + \varphi)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\cdot \frac{e^{-mu^2/2k_Б T}}{\sqrt{2\pi k_Б T/m}}\, du = n_1 a^2 e^{-\beta\tau} e^{i\omega_c \tau}.$$

$$\cdot \int_0^{\infty} e^{-2\beta\theta} d\theta \int e^{i\frac{\omega_c}{c} u\tau} \cdot \frac{e^{-\frac{mu^2}{2k_Б T}}}{\sqrt{2\pi k_Б T/m}}\, du = \frac{n_1 a^2 e^{-\beta\tau}}{2\beta} \cdot$$

$$\cdot \exp\left[\frac{-k_Б T}{2m}\left(\frac{\omega_c}{c}\right)^2 \tau^2\right]$$

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} B_{\varepsilon}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{n_1 a^2 T_c}{2\sqrt{2\pi \frac{k_Б T}{m}\left(\frac{\omega_c}{c}\right)^2}} \cdot \exp\left[-(\omega-\omega_c)^2 / \frac{2k_Б T}{m}\left(\frac{\omega_c}{c}\right)^2\right]$$

$\boxed{N14}$ Для существования 1-ой производной в т. t_0

$\exists \left.\frac{\partial m}{\partial t}\right|_{t=t_0}$, $\exists \left.\frac{\partial^2 B(t_1, t_2)}{\partial t_1, \partial t_2}\right|_{t_1 = t_2 = t_0}$

У стац. случ. процесса $m_1 = const$, т.е. $\exists \left.\frac{\partial m}{\partial t}\right|_{t=t_0}$

$$B(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{i\omega(t_1 - t_2)} d\omega$$

$$\frac{\partial B(t_1, t_2)}{\partial t_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{i\omega(t_1 - t_2)}$$

$$\frac{\partial B(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)(i\omega) e^{i\omega(t_1 - t_2)} (-i\omega) d\omega =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 g(\omega) e^{i\omega(t_1 - t_2)} d\omega; \quad \left.\frac{\partial B(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}\right|_{t_1 = t_2 = t_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 g(\omega) d\omega$$

$\Rightarrow$ усл. $\exists \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 g(\omega) d\omega$

$$B(\tau) = \sigma^2 (1 + \beta|\tau|) e^{-\alpha|\tau|}, \quad \alpha > 0$$

1) Стац. проц.: $g(\omega) = \frac{\alpha\sigma^2}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)} + \frac{\beta\sigma^2(\alpha^2 - \omega^2)}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)} =$

$$= \frac{\sigma^2}{\pi} \frac{\alpha^3 + \alpha\omega^2 + \alpha^2\beta - \beta\omega^2}{(\alpha^2 + \omega^2)^2}$$

Должно быть $g(\omega) \geq 0 \Rightarrow \alpha(\alpha^2+\omega^2)+\beta(\alpha^2-\omega^2) = \alpha^3+\alpha\omega^2+$
$+\beta\omega^2+\beta\alpha^2-\beta\omega^2 = \alpha^3+\beta\cdot\alpha^2+\omega^2(\alpha-\beta)$

$$\begin{cases} \alpha+\beta>0 \Rightarrow \beta>-\alpha \\ \alpha-\beta>0 \Rightarrow \beta<\alpha \end{cases} \Rightarrow -\alpha \leq \beta \leq \alpha \Rightarrow |\beta| \leq \alpha$$

2. Должен $\exists$ предел $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 g(\omega)\,d\omega$

$$\omega^2 g(\omega) = \frac{\sigma^2}{\pi} \frac{\alpha^2(\alpha+\beta)\omega^2+(\alpha-\beta)\omega^4}{(\alpha^2+\omega^2)^2}$$

Особенность в бесконечности

При $\alpha \neq \beta$ $\omega^2 g(\omega) \xrightarrow[\omega\to\infty]{} \frac{\sigma^2(\alpha-\beta)}{\pi}$

$\alpha=\beta$ $\omega^2 g(\omega) \sim \frac{2\sigma^2\alpha^3}{\pi\,\omega^2}$

При $\alpha \neq \beta$ $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 g(\omega)\,d\omega$ расходится, при $\alpha=\beta$ сходится

$\boxed{№15}$ $\xi(t) = x(t)y(t)z(t)$ ($x(t), y(t), z(t)$ - незав. стационар.)

$\langle x(t)\rangle = \langle y(t)\rangle = \langle z(t)\rangle = 0$, $g_x(\omega), g_y(\omega), g_z(\omega)$

1. Т.к. независимы, то

$\langle \xi(t)\rangle = \langle x(t)\rangle\langle y(t)\rangle\langle z(t)\rangle = 0$

$B_\xi(\tau) = \langle x(t)y(t)z(t)x(t+\tau)y(t+\tau)z(t+\tau)\rangle =$
$= \langle x(t)x(t+\tau)\rangle \ldots = B_x(\tau)B_y(\tau)B_z(\tau)$

Далее: $g_\xi(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} B_\xi(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau$

По свойству преобразования Фурье

$g_\xi(\omega) = g_x(\omega) \otimes g_y(\omega) \otimes g_z(\omega) = \int g_x(u)g_y(\omega-u)\,du \otimes g_z(\omega) =$
$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_x(u)g_y(v-u)\,du\right) g_z(\omega-v)\,dv =$

$$= \iint_{-\infty}^{+\infty} g_x(u)\, g_y(v-u)\, g_z(w-v)\, du\, dv$$

$\boxed{№16}$ $\xi(t) = m_\xi(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \psi_k(t)$

m_ξ — детерминированная ф-я

$\langle \xi_k \rangle = 0$, $\langle \xi_k \xi_m \rangle = \lambda_k^2 \delta_{km}$

$\int \psi_k(t)\psi_m(t)\,dt = \delta_{km}$

1) $\langle \xi(t) \rangle = m_\xi(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \langle \xi_k \psi_k(t) \rangle =$

$= m_\xi(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \langle \xi_k \rangle \psi_k(t) = m_\xi(t)$

$D\xi(t) = \sigma_\xi^2 = \langle (\xi(t) - \langle \xi(t) \rangle)^2 \rangle =$

$= \langle (\xi(t) - m_\xi(t))^2 \rangle = \langle (\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \psi_k(t))^2 \rangle =$

$= \sum_{k,m=1}^{\infty} \langle \xi_k \xi_m \psi_m(t) \psi_m(t) \rangle =$

$= \sum_{k,m=1}^{\infty} \lambda_k^2 \delta_{km} \psi_k(t) \psi_m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \psi_k^2(t)$

Нормальное распред $A(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi^2}} \exp\left(-\frac{(x - \langle \xi(t) \rangle)^2}{2\sigma_\xi^2}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \psi_k^2(t)}} \cdot \exp\left(-\frac{(x - m_\xi(t))^2}{2\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \psi_k^2(t)}\right)$

2) $m_1(t_1) = \langle \xi(t_1) \rangle = m_\xi(t_1)$

$m_1(t_2) = \langle \xi(t_2) \rangle = m_\xi(t_2)$

$\vec{m}_1 = \begin{pmatrix} m_1(t_1) \\ m_1(t_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_\xi(t_1) \\ m_\xi(t_2) \end{pmatrix}$; $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$D\xi(t_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_k^2 \psi_k^2(t_1)$; $D\xi(t_2) = \sum \lambda_k^2 \psi_k^2(t_2)$

$B_\xi(t_1, t_2) = \langle (\xi(t_1) - \langle \xi(t_1) \rangle)(\xi(t_2) - \langle \xi(t_2) \rangle) \rangle$

$$= \left\langle \left(\sum_{n=1} \xi_n \varphi_n(t_1) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \varphi_k(t_2) \right) \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \varphi_k(t_1) \varphi_k(t_2)$$

$$B = \begin{pmatrix} D\xi(t_1) & B\xi(t_1,t_2) \\ B\xi(t_2,t_1) & D\xi(t_2) \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{\det B} \begin{pmatrix} D\xi(t_2) & -B\xi(t_1,t_2) \\ -B\xi(t_1,t_2) & D\xi(t_1) \end{pmatrix}$$

$$\det B = D_\xi(t_1) D_\xi(t_2) - (B_\xi(t_1,t_2))^2$$

Нормальное распределение

$$f(x_1,x_2,t_1,t_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det B}} \exp\left(-\frac{(\vec{X}-\vec{m}_1)^T B^{-1} (\vec{X}-\vec{m}_1)}{2} \right)$$

$\boxed{N17}$ $\xi(t)$ – норм. стац. расп.

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad B_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 e^{-\beta^2 \tau^2/2}$$

$$\eta(t) = \frac{d\xi(t)}{dt}$$

1) $B_\eta(\tau)$ и $f_\eta(y)$; $B_\xi(t_1,t_2) = \sigma_\xi^2 e^{-\beta^2(t_1-t_2)^2/2}$

$$B_\eta(t_1,t_2) = \frac{\partial^2 B_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$$

$$\frac{\partial B_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_2} = \sigma_\xi^2 e^{-\beta^2(t_1-t_2)^2/2} \cdot (-\beta^2(t_1-t_2) \cdot (-1))$$

$$\frac{\partial^2 B_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \beta^2 \sigma_\xi^2 (t_1-t_2) e^{-\beta^2(t_1-t_2)^2/2} \cdot (-\beta^2(t_1-t_2)) + \beta^2 \sigma_\xi^2 e^{-\beta^2(t_1-t_2)^2/2}$$

$$B_\eta(\tau) = \beta^2 \sigma_\xi^2 (1-\beta^2 \tau^2) e^{-\beta^2 \tau^2/2}$$

$$\langle \eta(t) \rangle = \frac{d\langle \xi(t) \rangle}{dt} = 0$$

$$D_\eta(t) = B_\eta(0) = \beta^2 \sigma_\xi^2 = \sigma_\eta^2$$

Нормальное распределение

$$f_\eta(y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta^2\sigma_\xi^2}} \exp\left(\frac{-y^2}{2\beta^2\sigma_\xi^2} \right)$$

2. Продольный угловой размер лучшей картины на взволнованной водной поверхности

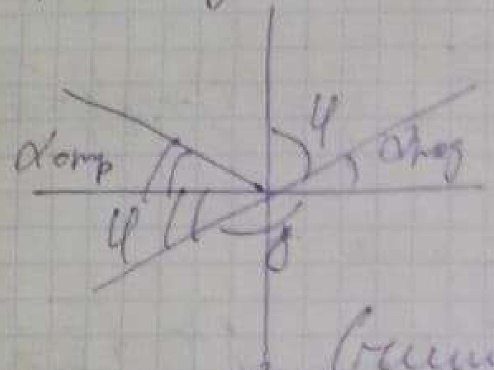
] $\alpha_{пад}$ – угол падения лучшего света

γ – угол пов-ти в точке падения света

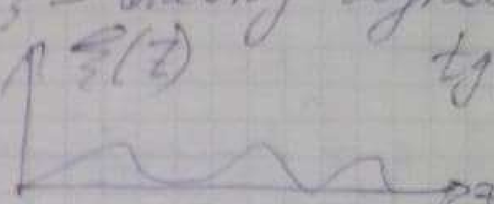
$\alpha_{пад}$ – постоянная

$\alpha_{отр}$, γ – случ. величина

$\varphi = \alpha_{пад} - \gamma$, $\alpha_{отр} = \varphi - \gamma = \alpha_{пад} - 2\gamma$



Введем случ величину ξ – высоту водной пов-ти



$tg\,\gamma(z) = \frac{d\xi(z)}{dz}$

Считаем $\langle \xi(z) \rangle = 0$, $B_\xi(\rho) = \sigma_\xi^2 e^{-\beta^2\rho^2/2}$, $\rho = z_1 - z_2$

$\xi(z)$ – норм. стац СП

$\eta(z) = tg\,\gamma(z) \Rightarrow \sigma_\eta^2 = B_\eta(0) = \beta^2\sigma_\xi^2$

$-3\sigma_\eta < \eta < 3\sigma_\eta$ с вер-тью 99,73 %

Можно считать, что $-arctg(3\beta\sigma_\xi) < \gamma < arctg(3\beta\sigma_\xi)$

$\alpha_{пад} - 2arctg(3\beta\sigma_\xi) < \alpha_{отр} < \alpha_{пад} + 2arctg(3\beta\sigma_\xi)$

$\alpha_{отр} = 4\,arctg(3\beta\sigma_\xi)$

$\boxed{N18}$ $\xi(t)$ – белый шум, $\langle \xi(t) \rangle = 0$

N_0 – спектр плотност

1) частотная и импульсная реакция

$$H(\omega) = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$h(t)$ – обр преобразов Фурье, т.к. $e^{-\alpha\tau} \leftrightarrow \frac{1}{j\omega + \alpha}$

то $h(\tau) = \frac{1}{RC} exp\left(-\frac{\tau}{RC}\right)$, $\tau \geq 0$

2) Ковариац. ф. дисперс., спектр. плотности $\eta(t)$

$$g_\eta(\omega)=g_\varepsilon(\omega)\cdot|H(\omega)|^2=\frac{N_0}{1+\omega^2R^2C^2}$$

$$B_\eta(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{N_0(\cos\omega\tau+i\sin\omega\tau)}{1+\omega^2R^2C^2}d\omega=$$

$$=\frac{2N_0}{R^2C^2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega\tau}{R^2C^2+\omega^2}d\omega=\frac{2N_0}{R^2C^2}\frac{\pi}{2/RC}e^{-\frac{1}{RC}|\tau|}=$$

$$=\frac{\pi N_0}{RC}e^{-\frac{|\tau|}{RC}}=\frac{\pi N_0}{RC}e^{-|\tau|/RC};\quad D_\eta(\tau)=B_\eta(0)=\frac{\pi N_0}{RC}$$

3) Дисперсия $\eta(t)$ в переходном режиме

$$D_\eta(t)=\int_0^t\int_0^t h(\tau_1)h(\tau_2)\delta(\tau_2-\tau_1)d\tau_1d\tau_2=$$

$$=\frac{1}{R^2C^2}\int_0^t\int_0^t\exp\left(-\frac{\tau_1-\tau_2}{RC}\right)N_0\delta(\tau_2-\tau_1)d\tau_1d\tau_2=$$

$$=\frac{N_0}{R^2C^2}\int_0^t e^{-\frac{\tau_1}{RC}}d\tau_1\int_0^t e^{-\frac{\tau_2}{RC}}\delta(\tau_2-\tau_1)d\tau_2=$$

$$=\frac{N_0}{R^2C^2}\int_0^t e^{-\frac{\tau_1}{RC}}e^{-\frac{\tau_1}{RC}}d\tau_1=\frac{N_0}{R^2C^2}\left(-\frac{RC}{2}\right)e^{-\frac{2\tau_1}{RC}}\Big|_{\tau_1=0}^{t}=$$

$$=\frac{N_0}{2RC}\left(1-e^{\frac{2t}{RC}}\right)$$

$\boxed{N19}$ $B_\eta(\tau)=\sigma^2\exp\{-\alpha\tau^2\},\ \alpha>0$

$B_\varepsilon(\tau)$ — ?

$$H(\omega)=\frac{R}{R+j\omega L}=\frac{1}{1+j\omega\frac{L}{R}}$$

$$g_\eta(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}B_\eta(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau=\frac{\sigma^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha\tau^2-i\omega\tau}d\tau=$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\left(\tau+\frac{i\omega}{2\alpha}\right)^2} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}\, d\tau =$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\left(\tau+\frac{i\omega}{2\alpha}\right)^2} d\tau =$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha u^2} \frac{du}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\sigma^2}{2\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{\sigma^2}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$$

$$g_\varepsilon(\omega) = \frac{g_\eta(\omega)}{|H(\omega)|^2} = \frac{\sigma^2\left(1+\omega^2\frac{L^2}{R^2}\right)}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$$

$$k_\varepsilon(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_\varepsilon(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{\sigma^2}{2\sqrt{\pi\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} e^{i\omega\tau} d\omega +$$

$$+ \frac{\sigma^2}{2\sqrt{\pi\alpha}} \frac{L^2}{R^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} e^{i\omega\tau} d\omega = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \frac{\sigma^2}{2\sqrt{\pi\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{4\alpha}(\omega - i\alpha\tau)^2} e^{-\alpha\tau^2} d\omega =$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\alpha\tau^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} 2\sqrt{\alpha}\, du = \frac{\sigma^2}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\alpha\tau^2} \sqrt{\pi}\, 2\sqrt{\alpha} =$$

$$= \sigma^2 e^{-\alpha\tau^2}$$

$$I_2 = \frac{\sigma^2}{2\sqrt{\pi\alpha}} \frac{L^2}{R^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 e^{-\frac{1}{4\alpha}(\omega - i2\alpha\tau)^2} e^{-\alpha\tau^2} d\omega =$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\sqrt{\pi\alpha}} \frac{L^2}{R^2} e^{-\alpha\tau^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (u + i2\alpha\tau)^2 e^{-\frac{u^2}{4\alpha}} du =$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\sqrt{\pi\alpha}} \frac{L^2}{R^2} e^{-\alpha\tau^2} 2\sqrt{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} (2\sqrt{\alpha}\, v + i2\alpha\tau)^2 e^{-v^2} dv =$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\sqrt{\pi\alpha}} \frac{L^2}{R^2} e^{-\alpha\tau^2} \cdot 8\alpha^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} (v^2 + 2i\sqrt{\alpha}\, v\tau - \alpha\tau) e^{-v^2} dv =$$

$$= \frac{4\sigma^2 L^2 e^{-\alpha\tau^2}\alpha}{\sqrt{\pi}R^2}\left(I_{21}+I_{22}+I_{23}\right)$$

$$I_{23} = -\alpha\tau^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2}dv = -\alpha\tau^2\sqrt{\pi}$$

$$I_{22} = \alpha i\sqrt{\alpha}\,\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty} v e^{-v^2}dv = 0$$

$$I_{21} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v^2 e^{-v^2}dv = -\frac{1}{2}ve^{-v^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2}dv = 0+\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$B_\varepsilon(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha\tau^2} + \frac{4\sigma^2L^2e^{-\alpha\tau^2}}{\sqrt{\pi}R}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\sqrt{\pi}\alpha\tau^2\right) =$$

$$= \sigma^2 e^{-\alpha\tau^2}\left[1+4\frac{L^2}{R^2}\left(\frac{1}{2}-\alpha\tau^2\right)\right]$$

$\boxed{N20}$ 1) $g_\eta(\omega) = |H(i\omega)|^2 g_\varepsilon(\omega) = \frac{N_0}{1+\omega^2R^2C^2}$

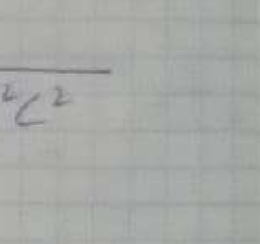
$N_0 = \frac{k_Б T R}{\pi}$

$$g_\eta(\omega) = \frac{k_Б T R}{\pi}\cdot\frac{1}{1+\omega^2R^2C^2}$$

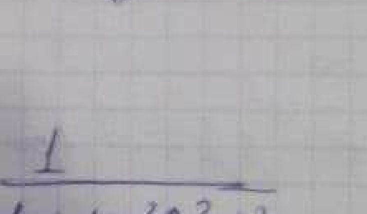
$$g(-\omega) = g(\omega) = 2g_\eta(\omega) = \frac{2k_Б T R}{\pi}\cdot\frac{1}{1+\omega^2R^2C^2}$$

2) $F(R) = \frac{g_\eta^+(\omega)}{k_Б T} = \frac{2R}{\pi}\cdot\frac{1}{1+\omega^2R^2C^2}$, $\omega = 2\pi f$

а) $f_1 = 100$ Гц, $C = 210$ нФ, $R_{01} = \frac{1}{2\pi f_1 C} = 16$ кОм

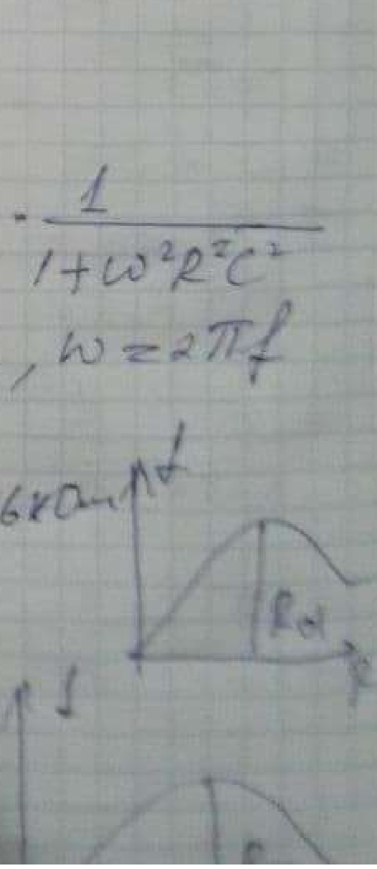


б) $f_2 = 1{,}5$ кГц, $R_{02} = 11$ Ом



в) $f_3 = 13$ кГц

$R_{03} = 10$ Ом



3) $D_\eta = \int_{2\pi f_1}^{2\pi f_2} g_{\eta +}(\omega)\,d\omega = \frac{2k_Б TR}{\pi}\int_{2\pi f_1}^{2\pi f_2} \frac{1}{1+\omega^2R^2C^2}\,d\omega =$

$= \frac{2k_Б TR}{\pi RC}\int_{\omega_1 RC}^{\omega_2 RC} \frac{1}{1+\omega^2R^2C^2}\,d(\omega RC) =$

$= \frac{2k_Б T}{\pi C}\left(\operatorname{arctg}(2\pi f_2 RC) - \operatorname{arctg}(2\pi f_1 RC)\right).$

4) $D_\eta = \int_0^{+\infty} g_{\eta +}(\omega)\,d\omega = \frac{2k_Б T}{\pi C}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{k_Б T}{C}$