Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования«Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»

«УТВЕРЖДЕНО»

Директор физтех-школы
радиотехники и компьютерных технологий
А.В. Дворкович

.Рабочая программа дисциплины (модуля)

по дисциплине: Теория случайных процессов
по направлению: Прикладные математика и физика (бакалавриат)
профиль подготовки: Радиотехника и компьютерные технологии
Физтех-школа Радиотехники и Компьютерных Технологий
кафедра информационных систем
курс: 3
квалификация: бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации:
6 (весенний) – Экзамен
Аудиторных часов: 64 всего, в том числе:
лекции: 64 час.
практические и семинарские занятия: нет
лабораторные занятия: нет

Самостоятельная работа: 32 час.

Подготовка к экзамену: 40 час.

Всего часов: 136, всего зач. ед.: 4

Программу составил: В.Н. Лагуткин, д.т.н., доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры информационных систем 20.07.2020г.

Заведующий кафедрой д.т.н. Боев С.Ф.

Аннотация

В курсе рассматриваются основные понятия теории случайных процессов как части теории вероятностей, основные классы и типы случайных процессов, элементы стохастического анализа случайных процессов, основные свойства и методы анализа случайных процессов. Даны примеры приложения теории случайных процессов при исследовании систем различной природы, в частности, в радиотехнике, физике, метеорологии, а также в задачах оптимальной обработки сигналов как случайных функций времени и координат в информационных системах. Более подробно рассматриваются статистические свойства широко известных типов случайных процессов: импульсных, стационарных, эргодических, гауссовских, узкополосных, марковских процессов, - и их линейных и нелинейных преобразований. Количественный анализ статистических свойств и преобразований случайных процессов проводится на основе подходящих стохастических моделей рассматриваемых систем, параметры состояния которых являются случайными функциями.

Для успешного освоения курса слушателю необходимо знать курсы математического анализа, линейной алгебры, теории вероятностей, общей физики, а также желательно владеть основами теории функций комплексного переменного и курса уравнений математической физики.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины:

- освоение студентами основных понятий и методов в области исследования стохастически определенных систем, параметры состояния которых являются случайными функциями времени и координат.

Задачи дисциплины:

- изучение основных понятий теории случайных процессов;
- изучение основных характеристик случайных процессов различных типов;
- изучение методов исследования случайных процессов и оценки их статистических характеристик;
- изучение преобразований случайных процессов в линейных и нелинейных системах;
- изучение способов представлений и моделирования случайных процессов;
- изучение способов применения теории случайных процессов для исследовании стохастически определенных систем различной природы, в частности, в задачах оптимальной обработки случайных сигналов в информационных системах

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

способность применять в сфере профессиональной деятельности современные методы анализа случайных процессов, а также обработки и представления информации с учетом случайных воздействий

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

Знать:

- основные понятия теории случайных процессов,
- основные статистические свойства и характеристики случайных процессов различных типов,
- основные методы математического анализа, применяемые в теории случайных процессов,

- способы применения теории случайных процессов для исследования стохастичеки определенных систем и обработки информации,

Уметь:

- выбирать подходящие математические модели для описания и исследования характеристик рассматриваемых стохастически определенных систем,
- решать задачи по определению характеристик процессов на выходе рассматриваемых систем и устройств по известным характеристикам входных воздействий,

Владеть:

- методами статистического описания случайных процессов и сигналов;
- методами представления и моделирования случайных процессов различных типов
- методами применения теории случайных процессов для решения практических задач преобразования и обработки входных данных при наличии случайных воздействий.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины (модуля)	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Основы теории случайных процессов	4			2
2	Основные классы случайных процессов. Элементы стохастического анализа случайных функций	4			2
3	Стационарные случайные процессы. Эргодичность случайных процессов	4			2
4	Практическое определение статистических характеристик стационарного эргодического случайного процесса.	4			2
5	Спектральное представление стационарных в широком смысле случайных процессов	4			2
6	Белый шум. Аппроксимация реального случайного процесса белым шумом	4			2
7	Гауссовские (нормальные) случайные процессы и их статистические свойства.	4			2

8	Преобразование случайных процессов в линейных системах.	4			2
9	Преобразования стационарного случайного процесса в линейных динамических системах с постоянными параметрами.	4			2
10	Оптимальные линейные системы.	4			2
11	Узкополосные случайные процессы.	4			2
12	Преобразование случайных процессов в безынерционных нелинейных системах.	4			2
13	Марковские случайные процессы	4			2
14	Решение уравнений Фоккера-Планка-Колмогорова	4			2
15	Приложения теории марковских случайных процессов	4			2
16	Применение теории случайных процессов к задачам обнаружения, различения и оценки параметров сигналов в присутствии шумов	4			2
Итого часов		64			32
Подготовка к экзамену		40 час.			
Общая трудоёмкость		136час., 4 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 6 (Осенний)

1. Основы теории случайных процессов

   Введение. Понятие случайного процесса (СП). Основные определения. Реализации СП. Примеры некоторых типов СП. Одномерные и многомерные распределения вероятностей, плотности распределений вероятностей СП, их свойства, условие согласованности. Одномерные и многомерные характеристические функции СП, их свойства, условие согласованности. Моментные функции СП. Начальные и центральные моментные функции. Связь моментных и характеристических функций СП.

2. Основные классы случайных процессов. Элементы стохастического анализа случайных функций

   Некоторые основные типы случайных процессов. Элементы стохастического анализа случайных функций Дифференциальные уравнения со случайной правой частью. Стохастические интегралы. Разложение СП по ортогональным функциям (Карунена-Лоэва). Представления СП в виде стохастических интегралов.

3. Стационарные случайные процессы. Эргодичность случайных процессов.

   Пуассоновские импульсные СП. Дробовой шум. Определения стационарности в узком и широком смысле. Эргодичность СП. Необходимые и достаточные условия эргодичности стационарного СП при определении математического ожидания, дисперсии, функции корреляции. Определение плотности вероятности по одной реализации эргодического СП. Необходимое и достаточное условие эргодичности гауссовского стационарного СП.

4. Практическое определение статистических характеристик стационарного эргодического случайного процесса.

   Практическое определение математического ожидания и ковариационной функции стационарного эргодического СП. Требуемая длительность обрабатываемой реализации для заданной точности оценок. Время корреляции. Свойства ковариационной функции стационарного СП. Примеры ковариационных функций стационарных СП.

5. Спектральное представление стационарных в широком смысле случайных процессов.

   Теорема о спектральном представлении стационарных в широком смысле СП. Спектральная интенсивность и спектральная плотность СП. Связь спектральной плотности с ковариационной функцией (теорема Винера-Хинчина). Основные свойства спектральной плотности. Соотношение неопределенности для эффективной ширины спектра СП и времени корреляции. Примеры спектральных плотностей стационарных СП.

6. Белый шум. Аппроксимация реального случайного процесса белым шумом.

   Асимптотический смысл дельта-коррелированных СП. Белый шум. Аппроксимация реального случайного процесса белым шумом (функция корреляции и спектральная плотность). Взаимные спектральные плотности и их свойства. Примеры спектральных представлений стационарных СП. Практическое определение спектральной плотности стационарного СП. Спектральный анализ нестационарных СП.

7. Гауссовские (нормальные) случайные процессы и их статистические свойства.

   Определение гауссовского СП. Многомерные плотности вероятности и соответствующие характеристические функции. Основные свойства гауссовских СП. Некоррелированность и независимость. Стационарность в строгом и широком смысле. Многомерные смешанные моменты и их вычисление. Линейные преобразования гауссовских СП. О законе распределения на выходе линейных систем. Производная гауссовского СП. Оценка значения гауссовского случайного процесса по значениям процесса в другие моменты времени.

8. Преобразование случайных процессов в линейных системах.

   Временной и спектральный подходы при описании преобразований СП в линейной системе. Математическое ожидание, ковариационная функция и дисперсия процесса на выходе системы в переходном и установившемся режимах. Спектральная плотность выходного процесса в установившемся режиме.

9. Преобразования стационарного случайного процесса в линейных динамических системах с постоянными параметрами.

   Примеры преобразования стационарных СП в линейных динамических системах с постоянными параметрами: винеровский процесс, преобразование белого шума линейной динамической системой первого порядка. Броуновское движение и тепловой шум в электрических цепях. Воздействие шума на следящую систему. Фильтрация квазистационарных процессов линейными системами с постоянными параметрами.

10. Оптимальные линейные системы.

   Задачи теории оптимальных линейных систем. Сглаживание и прогнозирование стационарных воздействий с использованием бесконечной предыстории. Сглаживающий фильтр с бесконечной задержкой. Выражения для функции передачи и среднеквадратической ошибки оптимального фильтра. Примеры. Максимизация отношения сигнал/шум; согласованный фильтр.

11. Узкополосные случайные процессы.

   Определение узкополосного СП. Ковариационная функция узкополосного высокочастотного процесса. Эквивалентность узкополосного СП двум медленно меняющимся процессам. Узкополосные случайные процессы, определяемые дифференциальными уравнениями. Огибающая и фаза узкополосного случайного процесса. Совместная двумерная плотность вероятности огибающей и фазы гауссовского узкополосного СП. Релеевские флуктуации. Огибающая суммы гармонического сигнала и шума. Обобщенный закон распределения Релея.

12. Преобразование случайных процессов в безынерционных нелинейных системах.

Законы распределения процесса на выходе безынерционных нелинейных систем. Плотность вероятности при квадратичном преобразовании. Определение ковариационных функций на выходе нелинейных систем. Случай узкополосного входного сигнала. Квадратичное детектирование шума и аддитивной смеси полезного сигнала и шума. Вычисление моментных функций при экспоненциальном преобразовании. Измерение шумовых сигналов. Чувствительность радиометров.

13. Марковские случайные процессы.

Основные определения марковских случайных процессов. Плотность вероятности перехода и ее свойства. Многомерная плотность вероятности. Однородные и стационарные процессы. Уравнение Смолуховского. Дифференциальные уравнения Колмогорова и уравнение Фоккера-Планка. Начальные и граничные условия. Запись уравнения Фоккера-Планка через поток вероятности. Вычисление коэффициентов сноса и диффузии для процессов, заданных стохастическими дифференциальными уравнениями. Примеры марковских СП: винеровский случайный процесс, воздействие белого шума на линейную динамическую систему первого порядка.

14. Решение уравнений Фоккера-Планка-Колмогорова.

Стационарное решение уравнений Фоккера-Планка-Колмогорова. Методы решения нестационарных уравнений Фоккера-Планка-Колмогорова. Гауссовские марковские процессы. Многомерные непрерывные (диффузионные) марковские процессы. Многомерные марковские процессы, определяемые системами стохастических уравнений первого порядка. Приведение немарковского процесса к марковскому с большей размерностью.

15. Приложения теории марковских случайных процессов

Задача о времени первого достижения границ марковским случайным процессом. Определение математического ожидания времени первого достижения границы марковским случайным процессом с использованием обратного уравнения Колмогорова. Статистическое описание явления «переброса» процесса из одного устойчивого состояния в другое.

16. Применение теории случайных процессов к задачам обнаружения, различения и оценки параметров сигналов в присутствии шумов.

Некоторые основные понятия статистической теории решений. Отношение и функция правдоподобия, метод максимума правдоподобия. Наблюдаемые координаты СП. Использование ортогональных представлений. Обнаружение сигналов на фоне белого гауссова шума. Бинарное обнаружение. Корреляционный приемник. Многоальтернативная задача различения сигналов на фоне белого гауссова шума. Оценка параметров сигналов в присутствии белого гауссова шума. Линейные и нелинейные оценки. Обнаружение и оценка параметров сигналов в присутствии небелого гауссова шума. Использование разложения Карунена-Лоэва. Интегральное уравнение для опорного сигнала.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

учебная аудитория для проведения занятий лекционного / семинарского типа, оснащенная мультимедийным оборудованием.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. А.В. Булинский, А.Н. Ширяев. Теория случайных процессов. М: «Физматлит», 2005
2. А.А. Натан, О.Г.Горбачев, С.А. Гуз. Основы теории случайных процессов. М: МЗ-Пресс, 2003
3. Ю.А. Розанов. Введение в теорию случайных процессов, М: «Наука», 1982.

Дополнительная литература

1. В.Н. Тутубалин Теория вероятностей, М:., Издательский центр «Академия», 2008
2. С.М. Рытов. Введение в статистическую радиофизику. ч.1. Случайные процессы. М: «Наука», 1976.
3. Б.Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники. М: «Радио и связь», 1989.

Пособия и методические указания

1. А.В. Булинский. Случайные процессы. Примеры, задачи, упражнения. М: МФТИ, 2010
2. Б.М. Миллер, А.Р.Панков, Теория случайных процессов в примерах и задачах. М.: «Физматлит», 2002

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используется

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Не используется

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике при решении конкретных задач.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения, понятия, приемы и методы теории случайных процессов.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

– чтение и конспектирование рекомендованной литературы;

– проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе);

– решение задач, предлагаемых студентам в задании (см. приложение);

– подготовку к экзамену.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к преподавателю.

Задание на курсовую работу по «Теории случайных процессов»

Часть 1

Задача N 1

Пусть конечное множество элементарных событий Ω составляют равновероятные события вида $\omega = \alpha_1\alpha_2...\alpha_n$, где каждое α_i, $i = 1,...,n$ может принимать значения 0 или 1, а случайная величина $\xi(\omega)$ определяется формулой $\xi(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{2^i}$ (т.е. в двоичной системе $\xi(\omega) = 0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n$). Определить множество значений $\{x_i\}$ такой случайной величины и ее распределение вероятностей.

Задача N 2

Используя теорему о дифференцировании интегралов, зависящих от параметров, получить соотношение, связывающее моментные и характеристические функции

$$\frac{1}{i^s} \frac{\partial^s \varphi_n(u_1, u_2, ..., u_n; t_1, t_2, ..., t_n)}{\partial u_{k_1} \partial u_{k_2} ... \partial u_{k_s}} \Bigg|_{u_1=u_2=...=u_n=0} = \left\langle \xi(t_{k_1})\xi(t_{k_2})...\xi(t_{k_s}) \right\rangle = m_s(t_{k_1}, t_{k_2}, ..., t_{k_s})$$

$$k_1, k_2, ..., k_s = 1, ..., n.$$

Задача N 3

Нормальный случайный процесс $\xi(t)$ в момент t имеет плотность вероятности

$$f(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-a(t))^2/2\sigma^2(t)}$$

1) Найти характеристическую функцию $\varphi_\xi(y;t)$.

2) Вычислить математическое ожидание $m_1 = M[\xi(t)]$ и центральные моменты $\mu_n(t)$, используя $\varphi_\xi(y;t)$.

3) Определить характеристическую функцию и плотность вероятности суммы независимых случайных величин $\xi(t_k)$ процесса: $\eta = \sum_{k=1}^{n} \xi(t_k)$

Задача N 4

1) Показать, что для непрерывного случайного процесса с независимыми приращениями $\xi(t), t \geq 0$ ковариационная функция $B_\xi(t_1, t_2)$ связана с дисперсией $D_\xi(t)$ соотношением $B_\xi(t_1, t_2) = D_\xi(t_{\min}),\ t_{\min} = \min(t_1, t_2)$,
2) Получить выражения для многомерных распределений винеровского и пуассоновского случайных процессов.

Задача N 5

Двоичный счетчик пуассоновского потока частиц в каждом такте выдает значение $\xi_{\mathrm{k}} = 0$, если в течении длительности такта τ не пришло ни одной частицы, и значение $\xi_{\mathrm{k}} = 1$, если пришла одна или более частиц.

1) Как оценить среднюю частоту пуассоновского потока частиц λ имея запись случайной последовательности $\xi_{\mathrm{k}}, \mathrm{k} = 1,\ldots \mathrm{N}$ нулей и единиц?
2) Как зависит точность оценки средней частоты λ от длины записи N?

Задача N 6

Реализации случайного телеграфного процесса $\eta(t), t \geq 0$ представляют собой кусочно-постоянные знакопеременные функции, принимающие два значения (С и -С): $\eta(t) = C(-1)^{\xi(t)}$, где $\xi(t), t \geq 0$ $(\xi(0) = 0)$ - реализации пуассоновского случайного процесса, приращения которого $\Delta\xi(\tau) = \xi(t+\tau) - \xi(t) \geq 0$ на произвольных интервалах времени $\tau \geq 0$ являются случайными величинами, имеющими пуассоновское распределение с интенсивностью λ:

$$P(\Delta\xi(\tau) = n) = \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} e^{-\lambda\tau}, \; n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Получить выражения для математического ожидания $\langle \eta(t) \rangle, t \geq 0$ и корреляционной функции $R(t_1, t_2) = \langle \eta(t_1)\eta(t_2) \rangle$ телеграфного процесса.

Задача N 7

Установить условия стационарности (в широком смысле) действительного случайного процесса.

$$\xi(t) = a_0 + a_1 \cos\omega_c t + a_2 \sin\omega_c t,$$

где a_k, $k = 0,1,2$ - случайные величины (ω_c - не случайная).

Записать выражение для ковариационной функции $\xi(t)$ при этих условиях.

При каком дополнительном условии этот процесс является эргодическим относительно среднего значения?

Задача N 8

Найти спектральную плотность случайного процесса с ковариационной функцией:

1) $B(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|), \quad \alpha > 0$;
2) $B(\tau) = \sigma^2 / (1 + \alpha^2\tau^2), \quad \alpha > 0$;
3) $B(\tau) = \sigma^2 (1 + \alpha|\tau|) \exp(-\alpha|\tau|), \quad \alpha > 0$;

Задача N 9

Пусть пуассоновский импульсный процесс задается соотношением

$$\xi(t) = \sum_{\nu} F(t - t_\nu)\left[a_\nu \cos(\omega_c (t - t_\nu)) + b_\nu \sin(\omega_c (t - t_\nu))\right], \quad \omega_c = const,$$

где $F(\theta) = \begin{cases} \beta \exp(-\beta\theta), \theta \geq 0, (\beta > 0) \\ 0, \theta < 0 \end{cases}$,

t_ν – моменты появления импульсов в рассматриваемом пуассоновском потоке импульсов, все случайные величины a_ν, b_ν – статистически независимы между собой, имеют нулевое среднее значение и одинаковую дисперсию σ^2.

1) Определить среднее значение, дисперсию, ковариационную функцию и спектральную плотность такого процесса.
2) Построить график спектральной плотности $g(\omega)$ для случая $\omega_c >> \beta$.

Задача N 10

1) Доказать, что не существует стационарного случайного процесса, корреляционная функция которого постоянна на интервале $|\tau| \le \tau_1$ и равна нулю вне этого интервала, т. е.

$$B(\tau) = \begin{cases} \sigma^2, & |\tau| \le \tau_1 \\ 0, & |\tau| > \tau_1 \end{cases}$$

2) Найти спектральную плотность случайного процесса с ковариационной функцией $B(\tau) = \sigma^2 \sin \omega_0 \tau / \omega_0 \tau, \quad \omega_0 > 0$

Задача N 11

Показать, что случайный процесс $\xi(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, где A и ω - постоянные фиксированные величины, а фаза φ - случайная величина с плотностью вероятности $f(\varphi) = \begin{cases} 1/2\pi, & |\varphi| \le \pi \\ 0, & |\varphi| > \pi \end{cases}$ является стационарным в широком смысле.

Задача N 12

Показать, что комплексный случайный процесс

$$\varsigma(t) = Ae^{i\omega t},$$

где A – комплексная случайная величина со средним $\langle A \rangle = 0$ и дисперсией $\langle |A|^2 \rangle = \sigma_A^2$, а ω – независимая от A действительная случайная величина с плотностью распределения $f(\omega)$, является стационарным в широком смысле. Определить спектральную плотность этого процесса.

Задача N 13

Определить ковариационную функцию и спектральную плотность теплового излучения $g(\omega)$ объема газа.

Считать, что излучение представляет собой комплексный пуассоновский импульсный процесс $\zeta(t) = \sum_{\nu} F(t - t_\nu)$ с функцией импульсов

$$F(\theta) = \begin{cases} a \exp(-\beta\theta) e^{i\omega_c \left(1 - \frac{u}{c}\right)\vartheta}, \theta \ge 0, (\beta > 0, a, \omega_c = const), \\ 0, \theta < 0 \end{cases},$$

где u – случайные скорости излучающих молекул газа, имеющие распределение Максвелла с температурой Т.

Задача N 14

Какому условию должна удовлетворять спектральная плотность стационарного случайного процесса, чтобы этот процесс обладал первой производной?

С помощью теоремы Винера-Хинчина определить при каких значениях коэффициента β функция $B(\tau)=\sigma^2(1+\beta|\tau|)\exp(-\alpha|\tau|),\quad \alpha>0,$ может быть ковариационной функцией:

1) стационарного случайного процесса?
2) дифференцируемого стационарного случайного процесса?

Задача N 15

Случайный процесс $\xi(t)=x(t)y(t)z(t)$, где $x(t), y(t), z(t)$ - независимые стационарные случайные процессы с нулевыми средними и спектральными плотностями $g_x(\omega), g_y(\omega), g_z(\omega)$ соответственно. Найти спектральную плотность $g_\xi(\omega)$ процесса $\xi(t)$.

Задача N 16

Определить математические ожидания, дисперсии и ковариационные функции комплексных случайных процессов $\zeta(t)=e^{i\varphi(t)}$, где:

а) $\varphi(t)$ - действительный стационарный нормальный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием $\langle\varphi(t)\rangle=0$ и ковариационной функцией $B_\varphi(\tau)$,

б) $\varphi(t), t\geq 0$ - винеровский случайный процесс.

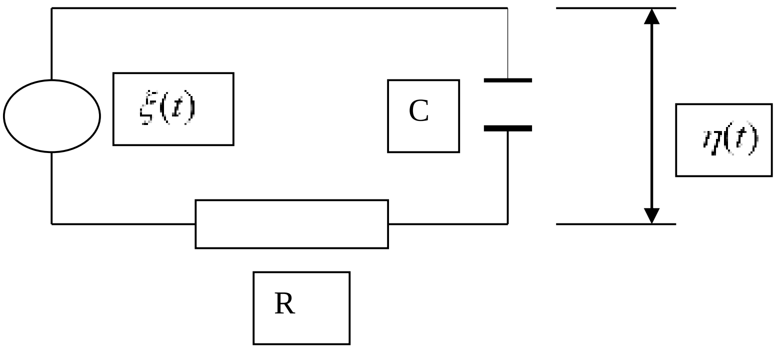
Задача N 17

Нормальный стационарный случайный процесс $\xi(t)$ имеет $\langle\xi(t)\rangle=0$ и корреляционную функцию $B_\xi(\tau)=\sigma_\xi^2 e^{-\beta^2\tau^2/2}$. Определить корреляционную функцию $B_\eta(\tau)$ и плотность вероятности $f_\eta(y)$ производной процесса $\eta(t)=\dfrac{d\xi(t)}{dt}$.

Использовать полученные результаты для приближенной оценки продольного углового размера лунной дорожки, наблюдаемой на взволнованной водной поверхности.

Задача N 18

Белый шум $\xi(t)$ с $\langle\xi(t)\rangle=0$ и спектральной плотностью N_0 действует на RC фильтр.



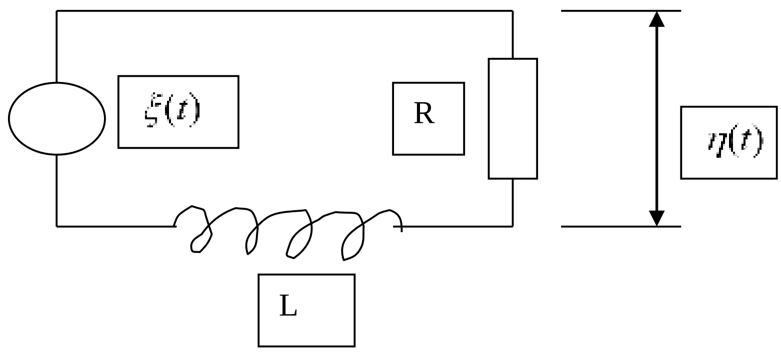
Найти:

1) частотную характеристику $H(\omega)$ и импульсную реакцию фильтра $h(\tau)$,

2) ковариационную функцию, дисперсию, спектральную плотность выходного процесса $\eta(t)$ в установившемся режиме,
3) дисперсию $\eta(t)$ в переходном режиме.

Задача N 19

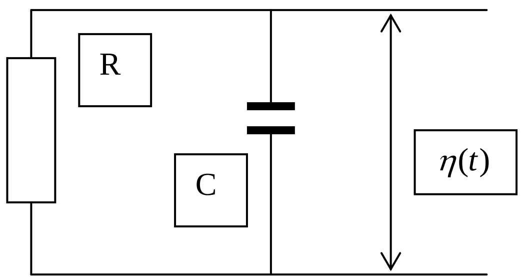
Дана линейная цепь - фильтр LR



Определить ковариационную функцию $B_\xi(\tau)$ процесса $\xi(t)$ на входе фильтра LR при условии, что выходное напряжение $\eta(t)$ представляет собой стационарный случайный процесс с ковариационной функцией $B_\eta(\tau) = \sigma^2 \exp\left(-\alpha\tau^2\right), \alpha > 0$

Задача N 20

Дана параллельная цепочка *RC*



Найти:

1. Спектральную плотность по положительным частотам $g_{\eta+}(\omega)$ напряжения теплового шума $\eta(t)$ на емкости *C*.
2. Построить график зависимости $g_{\eta+}(\omega)/k_B T$ от величины *R* для трех частот: *f=100Гц, 1.5 кГц, 15 кГц* при *C=100пф*.
3. Вычислить дисперсию шума в полосе частот $[f_1,\ f_2]$.
4. Определить дисперсию шума во всей полосе частот $[0, \infty]$.

Срок сдачи 1-ой части задания – 15 апреля.

Часть 2

Задача N 21

На вход интегратора в момент $t = 0$ подается стационарный случайный процесс $\xi(t)$ с $\langle \xi(t) \rangle = 0$ и функцией корреляции $B_\xi(\tau)$. Процесс на выходе: $\eta(t) = \int\limits_0^t \xi(t)dt$

1) Определить общие выражения для функции корреляции $B_\eta(t_1, t_2)$ и дисперсии $\sigma_\eta^2(t)$ процесса $\eta(t)$
2) Вычислить дисперсию $\sigma_\eta^2(t)$ для случая $B(\tau) = \sigma_\xi^2 \beta \exp\left(-\beta|\tau|\right),\ \beta > 0$
3) Вычислить дисперсию для случая, когда $\xi(t)$ - белый шум с $\langle \xi(t) \rangle = 0$ и спектральной плотностью N_0 (т.е. $\eta(t)$ - винеровский случайный процесс)
4) Построить графики функции $\sigma_\eta^2(t)$ для случаев (2) и (3).

Задача N 22

Осуществляется линейное преобразование случайного процесса $\xi(t)$, при этом $\eta(t) = a + b\xi(t)$, где $a, b = const$. Процесс $\xi(t)$ имеет плотность вероятности $f_\xi(x)$. Найти общее выражение для плотности вероятности $f_\eta(y)$ и конкретизировать его для случая, когда

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi^2}} e^{-(x-m_1)^2 / 2\sigma_\xi^2}$$

Задача N 23

Используя интегральное уравнение Винера-Хопфа получить соотношение для функции передачи оптимального сглаживающего фильтра с бесконечной задержкой.

Задача N 24

Показать, что согласованный фильтр обеспечивает максимальное значение отношения сигнал/шум на выходе при наличии аддитивного белого шума на входе.

Задача N 25

Стационарный случайный процесс $\xi(t)$ имеет плотность вероятности:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi^2}} e^{-(x-m_1)^2 / 2\sigma_\xi^2}$$

Найти плотность вероятности $f_\eta(y)$ процесса $\eta(t) = \xi^2(t)$. Получить также $f_\eta(y)$ для частного случая $m_1 = 0$.

Задача N 26

Пусть $\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t)$ - комплексный нормальный стационарный СП, где $\xi(t), \eta(t)$ - действительные независимые нормальные стационарные СП с нулевыми средними и одинаковыми ковариационными функциями $B(\tau)$. Определить математическое ожидание, ковариационную функцию и одномерную плотность вероятности квадрата модуля $\chi^2 = \xi^2 + \eta^2$ этого СП.

Задача N 27

Случайный процесс $\xi(t)$ имеет плотность вероятности $f_\xi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi^2}} e^{-x^2/2\sigma_\xi^2}$

Найти плотности вероятности процессов:

1) на выходе диода с характеристикой $\eta(t) = a\left(e^{b\xi(t)} - 1\right), a > 0, b > 0 - const$
2) на выходе идеального линейного детектора с характеристикой

$\eta(t) = \xi(t)\mathrm{H}(\xi(t))$, где $\mathrm{H}(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ - функция Хевисайда

Задача N 28

Определить двумерную плотность вероятности процесса $\eta(t)$ на выходе безинерционного нелинейного устройства, если $\eta(t) = \xi^2(t)$, $\xi(t)$ - нормальный случайный процесс с $\langle \xi(t) \rangle = 0$ и ковариационной функцией $B_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 K(\tau)$.

Задача N 29

Нормальный случайный процесс $\xi(t)$, имеющий спектральную плотность $g_\xi(\omega)$ пропускается через нелинейное устройство. Процесс на выходе $\eta(t) = \xi^2(t)$.

Определить спектральную плотность процесса $\eta(t)$, если $g_\xi(\omega) = \begin{cases} N_0, & |\omega| \le 2\pi F \\ 0, & |\omega| > 2\pi F \end{cases}$

Построить график $g_\eta(\omega)$.

Задача N 30

Нормальный стационарный случайный процесс $\xi(t)$ имеет $\langle \xi(t) \rangle = 0$ и функцию корреляции $B_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 K(\tau)$, где $K(\tau)$ - коэффициент корреляции. Найти плотность вероятности $f_\eta(y)$ частного от деления двух зависимых значений случайного процесса $\eta(t) = \dfrac{\xi(t+\tau)}{\xi(t)}$.

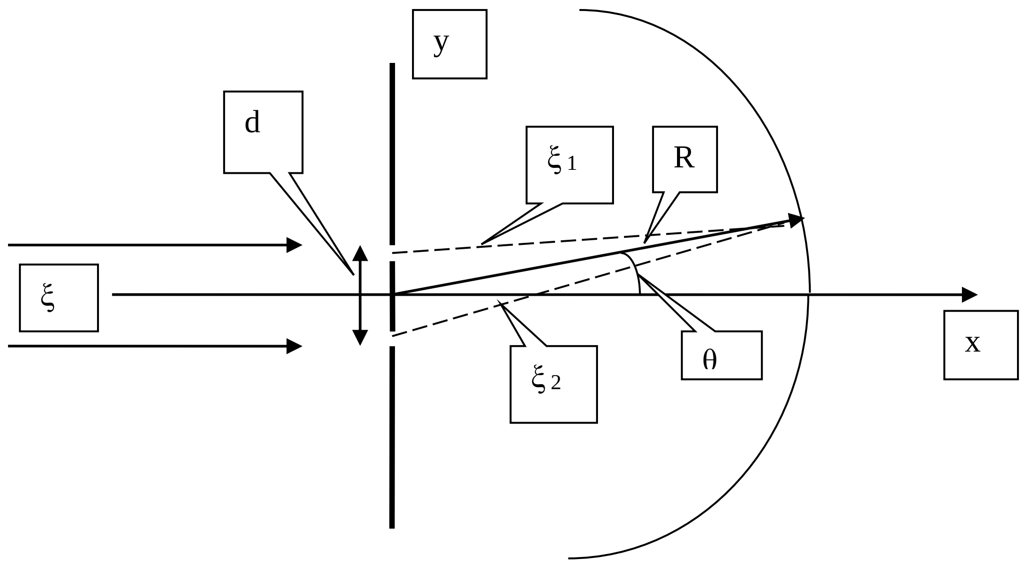
Задача N 31

Пусть на плоский экран с двумя параллельными щелями (двухщелевой интерферометр), расположенный в плоскости YZ, перпендикулярно падает узкополосная случайная волна (см. рис.)

$\xi(t') = \xi(t - \frac{x}{c}) = \chi(t - \frac{x}{c})\cos\left[\omega_c(t - \frac{x}{c})\right] - \mu(t - \frac{x}{c})\sin\left[\omega_c(t - \frac{x}{c})\right]$, где c- скорость волны,

с ковариационной функцией (в фиксированной точке *x)*

$$B_\xi(\tau) = \langle \xi(t')\xi(t'+\tau) \rangle = \sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos\omega_c \tau$$



За экраном на большом расстоянии от щелей $R >> d$ измеряется средняя интенсивность суммарного сигнала от двух щелей в зависимости от угла θ (интерференционная картина)

$$I(\theta) = \left\langle \left[\xi_1\left(t - \frac{R-(d\sin\theta)/2}{c}\right) + \xi_2\left(t - \frac{R+(d\sin\theta)/2}{c}\right) \right]^2 \right\rangle$$

где $\xi_1(t') = a\xi(t')$, $\xi_2(t'') = a\xi(t'')$, $a = const$.

1) Получить формулу для интерференционной картины $I(\theta)$
2) Определить угловое расстояние между интерференционными полосами
3) Оценить угловой размер интерференционной картины

Задача N 32

Гауссовский белый шум $\xi(t)$ с нулевым средним значением и спектральной плотностью N_0 подается на интегратор. На выходе интегратора $\eta(t) = \int_0^t \xi(t)dt$

1) Найти плотность вероятности $f(y;t)$ процесса $\eta(t)$.
2) Записать уравнение Фоккера-Планка для плотности вероятности $f(y;t)$ процесса $\eta(t)$.

Задача N 33

Определить корреляцию $B_\eta(\tau_1, \tau_2) = \langle \Delta\eta_1 \Delta\eta_2 \rangle$ приращений $\Delta\eta_1 = \eta(t+\tau_1) - \eta(t)$, $\Delta\eta_2 = \eta(t+\tau_1+\tau_2) - \eta(t+\tau_1)$ на примыкающих неперекрывающихся интервалах времени τ_1 и τ_2 для марковского случайного процесса, определяемого дифференциальным уравнением первого порядка

$$\frac{d\eta}{dt} + \beta\eta = \gamma\xi(t)$$

($\beta, \gamma > 0$ - постоянные, $\xi(t)$ - гауссовский белый шум со спектральной плотностью N_0), в установившемся режиме при малых ($\beta\tau_1 << 1, \beta\tau_2 << 1$) и больших ($\beta\tau_1 >> 1, \beta\tau_2 >> 1$) интервалах τ_1 и τ_2.

Задача N 34

Нелинейная система описывается стохастическим уравнением $\frac{d\eta}{dt} = -\eta^2 + \xi(t)\sin\omega_0 t$, где $\xi(t)$ - белый шум с нулевым средним значением и спектральной плотностью N_0, $\omega_0 >> 1$.

1) Найти коэффициенты сноса и диффузии и записать уравнение Фоккера-Планка для плотности вероятности $f(y;t)$ процесса $\eta(t)$.
2) Упростить уравнение Фоккера-Планка пренебрегая быстрыми осцилляциями.
3) Записать упрощенное стохастическое уравнение для системы.

Задача N 35

Получить выражение для стационарной плотности вероятности $f_{st}(y;t)$ марковского случайного процесса $\eta(t)$, заданного стохастическим дифференциальным уравнением:

$$\frac{d\eta}{dt} = -\gamma\eta + \frac{\pi N_0}{\eta} + \xi(t), \quad \gamma > 0$$

где $\eta > 0$, $\xi(t)$ - белый шум с нулевым средним значением и спектральной плотностью N_0.

Задача N 36

Получить выражение для стационарной плотности вероятности $f_{st}(y;t)$ марковского случайного процесса $\eta(t)$, заданного стохастическим дифференциальным уравнением:

$$\frac{d\eta}{dt} = -a\eta + a\xi(t), \quad a > 0$$

где $\xi(t)$ - белый шум с нулевым средним значением и спектральной плотностью N_0.

Задача N 37

Пусть N -мерный случайный процесс $\vec{x}(t) = \{x_\alpha(t)\}, \alpha = 1,\ldots,N$ удовлетворяет системе стохастических уравнений

$$\frac{dx_\alpha(t)}{dt} = -\frac{\partial U(\vec{x})}{\partial x_\alpha} + \xi_\alpha(t),$$

где $\xi_\alpha(t)$ - независимые гауссовские случайные воздействия, имеющие свойства белого шума: $\left\langle \xi_\alpha(t)\xi_\beta(t+\tau)\right\rangle = D \cdot \delta_{\alpha\beta}\delta(\tau)$.

Записать уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова для совместной плотности вероятностей $f(\vec{x},t)$ и показать, что стационарное решение этого уравнения имеет вид распределения Больцмана $f_{cm}(\vec{x}) = C \cdot \exp\left[-\frac{2}{D}U(\vec{x})\right]$ (константа C определяется из условия нормировки).

Задача N 38

Случайный процесс определяется стохастическим дифференциальным уравнением 2-го порядка

$$\ddot{x} + \lambda\dot{x} + \frac{\partial U(x)}{\partial x} = \xi(t), \quad \lambda > 0,$$

$\xi(t)$ - гауссовский белый шум со спектральной плотностью $N_0 = D/2\pi$.

Записать эквивалентную систему 2-х стохастических дифференциальных уравнений 1-го порядка для x и $y = \dot{x}$. Получить соответствующее уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова для совместной плотности вероятностей $f(x, y, t)$ и показать, что стационарное решение этого уравнения имеет вид распределения Максвелла-Больцмана $f_{cm}(x, y) = C \cdot \exp\left[-\frac{2\lambda}{D}\left(\frac{y^2}{2} + U(x)\right)\right]$ (константа C определяется из условия нормировки). Определить точки максимума $f_{cm}(x, y)$ для потенциала $U(x) = -ax^2 + bx^4$, $a, b > 0$

Задача N 39

Получить соотношение для среднего времени достижения границ винеровским случайным процессом.

Задача N 40

Пуассоновский случайный процесс $N(t)$ определяет, сколько случайных событий произойдет на интервале $[0, t]$, причем $N(0) = 0$ и вероятность состояния N в момент времени t дается распределением Пуассона $P_N(t) = \frac{(\lambda t)^N}{N!} e^{-\lambda t}$, $N = 0,1,2,\ldots$, $\lambda > 0$.

1) Получить дифференциальные уравнения, описывающие эволюцию во времени вероятностей состояний $P_N(t), \quad N = 0,1,2,\ldots$
2) Найти среднее время пребывания процесса в неизменном состоянии.

Срок сдачи 2-ой части задания – 13 мая.

Конспект лекций по теории случайных процессов для студентов 3 курса ФРКТ МФТИ

1. Основы теории случайных процессов.

Классическая механика исследует лишь такие схемы (модели) систем, в которых состояние системы для некоторого момента времени **однозначным образом** определяется ее состоянием в предшествующий момент времени, т.е. модели вполне *детерминированных процессов.* Вне области классической механики рассматривают такие модели, где состояние системы в некоторый момент времени обусловливает лишь **известную вероятность** для наступления одного из возможных состояний в последующий момент. Если для рассматриваемой модели существует определенная функция распределения вероятностей для последующих состояний, то она является моделью *вероятностно определенного процесса* [по А.Н.Колмогорову].

Теория случайных процессов возникла и развивается с целью разработки и исследования таких моделей вероятностно определенных процессов.

1.1. Основные понятия теории вероятностей.

Вероятностное рассмотрение применяется в ситуациях, когда имеет место так называемый статистический опыт, под которым понимается совокупность, реальная или гипотетическая, опытов, выполняемых при определенных и неизменных от опыта к опыту условиях.

В классической теории вероятностей постулируется, что для заданного статистического опыта можно определить **пространство** Ω **элементарных исходов** ω **(выборочное пространство)** отдельных опытов. **Элементарные исходы** $\boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Omega}$ удовлетворяют следующему требованию: в результате единичного опыта происходит один и только один из этих исходов (они называются также элементарными событиями, а множество Ω - пространством элементарных событий.) Подмножества A пространства Ω называются случайными событиями. Систему случайных событий обозначим $\boldsymbol{\Phi} = \{A \in \boldsymbol{\Omega}\}$. Со случайными событиями можно выполнять те же алгебраические действия, что и с множествами: соединение-сложение, пересечение-умножение, вычитание. Для описания действия «механизма случайности» задаются **вероятности (меры)** $P(A)$ **событий** A: $0 \le P(A) \le 1$, обладающие следующими свойствами

1) Вероятность достоверного события $P(A = \Omega) = 1$, вероятность невозможного события (A пустое множество) $P(A = \varnothing) = 0$.
2) Если события $A_1, A_2, ..., A_N$ несовместимы (не пересекаются), то $P(\sum_{i=1}^{N} A_i) = \sum_{i=1}^{N} P(A_i)$

Совокупность объектов (Ω, Φ, P) называется вероятностным пространством.

Если множество Ω - конечное или счетное, то

- каждому элементу $\boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Omega}$ приписывается вероятность $0 \le P(\boldsymbol{\omega}) \le 1$,
- постулируется, что сумма вероятностей всех элементарных исходов равна единице: $\sum_{\boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Omega}} P(\boldsymbol{\omega}) = 1$
- вероятность $P(A)$ любого события A определяется формулой

$$P(A) = \sum_{\boldsymbol{\omega} \in A} P(\boldsymbol{\omega})$$

На практике вероятность события A в данном статистическом опыте экспериментально оценивается как относительная частота наступления этого события в серии опытов

$P(A) \approx n(A)/n$, где $n(A)$ - число тех опытов, которые привели к наступлению события A, n - число всех опытов в серии. Вероятности обладают следующими свойствами:

- **Теорема умножения.** Пусть события $A_1, A_2, ..., A_N$ таковы, что $P(\sum_{i=1}^{j} A_i) > 0,\ j = 1, 2, ..., N-1$, тогда

$$P(A_1A_2...A_N) = P(A_1/A_2...A_N)P(A_2/A_3...A_N)....P(A_{N-1}/A_N)P(A_N),$$

где $P(B/A) = P(AB)/P(A),\ P(A) > 0$ - **условная вероятность** события В, при условии А.

Условная вероятность $P(B/A)$ обладает всеми свойствами вероятностной функции (при закрепленном множестве A и $P(A) > 0$). По смыслу

$$P(B/A) \approx \frac{n(AB)}{n(A)} = \frac{n(AB)/n}{n(A)/n} \approx \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

- **Формула Байеса.** $P(A/B) = \dfrac{P(B/A)P(A)}{P(B)}$
- **Теорема о полной вероятности.** Пусть $\{A_i, i = 1, ..., N\}$ - полная группа несовместимых событий таких, что $\sum_{i=1}^{N} A_i = \Omega$ и В – произвольное событие, для которого $P(B) > 0$. Тогда

$$P(B) = P(B\Omega) = P(B\sum_{i=1}^{N} A_i) = P(\sum_{i=1}^{N} BA_i) = \sum_{i=1}^{N} P(BA_i) = \sum_{i=1}^{N} P(B/A_i)P(A_i)$$

- **Теорема Байеса.** Пусть $\{A_i, i = 1, ..., N\}$ - полная группа несовместимых событий таких, что $\sum_{i=1}^{N} A_i = \Omega$ и В – произвольное событие, для которого $P(B) > 0$. Тогда

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{N} P(B/A_i)P(A_i)}$$

Центральное место в теории вероятности занимает **понятие независимости** двух или нескольких событий. События $A_1, A_2, ..., A_N$ называются независимыми (в совокупности), если имеет место равенство

$$P(A_1A_2...A_N) = \prod_{i=1}^{N} P(A_i).$$

В теории вероятностей **случайной величиной (СВ)** ξ**,** определенной в вероятностном пространстве (Ω, Φ, P), называют такую однозначную действительную функцию от элементарных исходов ω : $\boldsymbol{\xi = \xi(\omega), \omega \in \Omega}$, для которой могут быть определены вероятности событий A типа $\{x' \le \boldsymbol{\xi(\omega)} \le x''\}$ $P(x' \le \xi(\omega) \le x'')$.

Если множество Ω - конечное или счетное, то множество различных значений СВ $\{x_k\}$ не более, чем счетное, причем $A_k = \{\xi(\omega) = x_k\}$

$$p_k = P(\xi = x_k) = P\{\omega : \xi(\omega) = x_k\} = \sum_{\omega:\xi(\omega)=x_k} P(\omega) \ge 0, \quad \sum p_k = 1$$

Набор $\{x_k, p_k\}$ называется распределением вероятностей дискретной СВ.

Ясно, что $P\{\xi \in A\} = \sum_{\omega:\xi(\omega)\in A} P(\omega) = \sum_{x_k \in A} P(\xi = x_k)$

Примеры распределений вероятностей дискретных СВ:

1) Биномиальное распределение для N независимых испытаний с одинаковыми вероятностями 2-х альтернативных исходов $p+q=1$

$$P_N(n)=C_N^n p^n q^{N-n},\quad C_N^n=\frac{N!}{n!(N-n)!},\quad \sum_{n=0}^{N}P_N(n)=\sum_{n=0}^{N}C_N^n p^n q^{N-n}=(p+q)^N=1$$

2) Распределение Пуассона $P(\xi=k)=\frac{a^k}{k!}e^{-a}$ для целочисленной СВ $\xi\geq 0$, которое определяется единственным положительным параметром *a*. $\sum_{k=0}^{\infty}P(k)=1$

Функция $F_{\xi}(x)=P_{\xi}(-\infty,x)=P\{\xi(\omega)\leq x\}$, где $-\infty$ и $+\infty$ допускаются в качестве значений x, называется **функцией распределения СВ.** Из определения следует, что $F_{\xi}(-\infty)=0,\quad F_{\xi}(+\infty)=1$ Вероятность выполнения неравенств $x'<\xi\leq x''$ задается формулой $P\{x'<\xi\leq x''\}=F_{\xi}(x'')-F_{\xi}(x')$. Отсюда следует, что $F_{\xi}(x)$ - неубывающая функция.

Если функция распределения $F_{\xi}(x)$ дифференцируема, то ее производную по x

$$f_{\xi}(x)=dF_{\xi}(x)/dx,\quad f_{\xi}(x)\geq 0$$

называют **плотностью распределения вероятностей ξ** в точке x, т.е. $F_{\xi}(x)=\int_{-\infty}^{x}f_{\xi}(x')dx'$

Для совокупности нескольких СВ $\vec{\xi}=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_N)$ или, иначе, векторной или N-мерной СВ определяются **совместные распределения вероятностей**.

$$F_{\vec{\xi}}\left(x_1,x_2,...,x_N\right)=P_{\vec{\xi}}\left\{\xi_1\leq x_1,\,\xi_2\leq x_2\,,...,\xi_N\leq x_N\right\}$$

Плотностью совместного распределения вероятностей непрерывных СВ $\xi_1,\xi_2,...,\xi_N$ называется неотрицательная функция $f_{\vec{\xi}}(x_1,x_2,...x_N)$ такая, что

$$P_{\vec{\xi}}\{x_1'\leq\xi_1\leq x_1'',\,x_2'\leq\xi_2\leq x_2'',...,x_N'\leq\xi_N\leq x_N''\}=\int_{x_1'}^{x_1''}...\int_{x_N'}^{x_N''}f_{\vec{\xi}}(x_1,x_2,...x_N)dx_1...dx_N$$

$F_{\xi}(x),\ f_{\xi}(x)$ - детерминированные функции.

Случайные величины $\xi_1,...,\xi_N$ **называются независимыми** (в совокупности), если взаимно независимы всевозможные события вида $\{x_1'\leq\xi_1\leq x_1''\},...,\{x_N'\leq\xi_N\leq x_N''\}$, т.е.

$$F_{\vec{\xi}}\left(x_1,x_2,...,x_N\right)=\prod_{i=1}^{N}F_{\xi_i}(x_i)$$

Непрерывные СВ $\xi_1,...,\xi_N$ независимы тогда и только тогда, когда плотность их совместного распределения такова, что

$$f_{\vec{\xi}}(x_1,...x_N)=\prod_{i=1}^{N}f_{\xi_i}(x_i)$$

Математическое ожидание или среднее значение дискретной СВ $\xi=\xi(\omega)$ определяется формулой

$$M\xi=\sum_{\omega\in\Omega}\xi(\omega)P(\omega)$$

и выражается через ее распределение вероятностей по формуле

$$M\xi=\sum_{x_i}x_iP(\xi=x_i)=\sum_{x_i}x_i p_i$$

Пусть η - некоторая СВ, такая что $\eta=\psi(\xi)$, где ξ - дискретная СВ, а $\psi(x)$ -функция вещественной переменной. Нетрудно показать, что

$$M\boldsymbol{\eta} = \sum_{x_i} \boldsymbol{\psi}(x_i) P(\boldsymbol{\xi} = x_i) = \sum_{x_i} \boldsymbol{\psi}(x_i) p_i$$

Математическое ожидание или среднее значение СВ ξ в общем случае может быть определено с помощью интеграла Стилтьеса*

$$M\xi = \langle \xi \rangle = \overline{\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_\xi(x) = -\int_{-\infty}^{0} F_\xi(x) dx + \int_{0}^{\infty} \left(1 - F_\xi(x)\right) dx$$

который, как нетрудно убедиться, принимает вид

$$M\xi = \langle \xi \rangle = \overline{\xi} = \begin{cases} \sum\limits_{i} x_i P_\xi(x_i) \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx \end{cases}$$

для дискретных и непрерывных СВ соответственно. Здесь приведены три возможных наиболее часто встречающихся обозначения операции вероятностного усреднения.

Вообще, если η - некоторая СВ, являющаяся интегрируемой функцией вектора непрерывных СВ $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N)$: $\eta = \psi(\vec{\xi})$, то в теории вероятности доказывается, что

$$M\eta = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{\psi(x_1, x_2, ..., x_N)}(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_1, x_2, ..., x_N) f_\xi(x_1, x_2, ..., x_N) d\vec{x}$$

Примеры. Рассмотрим СВ $\eta = \vartheta(y - \xi)$, где $\vartheta(z) = \begin{cases} 1, \ z > 0 \\ 0, \ z \le 0 \end{cases}$ и $\xi(\omega)$ непрерывная СВ.

Тогда $\langle \eta \rangle = \langle \vartheta(y - \xi) \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \vartheta(y - x) f_\xi(x) dx = \int\limits_{-\infty}^{y} f_\xi(x) dx = F_\xi(y)$.

Эта формула находится в полном соответствии с эмпирическим определением вероятности. Далее, используя определение плотности распределения вероятности (1.7) получим формально

$$f_\xi(y) = \frac{\partial F_\xi(y)}{\partial y} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \boldsymbol{\vartheta}(y - x)}{\partial y} f_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\delta}(y - x) f_\xi(x) dx = \langle \boldsymbol{\delta}(y - \boldsymbol{\xi}) \rangle,$$

где $\delta(z) = \dfrac{d\vartheta(z)}{dz}$ - дельта-функция.

Дисперсия СВ ξ определяется равенством

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \langle (\xi - M\xi)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 f_\xi(x) dx$$

Средне-квадратичное (стандартное) отклонение (СКО) $\sigma = \sqrt{D\xi}$

Простейшей характеристикой связи различных СВ ξ_1 и ξ_2 является **ковариация**

$$\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = M\left[(\xi_1 - M(\xi_1))(\xi_2 - M(\xi_2))\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - M\xi_1)(x_2 - M\xi_2) f_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

Если СВ ξ_1 и ξ_2 независимы, то их ковариация равна нулю. Для центрированных СВ ($M(\xi_1) = M(\xi_2) = 0$) формула принимает вид

$$\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = \langle \boldsymbol{\xi}_1 \boldsymbol{\xi}_2 \rangle$$

* По определению, интеграл Стилтьеса

$$\int_a^b \varphi(x) dF(x) = \lim_{\max(x_j - x_{j-1}) \to 0} \sum_1^n \varphi(\lambda_j) \left[F(x_j) - F(x_{j-1})\right], \quad x_{j-1} \le \lambda_j \le x_j$$

СВ, ковариация которых равна нулю, называют некоррелированными или ортогональными.

Рассмотрим следующую цепочку равенств и неравенств

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 f_\xi(x)dx \ge \int_{|x-M\xi|\ge\varepsilon} (x - M\xi)^2 f_\xi(x)dx \ge \varepsilon^2 \int_{|x-M\xi|\ge\varepsilon} f_\xi(x)dx = \varepsilon^2 P(|x - M\xi| \ge \varepsilon)$$

из которой следует известное неравенство Чебышева $P(|x - M\xi| \ge \varepsilon) \le \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$. При $\varepsilon = 3\sigma$ из этого неравенства получаем правило 3-х сигм $P(|x - M\xi| \ge 3\sigma) \le 1/9$

Характеристической функцией $\varphi_\xi(u)$ **СВ** ξ называется среднее значение величины $e^{iu\xi}$, где u - действительный параметр:

$$\varphi_\xi(u) = \langle e^{iu\xi} \rangle = \int e^{iux} dF_\xi(x).$$

Для непрерывной СВ $\varphi(u) = \int e^{iux} f_\xi(x)dx$, т.е. это преобразование Фурье от плотности распределения $f_\xi(x)$. Нетрудно установить, что $\langle \xi \rangle = \frac{1}{i}\frac{d\phi_\xi(u)}{du}\Big|_{u=0}$, $\langle \xi^2 \rangle = \frac{1}{i}\frac{d^2\phi_\xi(u)}{du^2}\Big|_{u=0}$

Характеристические функции являются комплекснозначными. Комплекснозначная функция действительного переменного $\varphi(u)$ называется **неотрицательно определенной**, если неравенство $\sum_{j,k} \varphi(u_j - u_k) z_j z_k^* \ge 0$ выполняется при любом выборе действительных чисел $\{u_j\}$ и комплексных чисел $\{z_j\}$.

Имеет место следующая теорема (Бохнер). Непрерывная функция $\varphi(u)$ является характеристической функцией некоторого распределения вероятностей в том и только том случае, если она неотрицательно определена и $\varphi(0) = 1$.

Для векторной СВ $\varphi_\xi(\vec{u}) = \langle e^{i\vec{u}\vec{\xi}} \rangle$.

Характеристическая функция имеет одно важное и полезное свойство: сумма независимых СВ $\xi = \sum_{k=1}^{N} \xi_k$ имеет характеристическую функцию

$$\varphi_\xi(u) = \prod_{k=1}^{N} \varphi_k(u),$$

равную произведению характеристических функций отдельных случайных слагаемых.

Производящие функции для целочисленных СВ. Пусть ξ целочисленная СВ, принимающая в зависимости от случайного исхода одно из значений $k = 0, 1, 2, ...$ с соответствующими вероятностями $P_\xi(k)$. Производящая функция $\varphi_\xi(z)$ распределения СВ ξ определяется формулой

$$\phi_\xi(z) = \langle z^\xi \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} P_\xi(k) z^k, \quad |z| \le 1, \quad P_\xi(k) = \frac{1}{k!}\frac{d^k \phi_\xi(z)}{dz^k}\Big|_{z=0}$$

Например, производящая функция пуассоновского распределения имеет вид $\varphi_\xi(z) = e^{a(z-1)}$.

Производящая функция суммы независимых целочисленных СВ равна произведению производящих функций отдельных случайных слагаемых.

1.2. Понятие случайного процесса.

Случайным процессом или случайной функцией называется семейство случайных величин $\{\xi(\omega,t)\}$, определенных в вероятностном пространстве (Ω,Φ,P) и зависящих от действительного параметра $t \in T$.

Множество T называется областью определения случайного процесса (в дальнейшем используются сокращения СП или СФ).

Зачастую используемые термины вероятностный процесс, стохастический процесс являются синонимами термина случайный процесс,.

В приложениях в качестве параметра t рассматривают как правило время или пространственные координаты. Случайную функцию от вектора пространственных координат $\xi(\vec{r}) = \xi(\omega,\vec{r}),\ \omega \in \Omega$ принято называть **случайным полем.**

При каждом фиксированном значении $\omega \in \Omega$ функция $\xi(\omega,t)$ параметра $t \in T$ называется **реализацией, или траекторией, или выборочной функцией случайного процесса** $\xi(t)$. Другими словами реализацией случайного процесса называется запись процесса, сделанная в конкретном опыте, поэтому реализации отмечают индексом, соответствующим данному опыту $\xi_\omega(t)$.

Детерминированную (неслучайную) функцию можно рассматривать как СП, для которого пространство элементарных исходов Ω состоит из одного элемента и который имеет одну единственную реализацию.

В зависимости от того, являются ли значения параметра t и реализации СП $\xi_\omega(t)$ непрерывными или дискретными, различают четыре **типа** СП:

- Непрерывный СП, когда t и $\xi_\omega(t)$ непрерывны на отрезке или всей действительной оси.
- Дискретный СП, когда t непрерывно, а $\xi_\omega(t)$ принимает дискретные значения (например, квантование $\xi_\omega(t)$ по уровню).
- Случайная последовательность, когда t дискретно, а $\xi_\omega(t)$ непрерывна.
- Дискретная случайная последовательность, когда t и $\xi_\omega(t)$ дискретны.

В ряде случаев СП может быть задан как детерминированная функция f от t и некоторого конечного числа случайных величин $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_N$. Все статистические свойства такого **квазидетерминированного СП** $\xi(t) = f(t;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_N)$ определяются тогда n-мерной СВ $\vec{\alpha} = (\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_N)$. Примерами квазидетерминированных СП являются процессы вида $\xi(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$, где A и φ — случайные амплитуда и фаза гармонического колебания, т. е. $\vec{\alpha} = (A,\varphi)$ или $\xi(t) = at + bt^2 + ct^3$, где a, b, c - случайные коэффициенты полинома, т.е. $\vec{\alpha} = (a,b,c)$. Реализации этих процессов имеют вид $\xi_m(t) = A_m\cos(\omega_0 t + \varphi_m)$, $\xi_m(t) = a_m t + b_m t^2 + c_m t^3$.

1.3. Способы описания и статистические характеристики случайных процессов.

1.3.1. Распределения вероятностей случайного процесса.

1) Одномерные распределения.

По определению, значение СП при каждом фиксированном t является случайной величиной. Следовательно, для СП можно определить **одномерную функцию распределения**, зависящую от параметра t

$$F_\xi(x,t) = P(\xi(t) \le x), \tag{3.1}$$

обладающую свойствами функции распределения простой случайной величины:

1. $F(-\infty,t)=0$,
2. $F(+\infty,t)=1$.
3. $P[a<\xi(t)\le b]=F(b,t)-F(a,t)$.
4. $F(x,t)$ — неубывающая функция x.

Если функция распределения $F_\xi(x,t)$ дифференцируема по x, то ее частную производную

$$f_\xi(x,t)=\partial F_\xi(x,t)/\partial x \tag{3.2}$$

называют одномерной или мгновенной плотностью вероятности $\xi(t)$. Ее свойства следуют из свойств функции распределения:

1. $F(x,t)=\int_{-\infty}^{x} f(x,t)dx$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)dx=1$.
3. $P[a<x(t)<b]=\int_a^b f(x,t)dx$.
4. $f(x,t)\ge 0$.

В отличие от случайной величины, которая полностью определяется заданием функции распределения, СП характеризуется одномерным распределением далеко не полностью, т. к. оно не дает возможности установить статистическую связь между значениями СП в различные моменты времени.

2) Конечномерные распределения.

Если зафиксировать произвольное число n различных моментов времени $t_1,t_{2,}...,t_n$ из интервала определения T СП, то ее значения $\xi(t_1),\xi(t_2),...,\xi(t_n)$ будут образовывать совокупность СВ, которая полностью определяется **конечномерным распределением**

$$F_n(x_1,x_2,\ldots,x_n;t_1,t_2,\ldots,t_n)=P[\xi(t_1)\le x_1,\xi(t_2)\le x_2,\ldots,\xi(t_n)\le x_n] \tag{3.3}$$

или конечномерной плотностью распределения $f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n;t_1,t_2,\ldots,t_n)$:

$$F_n(x_1,x_2,\ldots,x_n;t_1,t_2,\ldots,t_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}...\int_{-\infty}^{x_n} f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n;t_1,t_2,\ldots,t_n)dx_1dx_2...dx_n \tag{3.4}$$

Конечномерная плотность распределения $f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n;t_1,t_2,\ldots,t_n)$, рассматриваемая как функция от $x_1,x_2,\ldots,x_n$, удовлетворяет обычным требованиям, предъявляемым к совместной плотности распределения вероятности, а именно, условиям

1. неотрицательности : $f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n,t_1,t_2,\ldots,t_n)\ge 0$,
2. нормировки: $\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n,t_1,t_2,\ldots,t_n)dx_1dx_2\cdots dx_n=1$.

Кроме того, как функция от $t_1,t_2,\ldots,t_n$, она удовлетворяет дополнительным требованиям, а именно, условиям

3. симметрии относительно перестановок всех пар аргументов (t_i,x_i): $f_n(...,x_k,\ldots,x_m,..;...,t_k,\ldots,t_m,...)=f_n(...,x_m,\ldots,x_k,..;...,t_m,\ldots,t_k,...)$,
4. все конечномерные плотности вероятности должны быть согласованы между собой в смысле их соподчинения (согласованность при понижении размерности функции распределения)

$F_r(x_1,...,x_r;t_1,\ldots,t_r)=F_{r+k}(x_1,...,x_r,+\infty,\ldots,+\infty,t_1,\ldots,t_{r+k})$,

или $f_r(x_1,...,x_r;t_1,...,t_r)=\int_{-\infty}^{+\infty}...\int_{-\infty}^{+\infty} f_{r+k}(x_1,...,x_r,x_{r+1},...x_{r+k},t_1,t_2,\ldots,t_{r+k})dx_{r+1}...dx_{r+k}$

Теорема Колмогорова. Если задано семейство конечномерных функций распределения $F=\left\{F_n(x_1,x_2,\ldots,x_n;t_1,t_2,\ldots,t_n),\quad x_i\in R^1,\, t_i\in T,\, i=1,...,n,\, n\geq 1\right\}$, удовлетворяющих условиям 1-4, то СП полностью задан, т.е. тогда существуют вероятностное пространство (Ω,Φ,P) и СП $\{\xi(\omega,t),\, t\in T\}$ такие, что семейство конечномерных распределений F_ξ СП $\xi(\omega,t)$ совпадает с F.

Таким образом, всегда существует СП с заданным семейством конечномерных распределений.

1.3.2.Характеристические функции случайного процесса.

Конечномерные характеристические функции СП так же зависят от выбранных моментов времени

$$\varphi_n(u_1,u_2,...,u_n;t_1,t_2,...,t_n)=\left\langle \exp(i\sum_{k=1}^{n}u_k\xi(t_k))\right\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\sum_{k=1}^{n}u_kx_k)d^nF_n(x_1,x_2,...x_n;t_1,t_2,...,t_n) \qquad (3.5)$$

Для непрерывных СП характеристические функции представляют собой конечномерное преобразование Фурье от конечномерной плотности $f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n,t_1,t_2,\ldots,t_n)$.

Условие согласованности многомерных характеристических функций различных размерностей следует из условия согласованности для функций распределения и имеет вид

$$\varphi_r(u_1,u_2,...,u_r;t_1,t_2,...,t_r)=\varphi_n(u_1,u_2,...,u_r,0,...,0;t_1,t_2,...,t_{r+k}), \qquad (3.6)$$

т.е. для того чтобы понизить размерность характеристической функции, достаточно часть аргументов положить равными нулю.

Условие нормировки для характеристических функций имеет вид

$$\varphi_n(0,0,...,0;t_1,t_2,...,t_n)=1 \qquad (3.7)$$

Оба условия легко проверяются простой подстановкой.

1.3.3. Моментные функции случайного процесса

Различают **начальные и центральные моментные функции,** которые определяются, соответственно, как средние значения произведений

$$m_n(t_1,t_2,...,t_n)=\langle \xi(t_1)\xi(t_2)...\xi(t_n)\rangle, \qquad (3.8)$$

$$\mu_n(t_1,t_2,...,t_n)=\langle (\xi(t_1)-\langle \xi(t_1)\rangle)(\xi(t_2)-\langle \xi(t_2)\rangle)...(\xi(t_n)-\langle \xi(t_n)\rangle)\rangle \qquad (3.9)$$

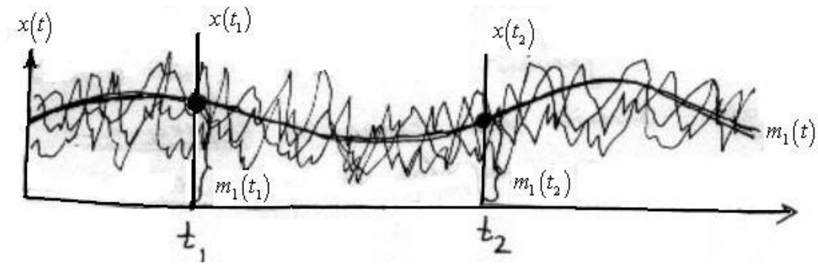
и зависят от $t_1,t_2,\ldots,t_n$. В общем случае некоторые значения из последовательности $t_1,t_2,\ldots,t_n$ или даже все могут совпадать. Если среднее значение СП равно нулю: $\langle \xi(t)\rangle=0$, начальные и центральные моментные функции совпадают.

В большинстве практических случаев для описания СП ограничиваются моментными функциями нескольких первых порядков. Наиболее важными из них являются

1. Мгновенное математическое ожидание или среднее значение СП

$$m_1(t)=M[\xi(t)]=\langle \xi(t)\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_1(x;t)dx \qquad (3.10)$$

- моментная функция первого порядка.



Мгновенное математическое ожидание СП – это такая детерминированная функция $m_1(t)$, около которой в среднем группируются все реализации процесса.

2. Начальная моментная функция второго порядка

$$m_2(t) = M[\xi^2(t)] = \left\langle \xi^2(t) \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_1(x;t)dx \qquad (3.11)$$

(средняя интенсивность) и мгновенная дисперсия СП

$$\mu_2(t) = D[\xi(t)] = \left\langle (\xi(t) - m_1(t))^2 \right\rangle = m_2(t) - m_1^2(t) \qquad (3.12)$$

(второй центральный момент). Мгновенная дисперсия характеризует разброс значений СП относительно кривой $m_1(t)$.

3. Смешанная моментная функция второго порядка (ее называют также **корреляционной функцией)**

$$m_2(t_1,t_2) = M[\xi(t_1)\xi(t_2)] = R(t_1,t_2) = \left\langle \xi(t_1)\xi(t_2) \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1 dx_1 \qquad (3.13)$$

и **ковариационная функция**

$$B(t_1,t_2) = \mu_2(t_1,t_2) = \left\langle \left(\xi(t_1) - \left\langle \xi(t_1) \right\rangle\right)\left(\xi(t_2) - \left\langle \xi(t_2) \right\rangle\right) \right\rangle \qquad (3.14)$$

Легко видеть, что корреляционная и ковариационная функции обладают следующими свойствами:

- если математическое ожидание процесса равно нулю, то они совпадают,
- $R(t_1,t_2)$ и $B(t_1,t_2)$ - симметричные функции своих аргументов,
- удовлетворяют условиям $R(t,t) = m_2(t)$ и $B(t,t) = D(t)$.

С повышением порядка физическая значимость моментных функций уменьшается.

1.3.4. Связь моментных и характеристических функций случайного процесса.

Рассматривая характеристическую функцию как интеграл, зависящий от параметров $u_1, u_2, ..., u_n$, и используя известную из математического анализа теорему о дифференцировании интегралов, зависящих от параметров, получим соотношение, связывающее моментные и характеристические функции

$$\frac{1}{i^n}\frac{\partial^s \varphi_n(u_1,u_2,...,u_n;t_1,t_2,...,t_n)}{\partial u_1 \partial u_2 ... \partial u_n}\Bigg|_{u_1=u_2=...=u_n=0} = \left\langle \xi(t_1)\xi(t_2)...\xi(t_n) \right\rangle = m_n(t_1,t_2,...,t_n), \qquad (3.15)$$

Для моментных функций первых двух порядков имеем

$$m_1(t) = \frac{1}{i}\frac{d\varphi_1(u;t)}{du}\bigg|_{u=0},\ m_2(t) = -\frac{d^2\varphi_1(u;t)}{du^2}\bigg|_{u=0},\ m_2(t_1,t_2) = -\frac{\partial^2 \varphi_2(u_1,u_2;t_1,t_2)}{\partial u_1 \partial u_2}\bigg|_{u_1=u_2=0} \qquad (3.16)$$

1.3.5. Совместные функции распределения вероятностей нескольких случайных процессов.

Во многих задачах приходится рассматривать одновременно два или большее число СП. В этих случаях необходимы совместные многомерные функции распределения вероятностей. В случае двух непрерывных СП $\xi(t)$ и $\eta(t)$ простейшей совместной плотностью вероятностей является функция $f_{1+1}(x,y;t,t')$. Для независимых СП $\xi(t)$, $\eta(t)$ $f_{1+1}(x,y;t,t') = f_1(x,t)f_1(y,t')$

1.3.6. Взаимные моментные функции случайных процессов.

Статистические связи двух СП $\xi(t)$ и $\eta(t)$ могут быть описаны заданием взаимных моментных функций.

Простейшими, но наиболее важными взаимными моментными функциями являются взаимная корреляционная функция

$$m_{1+1}(t,t') = R_{\xi\eta}(t,t') = \langle \xi(t)\eta(t') \rangle = \int\int_{-\infty}^{\infty} xyf_{\xi\eta}(x,y;t,t')dxdy$$

и взаимная ковариационная функция (***функция когерентности***)

$$B_{\xi\eta}(t,t') = \langle (\xi(t) - \langle \xi(t) \rangle)(\eta(t') - \langle \eta(t') \rangle) \rangle$$

Если СП $\xi(t)$ и $\eta(t)$ независимы, то $R_{\xi\eta}(t,t') = \langle \xi(t) \rangle \langle \eta(t') \rangle$ и $B_{\xi\eta}(t,t') = 0$. Процессы, для которых взаимная ковариационная функция равна нулю, называют ***некогерентными***. В общем случае из некогерентности двух СП не следует их независимость.

Таким образом, при совместном описании двух СП $\xi(t)$ и $\eta(t)$ на уровне вторых моментов приходится иметь дело со средними значениями $m_\xi(t), m_\eta(t)$ как функциями времени и с ковариационными функциями $B_\xi(t,t')$, $B_\eta(t,t')$ и $B_{\xi\eta}(t,t')$.

Использование взаимных моментных функций становится необходимым при описании комплексного СП, под которым понимается, как обычно, линейная комбинация двух действительных СП $\xi(t)$ и $\eta(t)$: $\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t)$. Очевидно, $\langle \zeta(t) \rangle = \langle \xi(t) \rangle + i\langle \eta(t) \rangle$. **Моменты второго порядка для комплексного СП** $\zeta(t)$ определяются с использованием комплексно-сопряженных функций

$$R_\zeta(t,t') = \langle \zeta(t)\zeta^*(t') \rangle$$

$$B_\zeta(t,t') = \langle (\zeta(t) - \langle \zeta(t) \rangle)(\zeta^*(t') - \langle \zeta^*(t') \rangle) \rangle = R_\zeta(t,t') - \langle \zeta(t) \rangle \langle \zeta^*(t') \rangle$$

Это определение приводит к действительным и положительным среднеквадратичным величинам:

средней интенсивности $\zeta(t)$ -

$$R_\zeta(t,t) = \langle |\zeta(t)|^2 \rangle = \overline{\xi^2(t)} + \overline{\eta^2(t)}$$

и дисперсии $\zeta(t)$ -

$$B_\zeta(t,t) = D_\zeta[\zeta(t)] = \langle |\zeta(t) - \langle \zeta(t) \rangle|^2 \rangle = \langle |\zeta(t)|^2 \rangle - |\langle \zeta(t) \rangle|^2$$

1.4. Некоторые основные классы случайных процессов.

1.4.1. Условные плотности вероятности случайных процессов.

Рассмотрим непрерывный случайный процесс, два момента времени t_1, t_2 и соответствующие случайные величины $\xi(t_1), \xi(t_2)$. Вероятность события $A_2 : x_2 \le \xi(t_2) \le x_2 + dx_2$ при условии, что реализовалось событие $A_1 : x_1 \le \xi(t_1) \le x_1 + dx_1$, в соответствии с определением условной вероятности выражается следующим образом

$$p(A_2 / A_1) = \frac{p(A_1 A_2)}{p(A_1)} = \frac{f_2(x_2, x_1; t_2, t_1) dx_1 dx_2}{f_1(x_1; t_1) dx_1}, \quad p(A_1) > 0$$

Отношение $f(x_2 / x_1; t_2, t_1) = \dfrac{f_2(x_2, x_1; t_2, t_1)}{f_1(x_1; t_1)}$, $f_1(x_1; t_1) > 0$ представляет собой плотность распределения случайной величины $\xi(t_2)$ в момент t_2 при условии, что в момент t_1 $\xi(t_1) = x_1$, и называется условной плотностью вероятности (двумерной). Учитывая, что $f_1(x_1; t_1) = \int f_2(x_2, x_1; t_2, t_1) dx_2$, при $f_1(x_1; t_1) = 0$ условную плотность вероятности доопределяют следующим образом $f(x_2 / x_1; t_2, t_1) = 0$

Условные плотности вероятности удовлетворяют условиям неотрицательности $f(x_2 / x_1; t_2, t_1) \ge 0$, нормировки $\int f(x_2 / x_1; t_2, t_1) dx_2 = 1$ и согласованности $\int f(x_2 / x_1; t_2, t_1) dx_1 = f(x_2; t_2)$.

Аналогично определяются многомерные условные плотности вероятности

$$f(x_n / x_{n-1}, ..., x_1; t_n, t_{n-1}, ..., t_1) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x_n, x_{n-1}, ..., x_1; t_n, t_{n-1}, ..., t_1)}{f_{n-1}(x_{n-1}, ..., x_1; t_{n-1}, ..., t_1)}, & f_{n-1}(x_{n-1}, ..., x_1; t_{n-1}, ..., t_1) > 0 \\ 0, & f_{n-1}(x_{n-1}, ..., x_1; t_{n-1}, ..., t_1) = 0 \end{cases}$$

1.4.2. Совершенно случайные процессы.

Совершенно случайным процессом называется процесс, у которого случайные величины $\xi(t_1), \xi(t_2), ..., \xi(t_n)$ при любых $t_j \ne t_k$ - независимые случайные величины. Конечномерные плотности вероятности совершенно случайного процесса представляются в виде

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{k=1}^{n} f_1(x_k; t_k),$$

а условные плотности вероятности

$$f(x_n / x_{n-1}, ..., x_1; t_n, t_{n-1}, ..., t_1) = f_1(x_n; t_n)$$

Вся информация о процессе содержится в одномерной плотности вероятности $f_1(x; t)$.

На практике модель совершенно случайных процессов применима лишь для случайных последовательностей, когда t принимает дискретные значения. Например, шум в цифровых сигналах или изображениях в некоторых случаях можно рассматривать как совершенно случайный процесс.

1.4.3. Гауссовские процессы.

Действительный случайный процесс $\{\xi(t), t \in T\}$ называется гауссовским, если для любого конечного множества моментов времени $\vec{t} = (t_1, t_2, ..., t_n)$ случайные величины $\xi(t_1), \xi(t_2), ..., \xi(t_n)$ имеют совместную нормальную плотность вероятности

$$f_n(\vec{r}; \vec{t}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |B|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} (\vec{r} - \vec{m})^T B^{-1} (\vec{r} - \vec{m}) \right]$$

где введены следующие векторные и матричные обозначения: векторы-столбцы $\vec{r} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\vec{m} = \begin{bmatrix} m(t_1) \\ \vdots \\ m(t_n) \end{bmatrix}$, ковариационная матрица $B = \|B(t_k, t_m)\|,\ k, m = 1,\dots,n$ (предполагается, что она невырожденная), $B^{-1} = \frac{1}{|B|}\|A_{km}\|$ - матрица, обратная к B, $|B|$ - определитель матрицы B, A_{km} - алгебраическое дополнение элемента $B(t_k, t_m)$ в определителе $|B|$.

Из определения гауссовского процесса следует, что семейство его конечномерных распределений полностью определяется двумя моментными функциями: математическим ожиданием $m(t)$ и ковариационной функцией $B(t_1, t_2)$.

Одномерная плотность вероятности записывается в виде

$$f_1(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_\xi(t)}} \exp\left[-\frac{(x - m(t))^2}{2D_\xi(t)} \right]$$

Соответствующие характеристические функции имеют вид

$$\varphi_n(\vec{u};\vec{t}) = \int \dots \int f_n(\vec{x};\vec{t}) e^{i\vec{u}\vec{x}} d\vec{x} = \exp\left(i\vec{m}^T\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{u}^T B\vec{u} \right)$$

$$\varphi_1(u;t) = \exp\left(i m_\xi(t) u - \frac{D_\xi(t) u^2}{2} \right)$$

Если ковариационная матрица B – диагональная, т.е. случайные величины $\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_n)$ - некоррелированы, то многомерная плотность вероятностей $f_n(\vec{r};\vec{t})$ представляется в виде произведения одномерных плотностей $f_1(x_k;t_k),\ k = 1,2,\dots,n$, т.е. случайные величины $\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_n)$ - независимы.

1.4.4. Марковские процессы.

Случайный процесс $\xi(t)$ называется марковским, если для любого момента времени t при фиксированном значении $\xi(t) = x$ (каково бы ни было x), случайные величины $\xi(u),\ u > t$ не зависят от $\xi(s),\ s < t$.

Марковские случайные процессы обладают важным свойством независимости будущего поведения от всего прошлого. Это свойство называется *отсутствием последействия*. Иначе говоря, если рассматривать текущее состояние процесса $\xi(t)$ в момент времени $t \in T$ как «настоящее», совокупность всех возможных состояний $\{\xi(s), s < t\}$ как «прошлое», а совокупность возможных состояний $\{\xi(u), u > t\}$ как «будущее», то для марковского процесса при фиксированном «настоящем» «будущее» не зависит от «прошлого». При этом семейство распределений процесса для $u > t$ зависит лишь от состояния процесса в момент времени t.

Пусть имеется непрерывный случайный процесс $\xi(t)$. Возьмем ряд его значений $\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_n)$ в последовательные моменты времени $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ и рассмотрим условную плотность вероятности значения в самый последний момент

$$f\left(x_n / x_{n-1},\dots,x_1;t_n,t_{n-1},\dots,t_1\right)=\frac{f_n\left(x_n, x_{n-1},\dots,x_1;t_n,t_{n-1},\dots,t_1\right)}{f_{n-1}\left(x_{n-1},\dots,x_1;t_{n-1},\dots,t_1\right)}$$

Процесс $\xi(t)$ является процессом Маркова, если указанная условная плотность вероятности зависит лишь от последнего условного значения $\xi(t_{n-1})$ и не зависит от предыдущих $\xi(t_{n-2}),...,\xi(t_1)$, $t_{n-2} > t_{n-3} > \ldots > t_1$.

$$f\left(x_n / x_{n-1},\dots,x_1;t_n,t_{n-1},\dots,t_1\right)=f\left(x_n / x_{n-1};t_n,t_{n-1}\right)$$

или

$$u > t \quad f\left(\xi(u)/\xi(s), s \le t\right) = f\left(\xi(u)/\xi(t)\right)$$

Из определения условных плотностей вероятности и теоремы умножения для вероятностей вытекает формула

$$f_n\left(x_n, x_{n-1},...,x_1;t_n, t_{n-1},...,t_1\right)=f\left(x_n / x_{n-1};t_n, t_{n-1}\right)f\left(x_{n-1} / x_{n-2};t_{n-1}, t_{n-2}\right)$$
$$\cdot\ldots\cdot f\left(x_2 / x_1;t_2, t_1\right)f\left(x_1;t_1\right)$$

Из последнего равенства следует, что многомерная плотность распределения в случае процессов Маркова распадается на произведение двумерных условных вероятностей, которые называются **вероятностями перехода**.

1.4.5. Процессы с независимыми приращениями.

Случайный процесс $\{\xi(t), t \ge 0\}$ называется процессом с независимыми приращениями, если для любых $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots$ случайные величины $\xi(0), \Delta\xi_1 = \xi(t_1) - \xi(0), \Delta\xi_2 = \xi(t_2) - \xi(t_1),..., \Delta\xi_n = \xi(t_n) - \xi(t_{n-1}),...$ являются независимыми.

Разбив промежуток времени $(0,t)$ на произвольное число n последовательных интервалов $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $t_0 = 0, t_n = t$, величину $\xi(t)$ всегда можно представить как сумму независимых слагаемых – значения $\xi(0)$ и приращений $\Delta\xi_i = \xi(t_i) - \xi(t_{i-1})$

$$\xi(t) = \xi(0) + \sum_{i=1}^{n}\Delta\xi_i$$

Вследствие независимости слагаемых дисперсия $\xi(t)$ будет

$$D[\xi(t)] = D[\xi(0)] + \sum_{i=1}^{n} D[\Delta\xi_i]$$

Случайный процесс с независимыми приращениями $\xi(t)$ называется однородным по t, если распределение вероятностей приращений $\Delta\xi(t,t+h) = \xi(t+h) - \xi(t), h > 0$ зависит только от h, т.е. совпадает с распределением вероятностей сечения $\xi(h)$.

Процессы с независимыми приращениями являются марковскими с

$$f\left(x_k / x_{k-1};t_k, t_{k-1}\right) = f\left(x_k - x_{k-1};t_k, t_{k-1}\right)$$

Рассмотри два важных примера однородных процессов с независимыми приращениями.

1) Пуассоновский процесс

Однородный дискретный случайный процесс $\{\xi(t), t \ge 0\}$ с независимыми приращениями называется пуассоновским, если при любом $t > 0$ сечение $\xi(t)$ имеет распределение Пуассона с параметром λt, *где* $\lambda > 0$:

$$P\{\xi(t)=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}, \quad k=0,1,2,\ldots$$

Из этого определения и свойств распределения Пуассона следует, что

$m_\xi(t)=\lambda t, \quad D_\xi(t)=\lambda t$

$$P\{\xi(s)-\xi(t)=k\}=\frac{(\lambda(s-t))^k}{k!}e^{-\lambda(s-t)}, \quad 0\le t<s, \quad k=0,1,2,\ldots$$

$$M[\xi(s)-\xi(t)]=\lambda(s-t), \qquad D[\xi(s)-\xi(t)]=\lambda(s-t), \quad 0\le t<s$$

Производящая функция пуассоновского распределения имеет вид

$$\phi_\xi(z)=\sum_{k=0}^{\infty} z^k\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}=e^{\lambda t(z-1)}$$

Пуассоновский процесс имеет следующий физический смысл. Рассмотрим однородный поток событий интенсивности λ со следующими свойствами

а) вероятность отдельного события за малый промежуток времени Δt $(\lambda\Delta t \ll 1)$ $P_1=\lambda\Delta t+o(\lambda\Delta t)$,

б) вероятность наступления более одного события за этот промежуток времени пренебрежимо мала, т.е. $P_{>1}=o(\lambda\Delta t)$,

в) количества событий $\{\xi(\Delta_к), k=1,2,\ldots,n\}$, наступивших на непересекающихся интервалах времени $\{\Delta_к, k=1,2,\ldots,n\}$, представляют собой взаимно независимые случайные величины.

Если разбить фиксированный промежуток времени $(0,t)$ на n равных частей, то общее число $\xi(t)$ наступивших за время t событий можно представить в виде

$$\xi(t)=\sum_{k=1}^{n}\xi(\Delta_к),$$

где СВ $\{\xi(\Delta_к), k=1,2,\ldots,n\}$- независимы и имеют одинаковое распределение вероятностей с производящей функцией $\varphi_n(z)$, которая с точностью до малых высшего порядка (по сравнению с $\frac{1}{n}$) есть

$$\varphi_n(z)=\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)+\frac{\lambda t}{n}z+o\left(\frac{1}{n}\right)=\left(1+\frac{\lambda t(z-1)}{n}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Производящая функция $\varphi_\xi(z)$ случайной величины $\xi(t)$ есть, следовательно,

$$\varphi_\xi(z)=[\varphi_n(z)]^n=\left[\left(1+\frac{\lambda t(z-1)}{n}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n.$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, получим окончательную формулу

$$\varphi_\xi(z)=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{\lambda t(z-1)}{n}\right]^n=e^{\lambda t(z-1)}$$

Т.е., $\varphi_\xi(z)$ есть производящая функция распределения Пуассона с параметром $a=\lambda t$.

Таким образом, пуассоновский процесс есть процесс счета событий. Реализации пуассоновского процесса имеют вид кусочно-постоянных функций, изменяющихся скачком на единицу (вверх) в случайные моменты времени, соответствующие появлениям очередных событий из потока.

Ясно, что пуассоновский процесс обладает свойством отсутствия последействия и является марковским процессом.

2) Винеровский процесс.

Гауссовский случайный процесс $\{\xi(t), t \ge 0\}$ с непрерывным временем, моментными характеристиками $m(t) = 0$, $B(t_1, t_2) = \min(t_1, t_2)$, $t_1, t_2 \ge 0$ и выходящий из нуля, т.е. $\xi(0) = 0$, называется **винеровским процессом**.

Приращения винеровского процесса на непересекающихся промежутках времени независимы. Действительно, заметим, что совокупность приращений винеровского процесса

$\eta_1 = \xi(t_1) - \xi(t_0) = \xi(t_1), \eta_2 = \xi(t_2) - \xi(t_1), ..., \eta_k = \xi(t_k) - \xi(t_{k-1})$,

где $0 = t_0 < t_1 < ... < t_k$ и $\xi(t_0) = 0$, имеет гауссовское распределение в силу гауссовости случайного вектора $\vec{\xi} = \{\xi(t_1), \xi(t_2), ..., \xi(t_k)\}$. Поэтому для доказательства независимости приращений достаточно установить их некоррелированность. Итак, для моментов времени $t_i > t_j$

$$\left\langle (\xi(t_i) - \xi(t_{i-1}))(\xi(t_j) - \xi(t_{j-1})) \right\rangle = \min(t_i, t_j) - \min(t_{i-1}, t_j) - \min(t_i, t_{j-1}) + \min(t_{i-1}, t_{j-1}) = t_j - t_j - t_{j-1} + t_{j-1} = 0,$$

что означает некоррелированность приращений процесса $\xi(t)$ на промежутках $[t_{i-1}, t_i]$ и $[t_{j-1}, t_j]$.

Приращение $\eta = \xi(t) - \xi(s)$ имеет нулевое среднее значение $\langle \xi(t) - \xi(s) \rangle = 0$, дисперсию $\left\langle [\xi(t) - \xi(s)]^2 \right\rangle = t + s - 2\min(t, s) = |t - s|$ и гауссовское распределение

$$f_\eta(y; t, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|t - s|}} \exp\left[-\frac{y^2}{2|t - s|} \right]$$

Конечномерная плотность распределения вектора $\vec{\xi}$ - $f_{\vec{\xi}}(x_1, ..., x_k; t_1, ..., t_k)$ выражается через плотность распределения вектора приращений $\vec{\eta}$ $f_{\vec{\eta}}(y_1, ..., y_k; t_1, ..., t_k)$

$$f_{\vec{\xi}}(x_1, ..., x_k; t_1, ..., t_k) = f_{\vec{\eta}}(x_1, x_2 - x_1, ..., x_k - x_{k-1}; t_1, ..., t_k),$$

т.к. якобиан преобразования $\eta \leftrightarrow \xi$ равен по модулю 1 и, следовательно, равна

$$f_{\vec{\xi}}(x_1, ..., x_k; t_1, ..., t_k) = \prod_{i=1}^{k} f_{\eta_k}(x_i - x_{i-1}; t_i, t_{i-1}) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi|t_i - t_{i-1}|}} \exp\left[-\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2|t_i - t_{i-1}|} \right],$$

где $t_0 = 0, x_0 = 0$

1.4.6.Случайные процессы с некоррелированными приращениями.

Комплексный случайный процесс $\zeta(t)$ называется процессом с некоррелированными (ортогональными) приращениями, если для любых комплексных приращений $\zeta_1 = \zeta(t_1) - \zeta(s_1)$ и $\zeta_2 = \zeta(t_2) - \zeta(s_2)$, где $s_1 < t_1 < s_2 < t_2$, выполнено условие

$$\left\langle (\zeta_1 - M\zeta_1)(\zeta_2 - M\zeta_2)^* \right\rangle = 0.$$

1.5. Элементы стохастического анализа случайных функций.

Для изучения случайных процессов с непрерывным временем, которые обычно называют случайными функциями (СФ), так же как и для изучения детерминированных функций применяют методы математического анализа. Раздел теории случайных процессов, в котором рассматриваются непрерывность СФ, операции дифференцирования и интегрирования, называется стохастическим анализом.

1.5.1. Понятие сходимости в теории вероятностей.

Понятие сходимости является основополагающим не только в классическом математическом анализе, но и в стохастическом анализе. В теории вероятностей используют несколько видов сходимости последовательности сл. вел. ξ_n к некоторому неслучайному числу a. Один из видов вероятностной сходимости – **сходимость в среднем квадратичном,** для которой используется обозначение $\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ \xi_n = a$ (l.i.m. - limit in mean square) и которое означает обращение в нуль среднего квадрата, т.е. второго момента, разности $\xi_n - a$ при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle (\xi_n - a)^2 \right\rangle = 0,$$

что означает $\lim\limits_{n\to\infty}\int (x-a)^2 f_{\xi_n}(x)dx = 0$. Пример: $f_{\xi_n}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_n^2}}, \lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n^2 = 0$

Аналогично определяется с.к. сходимость последовательности СВ ξ_n к некоторой СВ η

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ \xi_n = \eta \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left\langle (\xi_n - \eta)^2 \right\rangle = 0,$$

что означает $\lim\limits_{n\to\infty}\int (x-y)^2 f_{\xi_n\eta}(x,y)dxdy = 0$.

Пример: $f_{\xi_n\eta}(x,y) = f_{\xi_n\eta}(x/y)\, f_\eta(y),\ f_{\xi_n\eta}(x/y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma_n^2}}, \lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n^2 = 0$

1.5.2. Непрерывность случайных функций.

Пусть вещественная СФ $\xi(t)$ определена на некотором отрезке T действительной оси. Будем предполагать, что для любого $t \in T$ выполнено условие $\left\langle (\xi(t))^2 \right\rangle < \infty$. Очевидно, что в этом случае существуют и конечны математическое ожидание $m_\xi(t)$, дисперсия $D_\xi(t)$ и ковариационная функция $B(t_1,t_2)$ при всех $t_1,t_2 \in T$.

Случайная функция $\{\xi(t), t\in T\}$ называется **непрерывной в среднеквадратическом смысле (с.к.-непрерывной)** в точке $t_0 \in T$, если $\underset{t\to t_0}{l.i.m.}\xi(t) = \xi(t_0)$ (или $\xi(t) \xrightarrow{с.к.} \xi(t_0)$ при $t \to t_0$), т.е. $\left\langle |\xi(t) - \xi(t_0)|^2 \right\rangle \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$

Случайная функция $\{\xi(t), t\in T\}$ называется **с.к.-непрерывной на *T***, если она с.к.-непрерывна в каждой точке $t_0 \in T$.

Критерий с.к. непрерывности СФ. Для с.к. непрерывности СФ $\xi(t)$ в точке $t_0 \in T$ необходимо и достаточно, чтобы $m_\xi(t)$ было непрерывно в точке t_0, а $B(t_1,t_2)$ - непрерывна в точке (t_0,t_0).

Из с.к. непрерывности СФ $\xi(t)$ следует, что дисперсия $D_\xi(t) = B(t,t)$ - непрерывная функция.

Пример. Нетрудно показать, что пуассоновский и винеровский процессы являются с.к.-непрерывными, т.к. при малых $|t-t_0|$

$$\left\langle |\xi(t) - \xi(t_0)|^2 \right\rangle \propto |t - t_0| \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$$

1.5.3. Дифференцирование случайных функций.

Говорят, что СФ $\xi(t)$ с математическим ожиданием $m_\xi(t)$ и ковариационной функцией $B_\xi(t_1,t_2)$ **дифференцируема** в точке $t_0 \in T$, если производная (случайная величина)

$$\xi'(t_0) = \left.\frac{d\xi(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = \underset{\Delta t\to 0}{l.i.m.}\frac{\xi(t_0+\Delta t)-\xi(t_0)}{\Delta t}$$

существует в среднем квадратичном, т.е. существует предел

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left\langle\left[\frac{\xi(t+\Delta t)-\xi(t)}{\Delta t}\right]^2\right\rangle$$

Моментные функции производной СФ.

Если такая производная существует, то

$$\langle\xi'(t)\rangle \approx \left\langle\frac{\xi(t+\Delta t)-\xi(t)}{\Delta t}\right\rangle = \frac{\langle\xi(t+\Delta t)\rangle-\langle\xi(t)\rangle}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t\to 0]{}\frac{dm_\xi(t)}{dt}$$

Т.е. операции дифференцирования и математического ожидания можно менять местами.

Пусть $m_\xi(t)=0$. Если $\xi(t)$ дифференцируема на T, то взаимная ковариационная функция

$$B_{\xi\xi'}(t_1,t_2) \approx \left\langle\xi(t_1)\frac{\xi(t_2+\varepsilon)-\xi(t_2)}{\varepsilon}\right\rangle =$$

$$\frac{B_\xi(t_1,t_2+\varepsilon)-B_\xi(t_1,t_2)}{\varepsilon}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\frac{\partial B_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_2}$$

и

$$B_{\xi'}(t_1,t_2) \approx \left\langle\frac{\xi(t_1+\varepsilon)-\xi(t_1)}{\varepsilon}\xi'(t_2)\right\rangle =$$

$$\frac{B_{\xi\xi'}(t_1+\varepsilon,t_2)-B_{\xi\xi'}(t_1,t_2)}{\varepsilon}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\frac{\partial B_{\xi\xi'}(t_1,t_2)}{\partial t_1}=\frac{\partial^2 B_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}$$

Критерий с.к.-дифференцируемости. Для того чтобы случайная функция $\xi(t)$ была с.к.-дифференцируема в точке $t_0 \in T$ необходимо и достаточно, чтобы существовали производная $\frac{dm_\xi(t)}{dt}$ в точке t_0 и смешанная производная второго порядка $\left.\frac{\partial^2 B_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}\right|_{t_1=t_2=t_0}$ в точке (t_0,t_0).

Оказывается, что далеко не все случайные функции дифференцируемы даже в среднеквадратическом смысле.

<u>Пример.</u> Покажем, что с.к.-непрерывные пуассоновский и винеровский процессы нигде не дифференцируема в с.к.-смысле. Рассмотрим при малых Δt величину

$$\left\langle\left[\frac{\xi(t+\Delta t)-\xi(t)}{\Delta t}\right]^2\right\rangle = \frac{\left\langle[\xi(t+\Delta t)-\xi(t)]^2\right\rangle}{\Delta t^2} \propto \frac{\Delta t}{\Delta t^2}\xrightarrow[\Delta t\to 0]{}\infty$$

1.5.4. Интегрирование случайных функций.

На отрезке $[a,b]\subseteq T$ построим некоторое разбиение $a=t_0\le t_1\le\ldots\le t_{n-1}\le t_n=b$, а на каждом из промежутков этого разбиения выберем произвольную точку $\tau_i\in[t_{i-1},t_i),\ i=1,\ldots,n$

<u>СФ второго порядка</u> $\xi(t)$ называется **с.к. -интегрируемой** на $[a,b]$, а случайная

величина η называется ее с.к. -интегралом по $[a,b]$ и обозначается

$$\eta = \int_a^b \xi(t)dt,$$

если при $n \to \infty$ и $\max\limits_{i=1,\dots,n}(t_i - t_{i-1}) \to 0$ существует предел в среднем квадратичном

$$\sum_{i=1}^{n} \xi(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) \xrightarrow{с.к} \eta,$$

не зависящий от способа разбиения $\{t_i\}$ и выбора точек $\{\tau_i\}$,

Для с.к.-интегрируемости имеется весьма простой критерий. Для существования с.к.-интеграла $\int_a^b \xi(t)dt$ необходимо и достаточно, чтобы существовали следующие интегралы Римана:

$$I_1 = \int_a^b m_\xi(t)dt$$

$$I_2 = \int_a^b \int_a^b B_\xi(t_1, t_2)dt_1 dt_2$$

При выполнении этих условий операции усреднения и интегрирования можно менять местами: $M\left[\int_a^b \xi(t)dt\right] = \int_a^b m_\xi(t)dt$

Аналогично определяется с.к. - интеграл вида $\eta = \int_a^b a(t)\xi(t)dt$, где $a(t)$ - непрерывная неслучайная функция.

1.5.5. Дифференциальные уравнения со случайной правой частью.

Введенные понятия с.к.-производной и с.к.-интеграла позволяют корректно рассмотреть *линейные дифференциальные уравнения со случайными возмущениями* в правой части и случайными начальными условиями.

Рассмотрим уравнение первого порядка

$$\frac{d}{dt}\eta(t) = a(t)\eta(t) + b(t)\xi(t), \quad t \ge t_0$$

$$\eta(t_0) = \nu$$

где $\frac{d}{dt}\eta(t)$ - с.к - производная $\eta(t)$, $\xi(t)$ - с.к. – непрерывная при $t \ge t_0$ и, следовательно, интегрируемая на ограниченном интервале СФ, $a(t), b(t)$ - непрерывные неслучайные функции, а ν - некоторая случайная величина.

Пусть $w(t,s)$ - частное решение однородного уравнения

$$\frac{d}{dt}w(t,s) = a(t)w(t,s), \quad t \ge s$$

с начальным условием $w(s,s) = 1$. Если $a(t)$ - непрерывна, то $w(t,s) = \exp(\int_s^t a(\tau)d\tau)$.

Нетрудно показать прямой подстановкой, что зависящий от параметра с.к. – интеграл вида

$$\eta_0(t) = \int_{t_0}^{t} w(t,s)b(s)\xi(s)ds$$

удовлетворяет рассматриваемому неоднородному уравнению с нулевым начальным условием.

Это выражение позволяет выписать явный аналитический вид решения задачи

$$\eta(t) = w(t,t_0)\nu + \int_{t_0}^{t} w(t,s)b(s)\xi(s)ds$$

Если $a(t) = a, b(t) = b$ константы, решение принимает вид

$$\eta(t) = e^{a(t-t_0)}\nu + b\int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}\xi(\tau)d\tau$$

1.6. Каноническое представление случайных процессов рядами ортогональных функций

При различных преобразованиях случайных процессов и полей, при приближенном их представлении в целях сжатия данных, а также при математическом моделировании оказывается весьма полезной запись случайных функций и полей в виде рядов ортогональных функций. Физической причиной этого является то, что ортогональные компоненты физических процессов могут быть экспериментально выделены с помощью подходящих фильтров. Математической причиной этого является то, что ортогональные разложения соответствуют некоторой общей системе декартовых координат, а это дает возможность использовать приближенные геометрические представления реализаций СФ в виде точек в многомерном пространстве.

Из классического анализа и математической физики мы знаем, что полная система ортонормированных функций образуется из собственных функций некоторого оператора рассматриваемой задачи. Как обстоит дело в теории случайных процессов? Рассмотрим для общности комплексные СФ.

Каждая СФ $\zeta(t)$, с.к.-непрерывная на конечном интервале T, имеет ортогональное разложение. Для доказательства этого используется свойство неотрицательной определенности ковариационной функции $B_\zeta(t_1,t_2)$ и теорема Мерсера.

Функция $B_\zeta(t_1,t_2)$, определенная на $T \times T$, наз. неотрицательно определенной, если для каждого конечного подмножества $T_n = \{t_i, i = 1,\ldots,n\} \subset T$ и для любой комплекснозначной функции $h(t)$ на T выполняется соотношение

$$\sum_{t_i,t_j \in T_n} B_\zeta(t_i,t_j)h(t_i)h^*(t_j) \geq 0$$

Ковариационные функции СФ второго порядка, очевидно, этому условию удовлетворяют, т.к.

$$\left\langle \left| \sum_{t_i \in T_n} \zeta(t_i)h(t_i) \right|^2 \right\rangle = \sum_{t_i,t_j \in T_n} B_\zeta(t_i,t_j)h(t_i)h^*(t_j) \geq 0$$

Здесь и далее мы предполагаем, что среднее значение СФ равно нулю.

Теорема Мерсера. Если неотрицательно определенная функция $B(t_1,t_2)$ непрерывна на $T \times T$, то эта функция имеет ортогональное разложение

$$B(t_1,t_2) = \sum_n \left|\lambda_n^2\right| \psi_n(t_1)\psi_n^*(t_2)$$

причем ряд сходится на $T \times T$ равномерно и абсолютно, а непрерывные функции $\psi_n(t)$ являются собственными функциями ядра $B(t_1,t_2)$, соответствующими собственным значениям $\left|\lambda_n^2\right|$

$$\int_T B(t_1,t_2)\psi_n(t_2)dt_2 = \left|\lambda_n^2\right|\psi_n(t_1)$$

и все собственные функции ортонормированы на T

$$\int_T \psi_m(t)\psi_n^*(t)dt = \delta_{mn}.$$

Т.е. это теорема об ортогональном разложении ковариационной функции.

Теорема об ортогональном разложении СФ по собственным функциям ядра $B_\zeta(t_1,t_2)$**.** Случайная функция $\zeta(t)$ с нулевым средним значением**,** с.к.-непрерывная на замкнутом конечном интервале T, тогда и только тогда имеет на T ортогональное разложение:

$$\zeta(t) = \sum \zeta_n \psi_n(t),$$

где случайные величины ζ_n и детерминированные функции $\psi_n(t)$ - ортогональны: $\left\langle \zeta_m \zeta_k^* \right\rangle = \left|\lambda_m^2\right|\delta_{mk}$, $\int \psi_m(t)\psi_k^*(t)dt = \delta_{mk}$, когда $\left|\lambda_n^2\right|$ являются собственными значениями, а $\psi_n(t)$ - ортонормированными собственными функциями ее ковариационной функции. В этом случае ряд сходится в среднем квадратичном равномерно на T.

Доказательство. Пусть

$$\zeta_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k \psi_k(t)$$

Если $\zeta(t)$ обладает доказываемым разложением, то

$$B_\zeta(t_1,t_2) = \left\langle \zeta(t_1)\zeta^*(t_2) \right\rangle = \lim_{n\to\infty}\left\langle \zeta_n(t_1)\zeta_n^*(t_2) \right\rangle = \sum_k \left|\lambda_k^2\right|\psi_k(t_1)\psi_k^*(t_2),$$

а это, после умножения обоих частей равенства на $\psi_n(t)$ и интегрирования, доказывает необходимость утверждения.

Наоборот, пусть $\psi_n(t)$ ортонормированные собственные функции ковариации $B_\zeta(t_1,t_2)$ СФ $\zeta(t)$. Введем интегралы

$$\zeta_k = \int_T \zeta(t)\psi_k^*(t)dt$$

Эти интегралы существуют, так как $\zeta(t)$ (в ср. кв.) и $\psi_n(t)$ непрерывны на замкнутом интервале T. С помощью теоремы Мерсера нетрудно доказать, что

$$\left\langle \left| \zeta(t) - \sum_{k=1}^{n} \zeta_k \psi_k(t) \right|^2 \right\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

равномерно на T, а отсюда вытекает достаточность утверждения.

Разложение СП в ряд по ортонормированным функциям, которые являются собственными функциями однородного интегрального уравнения Фредгольма с ядром $B_\zeta(t_1,t_2)$, называется разложением Карунена-Лоэва, или каноническим разложением.

2. Стационарные случайные процессы.

Важным классом случайных процессов являются стационарные СП, к изучению которых мы переходим. Но предварительно рассмотрим один частный, но практически важный тип СП – пуассоновские импульсные процессы.

2.1. Пуассоновские импульсные случайные процессы.

Этот тип процессов интересен тем, что для получения многих относящихся к нему результатов можно обойтись средствами классической теории вероятности.

Импульсный СП общего вида представляет собой суперпозицию импульсов, у которых случайными могут быть: момент появления импульса, амплитуда, длительность, параметры формы и др.

$$\xi(t)=\sum_{\nu}F(t-t_{\nu},\vec{\alpha}_{\nu}),$$

где $F(\rho,\vec{\alpha}_{\nu})$ - детерминированная функция формы импульса, t_{ν} - момент его появления, $\vec{\alpha}_{\nu}$.- m -мерный вектор случайных параметров импульса.

Рассмотрим задачу при следующих простейших предположениях о вероятностных свойствах случайных параметров t_{ν} и $\vec{\alpha}_{\nu}$:

1. Все t_{ν} и $\vec{\alpha}_{\nu}$ статистически независимы между собой и их распределения не зависят от номера импульса ν. Тогда совместная плотность распределения $n(m+1)$ параметров распадается на множители

$$f(\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n;t_1,t_2,...,t_n)=\prod_{\nu=1}^{n}f_{\vec{a}}(\vec{a}_{\nu})f_t(t_{\nu})$$

2. Импульсы образуют однородный пуассоновский поток событий. Это предположение означает, что вероятность появления одного импульса в промежутке времени от t до $t+dt$ не зависит от t и пропорциональна dt, т.е.

$$f_t(t)dt=n_1dt,\quad n_1=const,$$

и что вероятность появления n импульсов в интервале времени T дается распределением Пуассона:

$$P(n)=\frac{\bar{n}^n e^{-\bar{n}}}{n!},\quad \bar{n}=n_1T$$

Поэтому рассматриваемые импульсные СП называются пуассоновскими.

В этих предположениях мы вычислим теперь статистические характеристики $\xi(t)$. При этом будем пренебрегать краевыми эффектами. Для этого интервал времени $(-T/2,T/2)$ должен быть большой по сравнению с длительностью отдельного импульса и средним временем $1/n_1$ между импульсами.

Вероятность события B, состоящего в том, что

$\xi(t)\in(x,x+dx):P(B)=P\{x<\xi(t)\le x+dx\}=f(x,t)dx$.

Событие B может реализоваться при осуществлении какого-либо из событий $A_0,A_1,...,A_n,...$, где A_n - состоит в том, что в интервале $(-T/2,T/2)$ появилось n импульсов. События A_n несовместны, так что по теореме о полной вероятности

$$P(B)=\sum_{n=0}^{\infty}P(A_n)P(B/A_n).$$

Вероятность $P(A_n)$ определяется распределением Пуассона. Условная вероятность $P(B/A_n)=w(x,t/n)dx$ - вероятность события $B=\{x<\xi(t)\le x+dx\}$, при условии, что на интервале времени $(-T/2,T/2)$ возникло n импульсов. Тогда

$$P(B)=f(x,t)dx=\sum_{n=0}^{\infty}P(n)w(x,t/n)dx$$

Среднее значение какой-либо функции $g(\xi)$ вычисляется в два этапа

$$\langle g(\xi(t))\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f(x,t)dx=\sum_{n=0}^{\infty}P(n)\int_{-\infty}^{\infty}g(x)w(x,t/n)dx=\sum_{n=0}^{\infty}P(n)\langle g(\xi(t))\rangle_n,$$

где $\langle g(\xi)\rangle_n$ - условное среднее.

Для среднего значения процесса $\langle\xi(t)\rangle$ имеем

$$\langle\xi(t)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,t)dx=\sum_{n=0}^{\infty}P(n)\int_{-\infty}^{\infty}xw(x,t/n)dx=\sum_{n=0}^{\infty}P(n)\langle\xi_n(t)\rangle,$$

где $\xi_n=\sum_{\nu=1}^{n}y_\nu,\quad y_\nu=F(t-t_\nu,\vec{a}_\nu)$

при условии, что в интервале $(-T/2,T/2)$ было n импульсов: $t_\nu\in(-T/2,T/2),\nu=1,...,n$.

Так как

$$\langle\xi_n\rangle=\sum_{\nu=1}^{n}\langle y_\nu\rangle=\sum_{\nu=1}^{n}\langle F(t-t_\nu,\vec{a}_\nu)\rangle$$

и независящая от номера величина

$$\langle y_\nu\rangle=\int f_{\vec{a}}(\vec{a})d\vec{a}\int_{-T/2}^{T/2}F(t-s,\vec{a})\frac{ds}{T},$$

то, пренебрегая краевыми эффектами, получим

$$\langle\xi(t)\rangle=m_1=\int f_{\vec{a}}(\vec{a})d\vec{a}\int_{-T/2}^{T/2}F(t-s,\vec{a})ds\frac{1}{T}\sum_{n=0}^{\infty}nP(n)\approx n_1\int f_{\vec{a}}(\vec{a})d\vec{a}\int_{-\infty}^{\infty}F(\rho,\vec{a})d\rho$$

(учтено, что для пуассоновского процесса $\langle n\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}nP(n)=n_1T$ и сделана замена переменной интегрирования $s=t-\rho$)

Если $\vec{a}=a$ - амплитуда, то $F(\rho,a)=aF(\rho)$ и

$$\langle\xi(t)\rangle=n_1\langle a\rangle\int_{-\infty}^{\infty}F(\rho)d\rho,$$

Математическое ожидание пуассоновского импульсного СП обладает следующими свойствами:

1) содержит единственную характеристику густоты импульсов n_1,
2) не зависит от времени, в чем проявляется стационарность рассматриваемого процесса.

Выражение для ковариационной функции импульсного СП $\xi(t)$

$$B_\xi(t,t')=\langle\xi(t)\xi(t')\rangle-\langle\xi(t)\rangle\langle\xi(t')\rangle$$

мы можем получить действуя по той же схеме, по которой получено выражение для математического ожидания. Второй член (1.4) равен m_1^2, поэтому необходимо вычислить только корреляционную функцию $R(t,t') = \langle \xi(t)\xi(t')\rangle$. Запишем двумерную плотность вероятности для СВ $\xi = \xi(t) = \sum_\nu F(t - t_\nu, \vec{a}_\nu)$ и $\xi' = \xi(t') = \sum_\nu F(t' - t_\mu, \vec{a}_\mu)$ через условные плотности вероятности при условии, что интервал $(-T/2, T/2)$ содержит n импульсов

$$f(x, x', t, t') = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) w(x, x', t, t'/n)$$

Отсюда следует, что

$$R_\xi(t,t') = \langle \xi\xi' \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) \langle \xi\xi' \rangle_n ,$$

где $\langle \xi\xi' \rangle_n = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} \langle F(t - t_\nu, \vec{a}_\nu) F(t' - t_\mu, \vec{a}_\mu) \rangle$. Т.к. величины с $\nu \neq \mu$ по предположению независимы и имеют одинаковые распределения, двойную сумму можно разбить на две части

$$\langle \xi\xi' \rangle_n = \sum_{\nu=1}^{n} \langle F(t - t_\nu, \vec{a}_\nu) F(t' - t_\nu, \vec{a}_\nu) \rangle + \sum_{\nu \neq \mu} \langle F(t - t_\nu, \vec{a}_\nu) \rangle \langle F(t' - t_\mu, \vec{a}_\mu) \rangle$$

и, после введения обозначения $\tau = t' - t$, получить

$$\langle \xi\xi' \rangle_n = \frac{n}{T} \int f_{\vec{a}}(\vec{a}) d\vec{a} \int_{-T/2}^{T/2} F(t - s, \vec{a}) F(t - s + \tau, \vec{a}) ds + \frac{n^2 - n}{T^2} \left[\int f_{\vec{a}}(\vec{a}) d\vec{a} \int_{-T/2}^{T/2} F(t - s, \vec{a}) ds \right]^2$$

Усреднение по распределению Пуассона (т.к. $\langle n \rangle = n_1 T,\ \ \langle n^2 \rangle = \langle n \rangle + \langle n \rangle^2 = n_1 T + (n_1 T)^2$)) и последующий переход к пределу $T \to \infty$ (пренебрежение краевыми эффектами) дает ($s = t - \rho$)

$$R_\xi(t,t') = R_\xi(\tau) = n_1 \int f_{\vec{a}}(\vec{a}) d\vec{a} \int_{-\infty}^{\infty} F(\rho, \vec{a}) F(\rho + \tau, \vec{a}) d\rho + m_1^2$$

Следовательно, ковариационная функция

$$B_\xi(\tau) = n_1 \int f_{\vec{a}}(\vec{a}) d\vec{a} \int_{-\infty}^{\infty} F(\rho, \vec{a}) F(\rho + \tau, \vec{a}) d\rho$$

Корреляционная и ковариационная функции не зависят от времени, а только от разности τ, что снова говорит о стационарности рассматриваемого СП. При τ=0 получаем формулу для дисперсии $\xi(t)$

$$D[\xi(t)] = m_2 - m_1^2 = n_1 \int f_{\vec{a}}(\vec{a}) d\vec{a} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\rho, \vec{a}) d\rho .$$

Если функция формы импульса $F(t, \vec{\alpha}_\nu)$ - комплексная, то выражения для ковариационной функции и дисперсии комплексного пуассоновского импульсного СП $\zeta(t)$ принимают вид

$$B_\zeta(\tau) = n_1 \int f_{\vec{a}}(\vec{a}) d\vec{a} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\rho, \vec{a}) F(\rho + \tau, \vec{a}) d\rho$$

$$D[\zeta(t)] = n_1 \int f_{\vec{a}}(\vec{a}) d\vec{a} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\rho, \vec{a})|^2 d\rho$$

С помощью полученных соотношений можно описать эффект дробового шума, обусловленного дискретностью носителей заряда в электронных приборах. Пусть импульсы имеют одинаковые амплитуды $a = e$ и прямоугольную форму

$$F(\rho) = \begin{cases} \dfrac{1}{\delta}, 0 \le \rho \le \delta \\ 0,\ \rho < 0,\ \rho > \delta \end{cases}.$$

Тогда $\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\rho) d\rho = 1$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} F^2(\rho) d\rho = \dfrac{1}{\delta}$.

Для импульсного тока $I(t) = \sum\limits_{\nu} F(t - t_\nu)$ получаем:

средний ток $\langle I(t) \rangle = n_1 e$, дисперсия **мгновенного** тока

$$D[I] = \frac{n_1 e^2}{\delta} = \frac{e\langle I \rangle}{\delta} = \frac{\langle I \rangle^2}{n_1 \delta};\ \sigma_I = \frac{\langle I \rangle}{\sqrt{n_1 \delta}}$$

В реальных измерениях флуктуации мгновенного тока значительно сглаживаются благодаря усреднению по хотя и малому, но макроскопическому промежутку времени $T >> \delta$. Введем усредненный по времени T сглаженный случайный процесс

$$\tilde{I}_T(t) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T I(t-s) ds .$$

Его среднее значение

$$\left\langle \tilde{I}_T(t) \right\rangle = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \left\langle I(t-s) \right\rangle ds = n_1 e = \left\langle I \right\rangle$$

Определим дисперсию усредненного по времени тока

$$D\left[\tilde{I}_T(t)\right] = \left\langle \left(\tilde{I}_T(t) - \left\langle \tilde{I}_T \right\rangle\right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(\frac{1}{T}\int\limits_0^T (I(t-s) - \langle I(t-s) \rangle) ds\right)^2 \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{T^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T \left\langle \left(I(t-s) - \langle I(t-s) \rangle\right)\left(I(t-s') - \langle I(t-s') \rangle\right) \right\rangle ds ds' = \frac{1}{T^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T B_I(s'-s) ds ds' = \frac{1}{T^2}\int\limits_0^T\int\limits_{-s}^{T-s} B_I(\tau) d\tau ds$$

Ковариационная функция $B_I(\tau)$ мгновенного тока для прямоугольных импульсов, как легко проверить имеет вид равнобедренного треугольника

$$B(\tau) = \frac{n_1 e^2}{\delta}\left(1 - \frac{|\tau|}{\delta}\right), |\tau| < \delta, \quad B(\tau) = 0, |\tau| > \delta$$

Подставив ее в двукратный интеграл и учитывая, что $B_I(\tau)$ отлична от нуля только при $|\tau| < \delta << T$, получим $D\left[\tilde{I}_T(t)\right] \approx \dfrac{n_1 e^2}{T} = \dfrac{\langle I \rangle^2}{n_1 T}$. Таким образом, дисперсия сглаженного тока в $T/\delta >> 1$ раз меньше дисперсии мгновенного тока. Это частный пример общего положения, что усреднение по времени (накопление) подавляет шум.

Кроме того, обратим внимание, что $D\left[\tilde{I}_T((t)\right] \approx \frac{n_1 e^2}{T} = \frac{\langle I \rangle^2}{n_1 T} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$. Следовательно, учитывая, что $\left\langle \tilde{I}_T(t) \right\rangle = \langle I \rangle$, $\underset{T\to\infty}{l.i.m.} \tilde{I}_T(t) = \langle I \rangle$ - эргодическое свойство. Скорость сходимости определяется соотношением $\frac{\sqrt{D[\tilde{I}_T]}}{\langle I \rangle} \approx \frac{1}{\sqrt{n_1 T}}$.

2.2. Определение стационарности в узком и широком смысле.

Случайный процесс $\xi(t)$ называется **стационарным в узком смысле**, если все конечномерные функции распределения вероятностей любого порядка инвариантны относительно сдвига по времени на произвольную величину, т. е. при любых n и t_0 справедливо равенство

$$f_n(x_1, x_2, \ldots x_n; t_1 - t_0, t_2 - t_0, \ldots, t_n - t_0) = f_n(x_1, x_2, \ldots x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

Т.е. плотность вероятности не меняется, если мы сдвигаем гребенку отсчетов по времени на одну и ту же величину t_0, при этом относительные разности отсчетов по времени сохраняются.

Очевидно при этом:

1) $f_1(x,t) = f_1(x)$ - одномерная плотность вероятности стационарного в узком смысле случайного процесса вообще не зависит от времени.

2) $f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_2(x_1, x_2; t_2 - t_1)$ зависит только от разности $(t_2 - t_1)$.

3) Таким образом, для стационарного в узком смысле случайного процесса n-мерная плотность вероятности, n- мерные моменты зависят не от n, а от $n-1$ моментов времени, так как один из выбранных моментов времени можно всегда принять за начало отсчета времени (например, положить t_1 =0).

Определим, как выглядят моментные функции стационарного в узком смысле случайного процесса (если они существуют).

1. Начальные моменты и центральные моменты любого “n”-го порядка стационарного в узком смысле случайного процесса не зависят от времени:

$$M[x^n(t_1)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)dx = m_n = Const,\ n \ge 1$$

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_1)^n f(x)dx = Const,\ n \ge 1,$$

   в частности, среднее значение и дисперсия.

2. Функция корреляции $R_\xi(t_1, t_2)$ и ковариационная функция $B_\xi(t_1, t_2)$

$$R_\xi(t_1, t_2) = \int\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2; t_2 - t_1) dx_1 dx_2 = R_\xi(t_2 - t_1) = R_\xi(\tau)$$

$$B_\xi(t_1, t_2) = \int\int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_1)(x_2 - m_1) f_2(x_1, x_2; t_2 - t_1) dx_1 dx_2 = B_\xi(t_2 - t_1) = B_\xi(\tau)$$

зависят лишь от разности аргументов $\tau = t_2 - t_1$, причем в силу свойства симметрии относительно перестановок $B_\xi(\tau) = B_\xi(-\tau)$.

При решении многих практических задач, в рамках **корреляционной теории**, многомерные плотности вероятности не рассматривают, а оперируют только с математическим ожиданием и ковариационной (корреляционной) функцией. В связи с этим введено понятие стационарности в широком смысле.

В рамках корреляционной теории случайный процесс $\xi(t)$ с конечной дисперсией, т.е. случайный процесс второго порядка, называется **стационарным в широком смысле**, если его математическое ожидание и ковариационная функция инварианты относительно сдвига по времени, т. е. математическое ожидание постоянно (не зависит от времени), а ковариационная функция зависит только от разности аргументов $\tau = t_2 - t_1$.

Стационарный в узком смысле процесс с конечной дисперсией будет всегда стационарным в широком смысле, но обратное утверждение справедливо не всегда.

Для гауссовских стационарных процессов, плотности вероятности которых полностью определяются математическим ожиданием и ковариационной функцией, понятия стационарности в узком и широком смыслах совпадают.

Приведенные определения распространяются на случайные поля. Однородность случайного поля является аналогом стационарности случайных процессов. Физически однородность поля указывает на то, что в любой точке пространства $\vec{r}$ поле ведет себя «в среднем» одинаково. **Случайное поле** $\xi(\vec{r})$ называется **однородным в широком смысле**, если его математическое ожидание не зависит от координат пространства, а пространственная корреляционная функция $R_\xi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$ является функцией только разности аргументов, т. е.

$$R_\xi(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = R_\xi(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

Стационарные в широком смысле процессы $\xi(t), \eta(t)$ называются стационарно связанными, если их взаимная ковариационная функция зависит только от разности аргументов $\tau = t_2 - t_1$.

2.3. Эргодичность случайного процесса.

До сих пор характеристики случайных процессов и полей - плотности вероятности, моментные функции и др. - были определены аксиоматически как соответствующие статистические средние значения «поперек процесса», при фиксированных моментах времени, т. е. как средние значения $\xi(\omega,t)$ по пространству элементарных событий $\omega \in \Omega$, иначе говоря по большому числу реализаций, соответствующих различным элементарным исходам $\omega \in \Omega$ в статистическом опыте или, как принято говорить в физике, в ансамбле одинаковых систем.

Оказывается, что при определенных условиях характеристики СП можно получить путем осреднения соответствующих величин «вдоль процесса», т. е. по одной реализации СП достаточно большой длительности, соответствующей фиксированному элементарному исходу $\omega' \in \Omega$. Случайные процессы, для которых эти условия выполнены, называются **эргодическими** или говорят, что СП обладает **эргодическим свойством**. Вообще говоря, условия эргодичности для разных характеристик могут различаться и, следовательно, СП может быть эргодическим относительно одной или нескольких характеристик и неэргодическим для других. В связи с этим вводят понятие **эргодичности относительно отдельных характеристик процесса.**

Прежде, чем переходить к выводу условий эргодичности СП целесообразно вспомнить один из фундаментальных результатов теории вероятностей - **закон больших чисел**, который формулируется следующим образом.

Для последовательности одинаково распределенных независимых СВ $\xi_k, k = 1,2,\ldots$, имеющих конечное математическое ожидание $\langle \xi_k \rangle = a$ и дисперсию $D\xi_k = \sigma^2$, $k = 1,2,\ldots$, последовательность СВ $\eta_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ сходится при $n \to \infty$ в среднеквадратичном к математическому ожиданию a:

$$\underset{n\to\infty}{l.i.m.}\eta_n = \underset{n\to\infty}{l.i.m.}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_n = a$$

Действительно, $\langle\eta_n\rangle = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\langle\xi_k\rangle = a$, $D\eta_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D\xi_k = \frac{\sigma^2}{n}$.

Следовательно, $\left\langle(\eta_n - a)^2\right\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Далее, из среднеквадратичной сходимости, в силу неравенства Чебышева следует сходимость по вероятности $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\eta_n - a| \le \varepsilon\} = 1$.

Таким образом, при достаточно больших n вероятность сколько–нибудь заметных отклонений реализаций СВ η_n, т. е. эмпирических средних, от a незначительна.

Если последовательность может быть образована дискретной выборкой значений стационарного процесса с таким шагом, что эти значения независимы, при этом k - номер отсчета, то закон больших чисел устанавливает эргодичность такого процесса.

Условия эргодичности непрерывного стационарного в узком смысле СП можно получить по следующей схеме.

Пусть $g(\xi)$ - некая детерминированная функция случайного процесса $\xi(t)$. Обозначим ее среднее по времени за промежуток $(0,T)$ индексом T и волнистой чертой сверху:

$$\widetilde{g_T[\xi(t)]} = \frac{1}{T}\int_0^T g[\xi(t)]dt$$

Это случайная величина, зависящая от реализаций $\xi(t)$ в интервале (0, T). Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x,x';t-t')$ - одномерная и двумерная плотности вероятности случайного процесса $\xi(t)$. Вычислим среднее значение и дисперсию СВ $\widetilde{g_T[\xi(t)]}$. Имеем

$$\left\langle\widetilde{g_T[\xi(t)]}\right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T\langle g[\xi(t)]\rangle dt = \frac{1}{T}\int_0^T dt\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f_1(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}g(x)f_1(x)dx = \langle g[\xi(t)]\rangle$$

Имеем, далее,

$$D\left[\widetilde{g_T(\xi)}\right] = \left\langle\left[\widetilde{g_T(\xi)} - \left\langle\widetilde{g_T(\xi)}\right\rangle\right]^2\right\rangle = \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T\left[\langle g(\xi)g(\xi')\rangle - \langle g(\xi)\rangle\langle g(\xi')\rangle\right]dtdt' = \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T B_g(t-t')dtdt'$$

где

$$B_g(t-t') = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)g(x')\left[f_2(x,x';t-t') - f_1(x)f_1(x')\right]dxdx'$$

- ковариационная функция $g(\xi)$.

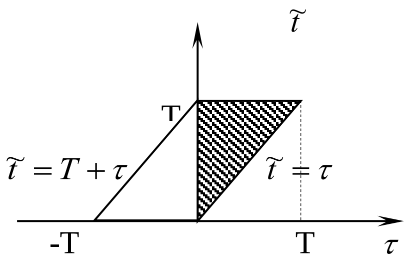
Таким образом, для всех $g(\xi)$ с конечным $\langle g^2(\xi)\rangle$ требование

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T B_g(t-t')dtdt' = 0$$

есть условие того, чтобы имела место сходимость в среднем квадратичном:

$$\underset{T\to\infty}{l.i.m.}\widetilde{g_T(\xi)} = \langle g[\xi(t)]\rangle$$

Преобразуем *условие эргодичности*. Перейдем к переменным $\tilde{t} = t$, $\tau = t - t'$. Область интегрирования принимает вид:



Двойной интеграл преобразуется к виду

$$\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T B_g(t-t')dtdt' = \frac{1}{T^2}\int_{-T}^{0} d\tau \int_0^{T+\tau} d\tilde{t} B_g(\tau) + \frac{1}{T^2}\int_0^T d\tau \int_\tau^T d\tilde{t} B_g(\tau) =$$

$$= \frac{1}{T^2}\int_{-T}^{0}(T+\tau)B_g(\tau)d\tau + \frac{1}{T^2}\int_0^T (T-\tau)B_g(\tau)d\tau = \frac{2}{T}\int_0^T (1-\frac{\tau}{T})B_g(\tau)d\tau$$

Таким образом, для стационарного СП условие эргодичности имеет вид

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T (1-\frac{\tau}{T})B_g(\tau)d\tau = 0$$

Тем самым теорема о сходимости утверждает, что при условии эргодичности **среднее временное от $g(\xi)$ сходится в среднем квадратичном к среднему статистическому $g(\xi)$.**

Оценив интеграл в условии эргодичности по модулю:

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T (1-\frac{\tau}{T})B_g(\tau)d\tau\right| \le \frac{1}{T}\int_0^T \left|1-\frac{\tau}{T}\right| \left|B_g(\tau)\right| d\tau \le \frac{1}{T}\int_0^T \left|B_g(\tau)\right| d\tau$$

можно получить **достаточное условие** эргодичности в виде

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \left|B_g(\tau)\right| d\tau = 0$$

С помощью полученных соотношений нетрудно определить условия эргодичности относительно математического ожидания и дисперсии стационарного СП. В частности, при $g(\xi)=\xi$ получим необходимое и достаточное условие эргодичности

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T (1-\frac{\tau}{T})B_\xi(\tau)d\tau = 0$$

относительно математического ожидания, т.е.

$$\underset{T\to\infty}{l.i.m.}\tilde{\xi}_T = \underset{T\to\infty}{l.i.m.}\frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)dt = \langle\xi\rangle$$

При $g(\xi)=\xi^2$ получим необходимое и достаточное условие эргодичности

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T (1-\frac{\tau}{T})B_{\xi^2}(\tau)d\tau = 0$$

относительно среднего квадрата, т.е.

$$\underset{T\to\infty}{l.i.m.}\frac{1}{T}\int_0^T\left[\xi(t)\right]^2dt=\left\langle\left[\xi(t)\right]^2\right\rangle$$

Если $g[\xi]=\xi(t)\xi(t+\tau)$, то при выполнении соответствующего условия эргодичности

$$\underset{T\to\infty}{l.i.m.}\frac{1}{T}\int_0^T\xi(t)\xi(t+\tau)dt=\langle\xi(t)\xi(t+\tau)\rangle=R_\xi(\tau)$$

В последних 2-х случаях наличие момента четвертого порядка не позволяет в общем случае выразить условие эргодичности для момента второго порядка через ковариационную функцию $B_\xi(\tau)$ самого процесса $\xi(t)$. Однако, в том частном и важном случае, когда $\xi(t)$ - гауссовский процесс, а значит все его моменты, в том числе и четвертые, выражаются через $\bar{\xi}$ и $B_\xi(\tau)$, это возможно. В этом случае условием эргодичности для моментов любого порядка является

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left|B_\xi(\tau)\right|^2d\tau=0$$

При выполнении этого условия временные средние по промежутку $(0,T)$ от произведений гауссовских случайных величин $\xi(t+\tau_1)\xi(t+\tau_2)\cdot\ldots\cdot\xi(t+\tau_n)$ сходятся в среднеквадратичном к соответствующим моментам т.е.

$$\underset{T\to\infty}{l.i.m}\frac{1}{T}\int_0^T\left[\xi(t+\tau_1)\xi(t+\tau_2)\cdot\ldots\cdot\xi(t+\tau_n)\right]dt=\langle\xi(t+\tau_1)\xi(t+\tau_2)\cdot\ldots\cdot\xi(t+\tau_n)\rangle,$$

Пример. Точность оценки математического ожидания.

Итак, для эргодического стационарного случайного процесса оценку математического ожидания можно получить путем осреднения одной реализации СП по интервалу достаточно большой длительности:

$$\widetilde{m}_1=\widetilde{\xi_T}=\frac{1}{T}\int_0^T\xi(t)dt$$

Среднее значение этой оценки $\langle\widetilde{m}_1\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T\langle\xi(t)\rangle dt=m_1$ равно математическому ожиданию.

Дисперсия этой оценки определяется соотношением

$$D\left[\widetilde{\xi}_T\right]=\frac{2}{T}\int_0^T(1-\frac{\tau}{T})B_\xi(\tau)d\tau\le$$

$$\left|\frac{2}{T}\int_0^T(1-\frac{\tau}{T})B_\xi(\tau)d\tau\right|\le\frac{2}{T}\int_0^T\left|1-\frac{\tau}{T}\right|\left|B_\xi(\tau)\right|d\tau\le\frac{2}{T}\int_0^T\left|B_\xi(\tau)\right|d\tau=\frac{2\sigma_\xi^2}{T}\int_0^T\left|K_\xi(\tau)\right|d\tau\le\frac{2\sigma_\xi^2\tau_k}{T}$$

где введены обозначения для коэффициента корреляции $K_\xi(\tau)=\frac{B_\xi(\tau)}{B_\xi(0)}=\frac{B_\xi(\tau)}{\sigma_\xi^2}$ и времени корреляции $\tau_k=\int_0^\infty\left|K_\xi(\tau)\right|d\tau$.

Эта формула дает оценку быстроты сходимости оценки к истинному значению при увеличении T

$$\frac{\sqrt{D\left[\widetilde{\xi}_T\right]}}{\sigma_\xi}\le\sqrt{\frac{2\tau_k}{T}}$$

Если потребовать, чтобы относительная точность оценки среднего значения была не хуже 0.1, т.е. $\dfrac{\sqrt{D\left[\tilde{\xi}_T\right]}}{\sigma_\xi} \le 0.1$, то необходима реализация длительностью $T \approx 200\tau_k$.

2.4.Свойства функции корреляции стационарного случайного процесса.

Реальные процессы описываются вещественными функциями, но, как известно, часто удобнее работать с комплексными величинами, чем широко пользуются во многих областях физики и техники. Поэтому для общности будем рассматривать свойства корреляционной функции комплексного стационарного СП $\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t)$, где $\xi(t), \eta(t)$ стационарные и стационарно связанные действительные СП второго порядка с непрерывным временем. Для комплексного СП функция корреляции $R_\varsigma(\tau) = \left\langle \zeta(t)\zeta^*(t+\tau)\right\rangle$ при $\tau \ne 0$ - комплексная и имеет следующие свойства.

1. Корреляционная функция $R_\varsigma(\tau)$ является положительно определенной функцией. Это означает, что для любых n моментов времени $t_k, k = 1,...,n$ и n произвольных комплексных чисел $a_k, k = 1,...,n$ вещественна и неотрицательна сумма

$$\sum_{k,j=1}^{n} R_\zeta(t_k - t_j) a_k a_j^* \ge 0$$

2. Корреляционная функция $R_\varsigma(\tau)$ имеет свойство эрмитовости

$$R_\varsigma(-\tau) = R_\zeta^*(\tau)$$

Функция корреляции $R_\xi(\tau)$ действительного СП - четная функция τ.

3. $\left|R(\tau)\right| \le R(0)$

Доказательство этих трех свойств вытекает из того, что

$$\left\langle \left|\sum_{k=1}^{n} \zeta(t_k) a_k\right|^2 \right\rangle = \sum_{k,j=1}^{n} \left\langle \zeta(t_k)\zeta^*(t_j)\right\rangle a_k a_j^* = \sum_{k,j=1}^{n} R(t_k - t_j) a_k a_j^* \ge 0$$

Рассмотрим случай $n = 2$ и положим $a_1 = 1, a_2 = e^{i\alpha}$, тогда полагая $\tau = t_2 - t_1$ получим

$$\left\langle \left|\zeta(t_1) + e^{i\alpha}\zeta(t_2)\right|^2 \right\rangle = 2R(0) + e^{i\alpha}R(\tau) + e^{-i\alpha}R(-\tau) \ge 0$$

откуда следует, что должно быть $R_\varsigma(-\tau) = R_\zeta^*(\tau)$.

И далее, полагая $R(\tau) = \left|R(\tau)\right| e^{i\varphi}$, получим

$$2R(0) + e^{i\alpha}R(\tau) + e^{-i\alpha}R^*(\tau) = 2R(0) + 2\left|R(\tau)\right|\cos(\alpha + \varphi) \ge 0,$$

так что $\left|R(\tau)\right| \le R(0)$

4. Для стационарного случайного процесса $\zeta(t)$ необходимым и достаточным условием существования производной $\dot{\zeta}(t)$ является существование второй производной $\dfrac{d^2R(\tau)}{d\tau^2}$ при $\tau = 0$, причем

$$R_1(\tau) = \left\langle \dot{\zeta}(t)\dot{\zeta}^*(t+\tau)\right\rangle = -\frac{d^2R(\tau)}{d\tau^2}$$

Это свойство следует из общего критерия с.к.-дифференцируемости.

1) Для того чтобы случайная функция $\zeta(t)$ была с.к.-дифференцируема в точке $t_0 \in T$ необходимо и достаточно, чтобы существовали производная $\frac{dm_\zeta(t)}{dt}$ в точке t_0 и смешанная производная второго порядка $\frac{\partial^2 R_\zeta(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$ в точке (t_0,t_0).

2) $R_\zeta(t_1,t_2) = \frac{\partial^2 R_\zeta(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$

Остается только учесть, что для стационарного СП $R_\zeta(t_1,t_2) = R_\zeta(t_1 - t_2)$.

Т.о., необходимое и достаточное условие дифференцирования стационарного процесса $\zeta(t)$ в среднеквадратическом смысле заключается в том, чтобы корреляционная функция процесса $R_\zeta(\tau)$ при $\tau = 0$ имела производные до 2-го порядка включительно.

Производная стационарного СП, если она существует, является стационарным СП.

Рассмотренные свойства имеют место и для ковариационной функции $B_\varsigma(\tau)$.

2.5. Примеры стационарных случайных процессов и ковариационных функций.

Различные примеры ковариационных функций можно получить используя выражение для ковариационной функции пуассоновского импульсного процесса

$$B(\tau) = n_1 \int f_{\vec{a}}(\vec{a}) d\vec{a} \int_{-\infty}^{\infty} F(\vartheta,\vec{a}) F(\vartheta+\tau,\vec{a}) d\vartheta$$

Если $\vec{a} = a$ - амплитуда, то $B(\tau) = n_1 \langle a^2 \rangle \int_{-\infty}^{\infty} F(\vartheta) F(\vartheta+\tau) d\vartheta$.

Рассмотрим различные формы импульсов $F(\vartheta)$.

1. Прямоугольные импульсы: $F(\vartheta) = \begin{cases} \frac{1}{\delta}, 0 \le \vartheta \le \delta \\ 0, \vartheta < 0, \vartheta > \delta \end{cases}$

Ковариационная функция

$$B(\tau) = n_1 \langle a^2 \rangle \frac{1}{\delta} \left(1 - \frac{|\tau|}{\delta} \right), |\tau| < \delta, \quad B(\tau) = 0, |\tau| > \delta$$

Время корреляции

$$\tau_k = \frac{1}{B_\xi(0)} \int_0^\infty |B_\xi(\tau)| d\tau = \frac{\delta}{2}$$

СП с такими импульсами - не дифференцируемый.

2. Экспоненциально затухающие импульсы: $F(\vartheta) = \begin{cases} e^{-\beta\vartheta}, 0 \le \vartheta \\ 0, \quad \vartheta < 0 \end{cases}, \beta > 0$

Ковариационная функция

$$B(\tau) = \frac{n_1 \langle a^2 \rangle}{2\beta} \exp(-\beta|\tau|)$$

Время корреляции $\tau_k = \dfrac{1}{\beta}$

СП с такими импульсами – тоже не дифференцируемый.

3. Экспоненциально затухающие импульсы с высокочастотным заполнением:
$$F(\vartheta) = \begin{cases} e^{-\beta\vartheta}\cos\omega\vartheta, 0 \le \vartheta \\ 0, \quad \vartheta < 0 \end{cases}, \beta > 0$$

Ковариационная функция
$$B(\tau) = \frac{n_1\langle a^2\rangle}{4}\exp\left(-\beta|\tau|\right)\left[\frac{\cos\omega\tau}{\beta} + \frac{\beta\cos\omega\tau - \omega\sin\omega|\tau|}{\beta^2 + \omega^2}\right]$$

Время корреляции (при $\omega >> \beta$) $\tau_k \approx \dfrac{2}{\pi\beta}$

4. Гауссовские импульсы: $F(\vartheta) = \exp(-\beta\vartheta^2)$, $\beta > 0$

Ковариационная функция
$$B(\tau) = n_1\langle a^2\rangle\sqrt{\frac{\pi}{2\beta}}\exp\left(-\beta\tau^2/2\right)$$

Время корреляции $\tau_k = \sqrt{\dfrac{\pi}{2\beta}}$

СП с такими импульсами имеет производную.

5. Пример высокочастотного стационарного в широком смысле процесса
$$\xi(t) = A_1(t)\cos\omega t + A_2(t)\sin\omega t, \quad \omega = const,$$
где $A_1(t), A_2(t)$ - независимые стационарные в широком смысле СП с нулевым математическим ожиданием и одинаковыми ковариационными функциями $B_A(\tau)$. Среднее значение этого СП - $\langle\xi(t)\rangle = 0$, ковариационная функция –
$$B_\xi(\tau) = B_A(\tau)\cos\omega\tau$$

6. Пример стационарного в широком смысле квазидетерминированного процесса с бесконечным временем корреляции
$$\xi(t) = A_1\cos\omega t + A_2\sin\omega t, \quad \omega = const,$$
где A_1, A_2 - некоррелированные СВ с нулевым математическим ожиданием и одинаковыми дисперсиями σ_A^2. Среднее значение этого СП - $\langle\xi(t)\rangle = 0$, ковариационная функция –
$$B_\xi(\tau) = \sigma_A^2\cos\omega\tau$$
- не является абсолютно интегрируемой. Тем не менее этот процесс удовлетворяет условию эргодичности относительно среднего значения
$$\frac{1}{T}\int_0^T(1-\frac{\tau}{T})B_\xi(\tau)d\tau = \frac{\sigma_A^2}{T^2\omega^2}\left(1-\cos\omega T\right)\xrightarrow[T\to\infty]{}0.$$

Является ли этот процесс эргодическим относительно дисперсии? Определим

$$\widetilde{\xi^2(t)_T} = \frac{1}{T}\int_0^T \xi^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[A_1^2\cos^2\omega t + A_1A_2\sin 2\omega t + A_2^2\sin^2\omega t\right]dt =$$

$$\frac{A_1^2+A_2^2}{2} + \frac{1}{2\omega T}\left[\frac{A_1^2-A_2^2}{2}\sin 2\omega T + A_1A_2(1-\cos 2\omega T)\right],$$

$$\left\langle \widetilde{\xi^2(t)_T} \right\rangle = \left\langle \frac{A_1^2+A_2^2}{2} \right\rangle = \sigma_A^2.$$

Так что $\lim\limits_{T\to\infty}\left\langle\left[\widetilde{\xi^2(t)_T} - \left\langle\widetilde{\xi^2(t)_T}\right\rangle\right]^2\right\rangle = \left\langle\left[\frac{A_1^2+A_2^2}{2} - \sigma_A^2\right]^2\right\rangle \ge 0$. Равенство достигается только в случае, когда A_1 *и* A_2 являются дискретными СВ, принимающими значения $\pm\sigma_A$. В других случаях процесс – не эргодический относительно дисперсии.

7. Пример стационарного в широком смысле периодического процесса с бесконечным временем корреляции (ряд Фурье):

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\boldsymbol{\omega}_0 t + b_k \sin k\boldsymbol{\omega}_0 t, \quad \boldsymbol{\omega}_0 = 2\boldsymbol{\pi}/T_0\ ,$$

где $\langle a_k \rangle = \langle b_k \rangle = 0,\ \langle a_k^2 \rangle = \langle b_k^2 \rangle = \sigma_k^2,\ k = 1,\ldots;$

$\langle a_{k_1} a_{k_2} \rangle = \langle b_{k_1} b_{k_2} \rangle = 0,\ k_1 \ne k_2,\ \langle a_{k_1} b_{k_2} \rangle = 0$

Ковариационная функция

$$B_\xi(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{\sigma}_k^2 \cos k\boldsymbol{\omega}_0\boldsymbol{\tau}\text{, т.е. } \sigma_k^2 = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} B_\xi(\tau)\cos k\omega_0\tau d\tau\ .$$

- периодическая с периодом T_0. Дисперсия $D[\xi] = B_\xi(0) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\sigma_k^2,\quad B_\xi\left(\frac{T_0}{2}\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\sigma_k^2$

Для стационарных СП особая роль ковариационной функции связана с тем, что она определяет гармонический спектр процесса, как в этом примере.

2.6. Спектральное представление стационарных случайных процессов и однородных случайных полей.

Для исследования характеристик линейных систем, как детерминированных, так и вероятностных, очень эффективным средством является использование спектральных представлений и преобразования Фурье. Такие понятия, как спектр сигнала, частотная характеристика системы, ряд Фурье и интеграл Фурье широко используются и значительно упрощают анализ как сигналов, так и линейных систем.

Рассмотрим подробнее, как обобщается гармонический анализ на случайные функции времени.

Рассмотрим с.к.-непрерывный стационарный комплексный СП $\zeta(t)$ с нулевым средним и периодической ковариационной функцией $B_\zeta(\tau)$ с периодом T , т.е. $B_\zeta(\tau) = B_\zeta(\tau + T)$. (На практике, обычно известна $B_\zeta(\boldsymbol{\tau}), |\boldsymbol{\tau}| \le T/2$, причем $B_\zeta(T/2) \approx 0$, и без ущерба для решения задачи при $|\boldsymbol{\tau}| \le T/2$ можно использовать периодическое продолжение на $|\boldsymbol{\tau}| > T/2$)

Ковариационную функцию $B_\zeta(\tau)$ можно разложить в ряд Фурье

$$B_\zeta(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n\tau}{T}}$$

Коэффициенты Фурье c_n в силу эрмитовости ковариационной функции – действительные числа

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} B_\zeta(\tau) e^{-i\frac{2\pi n\tau}{T}} d\tau = \frac{1}{T}\left\{\int_{-T/2}^{0} B_\zeta(\tau) e^{-i\frac{2\pi n\tau}{T}} d\tau + \int_{0}^{T/2} B_\zeta(\tau) e^{-i\frac{2\pi n\tau}{T}} d\tau\right\} =$$

$$\frac{1}{T}\left\{\int_{0}^{T/2} B_\zeta^*(\tau) e^{i\frac{2\pi n\tau}{T}} d\tau + \int_{0}^{T/2} B_\zeta(\tau) e^{-i\frac{2\pi n\tau}{T}} d\tau\right\} = \frac{2}{T}\mathrm{Re}\int_{0}^{T/2} B_\zeta(\tau) e^{-i\frac{2\pi n\tau}{T}} d\tau$$

Учитывая, что $\tau = t_1 - t_2$ ковариационную функцию $B_\zeta(\tau)$ можно представить в виде

$$B_\zeta(\tau) = B_\zeta(t_1 - t_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n(t_1 - t_2)}{T}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n t_1}{T}} e^{-i\frac{2\pi n t_2}{T}}$$

Из свойства положительной определенности ковариационной функции $B_\zeta(\tau)$

$$\sum_{k,j=1}^{n} B_\zeta(t_k - t_j) a_k a_j^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \sum_{k,j=1}^{n} a_k a_j^* e^{i\frac{2\pi n t_k}{T}} e^{-i\frac{2\pi n t_j}{T}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left|\sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\frac{2\pi n t_k}{T}}\right|^2 \ge 0$$

следует, что что $c_n \ge 0$.

Нетрудно убедиться в том, что функции $\psi_n(t) = A_n e^{i\frac{2\pi n t}{T}}$ представляют собой ортонормированные функции.

Действительно, $\int_{-T/2}^{T/2} \psi_m(t)\psi_n^*(t)dt = A_m A_n^* \int_{-T/2}^{T/2} e^{i\frac{2\pi(m-n)t}{T}} d\tau = |A_n|^2 T\delta_{mn}$

и условие ортонормированности выполняется при $A_n = 1/\sqrt{T}$.

Далее, в силу периодичности $B_\zeta(\tau)$

$$\int\limits_{-T/2}^{T/2} B_\zeta(t_1-t_2)\psi_n(t_2)dt_2 = -\frac{1}{\sqrt{T}}\int\limits_{t_1+T/2}^{t_1-T/2} B_\zeta(\tau)e^{i\frac{2\pi n(t_1-\tau)}{T}}d\tau =$$

$$\frac{1}{\sqrt{T}}e^{i\frac{2\pi n t_1}{T}}\int\limits_{t_1-T/2}^{t_1+T/2} B_\zeta(\tau)e^{-i\frac{2\pi n\tau}{T}}d\tau = \psi_n(t_1)Tc_n$$

Таким образом, функции $\psi_n(t)=\dfrac{1}{\sqrt{T}}e^{i\frac{2\pi nt}{T}}$ - собственные функции, а $\left|\lambda_n^2\right| = Tc_n$ - собственные значения ядра $B_\zeta(t_1-t_2)$.

Следовательно, ортогональное разложение Карунена-Лоэва стационарного СП $\zeta(t)$ с периодической ковариационной функцией имеет вид

$$\zeta(t)=\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\zeta_n e^{i\frac{2\pi nt}{T}}, \text{ где СВ } \zeta_n=\frac{1}{\sqrt{T}}\int\limits_{-T/2}^{T/2}\zeta(t)e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}dt, \quad \langle\zeta_n\rangle=0,$$

$$\left\langle \zeta_m\zeta_n^*\right\rangle = Tc_n\delta_{mn} = \delta_{mn}\int\limits_{-T/2}^{T/2}B_\zeta(\tau)e^{-i\frac{2\pi n\tau}{T}}d\tau$$

или, если ввести СВ $\eta_n=\dfrac{\zeta_n}{\sqrt{T}}$,

$$\zeta(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\eta_n e^{i\frac{2\pi nt}{T}}, \text{ где } \langle\eta_n\rangle=0,\ \left\langle\eta_m\eta_n^*\right\rangle = c_n\delta_{mn}=\delta_{mn}\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}B_\zeta(\tau)e^{-i\frac{2\pi n\tau}{T}}d\tau$$

При $T\to\infty$ спектральные представления ковариационной функции и самого СП можно записать в форме интегралов.

Спектральное представление ковариационной функции принимает вид

$$B_\zeta(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\frac{2\pi n\tau}{T}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}B_\zeta(s)e^{-i\frac{2\pi ns}{T}}ds\right]e^{i\frac{2\pi n\tau}{T}} \xrightarrow[T\to\infty]{} \lim_{T\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\left[\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}B_\zeta(s)e^{-i\omega_n s}ds\right]e^{i\omega_n\tau} =$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}B_\zeta(s)e^{-i\omega s}ds\right]e^{i\omega\tau}d\omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty}g(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega, \quad g(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}B_\zeta(s)e^{-i\omega s}ds\ge 0\\ \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}dG(\omega)e^{i\omega\tau}, \quad dG(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}B_\zeta(s)e^{-i\omega s}ds\ge 0\end{cases}$$

где использованы обозначения $\omega_m = 2\pi n/T,\ d\omega = 2\pi/T$.

Если ввести кусочно-постоянную функцию $\boldsymbol{\mu(\omega)}$, с некоррелированными приращениями $\boldsymbol{\Delta\mu(\omega_k)=\mu(\omega_k)-\mu(\omega_{k-1})=\eta_k}$, в точках $\boldsymbol{\omega_k}$:

$$\boldsymbol{\mu(\omega)} = \sum_{k:\boldsymbol{\omega}_k\le\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\eta}_k,$$

$$\left\langle\left|\boldsymbol{\mu(\omega')-\mu(\omega'')}\right|^2\right\rangle = \sum_{\boldsymbol{\omega''}\le\boldsymbol{\omega}_k\le\boldsymbol{\omega'}}c_k,$$

то спектральное представление самого СП принимает вид

$$\zeta(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\eta_n e^{i\frac{2\pi nt}{T}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{i\omega_n t}\Delta\mu(\omega_n)\,,$$

где $\omega_n=\dfrac{2\pi n}{T}$, $\quad \Delta\mu(\omega_n)=\eta_n$, $\langle\Delta\mu(\omega_n)\rangle=0$ $\quad \langle\Delta\mu(\omega_m)\Delta\mu^*(\omega_n)\rangle=\delta_{mn}\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2}B_\zeta(\tau)e^{-i\omega_n\tau}d\tau$,

$$\left\langle|\Delta\mu(\omega_n)|^2\right\rangle=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}B_\zeta(\tau)e^{-i\omega_n\tau}d\tau$$

При $T\to\infty$ эти соотношения принимают вид

$$\zeta(t)=\xrightarrow[\text{с.к.},\,T\to\infty]{}\int e^{i\omega t}d\mu(\omega)$$

$$\left\langle d\mu(\omega_1)d\mu^*(\omega_2)\right\rangle\approx\frac{1}{T^2}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2}B_\zeta(t_1-t_2)e^{-i\omega_2(t_1-t_2)}e^{i(\omega_2-\omega_1)t_1}dt_1dt_2=$$

$$\frac{1}{T^2}\left[\int_{-T}^{0}e^{-i\omega_2\tau}B_\zeta(\tau)d\tau\int_{-T/2}^{T/2+\tau}e^{i(\omega_2-\omega_1)t}dt+\int_{0}^{T}e^{-i\omega_2\tau}B_\zeta(\tau)d\tau\int_{-T/2+\tau}^{T/2}e^{i(\omega_2-\omega_1)t}dt\right]\cong$$

$$\frac{2\pi}{T}\delta(\omega_1-\omega_2)\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}B_\zeta(\tau)e^{-i\omega_1\tau}d\tau\xrightarrow[T\to\infty]{}\delta(\omega_1-\omega_2)d\omega_2\begin{cases}g(\omega_1)d\omega_1\\ dG(\omega_1)\end{cases}$$

$$\left\langle|d\mu(\omega)|^2\right\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}B_\zeta(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau=\begin{cases}g(\omega)d\omega\\ dG(\omega)\end{cases}$$

Из последнего соотношения следует, что $d\mu(\omega)\propto(d\omega)^{1/2}$.

СФ $\mu(\omega)$ - комплексный СП с некоррелированными приращениями, имеющий нулевое среднее значение, причем для любого интервала (ω',ω'')

$$\left\langle|\mu(\omega')-\mu(\omega'')|^2\right\rangle=\left\langle\left|\int_{\omega'}^{\omega''}d\mu(\omega)\right|^2\right\rangle=\int_{\omega'}^{\omega''}dG(\omega)\quad\left(=\int_{\omega'}^{\omega''}g(\omega)d\omega\right),$$

откуда следует, что а) $G(\omega$ - неубывающая функция, б) $g(\omega)\ge 0$

Условие сходимости в среднеквадратичном заключается в требовании конечности средней интенсивности СП:

$$\left\langle|\zeta(t)|^2\right\rangle=\left\langle\left|\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega t}d\mu(\omega)\right|^2\right\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(\omega'-\omega'')t}\left\langle d\mu(\omega')d\mu^*(\omega'')\right\rangle=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(\omega'-\omega'')t}g(\omega')\delta(\omega'-\omega'')d\omega'd\omega''=\int_{-\infty}^{+\infty}g(\omega')d\omega'=G(\infty)<\infty,$$

и сводится к требованию интегрируемости неотрицательной функции $g(\omega)$, которая называется **спектральной плотностью СП** $\zeta(t)$, и ограниченности функции $G(\omega)$, которая называется **спектральной интенсивностью СП** $\zeta(t)$ (для определенности $G(-\infty)=0$).

Итак, ковариационную функцию стационарного комплексного СП $\zeta(t)$ в общем случае можно представить в виде интеграла Фурье - Стилтьеса

$$B_\zeta(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\tau}dG(\omega)$$

где $G(\omega)$ - неубывающая ограниченная действительная функция.

Это спектральное представление ковариационной функции называют теоремой Хинчина, или Бохнера – Хинчина, или Винера – Хинчина. Оно впервые было получено А.Я. Хинчиным (1934г.) как следствие теоремы Бохнера, которая утверждает, что всякая положительно-определенная функция $B(\tau)$ представима в виде интеграла Фурье-Стилтьеса.

Интеграл Фурье-Стилтьеса отличается от обычного интеграла Римана тем, что под знаком интеграла стоит не приращение аргумента $d\omega$, а приращение $dG(\boldsymbol{\omega})$ некоторой функции $G(\boldsymbol{\omega})$, соответствующее приращению $d\omega$. Переход от интеграла Фурье-Стилтьеса к обычному интегралу возможен только тогда, когда функция $G(\boldsymbol{\omega})$ дифференцируема. Интеграл Фурье - Стилтьеса охватывает случаи и непрерывного, и дискретного, и смешанного спектров.

Интеграл

$$\boldsymbol{\zeta}(t)=\int e^{i\omega t}d\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\omega})$$

является стохастическим интегралом Фурье-Стилтьеса, зависящим от параметра. Под знаком интеграла стоит не приращение аргумента $d\omega$, а приращение $d\mu(\omega)$ некоторой функции с некоррелированными приращениями $\mu(\omega)$ на интервале $d\omega$. Переход от интеграла Фурье-Стилтьеса к обычной (Римановой) записи интеграла в данном случае невозможен, т.к. функция $\mu(\omega)$ как функция с некоррелированными приращениями не имеет производной. Действительно, приращение $\Delta\mu(\omega)=\mu(\omega+\Delta\omega)-\mu(\omega)$ имеет в среднем порядок $\sqrt{\Delta\omega}$ и $\dfrac{|\Delta\mu(\omega)|}{\Delta\omega}\xrightarrow[\Delta\omega\to0]{}\infty$.

Интеграл Фурье - Стилтьеса в теореме Винера - Хинчина можно записать как обычный интеграл Фурье, если функция $G(\omega)$ дифференцируема или если дискретную составляющую спектра описывать при помощи дельта-функции: $g_d(\omega)=\sum\limits_{\nu}g_{d\nu}\delta(\omega-\omega_\nu)$

$$B(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\tau}g(\omega)d\omega,$$

Если $B(\tau)$ интегрируема, т.е. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|B_\zeta(\tau)\right|d\tau<\infty$, то обратное преобразование Фурье дает

$$g(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}B_\zeta(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

Аналогично, на физическом уровне строгости, стохастический интеграл Фурье-Стилтьеса можно записать в символическом виде

$$\zeta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}c(\omega)d\omega$$

если пользоваться **дельта-коррелированной производной** функции $\mu(\omega)$, т.е. **комплексной амплитудной плотностью** $c(\omega)$: $d\mu(\omega)=c(\omega)d\omega$, для которой имеем

$$\left\langle c(\omega')c^*(\omega'')\right\rangle=g(\omega')\delta(\omega''-\omega')$$

Таким образом, мы можем сформулировать следующую *__теорему о спектральном представлении__*. **Всякий стационарный в широком смысле процесс с нулевым средним значением допускает представление с помощью стохастического интеграла Фурье - Стилтьеса**

$$\zeta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}d\mu(\omega)$$

где $\mu(\omega)$ **- случайный процесс с некоррелированными приращениями, имеющий нулевое среднее значение и спектральную интенсивность** $G(\omega)$**:**

$$\left\langle\left|\mu(\omega'')-\mu(\omega')\right|^2\right\rangle=\int_{\omega'}^{\omega''}dG(\omega)=G(\omega'')-G(\omega'),$$

причем действительная неубывающая функция $G(\omega)$ **связана с ковариационной функцией процесса** $\zeta(t)$ **спектральным представлением теоремы Винера-Хинчина.**

Аналогичным образом получаются пространственные спектральные разложения для однородных случайных полей.

Запишем символическое представление однородного случайного поля $\zeta(\vec{r})$ в виде кратного интеграла Фурье

$$\zeta(\vec{r})=\int e^{i\vec{k}\vec{r}}c(\vec{k})d\vec{k},$$

где $c(\vec{k})$ - пространственная дельта-коррелированная спектральная амплитуда поля $\zeta(\vec{r})$:

$$\left\langle c(\vec{k}')c^*(\vec{k}'')\right\rangle=g(\vec{k}')\delta(\vec{k}''-\vec{k}'),$$

$g(\vec{k})$ - пространственная спектральная плотность.

Тогда ковариационная функция однородного случайного поля определяется интегралом Фурье

$$B_\zeta(\vec{r}_1-\vec{r}_2)=B_\zeta(\vec{\rho})=\int g(\vec{k})e^{i\vec{k}\vec{\rho}}d\vec{k},$$

обращение которого дает

$$g(\vec{k})=\frac{1}{(2\pi)^n}\int B_\zeta(\vec{\rho})e^{-i\vec{k}\vec{\rho}}d\vec{\rho},\quad n \text{ - размерность поля.}$$

Это соотношение представляет собой обобщение теоремы Винера-Хинчина на случайные поля.

2.7. Основные свойства спектральной плотности. Белый шум.

2.7.1. Основные свойства спектральной плотности. Примеры.

1. Из положительной определенности ковариационной функции $B_\zeta(\tau)$ следует неотрицательность спектральной плотности $g(\omega)$ стационарного в широком смысле СП и обратно. Поэтому решая вопрос о том, является ли какая-либо функция $\psi(\tau)$ ковариационной функцией стационарного в широком смысле СП $\zeta(t)$, можно просто проверить выполнение условия $g(\omega)\ge 0$.

2. Если $\zeta(t) \equiv \xi(t)$ - вещественна, ковариационная функция $B_\xi(\tau)$ - четная функция, и, следовательно, спектральная плотность $g(\omega)$ - четная функция. Спектральное представление может быть тогда записано в виде

$$B_\xi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\cos(\omega\tau)d\omega = \int_0^{\infty} g_+(\omega)\cos(\omega\tau)d\omega,$$

$$g_+(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} B_\xi(\tau)\cos(\omega\tau)d\tau,$$

где $g_+(\omega) = 2g(\omega)$ - спектральная плотность по положительным частотам.

3. Отметим еще, что в случае непрерывного спектра для функций $B_\zeta(\tau)$ и $g(\omega)$, связанных преобразованием Фурье, выполняется хорошо известное «соотношение неопределенностей». Качественно оно может быть описано так, что «узкий» спектр означает «широкую», т. е. длительную корреляцию, большую «упорядоченность» процесса и, наоборот, «широкий» спектр дает короткую корреляцию, усиление хаотичности. Количественно это может быть выражено в различных формах. Например, если определить эффективную ширину спектра СП с помощью соотношения

$$\Delta\omega_e = \frac{1}{g_+(\omega)\big|_{\max}}\int_0^{\infty} g_+(\omega)d\omega,$$

то, учитывая, что $g_+(\omega) \le \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left|B_\xi(\tau)\cos(\omega\tau)\right|d\tau \le \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left|B_\xi(\tau)\right|d\tau$ и $B_\zeta(0) = \int_0^{\infty} g_+(\omega)d\omega$, получим

$$B_\zeta(0) = g_+(\omega)\big|_{\max}\Delta\omega_e \le \frac{\Delta\omega_e 2}{\pi}\int_0^{\infty}\left|B_\zeta(\tau)\right|d\tau \le \frac{\Delta\omega_e 2\tau_k B_\zeta(0)}{\pi},$$

т.е. «соотношение неопределенностей» имеет вид $\Delta\omega_e\tau_k \ge \frac{\pi}{2}$

4 Для вещественных СП, у которых $B_\xi(\tau) \ge 0$, $g(\omega) \le g(0)$. Действительно,

$$g_+(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} B_\zeta(\tau)\cos(\omega\tau)d\tau \le \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left|B_\zeta(\tau)\cos(\omega\tau)\right|d\tau \le \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} B_\zeta(\tau)d\tau = g_+(0)$$

Для таких СП $\Delta\omega_e = \frac{B_\xi(0)}{g_+(0)}$, $\tau_k = \frac{\pi}{2}\frac{g_+(0)}{B_\xi(0)}$ и в соотношении неопределенностей выполняется равенство $\Delta\omega_e \cdot \tau_k = \frac{\pi}{2}$

5 Физический смысл и практическое определение спектральной плотности стационарного случайного процесса.

На практике нам доступны конечные по времени реализации комплексного стационарного СП

$$\zeta_T(t) = \zeta(t), |t| \le T/2$$

Эти реализации можно разложить в ряд Фурье следующего вида

$$\zeta_T(t)=\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\zeta_n e^{i\frac{2\pi nt}{T}}\ ,\ |t|\le T/2$$

где спектральные амплитуды $\zeta_n=\frac{1}{\sqrt{T}}\int\limits_{-T/2}^{T/2}\zeta_T(t)e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}dt$, как мы установили ранее в соответствии с теоремой Карунена-Лоэва, - ортогональные СВ, такие что

$$\left\langle \zeta_m\zeta_n^*\right\rangle=\delta_{mn}\int\limits_{-T/2}^{T/2}B_\zeta(\tau)e^{-i\frac{2\pi n\tau}{T}}d\tau$$

Если СП проходит через фильтр, который полностью пропускает частоты в полосе $(\omega_0,\omega_0+\Delta\omega)$ и полностью не пропускает частоты вне этой полосы, то СП $\zeta_{T\Delta\omega}(t)$ на выходе такого фильтра представляется в виде

$$\zeta_{T\Delta\omega}(t)=\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{n=n_0}^{n=n_0+\Delta n}\left(\zeta_n e^{i\frac{2\pi nt}{T}}+\zeta_{-n}e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}\right)$$

где $n_0=[\omega_0/(2\pi/T)]+1,\ \Delta n=[(\omega_0+\Delta\omega)/(2\pi/T)]-n_0$

Средняя по времени мощность отфильтрованного СП $\zeta_{T\Delta\omega}(t)$ определяется соотношением

$$\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}\left|\zeta_{T\Delta\omega}(t)\right|^2dt=\frac{1}{T^2}\sum_{n,m=n_0}^{n_0+\Delta n}\int\limits_{-T/2}^{T/2}\left(\zeta_n e^{i\frac{2\pi nt}{T}}+\zeta_{-n}e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}\right)\left(\zeta_m^* e^{-i\frac{2\pi mt}{T}}+\zeta_{-m}^* e^{i\frac{2\pi mt}{T}}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{n,=n_0}^{n_0+\Delta n}\left(\left|\zeta_n\right|^2+\left|\zeta_{-n}\right|^2\right)\cong\frac{\Delta\omega}{2\pi}\frac{1}{\Delta n}\sum_{n,=n_0}^{n_0+\Delta n}\left(\left|\zeta_n\right|^2+\left|\zeta_{-n}\right|^2\right),$$

где учтено, что $\Delta n\cong\Delta\omega T/(2\pi)$ при больших *T*.

Если отфильтрованный СП $\zeta_{T\Delta\omega}(t)$ - эргодический относительно среднего квадрата, то

$$\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}\left|\zeta_{T\Delta\omega}(t)\right|^2dt\xrightarrow[\text{с.к.},\,T\to\infty]{}\left\langle\left|\zeta_{T\Delta\omega}(t)\right|^2\right\rangle.$$

С другой стороны, если в полосе $\Delta\omega$ СВ $\left|\zeta_n\right|^2,\ \left|\zeta_{-n}\right|^2$ - независимы и имеют одинаковые средние значения и дисперсии, то

$$\frac{\Delta\omega}{2\pi\Delta n}\sum_{n,=n_0}^{n_0+\Delta n}\left(\left|\zeta_n\right|^2+\left|\zeta_{-n}\right|^2\right)\xrightarrow[\text{с.к.},\,T\to\infty]{}\frac{\Delta\omega}{2\pi}\left[\left\langle\left|\zeta_{n_0}\right|^2\right\rangle+\left\langle\left|\zeta_{-n_0}\right|^2\right\rangle\right]=\frac{\Delta\omega}{2\pi}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}B_\zeta(\tau)e^{-i\omega_0\tau}d\tau+\int\limits_{-\infty}^{\infty}B_\zeta(\tau)e^{i\omega_0\tau}d\tau\right]=$$

$$[g(\omega_0)+g(-\omega_0)]\Delta\omega$$

Отсюда следует, что для действительных стационарных СП при тех же условиях средняя по времени мощность отфильтрованного узкополосным фильтром СП

$$\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}\left|\xi_{T\Delta\omega}(t)\right|^2dt=\frac{\Delta\omega}{\pi}\frac{1}{\Delta n}\sum_{n,=n_0}^{n_0+\Delta n}\left|\xi_n\right|^2\xrightarrow[\text{с.к.},\,T\to\infty]{}\left\langle\left|\xi_{T\Delta\omega}(t)\right|^2\right\rangle=\frac{\Delta\omega}{\pi}\left\langle\left|\xi_{n_0}\right|^2\right\rangle=g_+(\omega_0)\Delta\omega$$

Таким образом, спектральную плотность стационарного СП можно интерпретировать как среднюю мощность СП, приходящуюся на узкий интервал частот $\Delta\omega=1c^{-1}$ около частоты ω_0.

Последняя формула указывает также на 2 возможных способа практического определения спектральной плотности действительного стационарного СП по одной реализации:

1) Путем усреднения по времени мощностей процессов на выходе узкополосных фильтров,

2) Путем арифметического усреднения квадратов модулей спектральных амплитуд частот, попадающих в полосы фильтров.

В случае гауссовского действительного СП на выходе узкополосного фильтра достаточным условием эргодичности (для моментов любого порядка) является ограниченность интеграла

$$\int_0^\infty \left|B_{\xi_{T\Delta\omega}}(\tau)\right|^2 d\tau < \infty ,$$

которое, в силу **равенства Парсеваля,**

$$\int_0^\infty \left|B_{\xi_{T\Delta\omega}}(\tau)\right|^2 d\tau = 2\pi \int_0^\infty g^2_{\xi_{T\Delta\omega}}(\omega) d\omega$$

можно представить в виде

$$\int_{\omega_0}^{\omega_0+\Delta\omega} g^2_{\xi}(\omega) d\omega < \infty ,$$

1. Вычислим теперь при помощи теоремы Хинчина спектр некоторых рассмотренных ранее стационарных процессов, для которых мы уже нашли ковариационные функции.

1) Рассмотрим прямоугольные импульсы, нормированные к единичной площади, с $a = 1$:

$$F(\vartheta) = \begin{cases} 1/\delta, \; 0 \le \vartheta \le \delta \\ 0, \; \vartheta < 0, \; \vartheta > \delta \end{cases}$$

Ковариационная функция изображается треугольником с основанием 2δ и с высотой n_1/δ, так что площадь треугольника при любом δ равна n_1,

$$B(\tau) = \frac{n_1}{\delta}\left(1 - \frac{|\tau|}{\delta}\right), \; |\tau| < \delta, \quad B(\tau) = 0, \; |\tau| > \delta ,$$

а спектральная плотность равна $g(\omega) = \dfrac{n_1}{2\pi}\left(\dfrac{\sin(\omega\delta/2)}{\omega\delta/2}\right)^2, \quad \Delta\omega_e = \dfrac{\pi}{\delta}$

2) Экспоненциально затухающие импульсы. Ковариационная функция имеет вид $B(\tau) = \sigma^2 \exp(-\beta|\tau|)$, а спектральная плотность равна

$$g(\omega) = \frac{\sigma^2}{\pi}\frac{\beta}{\omega^2 + \beta^2}, \quad \Delta\omega_e = \frac{\pi}{2}\beta$$

3) Гауссовские импульсы приводят к гауссовской спектральной плотности, т. к. гауссов закон корреляции:

$$B(\tau) = B(0)e^{-\alpha^2\tau^2}, \quad \tau_k = \sqrt{\pi}/|2\alpha|$$

принадлежит к «инвариантным» законам—в том смысле, что соответствующая спектральная плотность тоже выражается гауссовой кривой:

$$g(\omega) = \frac{B(0)}{2\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\omega^2/(2\alpha)^2}, \quad \Delta\omega_e = \sqrt{\pi}|\alpha|$$

4) Заметим, что спектральную плотность пуассоновского импульсного процесса можно вычислить сразу, не прибегая к вычислениям ковариационных функций. Для этого применим

преобразование Фурье к самому выражению для ковариационной функции пуассоновского импульсного процесса $B_\zeta(\tau) = n_1 \left\langle \int\limits_{-\infty}^{\infty} F^*(\rho,\vec{a}) F(\rho+\tau,\vec{a}) d\rho \right\rangle_{\vec{a}}$ и получим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} B_\zeta(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{n_1}{2\pi}\left\langle \int\limits_{-\infty}^{\infty} F^*(\rho,\vec{a}) \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\rho+\tau,\vec{a}) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] d\rho \right\rangle_{\vec{a}} =$$

$$= \frac{n_1}{2\pi}\left\langle \tilde{F}(\omega,\vec{a}) \int\limits_{-\infty}^{\infty} F^*(\rho,\vec{a}) e^{i\omega\rho} d\rho \right\rangle_{\vec{a}} = \frac{n_1}{2\pi}\left\langle \left| \tilde{F}(\omega,\vec{a}) \right|^2 \right\rangle_{\vec{a}},$$

где $\tilde{F}(\omega,\vec{a}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\rho,\vec{a}) e^{-i\omega\rho} d\rho$.

2.7.2. Асимптотический смысл дельта-коррелированных случайных процессов. Белый шум.

Вернемся еще раз к пуассоновскому импульсному процессу с прямоугольными импульсами, нормированными к единичной площади. Ковариационная функция такого СП

$$B(\tau) = \frac{n_1}{\delta}\left(1 - \frac{|\tau|}{\delta}\right), |\tau| < \delta, \quad B(\tau) = 0, |\tau| > \delta, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} B(\tau) d\tau = n_1,$$

а спектральная плотность

$$g(\omega) = \frac{n_1}{2\pi}\left(\frac{\sin(\omega\delta/2)}{\omega\delta/2}\right)^2$$

При $\delta \to 0$ треугольник превращается в бесконечную «иглу» в нуле, т. е.

$$B(\tau) = n_1 \delta(\tau)$$

а главный максимум $g(\omega)$ неограниченно расширяется, сохраняя неизменную высоту $n_1/2\pi$ при ω=0, т.е.

$$g(\omega) = \frac{n_1}{2\pi}$$

Нетрудно убедиться, что эти предельные выражения формально удовлетворяют соотношениям теоремы Хинчина, но случайный процесс с дельта-корреляцией уже не принадлежит к классу стационарных процессов с конечным значением средней интенсивности - среднего квадрата модуля. Величины $\left\langle |\zeta|^2 \right\rangle = B(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\omega) d\omega$ для него не существует.

Дельта-коррелированных процессов и полей в природе не бывает. Все реальные процессы и поля имеют конечное, хотя возможно и весьма малое, время корреляции. Дельта-коррелированные процессы и поля – это результат асимптотического представления ковариационной функции и спектральной плотности процесса, подобного показанному выше. Если в полосе пропускания исследуемой системы спектральная плотность воздействующего на нее СП изменяется незначительно, то можно без ощутимого влияния на результаты исследования заменять реальный процесс с малым, но конечным временем корреляции, дельта-коррелированным процессом. Дельта-коррелированный процесс с равномерным спектром принято называть «белым шумом» по аналогии с белым светом, имеющим в видимом диапазоне почти равномерный сплошной спектр.

Единственным параметром «белого шума» является величина постоянной спектральной плотности N_0. При замене реального процесса «белым шумом»: $B_\zeta(\tau) \Rightarrow 2\pi N_0 \delta(\tau)$, - этот параметр определяется из условия его равенства значению реальной спектральной плотности в полосе пропускания (с центром ω_0) исследуемой системы:

$$N_0 = g(\omega_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B_\zeta(\tau) e^{-i\omega_0\tau} d\tau \tag{7.11}$$

Следует подчеркнуть, что законы распределения процессов с одинаковой ковариационной функцией могут быть различными, т.к. в общем случае они не определяются только ковариационной функцией. В приложениях рассматривают главным образом белый гауссовский шум (БГШ).

Заметим, что на самом деле белый свет, т.е. равновесное тепловое излучение, не является белым шумом, т.к. его спектральная плотность не постоянна, а определяется формулой Планка для средней плотности электромагнитной энергии

$$g_+(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^2}\left(e^{\hbar\omega/kT} - 1\right)^{-1},$$

где $\hbar$ -постоянная Планка, k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура.

2.8. Примеры спектральных представлений стационарных случайных процессов

Теоретически не так важно, описывается ли процесс в терминах ковариационной функции $B(\tau)$ или эквивалентным образом в терминах спектральной плотности $g(\omega)$ (или спектральной интенсивности $G(\omega)$). Однако с практической точки зрения описание в терминах спектральной плотности проще и предпочтительнее. В применении к теории связи спектральное описание имеет технические преимущества при проектировании приборов и обработке сигналов. Важным преимуществом является также то, что линейные операции над $\zeta(t)$, часто называемые фильтрами, лучше описываются в терминах $g(\omega)$, чем в терминах $B(\tau)$.

1. Начнем с простейшего примера случайного процесса, получающегося в результате линейного преобразования

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \sum_k z_k \boldsymbol{\zeta}(t - \boldsymbol{\tau}_k)$$

где $\zeta(t)$ - стационарный случайный процесс, z_k $и$ τ_k - постоянные (τ_k - действительны), сумма содержит конечное число членов.

В спектральном представлении

$$\eta(t) = \int e^{i\omega t}\left[\sum_k z_k e^{-i\omega\tau_k}\right] d\mu_\zeta(\omega) = \int e^{i\omega t} H(i\omega) d\mu_\zeta(\omega), \quad H(i\omega) = \sum_k z_k e^{-i\omega\tau_k}$$

Ковариационная функция для $\boldsymbol{\eta}(t)$ определяется двойной суммой

$$B_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{j,k} z_j z_k^* B_{\boldsymbol{\zeta}}(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_j + \boldsymbol{\tau}_k)$$

Используя для ковариационной функции $B_\zeta(\tau)$ спектральное представление, получим

$$B_{\eta}(\tau)=\sum_{j,k} z_j z_k^* \int e^{i\omega(\tau-\tau_j+\tau_k)} g_{\zeta}(\omega)d\omega = \int \left| \sum_k z_k e^{-i\omega\tau_k} \right|^2 e^{i\omega\tau} g_{\zeta}(\omega)d\omega$$

Отсюда следует, что спектральная плотность СП $\eta(t)$ задается равенством

$$g_{\eta}(\omega)=\left|\sum_k z_k e^{-i\omega\tau_k}\right|^2 g_{\zeta}(\omega)=\left|H(i\omega)\right|^2 g_{\zeta}(\omega)$$

Последнее соотношение допускает интуитивную интерпретацию: частотная составляющая входного процесса $g_{\zeta}(\omega)$, соответствующая частоте ω, умножается на квадрат модуля частотной характеристики фильтра, определяемой данным преобразованием.

2. Рассмотрим систему, поведение которой описывается дифференциальным уравнением со случайной правой частью

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)\eta(t)=\xi(t)$$

где $P(z)=a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_0$ - полином с постоянными коэффициентами, $\xi(t)$ - стационарный СП, заданный спектральным разложением $\xi(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}d\mu(\omega)$. Если $\xi(t)$ - действительный СП, то должно быть $d\mu(-\omega)=d\mu^*(\omega)$.

Производные случайного процесса, заданного спектральным разложением, определяются элементарно

$$\xi^{(k)}(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(i\omega)^k e^{i\omega t}d\mu(\omega), \text{ т.е. } H^{(k)}(i\omega)=(i\omega)^k$$

и имеют смысл пока

$$\left\langle\left|\xi^{(k)}(t)\right|^2\right\rangle=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|(i\omega)^k\right|^2 dG(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\omega\right|^{2k}dG(\omega)<\infty$$

Будем искать частное решение уравнения в виде стационарного случайного процесса

$$\eta(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\varphi(\omega)d\mu(\omega)$$

Практически важные характеристики решения легко подсчитываются, например,

$$\langle\eta(t)\rangle=0,$$

$$\left\langle\left|\eta(t)\right|^2\right\rangle=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\varphi(\omega)\right|^2 dG(\omega),$$

$$\left\langle\eta(t+\tau)\eta^*(t)\right\rangle=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}\left|\varphi(\omega)\right|^2 dG(\omega).$$

Подставляя его получаем уравнение

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)\eta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}\varphi(\omega)P(i\omega)d\mu(\omega)=\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}d\mu(\omega),$$

Чтобы его удовлетворить достаточно положить $\varphi(\omega)=\dfrac{1}{P(i\omega)}$ при условии, что $\int_{-\infty}^{\infty}\left|P(i\omega)\right|^{-2}dG(\omega)<\infty$.

3. Отметим одно полезное свойство стационарного процесса с непрерывным временем, имеющим ограниченный спектр:

$$d\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\omega})=0,\ \boldsymbol{\omega}\notin(-w,w) \text{ и } dG(\omega)=0,\ \omega\notin(-w,w).$$

Теорема отсчетов. **Всякий стационарный процесс с ограниченным спектром, сосредоточенным в интервале $(-w,w)$ можно представить в виде**

$$\zeta(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin\left[w\left(t-\frac{\pi}{w}k\right)\right]}{\left[w\left(t-\frac{\pi}{w}k\right)\right]}\zeta\left(\frac{\pi}{w}k\right)$$

<u>Доказательство.</u> Функция $e^{i\omega t}$ от ω имеет на отрезке $[-w,w]$ **ряд Фурье**

$$e^{i\omega t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(t)e^{i\frac{\omega\pi}{w}k}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin\left[w\left(t-\frac{\pi}{w}k\right)\right]}{\left[w\left(t-\frac{\pi}{w}k\right)\right]}e^{i\frac{\omega\pi}{w}k},$$

т.к. $c_k(t)=\dfrac{1}{2w}\displaystyle\int_{-w}^{w}e^{i\omega t}e^{-i\frac{2\pi}{2w}k\omega}d\omega=\dfrac{\sin\left[w\left(t-\frac{\pi}{w}k\right)\right]}{\left[w\left(t-\frac{\pi}{w}k\right)\right]}$

следовательно,

$$\zeta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}d\mu(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin\left[w\left(t-\frac{\pi}{w}k\right)\right]}{\left[w\left(t-\frac{\pi}{w}k\right)\right]}\int_{-w}^{w}e^{i\frac{\omega\pi}{w}k}d\mu(\omega)$$

откуда, учитывая, что $\int_{-w}^{w}e^{i\frac{\omega\pi}{w}k}d\mu(\omega)=\zeta\left(\frac{\pi}{w}k\right)$, и вытекает доказываемое представление процесса $\zeta(t)$.

Обозначая $\Delta=\dfrac{\pi}{w}$, ковариацию отсчетов $\zeta(k\Delta)$ можно представить в виде

$$B_{km} = \left\langle \zeta(k\Delta)\zeta^*(m\Delta)\right\rangle = \int_{-w}^{w} e^{i\omega(k-m)\Delta} dG(\omega)$$

Отсюда следует, что в случае ограниченного по частоте белого шума, когда $dG(\omega) = N_0 d\omega, \omega \in (-w, w)$, отсчеты $\zeta(k\Delta)$ - не коррелированы и их дисперсии равны

$$D = \left\langle \left|\zeta(k\Delta)\right|^2 \right\rangle = 2N_0 w$$

Частота отсчетов $f_s = \frac{1}{\Delta} = \frac{w}{\pi} = \frac{2\pi F}{\pi} = 2F$ равна полной ширине полосы в Гц.

Нетрудно убедиться, что рассматриваемое представление является ортогональным разложением, так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left[w\left(t - \frac{\pi}{w}k\right)\right]}{\left[w\left(t - \frac{\pi}{w}k\right)\right]} \frac{\sin\left[w\left(t - \frac{\pi}{w}m\right)\right]}{\left[w\left(t - \frac{\pi}{w}m\right)\right]} dt = \int_{-\infty}^{\infty} c_k(t) c_m^*(t) dt = \frac{\pi}{w}\delta_{km}$$

2.9. Обобщение спектрального анализа для нестационарных процессов.

Как в науке, так и, в особенности, в инженерной практике часто возникает стремление распространить привычные понятия и методы за пределы области их законной применимости. И в вопросе о спектральных разложениях характеристик нестационарных процессов были предприняты усилия, направленные к тому, чтобы построить и для этого случая какой-то эквивалент одномерной и неотрицательной спектральной плотности $g(\omega)$. Так как в общем случае эта задача не имеет точного решения, усилия были направлены к тому, чтобы решить ее приближенно и установить границы применимости соответствующих приближений.

Допустим для простоты, что рассматриваемый, вообще говоря, комплексный процесс $\zeta(t)$ обладает нулевым средним значением $\langle\zeta(t)\rangle = 0$ и чисто сплошным спектром.

Перейдем к переменным $t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2), \quad \tau = t_1 - t_2$,

так что $t_1 = t + \frac{\tau}{2}, \quad t_2 = t - \frac{\tau}{2}, \quad dt_1 dt_2 = -dt d\tau$

Обозначим ковариационную функцию, рассматриваемую как функция $t, \quad \tau$ через $B_2(t,\tau)$:

$$B_\zeta(t + \frac{\tau}{2}, t - \frac{\tau}{2}) = \left\langle \zeta(t + \frac{\tau}{2})\zeta^*(t - \frac{\tau}{2}) \right\rangle = B_2(t,\tau)$$

Заметим, что $B_2(t,\tau)$ эрмитова по сдвигу τ:

$$B_2(t,\tau) = B_2^*(t,-\tau)$$

что означает четность $B_2(t,\tau)$ по сдвигу τ в случае действительного процесса $\zeta(t)$.

Пусть корреляционная функция $B_2(t,\tau)$ меняется в функции от t гораздо более *медленно,* чем в функции от τ. Иначе говоря, характерные времена изменения по t (t_k) и τ (τ_k) существенно разные: $t_k >> \tau_k$. Средняя мгновенная мощность, равная $B_2(t,0) = \left\langle \left|\zeta(t)\right|^2 \right\rangle$, очевидно, тоже должна быть медленной функцией в указанном смысле, т. е. должна мало меняться на интервалах Δt порядка τ_k. Случайный процесс с такими свойствами, т. е. с моментами $\left\langle \left|\zeta(t)\right|^2 \right\rangle$, $B_2(t,\tau)$, мало меняющимися по t на характерном временном интервале флуктуации τ_k, называют *квазистационарным* (в широком смысле).

Очевидно, стационарные процессы представляют собой предельный случай квазистационарных процессов, получающийся при неограниченном возрастании масштаба $t_k \to \infty$. При таком предельном переходе момент $B_2(t,\tau)$ вообще перестает зависеть от t.

Рассмотрим следующие однократные преобразования Фурье

$$B_2(t,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t,\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

$$g(t,\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_2(t,\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

Т.о., мгновенная средняя интенсивность есть

$$B_2(t,0) = \left\langle \left|\zeta(t)\right|^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(t,\omega) d\omega$$

Если $B_2(t,\tau)$ не зависит от t (процесс стационарен), то $g(t,\omega)$ переходит в спектральную плотность $g(\omega)$ стационарного процесса, а рассматриваемые преобразования переходят в формулы Хинчина.

Частотно-временную функцию $g(t,\omega)$ обычно называют мгновенной спектральной плотностью, но в общем случае она не имеет того физического смысла, что и одномерная плотность $g(\omega)$ стационарного процесса, т.е. как распределение энергии процесса по оси частот.

Функции $g(t,\omega)$ - всегда вещественные, а если процесс вещественный, то функция $g(t,\omega)$ - четная по ω. Но, будучи вещественной, *мгновенная плотность* $g(t,\omega)$ *не обязательно неотрицательна на всей плоскости* (t,ω), что исключает ее энергетическое истолкование.

Изменяющуюся со временем неотрицательную плотность мощности нестационарного процесса можно получить несколько обобщив методику практического определения спектральной плотности стационарного процесса. Для этого введем функцию временного окна $w(t)$, положительную в некоторой Т-окрестности момента времени $t=0$ и близкую к нулю вне этой окрестности. По аналогии с усеченной реализацией для стационарного процесса образуем *порцию* нестационарного процесса $\xi_{t,w}(\vartheta) = w(t-\vartheta)\xi(\vartheta)$, выделенную окном в Т-окрестности момента t. Локально-сглаженная мощность процесса $\xi(t)$ определяется соотношением

$$E(t;w) = \int_{-\infty}^{\infty} w^2(t-\vartheta)\xi^2(\vartheta) d\vartheta$$

Очевидно, интеграл по t локально-сглаженной мощности должен быть равен полной энергии

$$\int_{-\infty}^{\infty} E(t;w)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2(\vartheta)d\vartheta \int_{-\infty}^{\infty} w^2(t-\vartheta)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2(t)dt \text{ , следовательно } \int_{-\infty}^{\infty} w^2(t)dt = 1$$

В частном случае

$$w^2(t) = \begin{cases} 1/2T\,, & |t| \le T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

приходим к временному усреднению по интервалу $(t-T, t+T)$. Для стационарных процессов мы такую операцию проводили по интервалу $(-T, T)$, т.е. относительно точки $t = 0$.

Согласно теореме Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\vartheta)|^2 d\vartheta = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left|\widetilde{F}(\omega)\right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} F(\vartheta) e^{-i\omega\vartheta} d\vartheta \right|^2$$

Полагая $F(\vartheta) = w(t-\vartheta)\xi(\vartheta)$ после статистического усреднения получим

$$\overline{E}(t;w) = \int_{-\infty}^{\infty} w^2(t-\vartheta)\left\langle \xi^2(\vartheta)\right\rangle d\vartheta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left\langle \left| \int_{-\infty}^{\infty} w(t-\vartheta)\xi(\vartheta) e^{-i\omega\vartheta} d\vartheta \right|^2 \right\rangle d\omega$$

Т.о., средняя локально-сглаженная мощность процесса $\xi(t)$ представлена в виде интеграла по всем частотам ω от *действительной неотрицательной функции* - локально-сглаженной спектральной плотности

$$g_\xi(t,\omega;w) = \frac{1}{2\pi} \left\langle \left| \int_{-\infty}^{\infty} w(t-\vartheta)\xi(\vartheta) e^{-i\omega\vartheta} d\vartheta \right|^2 \right\rangle =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w(t-\vartheta-\frac{\tau}{2}) w(t-\vartheta+\frac{\tau}{2}) B_2(\vartheta,\tau) e^{-i\omega\tau} d\vartheta d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} B_{2w}(t-\vartheta,\tau) B_2(\vartheta,\tau) e^{-i\omega\tau} d\vartheta d\tau\,,$$

где использована замена переменных $\vartheta_1 = \vartheta + \dfrac{\tau}{2}, \quad \vartheta_2 = \vartheta - \dfrac{\tau}{2}$.

Выбор функции окна $w(t)$ зависит от характерных масштабов изменения функции корреляции $B_2(t,\tau)$ по t и τ. В случае квазистационарных процессов выберем размер окна T так, чтобы $\tau_k \ll T \ll t_k$. Тогда $B_2(\vartheta,\tau)$ как функция τ меняется гораздо быстрее, чем произведение

$$w(t-\vartheta-\frac{\tau}{2}) w(t-\vartheta+\frac{\tau}{2}) = B_{2w}(t-\vartheta,\tau)\,,$$

а как функция θ гораздо медленнее, чем $B_{2w}(t-\vartheta,\tau)$, так что приближенно для квазистационарных процессов

$$g_\xi(t,\omega;w) \approx \int_{-\infty}^{\infty} w^2(t-\vartheta) d\vartheta \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_2(t,\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = g(t,\omega)$$

- мгновенная спектральная плотность.

Отсюда, в частности, следует, что мгновенная спектральная плотность <u>квазистационарного</u> процесса – неотрицательная функция.

Гауссовские случайные процессы и их свойства

3.1. Определение гауссовского случайного процесса.

Действительный случайный процесс $\xi(t)$ называется гауссовским, если для любого конечного множества моментов времени $t_1, t_2, ..., t_n$ случайные величины $\xi(t_1), \xi(t_2), ..., \xi(t_n)$ имеют совместную нормальную плотность вероятности

$$f_n(x_1,...,x_n,t_1,...,t_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|B|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{n} C_{kj}(x_k - a_k)(x_j - a_j)\right]$$

где $a_k = a(t_k)$ - математические ожидания, $B = \|B(t_k, t_m)\|, k, m = 1,...,n$ - ковариационная матрица, $C = B^{-1}$ - матрица обратная к B, $|B| \neq 0$ - определитель матрицы B.

Одномерная плотность вероятности записывается в виде

$$f_1(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_\xi(t)}} \exp\left[-\frac{(x - a(t))^2}{2D_\xi(t)}\right]$$

Двумерная плотность вероятности стационарного гауссовского процесса с нулевым средним записывается в виде

$$f_2(x_1, x_2; \tau) = \frac{1}{2\pi D\sqrt{1 - K^2(\tau)}} \exp\left[-\frac{x_1^2 - 2K(\tau)x_1x_2 + x_2^2}{2D(1 - K^2(\tau))}\right]$$

где $K(\tau) = B(\tau)/D$.

Соответствующие характеристические функции имеют вид

$$\varphi_n(\vec{u};\vec{t}) = \exp\left(i\sum_{k=1}^{n} a_k u_k - \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{n} B_{kj} u_k u_j\right) =$$

$$= \exp\left[i\mathrm{M}\left(\vec{\xi}\vec{u}\right) - \frac{1}{2}D\left[\left(\vec{\xi}\vec{u}\right)\right]\right]$$

$$\varphi_1(u;t) = \exp\left(ia(t)u - \frac{D(t)u^2}{2}\right)$$

и для гауссовского стационарного процесса

$$\varphi_2(u_1, u_2; \tau) = \exp\left[i(u_1 + u_2)a - \frac{D}{2}(u_1^2 + 2K(\tau)u_1u_2 + u_2^2)\right]$$

3.2. Основные свойства гауссовских случайных процессов.

Гауссовские СП обладают рядом удобных свойств.

1. Гауссовский СП исчерпывающим образом определяется двумя моментными функциями: математическим ожиданием $m_\xi(t)$ и ковариационной функцией $B_\xi(t_1, t_2)$.

2. Для гауссовских СП некоррелированность значений процесса тождественна их независимости. Действительно, пусть значения гауссовского СП $\xi(t)$ в моменты $t_1, t_2, ..., t_n$ некоррелированные, т.е. $B_\xi(t_k, t_m) = 0, \quad k \neq m$ и $B_\xi(t_k, t_k) = D_\xi(t_k)$, то матрица $B = \|B(t_k, t_m)\|$ становится диагональной и

$$f_n(\vec{r};\vec{t}) = \prod_{k=1}^{n} f_1(x_k;t_k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\prod\limits_{k=1}^{n} D_\xi^{1/2}(t_k)} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(x_k - m(t_k)\right)^2}{D_\xi(t_k)}\right]$$

3. Для гауссовских СП понятия стационарности в широком и узком смысле совпадают. По определению, СП является стационарным в широком смысле, если его математическое ожидание не зависит от времени, а ковариационная функция зависит лишь от абсолютных значений интервалов между рассматриваемыми моментами времени. Одновременно он будет стационарным в узком смысле, т.к. многомерные плотности вероятности и характеристические функции не будут изменяться при сдвиге всей группы точек вдоль оси времени на произвольную постоянную величину. Ковариационная матрица принимает вид

$$B = D_\xi \left\| K\left(\left|t_k - t_m\right|\right)\right\|, \; k,m = 1,\ldots,n .$$

4. Для гауссовских СП со средним значением $\langle \xi(t) \rangle = 0$ моментные функции нечетного порядка равны 0

$$\langle \xi(t_1)\ldots\xi(t_{2n+1}) \rangle = 0 ,$$

а моментные функции четного порядка определяются выражением

$$\langle \xi(t_1)\ldots\xi(t_{2n}) \rangle = \sum_{p.n.} B(t_1,t_2)B(t_3,t_4)\ldots B(t_{2n-1},t_{2n})$$

в виде суммы по различным перестановкам, дающим разные слагаемые с учетом симметрии $B(t_k,t_m)$. В частности,

$$\langle \xi(t_1)\xi(t_2)\xi(t_3)\xi(t_4) \rangle = B(t_1,t_2)B(t_3,t_4) + B(t_1,t_3)B(t_2,t_4) + B(t_1,t_4)B(t_2,t_3)$$

Это свойство нетрудно доказать используя связь между моментами и характеристической функцией. Из него следует, что в случае, когда $t_1 = t_2 = t',\; t_3 = t_4 = t''$

$$R_{\xi^2}(t',t'') = \left\langle \left[\xi(t')\right]^2 \left[\xi(t'')\right]^2 \right\rangle = D_\xi(t')D_\xi(t'') + 2B_\xi^2(t',t'')$$

$$B_{\xi^2}(t',t'') = R_{\xi^2}(t',t'') - \left\langle \left[\xi(t')\right]^2 \right\rangle \left\langle \left[\xi(t'')\right]^2 \right\rangle = 2B_\xi^2(t',t'')$$

и для стационарного процесса

$$B_{\xi^2}(t'-t'') = 2B_\xi^2(t'-t'')$$

Условие эргодичности относительно среднего квадрата стационарного гауссовского процесса принимает вид

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T (1-\frac{\tau}{T})B_{\xi^2}(\tau)d\tau = 0 \Rightarrow \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T (1-\frac{\tau}{T})B_\xi^2(\tau)d\tau = 0$$

Достаточным условием является $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T B_\xi^2(\tau)d\tau = 0$

5. При преобразовании гауссовского СП линейной системой:

$$\eta(t) = \int_0^t h(t,\theta)\xi(\theta)d\theta ,$$

где $h(t,\theta)$ - импульсная характеристика линейной системы, выходной процесс (линейный функционал) также остается гауссовским. Т.е. гауссовские СП обладают свойством устойчивости по отношению к линейным преобразованиям. Это можно доказать следующим образом. Для любого процесса характеристическая функция:

$$\varphi_n(u_1,u_2,...,u_n;t_1,t_2..t_n)=\left\langle \exp\left(i\sum_k u_k\xi(t_k)\right)\right\rangle$$

Если в этой формуле положить все $u_k=u$, то получим

$$\varphi_n(u_1,u_2,...,u_n;t_1,t_2..t_n)\Big|_{u_1=u_2=...=u_n=u}=\left\langle \exp\left(iu\sum_k \xi(t_k)\right)\right\rangle=\varphi_{\sum_k\xi(t_k)}(u)$$

Т.е. чтобы получить характеристическую функцию $\varphi_{\sum_k\xi(t_k)}(u)$ суммы зависимых значений любого процесса достаточно в $\varphi_n(u_1,u_2,...,u_n;t_1,t_2..t_n)$ положить все $u_k=u$.

Теорема: Сумма выборочных зависимых значений гауссовского случайного процесса имеет нормальный закон распределения.

Доказательство. Для гауссовского случайного процесса

$$\varphi_{\sum_k\xi(t_k)}(u)=\varphi_n(u_1,...,u_n;t_1,...,t_n)\Big|_{u_1=...=u_n=u}=$$

$$\exp\left(i\vec{m}^T\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{u}^TB\vec{u}\right)\Big|_{u_1=...=u_n=u}=\exp\left(iu\sum_k m(t_k)-\frac{u^2}{2}\sum_{k,m}B(t_k,t_m)\right)$$

Если обозначить $m_\Sigma=\sum_k m(t_k)$, $D_\Sigma=\sum_{k,m}B(t_k,t_m)$ (дисперсия суммы значений), то получим стандартную форму записи для характеристической функции нормально распределенной случайной величины.

Следствие: При воздействии гауссовского случайного процесса на линейную систему процесс на ее выходе остается нормальным.

Доказательство. Заменим интеграл линейного преобразования суммой

$$\eta(t)\approx\tilde{\eta}=\sum_k h(t,\theta_k)\Delta\theta_k\xi(\theta_k)=\sum_k G_k\xi(\theta_k)=\sum_k\mu(\theta_k)$$

Имеем сумму выборочных значений гауссовского случайного процесса. В соответствии с предыдущей теоремой $\tilde{\eta}$ – имеет нормальный закон распределения. При предельном переходе от суммы к интегралу нормальный закон распределения сохраняется.

6. Класс гауссовских (нормальных) СВ замкнут относительно линейных комбинаций и переходов к пределу в ср. кв.. Из этих операций получаются операции дифференцирования и интегрирования в ср. кв., поэтому из устойчивости нормальных законов для сумм СВ вытекает обобщение на анализ сл. функций в ср. кв..

Т. о., имеет место **теорема нормальной устойчивости:** *Нормальность сохраняется при операциях дифференцирования и интегрирования в ср. кв.*

Применяя эту теорему к рассмотренным нами ранее теоремах об ортогональном и гармоническом разложениях получим следующие следствия.

Следствие 1. Если ковариационная функция $B_\xi(t_1,t_2)$ непрерывна на конечном интервале T, то сл. функция $\xi(t)$ нормальна тогда и только тогда, когда коэффициенты разложения (сл. величины) $\xi_n=\int_T\xi(t)\psi_n(t)dt$ - нормальны. Кроме того, ξ_n независимы.

Следствие 2. Если непрерывная ковариационная функция $B_\xi(t_1,t_2)$ стационарна, то сл. функция $\xi(t)$ нормальна тогда и только тогда, когда сл. функция $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\omega})$ с некоррелированными приращениями, которая фигурирует в гармоническом разложении $\xi(t)=\int e^{i\omega t}d\mu(\omega)$, нормальна. Кроме того, функция $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\omega})$ имеет независимые приращения.

7. Свойства производной гауссовского стационарного случайного процесса.

Необходимое и достаточное условие дифференцирования стационарного СП $\xi(t)$ в среднеквадратическом смысле заключается в том, чтобы ковариационная функция процесса $B_\xi(\tau)$ при $\tau=0$ имела производные до 2-го порядка включительно.

В случае стационарного в широком смысле процесса $\langle\xi\rangle = const, \quad B_\xi(t_1,t_2)=B_\xi(t_1-t_2)$ имеем

$$\langle\xi'\rangle=\langle\xi\rangle'=0, \quad \boldsymbol{B_{\xi\xi'}(\tau)=B'_\xi(\tau)=-B_{\xi'\xi}(\tau)},$$
$$\boldsymbol{B_{\xi'}(\tau)=-B''_\xi(\tau), \quad D_{\xi'}=B_{\xi'}(0)=-B''_\xi(\tau)\Big|_{\tau=0}}$$

Т.о., в результате дифференцирования стационарного в широком смысле процесса получается стационарный в широком смысле процесс с нулевым математическим ожиданием. Так как для ковариационной функции любого стационарного процесса справедливо неравенство $|B(\tau)|\le B(0)=D$, то

$$\left|B''_\xi(\tau)\right|\le D_{\xi'}=-B''_\xi(0)$$

Условия дифференцирования стационарного процесса можно выразить через спектральные плотности, а именно,

$$B_{\xi'}(\tau)=-B''_\xi(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2 g_\xi(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$$

$$D_{\xi'}=-B''_\xi(\tau)\Big|_{\tau=0}=\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2 g_\xi(\omega)d\omega,$$

$$g_{\xi'}(\omega)=\omega^2 g_\xi(\omega)$$

Следовательно, необходимое и достаточное условие дифференцирования стационарного процесса состоит в том, чтобы его спектральная плотность убывала с ростом частоты быстрее, чем ω^{-3}

В силу четности $g(\omega)$

$$B_{\xi\xi'}(0)=B'_\xi(0)=i\int_{-\infty}^{\infty}\omega g_\xi(\omega)d\omega=0\,.$$

Т.е. стационарный процесс и его производная в совпадающие моменты времени не коррелированы. Для гауссовских стационарных процессов они и независимы, следовательно

$$f_{\xi\xi'}(x,y)=f_\xi(x)f_{\xi'}(y)$$

$$f_{\xi'}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi D_{\xi'}}}\exp\left(-\frac{y^2}{2D_{\xi'}}\right), \quad D_{\xi'}=-B''_\xi(0)$$

Учитывая, что $B_\xi(\tau)=D_\xi K_\xi(\tau)$, совместная плотность вероятности представляется в виде

$$f_{\xi\xi'}(x,y)=\frac{1}{2\pi D_\xi\sqrt{-K''_\xi(0)}}\exp\left\{-\frac{1}{2D_\xi}\left[\left(x-m_\xi\right)^2-\frac{y^2}{K''_\xi(0)}\right]\right\}$$

Полученные результаты можно использовать для приближенной оценки продольного углового размера лунной дорожки, наблюдаемой на взволнованной водной поверхности.

Для упрощения будем рассматривать двумерную задачу и считать, что высота точки взволнованной водной поверхности как функция продольной координаты является гауссовским стационарным СП $\xi(z)$ с нулевым средним и ковариационной функцией $B_\xi(\rho)=\sigma_\xi^2 e^{-\beta^2\rho^2/2}$. Угол наклона поверхности связан с производной случайной функции $\xi(z)$ соотношением $tg\gamma=\frac{d\xi}{dz}=\xi'$, т.е. $\gamma=arctg\xi'$. Для рассматриваемой модели взволнованной поверхности с вероятностью 0.68 угол наклона поверхности находится в диапазоне $(-arctg\sigma_{\xi'},arctg\sigma_{\xi'})$, где $\sigma_{\xi'}=\sigma_\xi\beta$ - СКО производной $\xi(z)$.

Условие зеркального отражения $\alpha_н+\gamma=\alpha_л-\gamma$, где $\alpha_н$ - угол наклона луча зрения к спокойной плоской водной поверхности, γ - угол наклона взволнованной поверхности в данной точке, $\alpha_л$ - угол наклона лунных лучей зрения к спокойной водной поверхности. Случайная величина $\alpha_н$ связана со случайной величиной γ соотношением $\alpha_н=\alpha_л-2\gamma$. Дальняя граница лунной дорожки соответствует минимальному значению $\alpha_н$, для которого можно использовать оценку $\alpha_{н\,мин}\approx\alpha_л-2\,arctg\sigma_\xi\beta$, ближняя граница лунной дорожки соответствует максимальному значению $\alpha_н$, для которого можно использовать оценку $\alpha_{н\,макс}\approx\alpha_л+2\,arctg\sigma_\xi\beta$. Таким образом, угловой размер лунной дорожки с точки зрения наблюдателя по уровню вероятности 0.68 составляет $\approx 4\,arctg\sigma_\xi\beta$.

8. Оптимальной оценкой значения гауссовского случайного процесса в заданной временной точке исходя из критерия минимума среднего квадрата ошибки по значениям процесса в другие моменты времени является линейная оценка, т.е. $\tilde{\xi}_0=h_0+\sum_{k=1}^{n}h_k\xi_k$.

Рассмотрим задачу о наилучшем приближении СВ $\xi_0=\xi(t_0)$ с помощью линейных комбинаций $h_0+\sum_{k=1}^{n}h_k\xi_k$ других СВ $\xi_1=\xi(t_1),...,\xi_n=\xi(t_n)$ по критерию минимума среднего квадрата ошибки. Задача состоит в том, чтобы по заданным характеристикам

$$a_k=\langle\xi_k\rangle,\quad B_{km}=\langle(\xi_k-a_k)(\xi_m-a_m)\rangle,\quad R_{km}=B_{km}+a_k a_m\quad k,m=0,...,n,$$

найти такие коэффициенты $h_k,\ k=0,...,n$, для которых обеспечивается минимум среднего квадрата ошибки $\varepsilon_{\text{n}}^2=\left\langle\left(\xi_0-h_0-\sum_{k=1}^{n}h_k\xi_k\right)^2\right\rangle$, т.е.

$$\varepsilon_{n\min}^2=\min_{\{h_k\}}\left\langle\left(\xi_n-h_n-\sum_{k=1}^{n-1}h_k\xi_k\right)^2\right\rangle$$

В случае $n=0$ получим

$$\varepsilon_0^2=\left\langle(\xi_0-h_0)^2\right\rangle=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-h_0)^2\,f_0(x)dx=\left\langle\xi_0^2\right\rangle-2h_0a_0+h_0^2$$

Из условия $\dfrac{\partial\varepsilon_0^2}{\partial h_0}=-2a_0+2h_0=0$ получим $h_0=a_0,\quad \varepsilon_{0\min}^2=B_{00}=D_0$, т.е. в этом случае среднее значение является наилучшим приближением по критерию минимума среднего квадрата ошибки, который равен дисперсии СВ ξ_0.

В случае $n=1$ задача на минимум среднего квадрата ошибки $\varepsilon_1^2=\left\langle(\xi_0-h_0-h_1\xi_1)^2\right\rangle$ сводится к решению системы из двух линейных уравнений

$$\frac{\partial\varepsilon_1^2}{\partial h_m}=0,\ \ m=0{,}1,$$

которые после преобразований принимают вид

$$\left\langle(\xi_0-h_0-h_1\xi_1)\right\rangle=0\Rightarrow h_0+h_1a_1=a_0,$$

$$\left\langle(\xi_0-h_0-h_1\xi_1)\xi_1\right\rangle=0\Rightarrow h_0a_1+h_1R_{11}=R_{01}\Rightarrow h_1(R_{11}-a_1^2)=R_{01}-a_0a_1$$

и имеют решение $h_1=\dfrac{B_{01}}{B_{11}},\qquad h_0=a_0-\dfrac{B_{01}}{B_{11}}a_1$, а оценка $\tilde{\xi}_0=a_0+\dfrac{B_{01}}{B_{11}}(\xi_1-a_1)$

Минимум среднего квадрата ошибки для полученных коэффициентов

$$\varepsilon_{1\min}^2=\left\langle(\xi_0-h_0-h_1\xi_1)^2\right\rangle=\left\langle(\xi_0-h_0-h_1\xi_1)\xi_0\right\rangle=R_{00}-\left(a_0-\frac{B_{01}}{B_{11}}a_1\right)a_0-\frac{B_{01}}{B_{11}}R_{01}=$$

$$=B_{00}-\frac{B_{01}^2}{B_{11}}=D_0-\frac{B_{01}^2}{D_1}\le D_0$$

В общем случае для коэффициентов $h_k,\,k=0,\ldots,n$ получим систему $n+1$ линейных уравнений

$$\frac{\partial\varepsilon_n^2}{\partial h_m}=\left\langle\frac{\partial\left(\xi_0-h_0-\sum\limits_{k=1}^{n}h_k\xi_k\right)^2}{\partial h_m}\right\rangle=0,\ \ m=0,\ldots,n$$

Первое из этих уравнений (при $m=0$) означает, что среднее СВ ошибки должно быть равно 0

$$\left\langle\xi_0-h_0-\sum_{k=1}^{n}h_k\xi_k\right\rangle=a_0-h_0-\sum_{k=1}^{n}h_ka_k=0$$

Остальные выражают условия некоррелированности (ортогональности) СВ ошибки и случайных величин $\xi_m,\ m=1,\ldots,n$

$$\left\langle\left(\xi_0-h_0-\sum_{k=1}^{n}h_k\xi_k\right)\xi_m\right\rangle=R_{0m}-h_0a_m-\sum_{k=1}^{n}h_kR_{km}=0,\ m=1,\ldots,n$$

Так как $h_0 = a_0 - \sum_{k=1}^{n} h_k a_k$ можно записать в виде $\tilde{\xi}_0 = a_0 + \sum_{k=1}^{n} h_k \left(\xi_k - a_k\right)$ и условия ортогональности привести к виду

$$\left\langle \left(\xi_0 - a_0 - \sum_{k=1}^{n} h_k \left(\xi_k - a_k\right) \right) \left(\xi_m - a_m\right) \right\rangle == 0,\, m = 1,\dots,n$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} B_{mk} h_k = B_{m0},\, m = 1,\dots,n$$

Введем обозначения $B = \left\| B_{mk} \right\|,\, b_0 = \left\| B_{m0} \right\|,\, h = \left\| h_k \right\|,\, m,k = 1,\dots,n$.

Если матрица *B* невырожденная , то $h = B^{-1} b_0$

Минимум среднего квадрата ошибки для полученных коэффициентов

$$\varepsilon_{n\min}^2 = \left\langle \left(\xi_0 - h_0 - \sum_{k=1}^{n} h_k \xi_k \right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(\xi_0 - a_0 - \sum_{k=1}^{n} h_k \left(\xi_k - a_k\right) \right) \cdot \left(\xi_0 - a_0\right) \right\rangle =$$

$$= B_{00} - \sum_{k=1}^{n} B_{k0} h_k = D_0 - \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} B_{mk} h_m h_k \le D_0$$

Последнее неравенство обусловлено положительной определенностью ковариационной матрицы.

Пусть нужно найти такую оценку $\tilde{\xi}_0$ СВ ξ_0 по измерениям случайных величин $\xi_1,\dots,\xi_n$, которая минимизирует средний квадрат ошибки

$$\varepsilon_{\text{n}}^2 = \left\langle \left(\xi_0 - \tilde{\xi}_0 \right)^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x_0 - \tilde{\xi}_0 \right)^2 f\,(x_0 / x_1 = \xi_1,\dots,x_n = \xi_n) d\, x_0$$

Из условия $\dfrac{\partial \varepsilon_n^2}{\partial \tilde{\xi}_0} = 0$ получим, что оптимальной оценкой $\tilde{\xi}_0$ является условное математическое ожидание

$$\tilde{\xi}_0 = M\left[\xi_0 / \xi_1,\dots,\xi_n\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x_0 f\,(x_0 / x_1 = \xi_1,\dots,x_n = \xi_n) d\, x_0$$

Тогда минимальный средний квадрат ошибки – условная дисперсия СВ ξ_0

$$\varepsilon_{\text{n min}}^2 = M\left[\left(\xi_0 - M\left[\xi_0 / \xi_1,\dots,\xi_n\right] \right)^2 / \xi_1,\dots,\xi_n \right]$$

Докажем, что полученное выше линейное приближение $h_0 + \sum_{k=1}^{n} h_k \xi_k$ СВ ξ_0 по критерию минимума среднего квадрата ошибки **для гауссовских СВ** есть условное математическое ожидание, т.е.

$$\tilde{\xi}_0 = M\left[\xi_0 / \xi_1,\dots,\xi_n\right] = h_0 + \sum_{k=1}^{n} h_k \xi_k$$

Действительно, СВ $\left(\xi_0 - h_0 - \sum_{k=1}^{n} h_k \xi_k\right), \xi_1, ..., \xi_n$ являются совместно гауссовскими. По определению первая из этих величин ортогональна к остальным. Но для совместно гауссовских СВ из ортогональности (некоррелированности) следует независимость. Поэтому СВ ошибки $\xi_0 - \sum_{k=1}^{n} h_k \xi_k$ не зависит от СВ $\xi_1, ..., \xi_n$. Следовательно,

$$M\left[\xi_0 - h_0 - \sum_{k=1}^{n} h_k \xi_k \Big/ \xi_1, ..., \xi_n\right] = M\left[\xi_0 - h_0 - \sum_{k=1}^{n} h_k \xi_k\right] = 0 .$$

Но,

$$M\left[\xi_0 - h_0 - \sum_{k=1}^{n} h_k \xi_k \Big/ \xi_1, ..., \xi_n\right] = M[\xi_0 / \xi_1, ..., \xi_n] - M\left[h_0 + \sum_{k=1}^{n} h_k \xi_k \Big/ \xi_1, ..., \xi_{n-1}\right] =$$

$$= M[\xi_0 / \xi_1, ..., \xi_n] - \left(h_0 + \sum_{k=1}^{n} h_k \xi_k\right) = 0 .$$

Таким образом,

$$M[\xi_0 / \xi_1, ..., \xi_n] = h_0 + \sum_{k=1}^{n} h_k \xi_k ,$$

при этом минимальное значение среднего квадрата ошибки дается вышеприведенным выражением.

3.3. Условные плотности вероятности и оптимальные линейные оценки.

Используем рассмотренный принцип получения линейных оценок для вычисления условных плотностей вероятностей. Предположим, что гауссовский СП $\xi(t)$ имеет математическое ожидание $a(t)$ и заданную ковариационную функцию $B(t_0, t_1)$.

Пример 1. Получим выражение для условной плотности вероятности $f\left(x_0 / x_1; t_0, t_1\right)$. Условное математическое ожидание $\xi(t_0)$

$$M[\xi(t_0) / \xi(t_1)] = h_0 + h_1 \xi(t_1),$$

где $h_0 = a(t_0) - \dfrac{B(t_0, t_1)}{B(t_1, t_1)} a(t_1), \quad h_1 = \dfrac{B(t_0, t_1)}{B(t_1, t_1)}$

Условная дисперсия

$$\varepsilon_{\min}^2 = D[\xi(t_0) / \xi(t_1)] = \left\langle \left(\xi_0 - h_0 - h_1 \xi_1\right)^2 \right\rangle = B(t_0, t_0) - \frac{B^2(t_0, t_1)}{B(t_1, t_1)} = D(t_0) - \frac{B^2(t_0, t_1)}{D(t_1)} \le D(t_0)$$

Условная плотность вероятности записывается в виде

$$f(x_0 / x_1; t_0, t_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \varepsilon_{\min}^2}} \exp\left[-\frac{\left(x_0 - h_0 - h_1 x_1\right)^2}{2\varepsilon_{\min}^2}\right]$$

Для стационарного процесса, полагая $t_0 = t + \tau, t_1 = t$, получим

$$h_0 = \left(1 - K(\tau)\right) a, \quad h_1 = K(\tau), \qquad \varepsilon_{\min}^2 = D(1 - K^2(\tau)), \quad K(\tau) = B(\tau) / D$$

и формулу для условной плотности вероятности

$$f\ (x_0/x_1;\tau)=\frac{f_2(x_0,x_1;\tau)}{f_1(x_1)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi D_\xi(1-K_\xi^2(\tau))}}\exp\left\{-\frac{\left[x_0-a-K(\tau)(x_1-a)\right]^2}{2D_\xi(1-K_\xi^2(\tau))}\right\}$$

Т.е. условное математическое ожидание

$$M\left[\xi(t+\tau)/\xi(t)\right]=a+K(\tau)\big(\xi(t)-a\big),$$

Условная дисперсия

$$M\Big[\big(\xi(t+\tau)-M\left[\xi(t+\tau)/\xi(t)\right]\big)^2/\xi(t)\Big]=D_\xi\big(1-K_\xi^2(\tau)\big)$$

не зависит от $\xi(t)$.

<u>Пример 2.</u> Рассмотрим задачу оценки экстраполированного на $\lambda>0$ значения $\xi(t+\lambda)$ гауссовского СП, предполагая известным поведение процесса до момента t, *т.е.* $-\infty<t'\le t$, при этом считаем гауссовский процесс $\xi(t)$ стационарным с нулевым математическим ожиданием. В данном случае необходимо в задаче линейной оценки перейти к пределу $n\to\infty$ и рассматривать условное математическое ожидание как выход линейного фильтра с импульсной характеристикой $h(t)$

$$M[\xi(t+\lambda)\,/\,\xi(t'),t'\le t]=\int_0^\infty \xi(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

Интеграл справа дает наилучшую оценку $\xi(t+\lambda)$ по критерию минимума среднего квадрата ошибки, если $h(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\left\langle\left[\xi(t+\lambda)-\int_0^\infty\xi(t-\tau)h(\tau)d\tau\right]\xi(t')\right\rangle=0\quad t'\le t$$

Т.е. вместо системы линейных уравнений предыдущего раздела получим интегральное уравнение

$$B_\xi(\Delta t+\lambda)=\int_0^\infty B_\xi(\Delta t-\tau)h(\tau)d\tau,\quad \Delta t=t-t'\ge 0\,,$$

которое называется интегральным уравнением Винера-Хопфа.

Таким образом, условная плотность вероятности экстраполированного значения $\xi(t+\lambda)$ гауссовского стационарного процесса является нормальной с указанным математическим ожиданием и дисперсией

$$\varepsilon_{\min}^2=\left\langle\left[\xi(t+\lambda)-\int_0^\infty\xi(t-\tau)h(\tau)d\tau\right]^2\right\rangle=$$

$$\left\langle\left[\xi(t+\lambda)-\int_0^\infty\xi(t-\tau)h(\tau)d\tau\right]\xi(t+\lambda)\right\rangle=B_\xi(0)-\int_0^\infty B(\tau+\lambda)h(\tau)d\tau=$$

$$B_\xi(0)-\int_0^\infty\int_0^\infty B(\tau-\tau')h(\tau)h(\tau')d\tau d\tau'\le B_\xi(0)$$

Импульсная характеристика $h(t)$, условное математическое ожидание и дисперсия зависят от λ.

Задачу определения импульсных характеристик $h(t)$ в более общей постановке мы будем рассматривать при изучении преобразований СП в линейных системах.

Узкополосные случайные процессы

При рассмотрении задач связи и локации в радио и оптическом диапазонах необходимо учитывать тот факт, что сигналы и помехи являются узкополосными.

Узкополосными или квазимонохроматическими СП называются стационарные СП, спектральные плотности которых заметно отличны от нуля только в узкой полосе частот $\Delta\omega$ около частоты ω_c

$$\omega_c >> \Delta\omega;$$

Узкополосные СП по определению являются высокочастотными СП. Условие узкополосности позволяет перейти от рассмотрения высокочастотных СП к рассмотрению низкочастотных СП.

Примером узкополосного случайного процесса является электромагнитное излучение в спектральных линиях атомных и молекулярных спектров. Форму спектральной линии можно определить исходя из модели пуассоновского импульсного процесса, спектральная плотность которого определяется соотношением (см. раздел 2.7) $g(\omega) = \frac{n_1}{2\pi}\left|\tilde{F}(\omega)\right|^2$, где $\tilde{F}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\theta)e^{-i\omega\theta}d\vartheta$ - Фурье-преобразование функции формы импульса. В двухуровневой системе переход с верхнего уровня на нижний происходит за конечный промежуток времени, связанный с характерным временем пребывания («жизни») τ_c системы на верхнем уровне. Поэтому можно считать, что функция формы импульса имеет вид

$F(\vartheta) = ae^{-\beta\vartheta}e^{i\omega_c\vartheta}$, $\vartheta \ge 0$, $F(\vartheta) = 0$, $\vartheta < 0$, $\beta = 1/\tau_c$ ω_c - частота перехода.

Для такого импульса $\tilde{F}(\omega) = a/(\beta + i(\omega - \omega_c))$ и, следовательно, спектральная плотность

$$g(\omega) = \frac{n_1}{2\pi}\frac{a^2}{\beta^2 + (\omega-\omega_c)^2} = \frac{n_1}{2\pi}\frac{a^2\tau_c^2}{1 + (\omega-\omega_c)^2\tau_c^2}.$$

Для молекулярных спектров характерное время жизни τ_c порядка 0.1 сек, естественная ширина линии $\Delta\omega \approx 1/\tau_c \approx 10c^{-1}$, при этом $\omega_c \approx 10^{14} - 10^{15}c^{-1}$.

Рассмотрим свойства действительных узкополосных СП.

5.1. Эквивалентность узкополосного случайного процесса двум медленно меняющимся процессам

Для действительных узкополосных процессов используют два варианта представления:

с использованием огибающей (амплитуды) $V(t)$ и фазы $\varphi(t)$

$$\xi(t) = V(t)\cos[\omega_c t + \varphi(t)] \tag{1.1}$$

и с использованием так называемых квадратурных составляющих $\chi(t)$ и $\mu(t)$

$$\xi(t) = \chi(t)\cos\omega_c t - \mu(t)\sin\omega_c t \tag{1.2}$$

причем функции $V(t)$, $\varphi(t)$, $\chi(t)$, $\mu(t)$ связаны соотношениями

$$\chi(t) = V(t)\cos\varphi(t), \quad \mu(t) = V(t)\sin\varphi(t)$$

$$V(t) = \sqrt{\chi^2(t) + \mu^2(t)}, \; \varphi(t) = arctg\frac{\mu(t)}{\chi(t)}$$

Определим статистические характеристики квадратурных составляющих $\chi(t)$, $\mu(t)$ для узкополосного стационарного СП с нулевым средним.

Во-первых, из (1.2) следует, что $\langle \chi(t) \rangle = \langle \mu(t) \rangle = 0$

Далее, из представления ковариационной функции в виде

$$B_\xi(t, t+\tau) = \langle \xi \xi_\tau \rangle = \langle \chi \chi_\tau \rangle \cos \omega_c t \cos[\omega_c(t+\tau)] + \langle \mu \mu_\tau \rangle \sin \omega_c t \sin[\omega_c(t+\tau)]$$
$$- \langle \chi \mu_\tau \rangle \cos \omega_c t \sin[\omega_c(t+\tau)] - \langle \chi_\tau \mu \rangle \cos[\omega_c(t+\tau)] \sin \omega_c t =$$
$$\frac{1}{2}\left(\langle \chi \chi_\tau \rangle + \langle \mu \mu_\tau \rangle\right) \cos \omega_c \tau + \frac{1}{2}\left(\langle \chi \chi_\tau \rangle - \langle \mu \mu_\tau \rangle\right) \cos(2\omega_c t + \tau) -$$
$$\frac{1}{2}\left(\langle \chi \mu_\tau \rangle - \langle \chi_\tau \mu \rangle\right) \sin \omega_c \tau - \frac{1}{2}\left(\langle \chi \mu_\tau \rangle + \langle \chi_\tau \mu \rangle\right) \sin(2\omega_c t + \tau)$$

и условия стационарности следует, что $\langle \chi \chi_\tau \rangle = \langle \mu \mu_\tau \rangle = r(\tau)$, $\langle \chi \mu_\tau \rangle = -\langle \chi_\tau \mu \rangle = s(\tau)$

И для ковариационной функции узкополосного действительного стационарного процесса получим

$$B_\xi(\tau) = r(\tau) \cos \omega_c \tau - s(\tau) \sin \omega_c \tau \tag{1.3}$$

Спектральная плотность по положительным частотам действительного стационарного процесса $g_{\xi+}(\omega) = 2 g_\xi(\omega)$ связана с ковариационной функцией теоремой Хинчина

$$B_\xi(\tau) = \int_0^\infty g_{\xi+}(\omega) \cos \omega \tau d\omega \tag{1.4}$$

$$g_{\xi+}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty B_\xi(\tau) \cos \omega \tau d\tau \tag{1.4.1}$$

Запишем $\omega = \omega - \omega_c + \omega_c$ и представим (1.4) в виде

$$B_\xi(\tau) = \cos \omega_c \tau \int_0^\infty g_{\xi+}(\omega) \cos(\omega - \omega_c)\tau d\omega - \sin \omega_c \tau \int_0^\infty g_{\xi+}(\omega) \sin(\omega - \omega_c)\tau d\omega$$

Отсюда получаем спектральные представления ковариационных функций

$$r(\tau) = \int_0^\infty g_{\xi+}(\omega) \cos(\omega - \omega_c)\tau d\omega \approx \int_{-\infty}^\infty g_{\xi+}(\omega_c + \Omega) \cos(\Omega \tau) d\Omega$$

$$s(\tau) = \int_0^\infty g_{\xi+}(\omega) \sin(\omega - \omega_c)\tau d\omega \approx \int_{-\infty}^\infty g_{\xi+}(\omega_c + \Omega) \sin(\Omega \tau) d\Omega$$

и, следовательно, $r(\tau)$ - четная, а $s(\tau)$ - нечетная функции, $D_\chi = D_\mu = D_\xi$, $s(0) = 0$.

Итак, действительный узкополосный СП процесс можно построить, задав два низкочастотных стационарных и стационарно связанных СП с одинаковыми ковариационными функциями.

Вместо двух случайных процессов $\chi(t), \mu(t)$ можно рассматривать один медленно меняющийся комплексный процесс

$$z(t) = \chi(t) + i\mu(t)\,. \tag{1.5}$$

Тогда процесс, определяемый соотношением

$$\zeta(t) = z(t)e^{i\omega_c t}\,, \tag{1.6}$$

будет комплексным узкополосным стационарным процессом. СП $\xi(t)$ является его реальной частью

$$\xi(t) = \mathrm{Re}\,\zeta(t)$$

Мнимая часть комплексного процесса $\zeta(t)$ определяется соотношением

$$\eta(t) = \mathrm{Im}\,\zeta(t) = \chi(t)\sin\omega_c t + \mu(t)\cos\omega_c t \tag{1.7}$$

Легко найти ковариационные функции

$$\begin{aligned} B_\eta(\tau) &= r(\tau)\cos\omega_c\tau - s(\tau)\sin\omega_c\tau \\ B_{\xi\eta}(\tau) &= r(\tau)\sin\omega_c\tau + s(\tau)\cos\omega_c\tau \end{aligned} \tag{1.8}$$

Взаимная ковариационная функция $B_{\xi\eta}(\tau)$ - нечетная функция τ: $B_{\xi\eta}(0) = 0$.

Два высокочастотных процесса $\xi(t), \eta(t)$ связаны с низкочастотными процессами $\chi(t),\ \mu(t)$ совершенно однозначно формулами (1.2), (1.7), описывающими преобразование поворота системы координат. Обратное преобразование приводит к соотношениям

$$\chi(t) = \xi(t)\cos\omega_c t + \eta(t)\sin\omega_c t \qquad \mu(t) = -\xi(t)\sin\omega_c t + \eta(t)\cos\omega_c t \tag{1.9}$$

Следовательно, определение низкочастотных процессов $\chi(t), \mu(t)$ для заданного высокочастотного действительного узкополосного процесса $\xi(t)$ эквивалентно определению сопряженного процесса $\eta(t)$. Предположим, что процесс $\eta(t)$ определяется линейным преобразованием процесса $\xi(t)$. Обязательным, в сущности, является то, чтобы это преобразование превращало $\cos\omega_c t$ в $\sin\omega_c t$, а $\sin\omega_c t$ в $-\cos\omega_c t$. Рассмотрим два возможных способа такого преобразования.

Первый способ (математический) использует понятие аналитического сигнала, у которого мнимая и действительная части связаны преобразованием Гильберта

$$\eta(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi(t')}{t-t'}dt' \tag{1.10},$$

где интеграл понимается в смысле главного значения.

Такой способ определения имеет то преимущество, что он распространяется и на случай не узкополосных процессов.

Другой способ определения сопряженного процесса $\eta(t)$ (физический) использует операцию дифференцирования

$$\eta(t) = -\frac{1}{\omega_c}\dot{\xi}(t) \tag{1.11}$$

Этот способ использует свойство некоррелированности стационарного процесса и его производной в совпадающие моменты времени.

Вследствие (1.11) процессы $\chi(t),\ \mu(t)$ можно записать в виде

$$\chi(t) = \xi(t)\cos\omega_c t - \frac{\dot{\xi}(t)}{\omega_c}\sin\omega_c t \qquad \mu(t) = -\xi(t)\sin\omega_c t - \frac{\dot{\xi}(t)}{\omega_c}\cos\omega_c t \tag{1.14}$$

5.2. Узкополосные случайные процессы, определяемые дифференциальными уравнениями.

В радиофизике и радиотехнике узкополосные СП образуются в линейных частотно-селективных элементах, содержащих емкости, индуктивности и сопротивления. Такие элементы описываются дифференциальными уравнениями. Выходной сигнал будет узкополосным даже в том случае, когда на указанные элементы действуют внешние или внутренние широкополосные флуктуационные процессы. Рассмотрим колебательный контур, составленный из емкости, индуктивности, нешумящего сопротивления и генератора шумового напряжения. Поведение этого контура описывается дифференциальными уравнениями второго порядка:

$$Lq'' + Rq' + \frac{q}{C} = \varepsilon(t)$$

- для заряда на емкости,

$$u'' + \beta u' + \omega_c^2 u = \omega_c^2 \varepsilon(t)$$

- для напряжения на емкости.

Здесь $\varepsilon(t)$ - действительный широкополосный стационарный процесс, $\beta = R/L, \quad \omega_c^2 = 1/LC$.

Комплексная передаточная функция такой линейной системы равна

$$H(i\omega) = \frac{\omega_c^2}{-\omega^2 + i\beta\omega + \omega_c^2}$$

Спектральная плотность процесса на выходе $u(t)$

$$g_u(\omega) = N_0 |H(i\omega)|^2 = \frac{\omega_c^4 N_0}{\left(\omega_c^2 - \omega^2\right)^2 + \beta^2\omega^2},$$

Эта спектральная плотность при $\omega_c / \beta >> 1$ имеет две симметричные относительно нуля ветви, локализованные вблизи частот $\omega = \pm\omega_c$. Спектральная плотность по положительным частотам

$$g_{u+}(\omega) = \frac{2\omega_c^4 N_0}{(\omega_c - \omega)^2(\omega_c + \omega)^2 + \beta^2\omega^2} \cong \frac{\omega_c^2 N_0}{2} \frac{1}{(\omega_c - \omega)^2 + \beta^2/4} \tag{2.1}$$

Ковариационная функция имеет вид

$$B(\tau) = \int_0^\infty g_{u+}(\omega)\cos\omega\tau d\omega \cong \frac{\pi\omega_c^2 N_0}{\beta}\exp\left(-\frac{\beta}{2}|\tau|\right)\cos(\omega_c\tau).$$

Для теплового шума $N_0 = \dfrac{k_B TR}{\pi}$ и

$$B(\tau) = \frac{k_B T}{C}\exp\left(-\frac{\beta}{2}|\tau|\right)\cos(\omega_c\tau)$$

Следовательно, учитывая (1.3), процессы $\chi(t), \mu(t)$ при $\omega_c / \beta >> 1$ приближенно являются некоррелированными случайными процессами с ковариационными функциями

$$B_\chi(\tau) = B_\mu(\tau) = r(\tau) = \frac{k_B T}{C}\exp\left(-\frac{\beta}{2}|\tau|\right)$$

$$B_{\chi\mu}(\tau) = B_{\mu\chi}(-\tau) = s(\tau) = 0$$

и дисперсией $D_\chi = D_\mu = \dfrac{k_B T}{C}$.

5.3. Огибающая и фаза узкополосного случайного процесса. Релеевские флюктуации.

Рассмотренные ранее медленно меняющиеся функции $\chi(t), \mu(t)$ удобны тем, что они связаны с исходным узкополосным процессом $\xi(t)$ линейным образом. Медленно меняющиеся амплитуда (огибающая) и фаза связана с ними соотношениями

$$\xi(t) = \chi(t)\cos\omega_c t - \mu(t)\sin\omega_c t = V(t)\cos[\omega_c t + \varphi(t)] \tag{3.1}$$

$$V(t) = \sqrt{\chi^2(t) + \mu^2(t)}, \quad \varphi(t) = arctg\,\frac{\mu(t)}{\chi(t)} \tag{3.2}$$

$$\chi(t) = V(t)\cos\varphi(t), \quad \mu(t) = V(t)\sin\varphi(t) \tag{3.3}$$

Поскольку амплитуда и фаза связаны с $\xi(t)$ нелинейным образом, то для вычисления их статистических характеристик требуется знание законов распределения процесса $\xi(t)$.

Ограничимся предположением, что $\xi(t)$ есть гауссовский процесс. Тогда знания его ковариационной функции достаточно для того, чтобы определить всевозможные законы распределения не только его самого, но и медленно меняющихся процессов $\chi(t), \mu(t)$. В самом деле, последние также будут гауссовы с нулевыми средними значениями; ибо линейно выражаются через $\xi(t)$. Зная же их ковариационные функции $B_\chi(\tau) = B_\mu(\tau) = r(\tau)$ и взаимную ковариационную функцию $B_{\chi\mu}(\tau) = B_{\mu\chi}(-\tau) = s(\tau)$, мы можем найти для них различные законы распределения.

Если взять значения $\chi(t), \mu(t)$, относящиеся к одному и тому же моменту времени, то взаимная корреляция между ними равна нулю вследствие нечетности функции $s(\tau)$, и поэтому

$$f(\chi_t, \mu_t) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi^2} e^{-\frac{\chi_t^2 + \mu_t^2}{2\sigma_\xi^2}} \tag{3.4}$$

Исходя из совместной плотности вероятностей $f(\chi_t, \mu_t)$ можно найти совместную плотность вероятностей огибающей V_t и фазы φ_t используя формулу замены переменных при вычислении кратных интегралов

$$\int\ldots\int f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n = \int\ldots\int f(x_1 = x_1(\bar{y}),\ldots,x_n = x_n(\bar{y}))\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1(\bar{y})}{\partial y_1} & . & \dfrac{\partial x_n(\bar{y})}{\partial y_1} \\ . & . & . \\ \dfrac{\partial x_1(\bar{y})}{\partial y_n} & . & \dfrac{\partial x_n(\bar{y})}{\partial y_n} \end{vmatrix} dy_1\ldots dy_n$$

Учитывая, что

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\chi_t}{\partial V_t} & \dfrac{\partial\mu_t}{\partial V_t} \\ \dfrac{\partial\chi_t}{\partial\varphi_t} & \dfrac{\partial\mu_t}{\partial\varphi_t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi_t & \sin\varphi_t \\ -V_t\sin\varphi_t & V_t\cos\varphi_t \end{vmatrix} = V_t$$

из (3.4) получим

$$f(V_t,\varphi_t) = \begin{cases} \dfrac{V_t}{2\pi\sigma_\xi^2} e^{-\frac{V_t^2}{2\sigma_\xi^2}}, & V_t \ge 0,\ 0 \le \varphi_t \le 2\pi \\ 0, & \text{при других } V_t,\ \varphi_t \end{cases} \tag{3.5}$$

Для плотности вероятности огибающей V_t получаем

$$f(V_t) = \int_0^{2\pi} f(V_t,\varphi_t)d\varphi_t = \begin{cases} \dfrac{V_t}{\sigma_\xi^2} e^{-\frac{V_t^2}{2\sigma_\xi^2}}, & V_t \ge 0 \\ 0, & V_t < 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

распределение Релея, для которого наивероятнейшее значение $V_m = \sigma$, среднее значение $\langle V\rangle = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$, средний квадрат $\langle V^2\rangle = 2\sigma^2$.

Для плотности вероятности фазы φ_t получаем

$$f(\varphi_t) = \int_0^{\infty} f(V_t,\varphi_t)dV_t = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, & 0 \le \varphi_t \le 2\pi \\ 0, & \varphi_t \notin [0,\ 2\pi] \end{cases} \tag{3.7}$$

равномерное распределение.

Таким образом $f(V_t,\varphi_t) = f(V_t)f(\varphi_t)$, т. е. огибающая V_t и фаза φ_t - независимые сл. величины. Сл. процесс $V(t)$ носит название <u>релеевского</u> процесса.

5.4. Квазирелеевский флуктуационный процесс.

Если к гауссовскому узкополосному процессу $\xi(t)$ с несущей частотой $\boldsymbol{\omega}_c$ и ковариационной функцией $\sigma_\xi^2 K_\xi(\tau)$ прибавить гармонический сигнал $A\cos(\boldsymbol{\omega}_c t + \boldsymbol{\vartheta})$ с фиксированными амплитудой A и частотой $\boldsymbol{\omega}_c$ и случайной начальной фазой ϑ, статистически не зависящей от $\xi(t)$, то суммарный процесс

$$x(t) = \xi(t) + A\cos(\omega_c t + \vartheta) \tag{4.1}$$

уже не будет гауссовым. Для того чтобы процесс (4.1) был стационарным, требуется, чтобы начальная фаза ϑ была совершенно случайной, т. е. имела равномерный закон распределения

$$f(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}$$

Тогда, используя статистическую независимость между $\xi(t)$ и $A\cos(\omega_c t + \vartheta)$ легко получить ковариационную функцию указанного процесса:

$$\langle x(t)x(t+\tau)\rangle = \sigma_\xi^2 K_\xi(\tau) + \frac{A^2}{2}\cos\omega_c\tau$$

Узкополосный процесс (4.1) можно записать в виде колебания

$$x(t) = B(t)\cos\bigl(\omega_c t + \psi(t)\bigr) \tag{4.2}$$

с медленно меняющимися амплитудой $B(t)$ и фазой $\psi(t)$.

Найдем плотность вероятности $f(B)$. Процесс $\xi(t)$ можно записать

$$\xi(t) = \chi(t)\cos\omega_c t - \mu(t)\sin\omega_c t \tag{4.3}$$

где $\chi(t), \mu(t)$ - случайные величины, имеющие нормальный закон распределения (3.4). Подставив (4.3) в (4.1) и сравнивая с (4.2), имеем

$$\chi(t) + A\cos\vartheta = B\cos\psi\,, \quad \mu(t) + A\sin\vartheta = B\sin\psi \tag{4.4}$$

так что

$$\chi^2(t) + \mu^2(t) = B^2 + A^2 - 2AB\cos(\psi - \vartheta) \tag{4.5}$$

Путем замены переменных (4.4) перейдем от распределения

$$f(\chi_t, \mu_t, \vartheta) = \frac{1}{(2\pi\sigma_\xi)^2} e^{-\frac{\chi_t^2 + \mu_t^2}{2\sigma_\xi^2}} \tag{4.6}$$

к $f(B, \psi, \vartheta)$. Учитывая, что $d\chi d\mu d\vartheta = BdBd\psi d\vartheta$, и подставляя (4.5) в (4.6), находим

$$f(B, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\vartheta}) = \frac{B}{(2\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\sigma}_\xi)^2}\exp\left\{-\frac{1}{2\boldsymbol{\sigma}_\xi^2}\left(B^2 + A^2 - 2AB\cos(\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\vartheta})\right)\right\}$$

Отсюда, интегрируя по ψ *и* ϑ, получаем закон распределения амплитуды B

$$f(B) = \frac{B}{\sigma_\xi{}^2}\exp\left\{-\frac{B^2 + A^2}{2\sigma_\xi{}^2}\right\} I_0\left(\frac{AB}{\sigma_\xi{}^2}\right) \tag{4.6}$$

где $I_0(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{x\cos y}dy$ - модифицированная функция Бесселя.

Свойства функции $I_0(x)$:

$I_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{4\cdot 16} + \ldots$ (для малых x), $I_0(x) \cong \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left(1 + \frac{1}{8x} + \ldots\right)$ (для больших x)

Распределение (4.6) называется распределением Райса и является обобщением распределения Релея (3.6). При $A = 0$ распределение Райса становится распределением Релея. При больших $\dfrac{AB}{\sigma_\xi{}^2} >> 1$ распределение Райса имеет вид

$$f(B) = \frac{\sqrt{B/A}}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi{}^2}}\exp\left\{-\frac{(B-A)^2}{2\sigma_\xi{}^2}\right\}$$

Флуктуационный процесс $B(t)$ называется квазирелеевским процессом. Его роль в радиофизике обусловлена тем обстоятельством, что часто, помимо флюктуаций, в принимаемом радиосигнале присутствует полезный гармонический сигнал, амплитуду которого для простоты считают постоянной.

6. Нелинейные преобразования случайных процессов.

Средства приема и обработки сигналов содержат нелинейные устройства различного вида. Одни нелинейные элементы, такие как детектор, системы автоматического регулирования усиления, пороговые устройства, квантователи сигнала по уровню и др. являются принципиально необходимыми. Другие же получаются сами в силу ограниченного диапазона линейности амплитудных характеристик усилителей.

Поэтому большой интерес представляет задача анализа воздействия на нелинейную систему детерминированного и (или) случайного процесса (детерминированный сигнал плюс шум, случайный сигнал плюс шум, только шум), причем сама система состоит не только из собственно нелинейных элементов (детекторы, ограничители), но и из линейных цепей (фильтры, резонансные контуры и т. п.). Такая система описывается нелинейными дифференциальными уравнениями. Одна из возможных задач состоит в том, чтобы при полном задании процесса на входе, т. е. при известных его конечномерных распределениях, получить столь же полное описание выходного процесса. Универсальных методов здесь не существует (как, впрочем, и для случая детерминированного воздействия), и в каждой конкретной задаче приходится искать какие-либо приемы, приуроченные либо к специальному виду уравнений, описывающих систему, либо к специальному характеру воздействия (например, белый шум и т. д.), либо к ограниченной постановке вопроса. Нас могут, скажем, интересовать на выходе не функции распределения, а лишь среднее значение и ковариационная функция.

Дело обстоит значительно легче, если речь идет о **безынерционных** нелинейных системах, т. е. просто о нелинейной функциональной связи входного процесса $\xi(t)$ и выходного процесса $\eta(t)$:

$$\eta(t) = F[\xi(t)]$$

где функция $F[.]$ описывает характеристику нелинейного элемента (детектора, ограничителя и т. п.). В случае безынерционной нелинейности нахождение конечномерных распределений $\eta(t)$, если таковые известны для $\xi(t)$, не представляет затруднений.

6.1 Преобразование плотностей вероятности

Для взаимно-однозначного преобразования $\eta(t) = F[\xi(t)]$, т. е. преобразования, когда

$$\boldsymbol{\eta}_1 = F(\boldsymbol{\xi}_1),...,\boldsymbol{\eta}_k = F(\boldsymbol{\xi}_k)$$

и, обратно,

$$\boldsymbol{\xi}_1 = F^{-1}(\boldsymbol{\eta}_1),...,\boldsymbol{\xi}_k = F^{-1}(\boldsymbol{\eta}_k),$$

где $\boldsymbol{\xi}_n = \boldsymbol{\xi}(t_n),\quad \boldsymbol{\eta}_n = \boldsymbol{\eta}(t_n),\quad n = 1,...,k$,

используя формулу замены переменных при вычислении кратных интегралов,

$$\int ... \int f(x_1,...,x_k)dx_1...dx_k = \int ... \int f(x_1 = x_1(y_1),...,x_k = x_k(y_k)) \left| \frac{\partial x_1(y_1)}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial x_k(y_k)}{\partial y_k} \right| dy_1...dy_k$$

получим следующее выражение для плотности распределения $f_\eta^{(k)}(y_1,...,y_k)$ через $f_\xi^{(k)}(x_1,...,x_k)$ (для сокращения записи опущены параметры $(t_1,...,t_k)$):

$$f_\eta^{(k)}(y_1,...,y_k) = f_\xi^{(k)}(F^{-1}(y_1),...,F^{-1}(y_k)) \left| F^{-1'}(y_1)...F^{-1'}(y_k) \right|$$

Это выражение и давало бы полный ответ, если бы не одно усложнение, связанное с тем, что характеристики реальных нелинейных устройств зачастую обладают *неоднозначной* обратной функцией F^{-1}. Рассмотрим поэтому именно такой случай.

На рис. 1 показаны два примера нелинейных характеристик $y = F(x)$, первой из которых соответствует однозначная обратная функция $x = F^{-1}(y)$, а второй—двузначная.

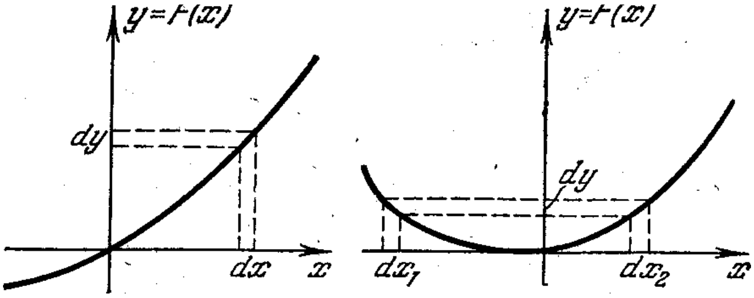


Рис. 1

В первом случае попадание y в интервал dy имеет ту же вероятность, что и попадание x в интервал $dx = \left|F^{-1'}(y)\right|dy$, так что

$$f_\eta^{(1)}(y)dy = f_\xi^{(1)}(F^{-1}(y))\left|F^{-1'}(y)\right|dy$$

Во втором случае вероятность попадания y в интервал dy равна сумме вероятностей двух несовместимых событий - попадания x либо в $dx_1 = \left|F_1^{-1'}(y)\right|dy$, либо в $dx_2 = \left|F_2^{-1'}(y)\right|dy$. Через F_1^{-1} и F_2^{-1} мы обозначили при этом две ветви обратной функции $x = F^{-1}(y)$. Таким образом, во втором случае –

$$f_\eta^{(1)}(y)dy = f_\xi^{(1)}(F_1^{-1}(y))\left|F_1^{-1'}(y)\right|dy + f_\xi^{(1)}(F_2^{-1}(y))\left|F_2^{-1'}(y)\right|dy \quad (1.1)$$

Мы видели, что гауссовский процесс на входе ***линейной*** системы дает нормальный же процесс на ее выходе. Полученные формулы показывают, что нелинейная система радикально меняет распределение и, в частности, не сохраняет нормального распределения, если оно и было у входного процесса. Рассмотрим простые примеры.

Пусть характеристика $y = F(x)$ состоит из двух прямолинейных лучей с угловыми коэффициентами K (при $x > 0$) и k (при $x < 0$) (рис. 2, а). Если входной процесс гауссов, с нулевым средним и со стандартом σ, то, как это ясно и без вычислений, распределение на выходе будет составлено из двух гауссовых законов - при $x > 0$ со стандартом $K\sigma$, а при $x < 0$ - со стандартом $k\sigma$ (рис. 1.2, б)

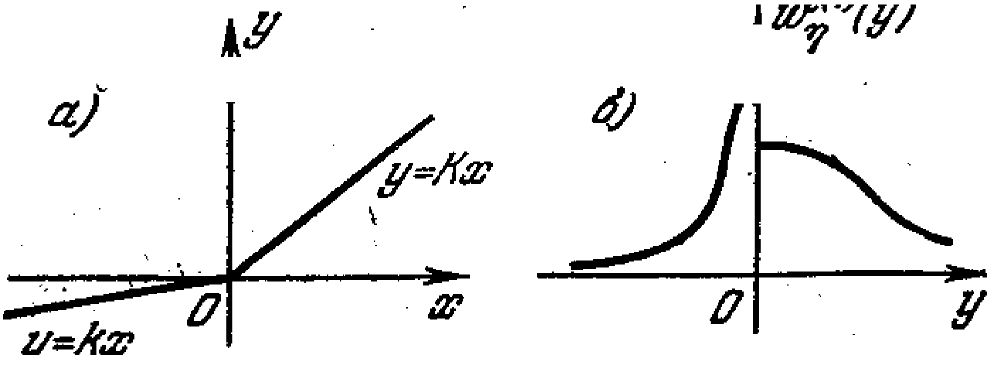


Рис. 2.

При $k \to 0$ (переход к так называемому линейному детектору) левая часть $f_\eta^{(1)}(y)$ сжимается в дельта-функцию $\frac{1}{2}\delta(y)$: при $k = 0$ любое x<0 дает на выходе y =0.

У квадратичного детектора $y=\beta x^2$ обратная функция двузначна:

$$x = F_{1,2}{}^{-1}(y) = \pm\sqrt{y/\beta}$$

По формуле (1.1) получаем

$$f_\eta^{(1)}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{\beta y}}\left[f_\xi^{(1)}\left(\sqrt{\dfrac{y}{\beta}}\right) + f_\xi^{(1)}\left(-\sqrt{\dfrac{y}{\beta}}\right)\right], & y>0 \\ 0, \quad y<0 \end{cases}$$

Если распределение ξ нормально, то распределение для η будет

$$f_\eta^{(1)}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\beta y}\sigma} e^{-y/2\beta\sigma^2}, & y>0 \\ 0, \quad y<0 \end{cases},$$

т. е., как и в первом примере, уже не является гауссовым.

Рассмотрим комплексную СВ $\zeta = \xi + i\eta = \chi e^{i\varphi}$, где ξ, η - независимые нормальные СВ с нулевыми средними и одинаковыми дисперсиями σ^2, $\chi = \sqrt{\xi^2+\eta^2}$, $\varphi = arctg\dfrac{\eta}{\xi}$, $\xi = \chi\cos\varphi,\quad \eta = \chi\sin\varphi$. Найдем плотность вероятности квадрата модуля этой комплексной СВ $\chi^2 = \xi^2+\eta^2$. Для этого воспользуемся результатами, полученными для огибающей и фазы узкополосного СП.

Для плотности вероятности модуля χ имеем

$$f_\chi(\rho) = \int_0^{2\pi} f_{\chi\varphi}(\rho,\theta)d\theta = \begin{cases} \dfrac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}, & \rho \ge 0 \\ 0, \quad \rho<0 \end{cases}$$

распределение Релея, для которого наивероятнейшее значение $\chi_m = \sigma$, среднее значение $\langle\chi\rangle = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\sigma$, средний квадрат $\langle\chi^2\rangle = 2\sigma^2$. Отсюда для квадрата модуля комплексной СВ получим

$$f_{\chi^2}(S) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{S}{2\sigma^2}}, & S \ge 0 \\ 0, \quad S<0 \end{cases} \quad -$$

‘экспоненциальное распределение.

6.2. Преобразование моментов случайного процесса в безынерционных нелинейных устройствах.

В случае нелинейной безынерционной системы моментные функции могут вычислены только с использованием функций распределения входного процесса. Действительно, для среднего значения $\langle\eta\rangle$ и смешанного момента $\langle\eta\eta_\tau\rangle$ имеем

$$\langle\eta(t)\rangle = \int F(x) f_\xi^{(1)}(x,t)dx$$

$$\langle\eta(t)\eta(t+\tau)\rangle = \int F(x_1)F(x_2) f_\xi^{(2)}(x_1,t;x_2,t+\tau)dx_1dx_2$$

Обычно трудностей с определением среднего значения не возникает. Для вычисления двукратного интеграла, выражающего корреляционную функцию применяются различные математические приемы, использующие те или иные частные особенности задачи.

Так, для гауссовских СП со средним значением $\langle \xi(t) \rangle = 0$ моментные функции 4-го порядка можно рассчитать по формуле

$$\langle \xi(t_1)\xi(t_2)\xi(t_3)\xi(t_4) \rangle = B(t_1,t_2)B(t_3,t_4) + B(t_1,t_3)B(t_2,t_4) + B(t_1,t_4)B(t_2,t_3) \,,$$

из которой для стационарного процесса с $B(\tau) = \sigma^2 K(\tau)$ следует, что

$$\langle \boldsymbol{\xi}^2(t_1)\boldsymbol{\xi}^2(t_2) \rangle = B^2(0) + 2B^2(t_1 - t_2) = \boldsymbol{\sigma}^4(2K^2(\boldsymbol{\tau}) + 1)$$

1. Рассмотрим примеры, когда преобразование стационарного гауссовского процесса осуществляется квадратичным детектором, т.е. $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\xi}^2$. Пусть $\langle \boldsymbol{\xi} \rangle = 0$, тогда

$$\langle \boldsymbol{\eta} \rangle = \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\sigma}^2 ,$$

$$B_\eta(t_1,t_2) = \boldsymbol{\beta}^2 \left\langle \left(\boldsymbol{\xi}^2(t_1) - \boldsymbol{\sigma}^2\right)\left(\boldsymbol{\xi}^2(t_2) - \boldsymbol{\sigma}^2\right) \right\rangle = \boldsymbol{\beta}^2 \left[\langle \boldsymbol{\xi}^2(t_1)\boldsymbol{\xi}^2(t_2) \rangle - \boldsymbol{\sigma}^4 \right]$$

$$= 2\boldsymbol{\beta}^2\boldsymbol{\sigma}^4 K_\xi^2(\boldsymbol{\tau}) = 2\boldsymbol{\beta}^2 B_\xi^2(\boldsymbol{\tau})$$

Процесс $\eta(t)$ - стационарный в широком смысле.

Если гауссов процесс на входе узкополосный и имеет симметричный относительно частоты ω_c спектр $g_\xi(\omega)$, то

$$K_\xi(\tau) = r_1(\tau)\cos\omega_c\tau \tag{2.1}$$

где $r_1(\tau) = \dfrac{1}{\sigma_\xi^2}\displaystyle\int_0^\infty g_\xi(\omega)\cos(\omega - \omega_c)\tau d\omega$ - медленная функция τ.

В случае воздействия узкополосного гауссовского процесса с коэффициентом корреляции (2.1) на квадратичный детектор

$$B_\eta(\tau) = 2\beta^2\sigma^4 r_1^2(\tau)\cos^2\omega_c\tau = \beta^2\sigma^4 r_1^2(\tau)\left(1 + \cos 2\omega_c\tau\right)$$

т. е. первоначальный спектр, локализованный в окрестности частоты ω_c, дает на выходе квадратичного детектора две полосы - вблизи $\omega = 0$ и $\omega = 2\omega_c$. Медленно меняющаяся часть, примыкающая к $\omega = 0$, может быть выделена, как это большей частью и делается, последующим видеофильтром.

Когда на квадратичный детектор $\eta = \beta\xi^2$ воздействует сумма детерминированного сигнала $s(t)$ и стационарного гауссовского шума $n(t)$ с нулевым средним и ковариационной функцией $B_n(\tau) = \sigma^2 K_n(\tau)$:

$$\xi(t) = s(t) + n(t)$$

тогда,

$$\eta = \beta\xi^2 = \beta(n^2 + 2ns + s^2), \quad \langle \eta \rangle = \beta(\sigma^2 + s^2), \quad \eta - \langle \eta \rangle = \beta(n^2 + 2ns - \sigma^2)$$

Так что

$$B_\eta(t,\boldsymbol{\tau}) = \left\langle \left(\boldsymbol{\eta} - \langle \boldsymbol{\eta} \rangle\right)\left(\boldsymbol{\eta}_\tau - \langle \boldsymbol{\eta}_\tau \rangle\right) \right\rangle = \boldsymbol{\beta}^2 \left\langle (n^2 + 2ns - \boldsymbol{\sigma}^2)(n_\tau^2 + 2n_\tau s_\tau - \boldsymbol{\sigma}^2) \right\rangle =$$

$$= 2\boldsymbol{\beta}^2\boldsymbol{\sigma}^2\left[\boldsymbol{\sigma}^2 K_n^2(\boldsymbol{\tau}) + 2ss_\tau K_n(\boldsymbol{\tau})\right]$$

Здесь учтено, что у гауссовского процесса $n(t)$ нечетные моменты равны нулю; а четный момент равен (см. выше)

$$\langle n^2 n_\tau^2 \rangle = \sigma^4(2K_n^2(\tau) + 1).$$

Ковариационная функция $B_\eta(t,\tau)$ зависит от t через произведение $ss_\tau = s(t)s(t+\tau)$. Дисперсия процесса на выходе квадратичного детектора при наличии сигнала

$$D[\eta] = 2\beta^2\sigma^2\left[\sigma^2 + 2s^2(t)\right],$$

в отсутствие сигнала – $D[n] = 2\beta^2\sigma^4$. Т.е. при наличии сигнала дисперсия суммарного процесса возрастает.

2. Моментные функции сигнала на выходе нелинейного элемента, имеющего экспоненциальную характеристику

$$\eta(t) = \beta e^{\alpha\xi(t)} \tag{2.2}$$

формально могут быть получены из выражений для характеристических функций входного сигнала $\xi(t)$ (если они известны).

Путем усреднения из (2.2) получаем

$$\langle\eta\rangle = \beta\varphi_1(-i\alpha), \qquad \langle\eta\eta_\tau\rangle = \beta^2\varphi_2(-i\alpha,-i\alpha)$$

где $\varphi_1(u) = \left\langle e^{iu\xi}\right\rangle$, $\varphi_2(u_1,u_2) = \left\langle e^{iu_1\xi + iu_2\xi_\tau}\right\rangle$ - одномерная и двумерная характеристические функции.

Если $\xi(t)$ - <u>стационарный гауссовский процесс</u>, имеющий нулевое среднее, то, как известно,

$$\varphi_1(u) = e^{-\frac{\sigma_\xi^2 u^2}{2}} \qquad \varphi_2(u_1,u_2) = e^{-\frac{\sigma_\xi^2}{2}(u_1^2 + 2K_\xi(\tau)u_1u_2 + u_2^2)}$$

Отсюда, согласно (2.3) получаем искомые выражения для

$$\langle\eta\rangle = \beta e^{\frac{\sigma_\xi^2\alpha^2}{2}}, \qquad \langle\eta\eta_\tau\rangle = \beta^2 e^{\sigma_\xi^2\alpha^2(1+K_\xi(\tau))},$$

а также для выходной ковариационной функции

$$B_\eta(\tau) = \beta^2 e^{\sigma_\xi^2\alpha^2}\left[e^{\sigma_\xi^2\alpha^2K_\xi(\tau)} - 1\right]$$

Процесс на выходе – стационарный, но не гауссовский.

3. Определим первые моментные функции квадрата модуля комплексного нормального стационарного СП $\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t)$, где $\xi(t), \eta(t)$ - действительные независимые нормальные стационарные СП с нулевыми средними и одинаковыми ковариационными функциями $B(\tau)$. Для среднего значения, очевидно, получим

$$\left\langle\chi^2(t)\right\rangle = \left\langle\xi^2 + \eta^2\right\rangle = 2B(0)$$

Для ковариационной функции после несложных преобразований, учитывая свойство четных моментов, получим

$$B_{\chi^2}(t_1,t_2) = \left\langle\left(\chi^2(t_1) - \left\langle\chi^2(t_1)\right\rangle\right)\left(\chi^2(t_2) - \left\langle\chi^2(t_2)\right\rangle\right)\right\rangle = 4B^2(t_1 - t_2)$$

6.3. Измерение шумовых сигналов. Чувствительность радиометров.

Если нелинейный элемент включен между линейными цепями (например, фильтрами) и обратная реакция последующего звена на предыдущее отсутствует, то расчет такой цепи может, очевидно, производиться поэтапно от звена к звену.

Применим результаты анализа линейных и нелинейных преобразований к часто используемой цепи, состоящей из трех звеньев (рис. 3):

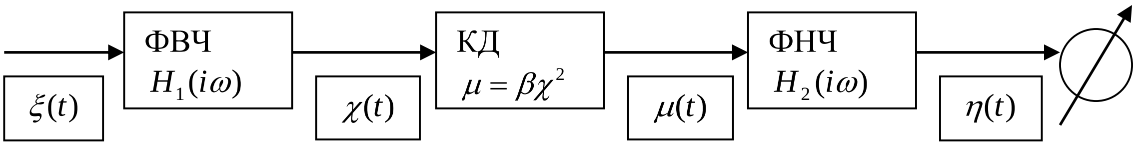


Рис. 3

полосового фильтра высокой частоты [ФВЧ, функция передачи $H_1(i\omega)$], квадратичного детектора [КД, нелинейная характеристика $\mu = \beta\chi^2$] и фильтра низких частот [ФНЧ, функция передачи $H_2(i\omega)$]. На выходе ФНЧ включен измерительный прибор. В качестве входного сигнала мы возьмем стационарный гауссовский процесс $\xi(t)$ с нулевым средним значением. Относительно цепи предполагается, что

1) реакция каждого последующего звена на предыдущее отсутствует;

2) фильтры узкополосны, т. е. полосы ФВЧ $\Delta\omega_{\text{ef}}$, центрированные около частот $\pm\omega_c$, гораздо меньше как ω_c, так и ширины спектра процесса $\xi(t)$, а полоса ФНЧ $\Delta\Omega_{\text{ef}}$ гораздо меньше не только ω_c, но и $\Delta\omega_{\text{ef}}$ (рис. 4).

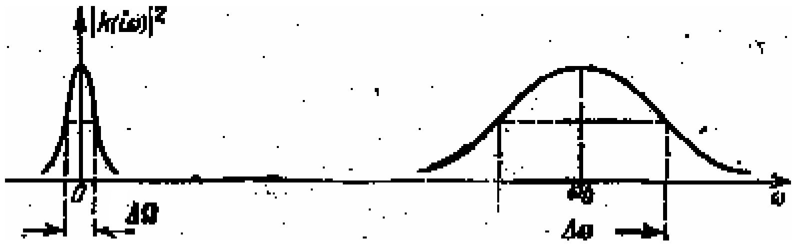


Рис. 4.

Такие цепи составляют основу устройств, предназначенных для измерения шумовых сигналов, - радиометров.

Так как спектр шума $\xi(t)$, по предположению, широк по сравнению с полосой ФВЧ, спектральную плотность процесса $\chi(t)$ можно записать в виде

$$g_\chi(\omega) = g_\xi(\omega_c)\left|H_1(i\omega)\right|^2$$

Следовательно, ковариационная функция $\chi(t)$ равна

$$B_\chi(\tau) = g_\xi(\omega_c)\int_{-\infty}^{\infty}\left|H_1(i\omega)\right|^2 e^{i\omega\tau}d\omega$$

а средний квадрат –

$$\left\langle\chi^2\right\rangle = B_\chi(0) = g_\xi(\omega_c)\int_{-\infty}^{\infty}\left|H_1(i\omega)\right|^2 d\omega = 2g_\xi(\omega_c)\left|H_1(i\omega_c)\right|^2\Delta\omega_{ef}$$

Процесс $\mu(t)$ на выходе детектора имеет среднее значение

$$\langle\mu\rangle = \beta\left\langle\chi^2\right\rangle$$

а поскольку процесс $\chi(t)$ на входе КД тоже гауссовский, причем $\langle\chi\rangle = 0$, ковариационная функция процесса $\mu(t)$

$$B_\mu(\tau) = 2\beta^2 B_\chi^2(\tau) \qquad (3.1)$$

Таким образом,

$$\sigma_\mu^2 = 2\beta^2 B_\chi^2(0) = 2\beta^2\left\langle\chi^2\right\rangle^2$$

и относительная флуктуация на выходе детектора оказывается равной

$$\sigma_\mu / \langle\mu\rangle = \sqrt{2}$$

По теореме о трансформанте Фурье произведения двух функций или в нашем случае - квадрата функции $B_\chi(\tau)$ из (3.1) вытекает выражение для спектральной плотности $\mu(t)$ в виде автосвертки спектральной плотности процесса $\chi(t)$:

$$g_\mu(\omega) = 2\beta^2 \int_{-\infty}^{\infty} g_\chi(\omega') g_\chi(\omega - \omega') d\omega'$$

Эта формула описывает, конечно, весь спектр $\mu(t)$, как высокочастотный (полосы шириной $\Delta\omega_{ef}$ около $\omega = \pm 2\omega_c$), так и низкочастотный (полоса шириной $\Delta\omega_{ef}$ около $\omega = 0$).

Располагая $g_\mu(\omega)$, мы можем написать спектральную плотность на выходе ФНЧ:

$$g_\eta(\omega) = g_\mu(\omega) \left| H_2(i\omega) \right|^2 \tag{3.2}$$

Высокочастотную часть спектра $g_\mu(\omega)$ ФНЧ, разумеется, не пропускает. Ввиду того, что $\left| H_2(i\omega) \right|^2 \neq 0$ лишь в узкой полосе около $\omega = 0$, и учитывая узость полосы ФНЧ $\Delta\Omega_{ef}$ по сравнению с шириной *низкочастотной части* спектра $g_\mu(\omega)$ на выходе КД (рис. 5),

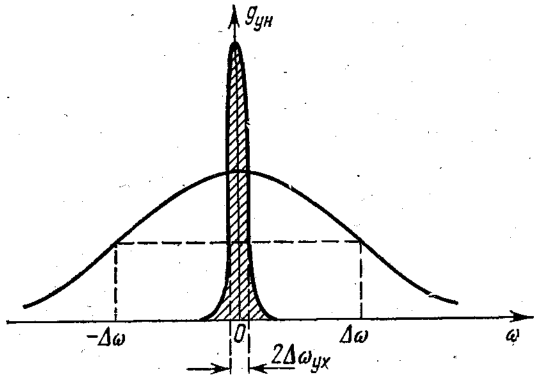


Рис. 5

в формуле (3.2) можно использовать приближение $g_\mu(\omega) \approx g_\mu(0)$.

Выражение для дисперсии $\eta(t)$ имеет вид:

$$\sigma_\eta^2 = \int_{-\infty}^{\infty} g_\eta(\omega) d\omega = g_\mu(0) \int_{-\infty}^{\infty} \left| H_2(i\omega) \right|^2 d\omega = g_\mu(0) \left| H_2(0) \right|^2 \Delta\Omega_{ef}$$

или, после подстановки $g_\mu(\omega)$ и $g_\chi(\omega)$, с учетом четности функции $\left| H_1(i\omega) \right|^2$ получим

$$\sigma_\eta^2 = 2\beta^2 g_\xi^2(\omega_c) \left| H_2(0) \right|^2 \Delta\Omega_{ef} \int_{-\infty}^{\infty} \left| H_1(i\omega) \right|^4 d\omega \tag{3.3}$$

Используя временное представление процесса на выходе фильтра низкой частоты $\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau) \mu(t - \tau) d\tau$ для среднего значения $\eta(t)$ получим

$$\langle\eta\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau) \langle \mu(t-\tau) \rangle d\tau = \langle\mu\rangle \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau) d\tau = H_2(0) \langle\mu\rangle = H_2(0) \beta \left\langle \chi^2 \right\rangle$$

или

$$\langle\eta\rangle = 2\beta g_\xi(\omega_c) H_2(0) \left| H_1(i\omega_c) \right|^2 \Delta\omega_{ef} \tag{3.4}$$

Эта формула лежит в основе метода экспериментального определения спектральной плотности стационарных СП с помощью набора узкополосных фильтров высокой частоты.

Чувствительностью Q радиометра принято считать отношение среднего значения $\langle\eta\rangle$ к СКО флуктуаций σ_η процесса на выходе $\eta(t)$, т.е. $Q=\dfrac{\langle\eta\rangle}{\sigma_\eta}$. Учитывая, что $\langle\eta\rangle$ выражается через $g_\xi(\omega_c)$ по формуле (3.4), а σ_η через $g_\xi(\omega_c)$ - по формуле (3.3), получаем

$$Q=\frac{2\beta g_\xi(\omega_c)H_2(0)\left|H_1(i\omega_c)\right|^2\Delta\omega_{ef}}{\left[2\beta^2 g_\xi^2(\omega_c)\left|H_2(0)\right|^2\Delta\Omega_{ef}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|H_1(i\omega)\right|^4 d\omega\right]^{1/2}}=$$

$$=\frac{2\Delta\omega_{ef}}{\left[2\Delta\Omega_{ef}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|H_1(i\omega)/H_1(i\omega_c)\right|^4 d\omega\right]^{1/2}}$$

Так как

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|H_1(i\omega)/H_1(i\omega_c)\right|^4 d\omega\le\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|H_1(i\omega)/H_1(i\omega_c)\right|^2 d\omega=2\Delta\omega_{ef}$$

в результате получим

$$Q\ge\sqrt{\frac{\Delta\omega_{ef}}{\Delta\Omega_{ef}}}$$

т. е. чувствительность тем выше, чем больше отношение полос ФВЧ и ФНЧ

Для полного диапазона спектральной чувствительности глаза $(0.4-0.7)\cdot 10^{-6}$ м $\Delta\omega_{ef}\approx 2\cdot 10^{15}c^{-1}$. Полагая, что предельная частота чувствительности глаза как фильтра низкой частоты 50Гц, т.е. $\Delta\Omega\approx 600c^{-1}$, получим $Q\approx\sqrt{2\cdot 10^{15}/6\cdot 10^{2}}>10^6$, т.е. чувствительность глаза очень высокая. Чувствительность для цветных наблюдений немного меньше.

7. Марковские случайные процессы.

Процессы Маркова, или процессы без последействия, являются удобной абстракцией. Хотя реальные процессы не являются в точности марковскими, часто целесообразно рассматривать их приближенно как процессы Маркова. Подобная замена позволяет получать ряд конкретных результатов путем применения эффективных математических методов теории процессов Маркова.

7.1. Определение процесса Маркова и уравнение Смолуховского.

Случайный процесс $\eta(t)$ называется марковским, если для любого момента времени ϑ при фиксированном значении $\eta(\vartheta) = x$ случайные величины $\eta(t), t > \vartheta$ не зависят от $\eta(s), s < \vartheta$. Если условиться считать $\eta(t)$ фазовым состоянием некоторой физической системы в момент времени t, то более наглядно марковский процесс $\eta(t)$ можно охарактеризовать следующим образом: поведение системы после какого-либо момента времени ϑ (в будущем) при известном состоянии $x = x(\vartheta)$ не зависит от ее поведения до этого момента (в прошлом). Или другими словами: состояние системы (характеризуемое вектором состояния) в некоторый момент времени содержит все, что нам необходимо знать об истории процесса для того чтобы предсказать поведение процесса в будущем.

Дадим формальные определения. Пусть $\eta(t)$ - СП, заданный на некотором вероятностном пространстве (Ω, Φ, P). СП $\eta(t)$ называется **марковским**, если для любого $\boldsymbol{\vartheta} \in T$ и любых событий $A_s = \{\eta(s) \in A\}, s < \vartheta$ и $B_t = \{\eta(t) \in B\}, t > \vartheta$

$$P\big(A_s B_t / \eta(\theta)\big) = P\big(A_s / \eta(\vartheta)\big) P\big(B_t / \eta(\vartheta)\big)$$

Эта формула означает, что «будущее» и «прошлое» условно независимы при фиксированном «настоящем».

Пусть имеется случайный процесс $\eta(t)$, для которого определены плотности вероятности. Возьмем ряд СВ $\eta(t_1), \eta(t_2),..., \eta(t_n)$ в последовательные моменты времени $t_1 > t_2 > ... > t_n$ и рассмотрим условную плотность вероятности в самый последний момент

$$f\left(x_1 / x_2,..., x_n; t_1, t_2,..., t_n\right) = \frac{f_n\left(x_1, x_2,..., x_n; t_1, t_2,..., t_n\right)}{f_{n-1}\left(x_2,..., x_n; t_2,..., t_n\right)} \qquad (1.1)$$

Процесс $\eta(t)$ является **процессом Маркова, если указанная условная плотность вероятности зависит лишь от последнего условного значения** $\eta(t_2)$ и не зависит от предыдущих $\eta(t_3),...,\eta(t_n)$, $t_2 > t_3 > ... > t_n$. Поэтому для марковского процесса можно записать

$$f\left(x_1 / x_2,..., x_n; t_1, t_2,..., t_n\right) = f\left(x_1 / x_2; t_1, t_2\right) = p_{t_1 t_2}(x_1, x_2) \quad (n \geq 2) \qquad (1.2)$$

Функцию $p_{t_1 t_2}(x_1, x_2)$ называют **вероятностью перехода**.

Из определения условных вероятностей вытекает формула

$$f_n\left(x_1, x_2,..., x_n\right) = f\left(x_1 / x_2,..., x_n\right) f\left(x_2 / x_3,..., x_n\right) \cdot ... \cdot f\left(x_{n-1} / x_n\right) f\left(x_n\right) \qquad (1.3)$$

Учитывая (1.2), из последнего равенства легко получить, что многомерная плотность распределения в случае процессов Маркова распадается на произведение вероятностей перехода

$$f_n\left(x_1, x_2,..., x_n; t_1, t_2,..., t_n\right) = p_{t_1 t_2}(x_1, x_2) \cdot ... \cdot p_{t_{n-1} t_n}(x_{n-1}, x_n) f\left(x_n\right) = f\left(x_n\right) \prod_{k=2}^{n} p_{t_{k-1} t_k}(x_{k-1}, x_k) \qquad (1.4)$$

Таким образом, зная начальное одномерное распределение и вероятность перехода, мы можем записать любую плотность распределения. Следовательно, **функции** $p_{tt'}(x, x')$, $f(x, t)$ **полностью характеризуют случайный процесс без последействия**.

Если вероятность перехода зависит только от разности $t_1 - t_2$ и не зависит от конкретных значений t_1 и t_2,

$$p_{t_1t_2}(x_1, x_2) = p_{t_1-t_2}(x_1, x_2) \quad (t_1 > t_2),$$

то марковский процесс называется **однородным**. Однородность процесса не означает его стационарности. Действительно, двумерная плотность вероятности процесса:

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = f(x_2, t_2)p_{t_1-t_2}(x_1, x_2)$$

продолжает зависеть от текущего времени t_2 (а не только от разности $t_1 - t_2$). И только в том случае, когда $f(x_2, t_2) = f(x_2)$, такой однородный марковский процесс становится стационарным.

Вероятность перехода удовлетворяет нескольким условиям. Сюда относятся условие положительности

$$p_{t_1t_2}(x_1, x_2) \geq 0,$$

и условие нормировки

$$\int p_{t_1t_2}(x_1, x_2)dx_1 = 1$$

Далее, интегрируя распределение (1.4) при $n = 3$ по промежуточному значению x_2 мы получим следующее **интегральное уравнение Смолуховского (Колмогорова-Чепмена)**:

$$\int p_{t_1t_2}(x_1, x_2)p_{t_2t_3}(x_2, x_3)dx_2 = p_{t_1t_3}(x_1, x_3) \qquad (1.5)$$

$$(t_1 > t_2 > t_3)$$

В самом деле, взяв равенство

$$f_2(x_1, x_3; t_1, t_3) = \int f_3(x_1, x_2, x_3; t_1, t_2, t_3)dx_2$$

и записав в нем $f_2(x_1, x_3)$, $f_3(x_1, x_2, x_3)$ в форме (1.4), мы получим (1.5)

$$f_2(x_1, x_3; t_1, t_3) = p_{t_1t_3}(x_1, x_3)f(x_3, t_3) = \int f_3(x_1, x_2, x_3; t_1, t_2, t_3)dx_2 =$$

$$= \int p_{t_1t_2}(x_1, x_2)p_{t_2t_3}(x_2, x_3)f(x_3, t_3)dx_2 = f(x_3, t_3)\int p_{t_1t_2}(x_1, x_2)p_{t_2t_3}(x_2, x_3)dx_2$$

Уравнение Смолуховского – это нелинейное интегральное уравнение. Теоремы единственности для этого уравнения не существует. Напротив, оно имеет массу решений совершенно нефизического характера.

7.2. Дифференциальные уравнения Колмогорова и уравнение Фоккера-Планка.

В случае непрерывных (в вероятностном смысле) марковских процессов можно перейти от интегрального уравнения Смолуховского к дифференциальному уравнению в частных производных.

Пусть $q(x)$ - произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция с ограниченной третьей производной $|q'''(x)| < M$ и обращающая вместе с производной $q'(x)$ в нуль на границах области изменений СП (полагаем их $\pm\infty$). Умножим уравнение Смолуховского на $q(x_1)$ и проинтегрируем по x_1

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_{t_1t_3}(x_1,x_3)q(x_1)dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} p_{t_2t_3}(x_2,x_3)dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} p_{t_1t_2}(x_1,x_2)\times$$
$$\times\left[q(x_2)+q'(x_2)(x_1-x_2)+q''(x_2)\frac{(x_1-x_2)^2}{2}+q'''(z)\frac{(x_1-x_2)^3}{6}\right]dx_1 \tag{2.1}$$

где в правой части использовано разложение Тейлора функции $q(x_1)$ в окрестности x_2.

В результате получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_{t_1t_3}(x_1,x_3)q(x_1)dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} p_{t_2t_3}(x_2,x_3)dx_2\left[q(x_2)\int_{-\infty}^{\infty} p_{t_1t_2}(x_1,x_2)dx_1 +\right.$$
$$+q'(x_2)\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-x_2)p_{t_1t_2}(x_1,x_2)dx_1+q''(x_2)\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-x_2)^2 p_{t_1t_2}(x_1,x_2)dx_1+ \tag{2.2}$$
$$\left.+\frac{1}{6}\int_{-\infty}^{\infty} q'''(z)(x_1-x_2)^3 p_{t_1t_2}(x_1,x_2)dx_1\right]$$

Первый интеграл в квадратных скобках правой части $\int_{-\infty}^{\infty} p_{t_1t_2}(x_1,x_2)dx_1 = 1$,

второй – $\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-x_2)p_{t_1t_2}(x_1,x_2)dx_1 = \langle x_1-x_2\rangle_{x_2}$,

третий - $\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-x_2)^2 p_{t_1t_2}(x_1,x_2)dx_1 = \langle (x_1-x_2)^2\rangle_{x_2}$.

По определению, марковский процесс называется непрерывным (диффузионным), если существуют пределы при фиксированном $\eta(t_2)=x_2$

$$K_1(x_2,t_2)=\lim_{t_1\to t_2}\frac{\langle \eta(t_1)-x_2\rangle}{t_1-t_2},\quad K_2(x_2,t_2)=\lim_{t_1\to t_2}\frac{\langle (\eta(t_1)-x_2)^2\rangle}{t_1-t_2}$$

и $\lim\limits_{t_1\to t_2}\dfrac{\langle |\eta(t_1)-x_2|^3\rangle}{t_1-t_2}=0$

Коэффициент $K_1(x_2,t_2)$ - это средняя скорость изменения состояния в момент t_2 в точке x_2 - так называемый **коэффициент сноса.** Коэффициент $K_2(x_2,t_2)$ - характеризует скорость нарастания разброса состояний в момент t_1 относительно состояния в момент t_2. При малых временах средний квадрат отклонений растет пропорционально времени, что характерно для диффузионных процессов, поэтому коэффициент $K_2(x,t)$ называется **коэффициентом диффузии**.

Перенесем в (2.2) первое слагаемое правой части в левую часть, заменим в нем переменную интегрирования x_2 на x_1, разделим уравнение на $\Delta t = t_1 - t_2$ и перейдем к пределу $t_2 \to t_1$. Это даст

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(x_1) \lim_{t_2 \to t_1} \frac{p_{t_1 t_3}(x_1, x_3) - p_{t_2 t_3}(x_2, x_3)}{t_1 - t_2} dx_1 =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_{t_2 t_3}(x_2, x_3) dx_2 \left[q'(x_2) \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\langle x_1 - x_2 \rangle_{x_2}}{t_1 - t_2} + q''(x_2) \frac{1}{2} \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle_{x_2}}{t_1 - t_2} \right]$$

Здесь учтено, что для непрерывного марковского процесса $\lim\limits_{t_2 \to t_1} \dfrac{\left\langle \left| x_1 - x_2 \right|^3 \right\rangle_{x_2}}{t_1 - t_2} = 0$ и последнее слагаемое в квадратных скобках (2.2) при предельном переходе в силу ограниченности третьей производной $q(x)$ исчезает.

Произведя интегрирование по частям в правой части уравнения с учетом граничных условий $q(\pm\infty) = q'(\pm\infty) = 0$ вследствие произвольности $q(x)$ получим дифференциальное уравнение для вероятности перехода, которое можно записать в следующем общем виде (произведена замена $x_3 \to x_0,\ x_1 \to x,\ t_3 \to t_0,\ t_1 \to t,$)

$$\frac{\partial p_{t,t_0}(x, x_0)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[K_1(x,t) p_{t,t_0}(x, x_0)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[K_2(x,t) p_{t,t_0}(x, x_0)\right] \tag{2.3}$$

с начальным условием

$$p_{t_0,t_0}(x, x_0) = \delta(x - x_0).$$

Это уравнение называется **прямым уравнением Колмогорова**.

Если в начальный момент t_0 задано не начальное состояние x_0, а начальное распределение $f(x_0, t_0)$, то поскольку

$$f(x, t) = \int f_2(x, x_0; t, t_0) dx_0 = \int p_{tt_0}(x, x_0) f(x_0, t_0) dx_0$$

умножив уравнение (2.3) на $f(x_0, t_0)$ и проинтегрировав по x_0 получим дифференциальное уравнение для одномерной плотности вероятности

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[K_1(x,t) f(x,t)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[K_2(x,t) f(x,t)\right] \tag{2.4}$$

которое носит название **уравнения Фоккера-Планка или диффузионного уравнения**.

Вводя поток вероятности

$$G(x,t) = K_1(x,t) f(x,t) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[K_2(x,t) f(x,t)\right] \tag{2.5}$$

уравнение Фоккера - Планка можно записать в форме

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial G(x,t)}{\partial x} = 0 \tag{2.6}$$

и интерпретировать как **уравнение сохранения вероятности**.

Перераспределение вероятности аналогично диффузии или теплопроводности, с той разницей, что в последних рассматривается перераспределение не вероятности, а количества вещества или теплоты. Математически указанные явления описываются тем же самым уравнением (2.4). В каждой отдельной реализации марковского процесса траектория $\eta(t)$ имеет весьма запутанный вид. Изображающая точка движется на оси координат, так же, как броуновская частица или частица, участвующая в диффузионном процессе. Взяв большое число реализаций случайного процесса, мы будем иметь большое число изображающих точек, совершающих случайные блуждания. Эти точки образуют как бы «газ», находящийся в процессе диффузии, плотность которого в какой-либо точке пропорциональна плотности вероятности. Каждая отдельная изображающая точка образует «молекулу» этого «газа».

Вероятность перехода $p_{t,t_0}(x,x_0)$ как функция от x_0, t_0 удовлетворяет другому дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial p_{t,t_0}(x,x_0)}{\partial t_0} = -K_1(x_0,t_0)\frac{\partial p_{t,t_0}(x,x_0)}{\partial x_0} - \frac{K_2(x_0,t_0)}{2}\frac{\partial^2 p_{t,t_0}(x,x_0)}{\partial x_0^2} \tag{2.7}$$

Это уравнение является сопряженным уравнению (2.2) и называется **обратным уравнением Колмогорова**. Его нетрудно получить из уравнения Смолуховского при тех же предположениях, определяющих непрерывность процесса, используя разложение Тейлора для вероятности перехода $p_{t_2 t_3}(x_2, x_3)$ как функции x_2 вблизи x_3.

Для однородного марковского процесса, когда $K_1(x,t)$, $K_2(x,t)$ не зависят от *t*, вероятность перехода $p_{t,t_0}(x,x_0) = p_{t-t_0}(x,x_0)$ зависит лишь от $\tau = t - t_0$, а не от *t*. При этом

$$\frac{\partial p_{t-t_0}(x,x_0)}{\partial t_0} = -\frac{\partial p_{t-t_0}(x,x_0)}{\partial t} = -\frac{\partial p_\tau(x,x_0)}{\partial \tau}$$

и обратное уравнение Колмогорова (2.7) дает в дополнение к (2.3) второе выражение для производной $\dfrac{\partial p_\tau(x,x_0)}{\partial \tau}$

$$\frac{\partial p_\tau(x,x_0)}{\partial \tau} = K_1(x_0)\frac{\partial p_\tau(x,x_0)}{\partial x_0} + \frac{K_2(x_0)}{2}\frac{\partial^2 p_\tau(x,x_0)}{\partial x_0^2} \tag{2.8}$$

В практических приложениях наибольшее распространение получили уравнение Фоккера-Планка и прямое уравнение Колмогорова. Их решения должны удовлетворять условиям положительности и условиям нормировки

$$f(x,t) \ge 0, \quad \int f(x,t)dx = 1$$

$$p_{t,t_0}(x,x_0) \ge 0, \quad \int p_{t,t_0}(x,x_0)dx = 1$$

Перейдем к граничным условиям, которые должны приниматься во внимание при решении уравнений Фоккера-Планка-Колмогорова (2.3), (2.4) или (2.7). Когда функция $\eta(t)$ может принимать всевозможные значения от $-\infty$ до $+\infty$ уравнение Фоккера—Планка справедливо на всей бесконечной прямой *x*. В качестве граничных условий при этом следует брать условия на $\pm\infty$. Интегрируя уравнение сохранения вероятности (2.6) по *x* от $-\infty$ до $+\infty$ и учитывая, что условие нормировки $\int f(x,t)dx = 1$ выполняется тождественно при всех *t*, нетрудно получить обязательное условие

$$G(-\infty,t)=G(\infty,t)$$

Частным случаем этого условия являются более сильные условия

$$G(-\infty,t)=G(\infty,t)=0\,, \tag{2.9}$$

а также

$$f(-\infty,t)=f(\infty,t)=0$$

Равенства (2.9) говорят о том, что изображающие точки не могут появляться из бесконечности или уходить в бесконечность.

В тех случаях, когда функция *x(t)* может принимать лишь ограниченные значения из некоторой области

$$x_1<x<x_2$$

уравнение Фоккера—Планка рассматривается лишь в этой области, а граничные условия имеют вид

$$G(x_1,t)=0, \quad G(x_2,t)=0 \tag{2.9'}$$

Последние означают, что отсутствует поток изображающих точек через границу, т.е. каждая случайная траектория не может войти в рассматриваемую область через границу, а также закончиться при достижении границы.

Разумеется, в зависимости от конкретной задачи могут иметь место и другие граничные условия.

7.3. Марковские процессы, заданные стохастическими дифференциальными уравнениями.

Марковские процессы можно рассматривать как непосредственное обобщение детерминированных динамических процессов, определяемых дифференциальными уравнениями, применительно к случайному воздействию. В случае одной переменной детерминированным аналогом непрерывного марковского процесса является процесс, определяемый обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка

$$\frac{d\eta}{dt}=a(\eta,t)$$

В силу теоремы Коши задание условия в момент t_0 - $\eta(t_0)=\eta_0$ - достаточно для расчета поведения процесса при $t>t_0$ независимо от того, каково было его поведение при $t<t_0$.

Отклик этой динамической системы на случайное воздействие $\xi(t)$ описывается стохастическим уравнением типа

$$\frac{d\eta}{dt}=a(\eta,t)+b(\eta,t)\xi(t) \text{ или } d\eta(t)=a(\eta,t)dt+b(\eta,t)d\mu(t)$$

где $b(\eta,t)$ - детерминированная функция, $d\mu(t)$ - приращения случайного воздействия.

Отклик $\eta(t)$ будет процессом без вероятностного последействия, если процесс $\mu(t)$ является процессом с независимыми приращениями и, следовательно, процесс $\xi(t)$ - белый шум с ковариационной функцией $B_{\xi}(t_1,t_2)=2\pi N_0\delta(t_2-t_1)$

Таким образом, можно ожидать, что **стохастические дифференциальные уравнения первого порядка с дельта-коррелированными случайными гауссовскими воздействиями приводят к непрерывным марковским процессам.**

Рассмотрим примеры непрерывных марковских процессов, описываемых стохастическими уравнениями.

1) Чисто диффузионный или винеровский процесс.

Он определяется стохастическим дифференциальным уравнением

$$\frac{d\eta}{dt} = \xi(t) \tag{3.1}$$

где $\xi(t)$ - гауссовский белый шум со спектральной плотностью N_0:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad B_\xi(t_1, t_2) = 2\pi N_0 \delta(t_1 - t_2)\,.$$

Этот процесс мы подробно рассматривали при изучении линейных преобразований. Там мы показали, что он является асимптотикой реального процесса (с $B_\xi(\tau) = \dfrac{\pi N_0}{\tau_\xi} e^{-|\tau|/\tau_\xi}$) при стремлении времени корреляции τ_ξ случайного воздействия $\xi(t)$ к нулю, если рассматривать макроскопические интервалы времени $\Delta t >> \tau_\xi$.

Решение уравнения (3.1) при начальном условии $\eta(t_0) = x$ имеет вид

$$\eta(t_0 + \tau) = x + \int_{t_0}^{t_0+\tau} \xi(t)dt$$

Т.к. процесс $\xi(t)$ - гауссовский, то процесс $\eta(t)$ - гауссовский и приращения

$$\Delta\eta_\tau = \eta_\tau - x = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \xi(t)dt$$

тоже гауссовские сл. величины с нулевыми средними значениями

$$\langle \Delta\eta_\tau \rangle = 0, \quad D[\Delta\eta_\tau] = \int_0^\tau \int_0^\tau \langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle dt_1 dt_2 = 2\pi N_0 \tau \tag{3.2}$$

Значение интеграла для процесса с конечным временем корреляции

$$D(\Delta\eta_\tau) = 2\pi N_0 \left[\tau - \tau_\xi \left(1 - e^{-\tau/\tau_\xi} \right) \right]$$

Плотность вероятности приращений $\Delta\eta_\tau$

$$f(\Delta x_\tau) = \frac{1}{2\pi\sqrt{N_0 \tau}} \exp\left(-\frac{\Delta x_\tau^{\ 2}}{4\pi N_0 \tau} \right) = \frac{1}{2\pi\sqrt{N_0 \tau}} \exp\left(-\frac{(x_\tau - x)^2}{4\pi N_0 \tau} \right)$$

представляет собой условную плотность вероятности η_τ при условии $\eta_0 = x$. Нетрудно убедиться прямой подстановкой, что такого вида условные плотности вероятности удовлетворяют уравнению Смолуховского, т.е. являются вероятностями перехода $f(\Delta x_\tau) = p_{t_0+\tau, t_0}(x_\tau, x)$, и, следовательно, процесс $\eta(t)$ является марковским (и гауссовским).

Соотношения (3.2) позволяют определить кинетические коэффициенты сноса и диффузии для винеровского процесса. Коэффициент сноса

$$K_1(x,t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{\langle \Delta\eta_\tau \rangle}{\tau} = 0$$

и коэффициент диффузии

$$K_2(x,t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{\langle \Delta\eta^2 \rangle}{\tau} = 2\pi N_0$$

Для процесса с конечным временем корреляции $K_2(x,t)=0$!

Можно показать, что высшие кинетические коэффициенты для винеровского процесса равны нулю: $K_m(x,t)=0, \quad m=3,4,...$.

Вследствие этого уравнение Фоккера — Планка для винеровского процесса имеет вид

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}=\pi N_0 \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}$$

2) Воздействие белого шума на линейную динамическую систему первого порядка.

Линейную динамическую систему первого порядка мы также рассматривали при изучении линейных преобразований. В этом случае преобразование определяется дифференциальным уравнением первого порядка

$$\frac{d\eta}{dt}+\beta\eta=\gamma\xi(t) \qquad (3.3)$$

где β, γ постоянные, $\xi(t)$ - гауссовский белый шум со спектральной плотностью N_0:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad B_\xi(t_1,t_2)=2\pi N_0 \delta(t_1-t_2)$$

С таким уравнением мы имеем дело в задаче о скорости одномерного броуновского движения частицы в среде с вязким трением (поэтому оно называется уравнением Ланжевена) или в задаче о напряжении на емкости RC-контура или в задаче о токе в LR-контуре.

Общее решение уравнения (3.3) с начальным условием $\eta\big|_{t_0}=\eta_0=x$ дается выражением

$$\eta_\tau = e^{-\beta(t-t_0)}\left[x+\gamma\int_{t_0}^{t_0+\tau} e^{\beta\theta}\xi(\theta)d\theta\right] \qquad (3.4)$$

Из соотношения (3.4) следует, что будущее процесса $\eta(t)$ при $t>t_0$ полностью определяется значением $\eta_0=x$ в момент t_0 и совершенно не зависит от $\eta(\vartheta)$ при $\vartheta<t_0$, что и определяет марковость процесса. Заметим, что последнее обстоятельство имеет место лишь в том случае, когда на вход поступает белый шум, который имеет нулевое время корреляции.

В силу гауссовости входного процесса и линейности преобразования процесс на выходе – гауссовский. Его математическое ожидание

$$\langle \eta_t \rangle = x e^{-\beta(t-t_0)},$$

и дисперсия

$$D_\eta(\tau)=\left\langle\left(\eta_t-\langle\eta_t\rangle\right)^2\right\rangle=\frac{\pi N_0\gamma^2}{\beta}(1-e^{-2\beta\tau}) \qquad (3.5)$$

Плотность вероятности центрированной СВ

$$\Delta\eta=\eta_t-\langle\eta_t\rangle=\eta_t-xe^{-\beta\tau}$$

тоже является нормальной с нулевым средним и дисперсией (3.5) и представляет собой условную плотность вероятности η_τ при условии $\eta_0=x$.

$$f(\Delta x,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi D_\eta(\tau)}}\exp\left[-\frac{\left(x_\tau-xe^{-\beta\tau}\right)^2}{2D_\eta(\tau)}\right]$$

Как и в случае винеровского процесса, нетрудно убедиться прямой подстановкой, что такого вида условные плотности вероятности удовлетворяют уравнению Смолуховского, т.е. являются вероятностями перехода $f(\Delta x,\tau)=p_\tau(x_\tau,x)$, и, следовательно, процесс $\eta(t)$ является однородным марковским (и гауссовским).

Вычислим для процесса $\eta(t)$ коэффициенты сноса и диффузии. Для этого необходимо располагать значениями процесса, отстоящими друг от друга на малое время τ. Положим $t_0=0, t=\tau$, найдем приращение

$$\eta_\tau - x = \eta_\tau - \langle\eta_\tau\rangle + \langle\eta_\tau\rangle - x = e^{-\beta\tau}\gamma\int_0^\tau e^{\beta\theta}\xi(\theta)d\theta + x\left[e^{-\beta\tau}-1\right]$$

и вычислим первый и второй его моменты,

$$\langle\eta_\tau - x\rangle = x\left[e^{-\beta\tau}-1\right]\approx -x\beta\tau$$

$$\left\langle(\eta_\tau - x)^2\right\rangle = \left\langle(\eta_\tau - \langle\eta_\tau\rangle)^2\right\rangle + \left[\langle\eta_\tau\rangle - x\right]^2 = \frac{\pi N_0\gamma^2}{\beta}(1-e^{-2\beta\tau}) + x^2\left[e^{-\beta\tau}-1\right]^2 \approx$$

$$\approx \frac{\pi N_0\gamma^2}{\beta}2\beta\tau + x^2(\beta\tau)^2$$

На основании (2.1), (2.2) получаем

$$K_1(x,t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{\langle\eta_\tau - x\rangle}{\tau} = -x\beta$$

$$K_2(x,t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{\left\langle(\eta_\tau - x)^2\right\rangle}{\tau} = 2\pi N_0\gamma^2$$

Высшие кинетические коэффициенты равны нулю: $K_m(x,t)=0, \quad m=3,4,\ldots$.

Таким образом, для марковского процесса $\eta(t)$ на выходе линейной системы первого порядка уравнение Фоккера—Планка выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \beta\frac{\partial}{\partial x}\left[x\cdot f(x,t)\right] + \pi N_0\gamma^2\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}$$

Изменение одномерной плотности распределения $f(x,t)$ в зависимости от времени показано на рис. 7.1. Когда $\langle\eta(t)\rangle\to 0$ и $D_\eta(t)\to\frac{\pi N_0\gamma^2}{\beta}$, процесс $\eta(t)$ становится стационарным: его плотность распределения $f(x,t)\to f_{cm}(x)$ не зависит от времени.

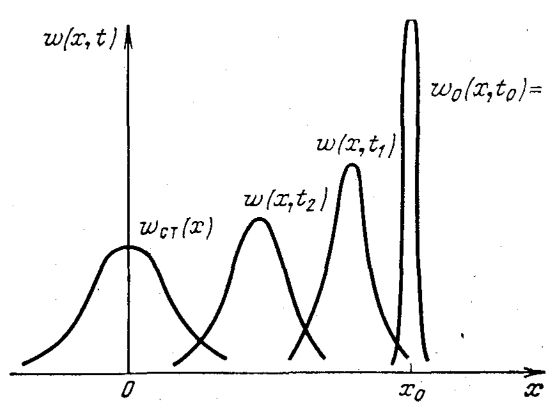


Рис. 7.1.

В предыдущих двух примерах мы получили выражения для коэффициентов сноса и диффузии используя решения соответствующих дифференциальных уравнений. Теперь мы рассмотрим, как можно определить эти коэффициенты непосредственно по виду стохастического дифференциального уравнения.

3) Общий случай динамической системы первого порядка при гауссовых дельта-коррелированных воздействиях.

Рассмотрим теперь общий случай нелинейной динамической системы первого порядка, описываемой дифференциальным уравнением

$$\frac{d\eta}{dt} = a(\eta,t) + b(\eta,t)\xi(t) \tag{3.6}$$

где $a(\eta,t)$, $b(\eta,t)$ - детерминированные дифференцируемые функции аргументов η, t, а $\xi(t)$ - гауссовский белый шум со спектральной плотностью N_0:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad B_{\xi}(t_1,t_2) = 2\pi N_0 \delta(t_1 - t_2)$$

Условие дельта-коррелированности случайного воздействия обеспечивает, как показывают предыдущие примеры, марковость процесса $\eta(t)$.

Перейдем к интегральной форме уравнения (3.6)

$$\eta(t) = x + \int_{t_0}^{t} a(\eta,s)ds + \int_{t_0}^{t} b(\eta,s)\xi(s)ds = x + \int_{t_0}^{t} a(\eta,s)ds + \int_{t_0}^{t} b(\eta,s)d\mu(s) \tag{3.7}$$

где $x = \eta(t_0)$, $\mu(t) = \int_{t_0}^{t} \xi(t)dt$ - винеровский процесс, т.е. гауссовский случайный процесс с независимыми приращениями: $B_{\mu}(t_1,t_2) = 2\pi N_0 \min(t_1,t_2)$

Уравнение (3.7) представляет собой стохастическое интегральное уравнение. Воспользуемся им для вычисления коэффициентов сноса и диффузии для процесса $\eta(t)$.

Для этого нам нужно найти приращение $\Delta\eta_{\tau} = \eta(t_0+\tau) - x$ за малое время τ. Заменяя для краткости $t_0 \to t$ интегральное уравнение относительно $\Delta\eta_{\tau}$ (τ - переменная) представим в виде

$$\Delta\eta_{\tau} = \int_{0}^{\tau} a(x+\Delta\eta_{\vartheta}, t+\vartheta)d\vartheta + \int_{0}^{\tau} b(x+\Delta\eta_{\vartheta}, t+\vartheta)d\mu(\vartheta) \tag{3.8}$$

где $\Delta\eta_{\vartheta} = \eta(t+\vartheta) - x$. Решение уравнения (3.8) может быть найдено методом последовательных приближений, которые с помощью стохастических интегралов определяются как

$$\Delta\eta_{\tau(n)} = \int_{0}^{\tau} a(x+\Delta\eta_{\vartheta(n-1)}, t+\vartheta)d\vartheta + \int_{0}^{\tau} b(x+\Delta\eta_{\vartheta(n-1)}, t+\vartheta)d\mu(\vartheta), \quad n = 1,2,...$$

Так как $a(\eta,t)$ и $b(\eta,t)$ - дифференцируемые функции, то, учитывая малость τ, подынтегральные функции можно линеаризовать, записав их в виде

$$a(x+\Delta\eta_{\vartheta}, t+\vartheta) \cong a(x,t+\vartheta) + a'_x(x,t+\vartheta)\Delta\eta_{\vartheta}$$

Схема последовательных приближений примет вид

$$\Delta\eta_{\tau(n)} = \int_0^\tau \left\{ a(x,t+\vartheta) + a'_x(x,t+\vartheta)\Delta\eta_{\vartheta(n-1)} \right\} d\vartheta$$

$$\int_0^\tau \left\{ b(x,t+\vartheta) + b'_x(x,t+\vartheta)\Delta\eta_{\vartheta(n-1)} \right\} d\mu(\vartheta), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Тогда, полагая $\Delta\eta_{\tau(0)} = 0$, в первом приближении получим

$$\Delta\eta_{\tau(1)} = \int_0^\tau a(x,t+\vartheta)d\vartheta + \int_0^\tau b(x,t+\vartheta)d\mu(\vartheta)$$

Во втором приближении

$$\Delta\eta_{\tau(2)} = \int_0^\tau \left\{ a(x,t+\vartheta) + a'_x(x,t+\vartheta)\left[\int_0^\vartheta a(x,t+\vartheta_1)d\vartheta_1 + \int_0^\vartheta b(x,t+\vartheta_1)d\mu(\vartheta_1) \right] \right\} d\vartheta$$

$$\int_0^\tau \left\{ b(x,t+\vartheta) + b'_x(x,t+\vartheta)\left[\int_0^\vartheta a(x,t+\vartheta_1)d\vartheta_1 + \int_0^\vartheta b(x,t+\vartheta_1)d\mu(\vartheta_1) \right] \right\} d\mu(\vartheta)$$

Имея в виду, что при вычислении коэффициентов сноса и диффузии нас интересуют для $\langle \Delta\eta_\tau \rangle$, $\langle (\Delta\eta_\tau)^2 \rangle$ при малых τ только члены не выше первого порядка по τ, в первом приближении получим

$$\langle \Delta\eta_{\tau(1)} \rangle = a(x,t)\tau + o(\tau), \quad \langle \Delta\eta^2_{\tau(1)} \rangle = 2\pi N_0 b^2(x,t)\tau + o(\tau), \quad \langle \Delta\eta^3_{\tau(1)} \rangle = o(\tau) \tag{3.9}$$

Во втором приближении, учитывая, что $\langle d\mu(\vartheta)d\mu(\vartheta_1) \rangle = 2\pi N_0 \delta(\vartheta_1 - \vartheta)d\vartheta d\vartheta_1$, и, что интеграл от дельта-функции дает на границе интервала значение $1/2$, получим

$$\langle \Delta\eta_{\tau(2)} \rangle = \left[a(x,t) + \pi N_0 b'_x(x,t)b(x,t) \right]\tau + o(\tau), \quad \langle \Delta\eta^2_{\tau(2)} \rangle = 2\pi N_0 b^2(x,t)\tau + o(\tau), \tag{3.10}$$

$$\langle \Delta\eta^3_{\tau(2)} \rangle = o(\tau)$$

Третье приближение и приближения более высокого порядка не вносят изменений в члены порядка τ, так что, разделив на τ и переходя к пределу $\tau \to 0$, для коэффициента сноса получим

$$K_1(x,t) = \lim_{\tau\to 0} \frac{\langle \Delta\eta_\tau \rangle}{\tau} = a(x,t) + \pi N_0 b'_x(x,t)b(x,t), \tag{3.11}$$

для коэффициента диффузии -

$$K_2(x,t) = \lim_{\tau\to 0} \frac{\langle (\Delta\eta_\tau)^2 \rangle}{\tau} = 2\pi N_0 b^2(x,t), \tag{3.12}$$

(высшие кинетические коэффициенты равны нулю: $K_m(x,t) = 0, \quad m = 3,4,\ldots$.)

В задачах, в которых коэффициент $b(\eta,t)$ не зависит от η, член с производной в (3.11) отсутствует и мы получаем $K_1(x,t) = a(x,t)$, как это и было в рассмотренном ранее примере.

Таким образом, располагая стохастическим дифференциальным уравнением первого порядка, можно однозначно вычислить коэффициенты сноса и диффузии, а затем составить уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова.

Можно решать и обратную задачу: по заданному уравнению Фоккера—Планка—Колмогорова находить стохастическое дифференциальное уравнение для этого случайного процесса. Если ограничиться уравнениями типа (3.6) со случайным воздействием в виде белого гауссовского шума, то решение будет однозначным. Используя (3.11), (3.12) находим

$$b(x,t)=\sqrt{\frac{K_2(x,t)}{2\pi N_0}}\ ,\ a(x,t)=K_1(x,t)-\frac{1}{4}\frac{\partial K_2(x,t)}{\partial\eta}$$

Произвольное уравнение Фоккера—Планка—Колмогорова (2.3), следовательно, эквивалентно стохастическому уравнению

$$\frac{d\boldsymbol{\eta}}{dt}=K_1(\boldsymbol{\eta},t)-\frac{1}{4}\frac{\partial K_2(\boldsymbol{\eta},t)}{\partial\boldsymbol{\eta}}+\sqrt{\frac{K_2(\boldsymbol{\eta},t)}{2\pi N_0}}\boldsymbol{\xi}(t) \tag{3.13}$$

Стохастическому уравнению какого-либо более сложного вида может быть поставлено в соответствие уравнение (3.13), имеющее то же самое уравнение Фоккера—Планка—Колмогорова. Такие уравнения можно назвать стохастически эквивалентными.

Этим приемом упрощения уравнения случайного процесса путем замены его на эквивалентное пользуются при решении практических задач.

7.4. Стационарное решение уравнений Фоккера-Планка-Колмогорова.

Выбранные начальные и граничные условия однозначно определяют плотность распределения $f(x,t)$ как решение уравнения Фоккера — Планка

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}\left[K_1(x,t)f(x,t)\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[K_2(x,t)f(x,t)\right]=-\frac{\partial G(x,t)}{\partial x}$$

где, согласно определению потока вероятности (2.4),

$$G(x,t)=K_1(x,t)f(x,t)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[K_2(x,t)f(x,t)\right]$$

В том случае, когда коэффициенты $K_1(x,t), K_2(x,t)$ не зависят от времени, распределение $f(x,t)$ с течением времени обычно стремится к стационарному распределению $f_{cm}(x)$, которое не зависит от начального распределения $f(x,t_0)$. Стационарное распределение уже не меняется со временем:

$$\frac{\partial f_{cm}(x)}{\partial t}=0 \tag{4.1}$$

Учитывая исчезновение временной производной $f_{cm}(x)$, получаем, что поток вероятности

$$G_{cm}(x)=G_{cm}=const \tag{4.2}$$

является постоянным как по сечению, так и по времени. При фиксированном значении G_{cm} равенство (4.2) есть линейное дифференциальное уравнение относительно $f_{cm}(x)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[K_2(x)f_{cm}(x)\right]-2K_1(x)f_{cm}(x)=-2G_{cm}$$

Общее решение этого уравнения может быть получено обычными методами. Если обозначить $K_2(x)f_{cm}(x)=v(x)$, то указанное уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x} - 2\frac{K_1(x)}{K_2(x)}v(x) = -2G_{cm} \tag{4.3}$$

Если в качестве граничных условий берутся условия (2.9)

$$G(-\infty, t) = G(\infty, t) = 0$$

или (2.9')

$$G(x_1, t) = 0, \quad G(x_2, t) = 0\,,$$

т.е. $G_{cm} = 0$, то решение уравнения (4.3) легко находится и $f_{cm}(x)$ определяется выражением

$$f_{cm}(x) = \frac{C}{K_2(x)}\exp\left[2\int_{x_0}^{x}\frac{K_1(x')}{K_2(x')}dx'\right] \tag{4.4}$$

Здесь C — произвольная постоянная интегрирования. Предел интегрирования x_0 также произволен. Однако в решении (4.4) в сущности имеется лишь одна произвольная постоянная, поскольку изменение x_0 эквивалентно изменению C. Выбор постоянной C (при выбранном x_0) определяется из условия нормировки.

Итак, зная функции $K_1(x), K_2(x)$, можно непосредственно написать формулу для плотности стационарного распределения. Это показывает эффективность стохастических методов, основанных на использовании уравнений Фоккера-Планка – Колмогорова.

Приведем простой пример. Пусть процесс $\eta(t)$ описывается стохастическим дифференциальным уравнением

$$\frac{d\eta}{dt} = k\eta(a^2 - \eta^2) + \xi(t) \tag{4.5}$$

где $k > 0, a = const$, $\xi(t)$ - гауссовский белый шум со спектральной плотностью N_0. Уравнение (4.5) представляет собой частный случай уравнения (3.6), поэтому в соответствии с (3.11), (3.12) имеем

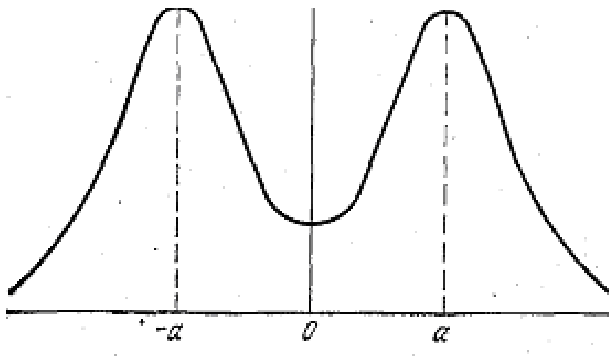
$$\begin{aligned} K_1(\eta, t) &= a(\eta, t) = k\eta(a^2 - \eta^2) \\ K_2(\eta, t) &= 2\pi N_0 b^2(t) = 2\pi N_0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

После подстановки (4.6) в (4.4) и полагая $x_0 = 0$ получаем

$$f_{cm}(\eta) = C\exp\left[\frac{k}{4\pi N_0}(2a^2\eta^2 - \eta^4)\right] \tag{4.7}$$

где постоянная C определяется из условия нормировки:

$$C\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{k}{4\pi N_0}(2a^2\eta^2 - \eta^4)\right]d\eta = 1$$



Интересно отметить, что характер плотности вероятности (4.7), выражение для которой получено без всяких усилий, оказывается довольно сложным (см. рис.).

7.5. Многомерные непрерывные (диффузионные) марковские процессы.

Понятие непрерывного случайного процесса можно обобщить на многомерный случай. Для этого необходимо совокупность одномерных случайных функций $\eta_1(t),\ldots,\eta_N(t)$, называемых компонентами, рассматривать как случайный вектор $\vec{\eta}(t)$. Обозначая возможные значения $\vec{\eta}(t)$ в некоторый момент времени t_m через $\vec{x}_m$, многомерную (размерностью NM) плотность вероятности такого процесса можно записать в виде

$$f_{NM}(\vec{x}_1,\ldots;\vec{x}_M;t_1,\ldots,t_M) \tag{5.1}$$

Если плотность распределения вектора $\vec{\eta}(t_1)$ в будущий момент времени t_1, вычисленная при условии, что в настоящий момент t_2 значение вектора $\vec{\eta}(t_2)$ известно, не зависит от того, какие величины принимал вектор $\vec{\eta}(t_3)$ в прошлые моменты времени $t_3 < t_2$, то многомерный случайный процесс $\vec{\eta}(t)$ называется марковским.

Как и в одномерном случае, многомерная плотность вероятности (7.1) выражается через произведение плотности вероятности $f_N(\vec{x}_M,t_M)$ и плотностей вероятности перехода $p_{t_{m-1},t_m}(\vec{x}_{m-1},\vec{x}_m)$.

Если каждый компонент марковского процесса $\vec{\eta}(t)$ представляет собой непрерывную случайную функцию, то процесс $\vec{\eta}(t)$ называется многомерным непрерывным марковским процессом или, короче, **многомерным диффузионным процессом.** Специально подчеркнем, что **определение многомерного диффузионного процесса не требует марковости каждого компонента**.

Важнейшая характеристика марковского процесса — плотность вероятности перехода — в многомерном случае также подчиняется прямому и обратному уравнениям Колмогорова. Прямое уравнение будем называть уравнением Фоккера — Плавка — Колмогорова.

Многомерное уравнение Фоккера—Планка—Колмогорова для одновременной плотности вероятности состояний $f(\vec{x},t)$ имеет вид:

$$\frac{\partial f(\vec{x},t)}{\partial t} = -\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[K_\alpha(\vec{x},t)\, f(\vec{x},t)\right] + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\left[K_{\alpha\beta}(\vec{x},t)\, f(\vec{x},t)\right] \tag{5.2}$$

где кинетические коэффициенты $K_\alpha(\vec{x},t),\quad K_{\alpha\beta}(\vec{x},t)$ определяются формулами

$$K_\alpha(\vec{x},t) = \lim_{\tau\to 0} \frac{\langle \eta_{\alpha\tau} - x_\alpha \rangle}{\tau}$$

$$K_{\alpha\beta}(\vec{x},t) = \lim_{\tau\to 0} \frac{\langle (\eta_{\alpha\tau} - x_\alpha)(\eta_{\beta\tau} - x_\beta) \rangle}{\tau}.$$

7.6. Многомерные непрерывные марковские процессы, определяемые системой стохастических уравнений первого порядка.

Результаты, полученные для одномерных динамических систем первого порядка, обобщаются на случай системы стохастических дифференциальных уравнений первого порядка с гауссовскими аддитивными воздействиями, обладающими дельта-корреляцией по времени.

В частном случае, когда N -мерный случайный процесс $\vec{\eta}(t) = \{\eta_\alpha(t)\},\ \alpha = 1,\ldots,N$ удовлетворяет системе стохастических уравнений

$$\frac{d\eta_\alpha(t)}{dt} = a_\alpha(\vec{\eta},t) + \sum_{\beta=1}^{N} b_{\alpha\beta}(\vec{\eta},t)\xi_\beta(t) \tag{6.1}$$

где $a_\alpha(\vec{x},t)$, $b_{\alpha\beta}(\vec{x},t)$ - детерминированные дифференцируемые функции $(\vec{x},t)$, а $\xi_\beta(t)$ - независимые гауссовские случайные воздействия, имеющие свойства белого шума, с нулевыми средними значениями и одинаковыми спектральными плотностями N_0:

$$\langle \boldsymbol{\xi_\alpha}(t)\boldsymbol{\xi_\beta}(t+\boldsymbol{\tau}) \rangle = 2\pi N_0 \boldsymbol{\delta_{\alpha\beta}\delta(\tau)} \tag{6.2}$$

коэффициенты сноса и диффузии определяются соотношениями

$$\begin{gathered} K_\alpha(\vec{x},t) = a_\alpha(\vec{x},t) + \pi N_0 \sum_{\gamma=1}^{N} b_{\alpha\gamma}(\vec{x},t) \sum_{\beta=1}^{N} \frac{\partial b_{\beta\gamma}(\vec{x},t)}{\partial x_\beta} \\ K_{\alpha\beta}(\vec{x},t) = 2\pi N_0 \sum_{\gamma=1}^{N} b_{\alpha\gamma}(\vec{x},t) b_{\beta\gamma}(\vec{x},t) \end{gathered} \tag{6.3}$$

С помощью соотношений (6.3) мы можем перейти от многомерного уравнения Фоккера—Планка–Колмогорова к системе стохастических уравнений (6.1), если разрешить их относительно функций $a_\alpha(\vec{x},t)$, $b_{\alpha\beta}(\vec{x},t)$.

Как было выяснено ранее, одномерные марковские процессы не дифференцируемы. В то же время характерной особенностью реальных процессов является их дифференцируемость, вызываемая инерционностью реальных устройств. В связи с этим возникает вопрос о создании математической модели, которая полнее отражала бы свойства реальных процессов. Такую модель можно создать на основе многомерных диффузионных процессов.

Исследование одномерного сл. процесса $\eta(t)$, заданного обыкновенным дифференциальным уравнением n -того порядка со случайным воздействием $\xi(t)$

$$\frac{d^n\eta}{dt^n}+a_1(\eta)\frac{d^{n-1}\eta}{dt^{n-1}}+...+a_n(\eta)\eta=\xi(t) \qquad (6.4)$$

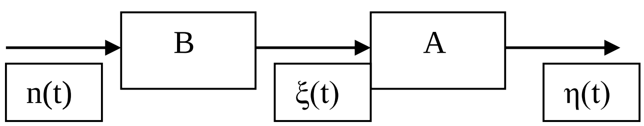
можно свести к исследованию многомерного процесса, заданного системой стохастических уравнений первого порядка

$$\frac{d\eta_1}{dt}=\eta_2,\ldots\ldots\ldots.,\frac{d\eta_{n-1}}{dt}=\eta_n \qquad (6.5)$$

$$\frac{d\eta_n}{dt}=-\sum_{k=1}^{n}a_k(\eta_1)\eta_{n-k+1}+\xi(t)\text{, где } \eta_1=\eta$$

Случайный процесс $\eta(t)$ при $n>1$ не является марковским, даже если $\xi(t)$ - белый шум. Но, если $\xi(t)$ - белый шум, то процесс $\eta(t)$, как видно из (9.5), можно исследовать как компонент многомерного диффузионного процесса

В связи с этим, приведем простую иллюстрацию того, как немарковский процесс может быть приведен к марковскому с более высоким числом измерений. Пусть имеется некоторая система А M-того порядка, на вход которой поступает случайное воздействие $\xi(t)$ со свойствами, далекими от свойств белого шума.



Если подобрать такую систему B L-го порядка, на выходе которой под воздействием белого шума $n(t)$ образуется колебание $\xi(t)$, то $\eta(t)$ можно рассматривать как компонент $M+L$-мерного диффузионного процесса и применять к его исследованию теорию марковских процессов.

7.7. Приложения теории марковских случайных процессов.

7.7.1. Задачи, связанные с достижением границ

Прямое и обратное уравнения Колмогорова эквивалентны. Первое более удобно для решения задачи эволюции статистических характеристик динамической системы во времени. Второе же более удобно для изучения статистических характеристик, связанных с начальными условиями, таких, например, как вероятность пребывания процесса $\vec{\eta}(t)$ в какой либо области пространства V, время достижения ее границы Γ и т. п.. В этом случае вероятность пребывания случайного процесса $\vec{\eta}(t)$ в области пространства V определяется интегралом $P(t;\vec{x}_0,t_0)=\int\limits_V p_{t,t_0}(\vec{x},\vec{x}_0)d\vec{x}$, для которого из обратного уравнения Колмогорова получаем уравнение

$$\frac{\partial P(t;\vec{x}_0,t_0)}{\partial t_0} = -\sum_{\alpha=1}^{N} K_\alpha(\vec{x}_0,t)\frac{\partial P(t;\vec{x}_0,t_0)}{\partial x_{0\alpha}} - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{N} K_{\alpha\beta}(\vec{x}_0,t)\frac{\partial^2 P(t;\vec{x}_0,t_0)}{\partial x_{0\alpha}\partial x_{0\beta}}$$

с начальным условием $P(t_0;\vec{x}_0 \in V\setminus\Gamma, t_0)=1$ (Γ - граница области V). Краевые условия для этого уравнения, которые определяются характером задачи, имеют вид $P(t;\vec{x}_0 \in \Gamma, t_0)=0,\ t \ge t_0$.

Остановимся на одномерном случае. Пусть областью рассмотрения будет отрезок $x_1 < x < x_2$. Предположим, что задано начальное положение

$$\eta(t_0) = x_0, \quad x_1 < x_0 < x_2 \tag{7.1}$$

Будем интересоваться временем $t_{дос}$, когда функция $\eta(t)$ в первый раз достигает граничного значения $x = x_1$ или $x = x_2$. Для каждой реализации первое достижение происходит в разное время, поэтому время «жизни»

$$t_{дос} - t_0 = \tau_{дос}$$

является случайной величиной. Поставим своей целью вычислить среднее время «жизни» $\langle \tau_{дос} \rangle$ При этом мы ограничимся случаем однородного марковского процесса, когда коэффициенты $K_1(x,t),\ K_2(x,t)$ не зависят от времени.

В этом случае вероятность перехода зависит только от разности $t - t_0 = \tau$ $p_{t-t_0}(x,x_0) = p_\tau(x,x_0)$ и в области $x_1 < x < x_2$ удовлетворяет обратному уравнению Колмогорова (2.7) в виде

$$\frac{\partial p_\tau(x,x_0)}{\partial \tau} = K_1(x_0)\frac{\partial p_\tau(x,x_0)}{\partial x_0} + \frac{K_2(x_0)}{2}\frac{\partial^2 p_\tau(x,x_0)}{\partial x_0^2} \tag{7.2}$$

с начальным условием

$$p_\tau(x,x_0)\big|_{\tau=0} = \delta(x - x_0)$$

Граничные условия в рассматриваемой задаче определяются исходя из того, что вероятность перехода учитывает только те траектории, которые **ни разу** не достигли границ, т.е. траектории случайного процесса $\eta(t)$, как только они в **первый раз** достигнут границы $x = x_1$ или $x = x_2$, исключаются.

Тогда граничные условия в силу того, что одномерный марковский процесс недифференцируем, т.е. его производная имеет бесконечную дисперсию, принимают вид

$$p_\tau(x,x_0) = 0 \ \textit{при}\ x = x_1, x_2;\ \tau \ge 0$$

Кроме того,

$$p_\tau(x,x_0) = 0 \ \textit{при}\ x_0 = x_1, x_2;\ \tau \ge 0,$$

так как в этом случае достижение границы произойдет в первый же момент и все реализации выпадут.

Вероятность того, что в момент t на отрезок от x до $x + dx$ попадает значение $\eta(t)$ траектории, ни разу не достигнувшей границы в течение всего времени от t_0 до t, равна

$$dP(\tau, x_0) = p_\tau(x,x_0)dx$$

.

Суммирование таких вероятностей даст вероятность

$$P(\tau, x_0) = \int_{x_1}^{x_2} p_\tau(x, x_0)dx$$

того, что траектория ни разу не достигнет границы за время от t_0 до *t*.
Чтобы найти уравнение, которому удовлетворяет $P(t_0, x_0)$, проинтегрируем обратное уравнение Колмогорова (7.2) по x от x_1 до x_2. Это, очевидно, даст уравнение

$$\frac{\partial P(\tau, x_0)}{\partial \tau} = K_1(x_0)\frac{\partial P(\tau, x_0)}{\partial x_0} + \frac{K_2(x_0)}{2}\frac{\partial^2 P(\tau, x_0)}{\partial x_0^2} \tag{7.3}$$

Начальное условие $P(0, x_0) = 1,\ x_1 < x_0 < x_2$

Граничные условия $P(\tau, x_1) = P(\tau, x_2) = 0$.

Рано или поздно все траектории коснутся границы и мы будем иметь условие на бесконечности

$$P(\infty, x_0) = 0 \tag{7.4}$$

Вероятность того, что первое достижение границы произойдет в течение времени от t_0 до *t* равна

$$Q(\tau_{дос}) = P(0, x_0) - P(\tau_{дос}, x_0) = 1 - P(\tau_{дос}, x_0)$$

Дифференцируя это выражение находим плотность вероятности для времени «жизни»

$$q(\tau_{дос}) = \frac{dQ(\tau_{дос})}{d\tau_{дос}} = -\frac{dP(\tau_{дос}, x_0)}{d\tau_{дос}}$$

Последняя позволяет найти среднее время «жизни»

$$\left\langle \tau_{дос}\left(x_0\right)\right\rangle = \int_0^\infty \tau_{дос} q(\tau_{дос})d\tau_{дос} = -\int_0^\infty \tau_{дос} dP(\tau_{дос}, x_0) = \int_0^\infty P(\tau_{дос}, x_0)d\tau_{дос}$$

Здесь произведено интегрирование по частям и учтено начальное условие и условие (7.4).

Рассмотрим среднее время достижения границ $m(x_0) = \langle \tau_{дос}(x_0)\rangle$ как функцию от начального значения x_0. Чтобы найти уравнение, которому удовлетворяет $m(x_0)$, проинтегрируем уравнение (7.3) по τ от 0 до ∞ и, учитывая начальное условие и условие на бесконечности, будем иметь

$$-1 = K_1(x_0)\frac{\partial m(x_0)}{\partial x_0} + \frac{K_2(x_0)}{2}\frac{\partial^2 m(x_0)}{\partial x_0^2} \tag{7.5}$$

Если исходная точка x_0 находится вблизи границы, то первое достижение границы произойдет немедленно и среднее время достижения будет равно нулю. Это дает следующие краевые условия для уравнения (7.5):

$$m(x_1) = m(x_2) = 0 \tag{7.6}$$

Решение уравнения (7.5) уже может быть записано в общем виде. Заменой $u = \partial m(x_0) / \partial x_0$ оно сводится к линейному уравнению первого порядка

$$\frac{K_2(x_0)}{2} \frac{\partial u}{\partial x_0} + K_1(x_0) u + 1 = 0,$$

решение которого имеет вид

$$u = e^{-\varphi(x_0)} \left[-\int_{x_1}^{x_0} \frac{2e^{\varphi(x)}}{K_2(x)} dx + C_1 \right],$$

где

$$\varphi(x) = 2\int_{x_1}^{x} \frac{K_1(x)}{K_2(x)} dx$$

Отсюда, переходя к переменной $m(x_0)$, получаем

$$m(x_0) = \int_{x_1}^{x_0} e^{-\varphi(y)} \left[-\int_{x_1}^{y} \frac{2e^{\varphi(x)}}{K_2(x)} dx \right] dy + C_1 \int_{x_1}^{x_0} e^{-\varphi(y)} dy + C_2 \qquad (7.7)$$

Значения C_1 и C_2 находим из краевых условий (7.6). Полагая $x_0 = x_1$ получаем $C_2 = 0$, полагая $x_0 = x_2$ получаем

$$C_1 = \int_{x_1}^{x_2} e^{-\varphi(y)} \left[\int_{x_1}^{y} \frac{2e^{\varphi(x)}}{K_2(x)} dx \right] dy \Bigg/ \int_{x_1}^{x_2} e^{-\varphi(y)} dy .$$

Решение (7.7) позволяет находить среднее время достижения границ при произвольном распределении начального положения траектории минуя решение нестационарного уравнения Фоккера—Планка-Колмогорова. Для этого надо провести усреднение $m(x_0)$ по начальному распределению $f_0(x)$:

$$\left\langle \tau_{дос} \right\rangle_{x_0} == \int_{x_1}^{x_2} m(x_0) f(x_0) dx_0$$

Рассмотрим два примера, для которых мы определили коэффициенты сноса и диффузии на предыдущей лекции.

1) Винеровский процесс. Для него стохастическое уравнение имеет вид

$$\frac{d\eta}{dt} = \xi(t),$$

где $\xi(t)$ - гауссовский белый шум со спектральной плотностью N_0. Коэффициент сноса $K_1(x_0) = 0$, коэффициент диффузии $K_2(x_0) = K_2 = 2\pi N_0$. При этом $\varphi(x) = 0$ и

$$m(x_0)=\frac{(x_2-x_0)(x_0-x_1)}{K_2}$$

2) Линейная система первого порядка, которая определяется стохастическим уравнением

$$\frac{d\eta}{dt}+\beta\eta=\gamma\xi(t),$$

где $\xi(t)$ - гауссовский белый шум со спектральной плотностью N_0. Коэффициент сноса

$$K_1(x)=-x\beta$$

коэффициент диффузии

$$K_2(x)=K_2=2\pi N_0\gamma^2$$

Тогда $\varphi(x)=-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}$, где $\sigma^2=\dfrac{K_2}{2\beta}$ - дисперсия процесса в стационарном режиме.

Для среднего времени достижения границ получаем

$$m(x_0)=\frac{\sqrt{2\pi}}{\beta}\left\{J\left(\frac{x_1}{\sigma},\frac{x_0}{\sigma}\right)\int\limits_{x_0/\sigma}^{x_2/\sigma}\left[\Phi(y)-\Phi\left(\frac{x_1}{\sigma}\right)\right]e^{\frac{y^2}{2}}dy+\right.$$

$$\left.+J\left(\frac{x_0}{\sigma},\frac{x_2}{\sigma}\right)\int\limits_{x_0/\sigma}^{x_1/\sigma}\left[\Phi(y)-\Phi\left(\frac{x_1}{\sigma}\right)\right]e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right\}J^{-1}\left(\frac{x_1}{\sigma},\frac{x_2}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{z}\exp(-t^2/2)dt$ - интеграл вероятностей, $J(z_1,z_2)=\int\limits_{z_1}^{z_2}\exp(t^2/2)dt$

В более общих случаях, конечно, результат более сложен, но всегда может быть выражен через несколько интегралов.

7.10.2. Статистическое описание явления переброса.

Рассмотрим стохастическую нелинейную систему с затуханием, описываемую уравнением

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\gamma\frac{dx(t)}{dt}+\lambda x(t)+\beta x^3(t)=\xi(t),\quad \gamma,\beta>0 \qquad (7.12)$$

где $\xi(t)$ - гауссовский белый шум со спектральной плотностью N_0. Уравнение (7.12) можно переписать в виде стохастической системы дифференциальных уравнений первого порядка для функций $x(t)$ и $v(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$ придав ей гамильтоновую форму:

$$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{\partial H(x,v)}{\partial v},\quad \frac{dv(t)}{dt}=-\frac{\partial H(x,v)}{\partial x}-\gamma v+\xi(t) \qquad (7.13)$$

где функция Гамильтона $H(x,v)=\dfrac{v^2}{2}+U(x),\quad U(x)=\dfrac{\lambda x^2}{2}+\dfrac{\beta x^4}{4}$.

Уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова для совместной плотности вероятностей $f(x,v,t)$ имеет вид

$$\frac{\partial f(x,v,t)}{\partial t} = -\frac{\partial H(x,v)}{\partial v}\frac{\partial f(x,v,t)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left[\left(\frac{\partial H(x,v)}{\partial x} + \gamma v\right) f(x,v,t)\right] + \pi N_0 \frac{\partial^2 f(x,v,t)}{\partial v^2} \qquad (7.14)$$

Стационарное решение этого уравнения, как нетрудно убедиться прямой подстановкой имеет вид распределения Максвелла-Больцмана.

$$f(x,v) = C \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{\pi N_0} H(x,v)\right) = C \cdot \exp\left[-\frac{\gamma}{\pi N_0}\left(\frac{v^2}{2} + U(x)\right)\right], \qquad (7.15)$$

постоянная C определяется из условия нормировки. При достаточно большом коэффициенте затухания γ стационарное (равновесное) распределение (7.15) устанавливается в две стадии. Сперва достаточно быстро устанавливается гауссово распределение по скорости

$$f(v) = C_v \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{\pi N_0}\frac{v^2}{2}\right)$$

- максвелловское распределение, а затем уже значительно медленнее устанавливается негауссово распределение по пространственной координате

$$f(x) = C_x \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{\pi N_0} U(x,v)\right) = C_x \cdot \exp\left[-\frac{\gamma}{\pi N_0}\left(\frac{\lambda x^2}{2} + \frac{\beta x^4}{2}\right)\right] \qquad (7.16)$$

- распределение Больцмана - и эти два распределения не коррелируют между собой.

Стационарное распределение вероятностей для процесса $x(t)$ при $\lambda > 0$ имеет один максимум в точке $x = 0$, соответствующей положению устойчивого равновесия.

Рассмотрим случай $\lambda < 0$. Тогда распределение (7.16) имеет одинаковые максимумы в точках устойчивого равновесия $x = \pm a,\ a = \sqrt{|\lambda|/\beta}$ и минимум в точке неустойчивого равновесия $x = 0$ и изображено на рисунке (см. раздел 7.4)

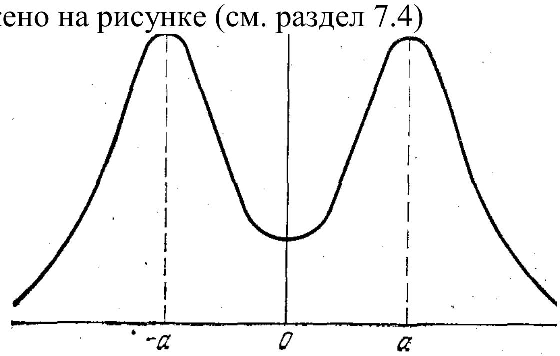


Рис. 3.11.

Стадия установления равновесия по x описывается стохастическим уравнением, вытекающим из (7.13)

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial U(x)}{\partial x} + \frac{1}{\gamma}\xi(t) \qquad (7.17)$$

а соответствующее уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова для распределения $f(x,t)$ с учетом того, что $K_1(x) = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial U(x)}{\partial x}, \quad K_2 = \frac{2\pi N_0}{\gamma^2}$ имеет вид

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}=\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U(x)}{\partial x}f(x,t)\right)+\frac{\pi N_0}{\gamma^2}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} \tag{7.18}$$

Стационарное распределение вероятностей (7.16) соответствует усреднению по ансамблю реализаций процесса $\xi(t)$. Если же имеется одна реализация, то система с вероятностью $1/2$ придет в одно из положений, соответствующих максимуму распределения. В этом случае будет формироваться распределение вероятностей (усреднение по времени) в окрестности одного из положений максимума. Однако благодаря существованию больших значений функций $\xi(t)$ система будет переброшена из окрестности одного максимума в окрестность другого максимума по прошествии некоторого времени τ (тем большего, чем меньше N_0). Таким образом распределение вероятностей (7.16) будет формироваться только за время $t >> \tau$.

Определим среднее время, за которое система перейдет из одного наиболее вероятного состояния ($x=-a$) в другое ($x=a$). Эта задача сводится к рассмотренной ранее задаче достижения границ при условии, что верхняя граница $x_2=a$ и нижняя граница $x_1\to-\infty$. Среднее время достижения границ $m(x_0)$ из начальной точки $x_0<a$ определяется уравнением (7.5), которое с учетом (7.18) принимает вид

$$-1=-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial U(x_0)}{\partial x_0}\frac{\partial m(x_0)}{\partial x_0}+\frac{\pi N_0}{\gamma^2}\frac{\partial^2 m(x_0)}{\partial x_0^2} \tag{7.19}$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее граничным условиям $m(x_1\to-\infty)\to 0,\quad m(x_2=a)=0$, как нетрудно убедиться, имеет вид

$$m(x_0)=\frac{\gamma^2}{\pi N_0}\int_{x_0}^{a}dy\int_{-\infty}^{y}\exp\left\{\frac{\gamma}{\pi N_0}\left[U(y)-U(y')\right]\right\}dy' \tag{7.20}$$

При $x_0=-a$ это решение в силу четности функции $U(y)$ принимает вид

$$m(x_0=-a)=\frac{\gamma^2}{\pi N_0}\left\{\int_0^a\exp\left[\frac{\gamma}{\pi N_0}U(y)\right]dy\right\}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{\gamma}{\pi N_0}U(y)\right]dy\right\} \tag{7.21}$$

Оценивая интегралы в (7.21) методом перевала получим

$$m(x_0=-a)\approx\sqrt{2}\pi\frac{\gamma}{|\lambda|}\exp\left(\frac{\gamma}{\pi N_0}\frac{\lambda^2}{4\beta}\right)$$

т.е. среднее время перехода растет экспоненциально с уменьшением интенсивности флуктуаций.

7.10.3. Задача оценки состояния марковской системы по результатам измерений

Во многих областях исследований встречаются задачи, которые можно свести к следующей математической задаче.

Пусть для многомерной марковской системы с вектором состояний $\vec{\eta}(t)=\left(\eta_1(t),...,\eta_N(t)\right),\, t\ge t_0$ известны:

начальная (априорная) плотность вероятности $f_0(\vec{x}_0,t_0)$, переходная плотность вероятности $p_{t_m,t_{m-1}}(\vec{x}_m,\vec{x}_{m-1}),\ m=1,...M-1$,

условная плотность вероятности $f\left(\vec{y}_m/\vec{x}_m\right)$ для независимо измеряемых в моменты времени $t_m,\ m=0,...M-1$ величин $\vec{y}_m=\left(y_{1m},...,y_{Km}\right)$, связанных с $\vec{x}_m$.

Для вероятностной системы, описываемой дифференциальными уравнениями со случайной правой частью, переходная плотность вероятности подчиняется уравнениям Колмогорова.

Требуется найти некоторую оптимальную оценку траектории (изменения состояния) системы $\vec{x}_0,\vec{x}_1,...,\vec{x}_{M-1}$ по результатам измерений $\vec{y}_0,\vec{y}_1,...,\vec{y}_{M-1}$.

Задача решается в два этапа. На первом этапе находят выражение для условной плотности вероятности

$$f(\vec{x}_0,\vec{x}_1,...,,\vec{x}_{M-1}/\vec{y}_0,...,\vec{y}_{M-1})=\frac{f(\vec{x}_0,\vec{x}_1,...,,\vec{x}_{M-1},\vec{y}_0,...,\vec{y}_{M-1})}{f(\vec{y}_0,\vec{y}_1,...,\vec{y}_{M-1})}=$$

$$=\frac{f(\vec{x}_0,\vec{x}_1,...,,\vec{x}_{M-1},\vec{y}_0,\vec{y}_1,...,\vec{y}_{M-1})}{\int...\int f(\vec{x}_0,\vec{x}_1,...,,\vec{x}_{M-1},\vec{y}_0,\vec{y}_1,...,\vec{y}_{M-1})d\vec{x}_0d\vec{x}_1...d\vec{x}_{M-1}}=$$

$$A_M\left(\left\{\vec{y}_m\right\}\right)f(\vec{y}_0,...,\vec{y}_{M-1}/\vec{x}_0,\vec{x}_1,...,,\vec{x}_{M-1})f(\vec{x}_0,\vec{x}_1,...,,\vec{x}_{M-1})= \qquad (10.21)$$

$$A_M\left(\left\{\vec{y}_m\right\}\right)\left[\prod_{m=0}^{M-1}f(\vec{y}_m/\vec{x}_m)\right]\left[\prod_{m=1}^{M-1}p_{t_m,t_{m-1}}(\vec{x}_m,\vec{x}_{m-1})\right]f_0(\vec{x}_0,t_0)$$

$$A_M\left(\left\{\vec{y}_m\right\}\right)=\left[\int...\int f(\vec{x}_0,\vec{x}_1,...,,\vec{x}_{M-1},\vec{y}_0,\vec{y}_1,...,\vec{y}_{M-1})d\vec{x}_0d\vec{x}_1...d\vec{x}_{M-1}\right]^{-1}$$

Эта условная плотность вероятности является апостериорной плотностью вероятности. Оптимальную оценку траектории системы $\vec{x}_0,\vec{x}_1,...,\vec{x}_{M-1}$ можно найти исходя из критерия максимума апостерионой вероятности, который после логарифмирования (10.21) принимает вид

$$\max_{\vec{x}_0,\vec{x}_1,...,\vec{x}_{M-1}}\left\{\ln f(\vec{y}_0/\vec{x}_0)+\ln f_0(\vec{x}_0,t_0)+\sum_{m=1}^{M-1}\left[\ln f(\vec{y}_m/\vec{x}_m)+\ln p_{t_m,t_{m-1}}(\vec{x}_m,\vec{x}_{m-1})\right]\right\} \qquad (10.22)$$

Второй этап – решение задачи оптимизации для конкретного вида плотностей вероятности. Самый общий метод итерационного решения этой задачи – пошаговый (эскалаторный, рекуррентный, прогонки) с возвратом.

8. Случайные процессы и задачи обнаружения, различения и оценки параметров сигналов в присутствии шумов

8.1. Некоторые основные понятия статистической теории решений

Далее мы рассмотрим основные идеи решения классических задач обнаружения, различия и оценки параметров сигналов при наличии случайных помех.

Предположим, что мы получили конечномерную выборку $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ при наблюдении случайного процесса $\xi(t)$. В случае обнаружения сигналов на основании этой выборки мы должны принять решение о наличии или отсутствии сигнала. В соответствии с терминологией статистической теории решений мы должны сделать выбор между двумя возможными гипотезами: отсутствия сигнала - H_0 и наличия сигнала - H_1. Используемые для этой цели методы должны обладать тем свойством, что при их многократном применении они в большинстве случаев приводят к правильному заключению.

Распределение вероятностей $F(\vec{x})$ конечномерной выборки $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ зависит от того, какая гипотеза истинна: H_0 ($F_0(\vec{x})$) или H_1 ($F_1(\vec{x})$).

Обычно приходится иметь дело со случаем, когда распределения вероятностей $F_0(\vec{x})$ и $F_1(\vec{x})$ задаются плотностями вероятности $f_0(\vec{x})$ и соответственно $f_1(\vec{x})$. Важную роль при этом играет так называемое отношение правдоподобия, определяемое следующим образом:

$$\Lambda(\vec{x}) = \frac{f_1(\vec{x})}{f_0(\vec{x})},$$

Очень часто гипотеза H_1 не является простой, а может зависеть от вещественного параметра α, причем H_0 может входить в это семейство гипотез, отвечая значению параметра $\alpha = \alpha_0$. Рассмотрим семейство гипотез H_α, каждая из которых (при фиксированном α) полностью характеризуется отвечающим этой гипотезе распределением вероятностей $f(\vec{x};\alpha)$. Пусть α - вещественный параметр, принимающий значения из некоторого интервала А. Требуется построить функцию $\hat{\alpha}(\vec{x})$, зависящую от всей выборки $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и которую можно было бы принять за оценку параметра α.

Важнейшим методом построения оценок является метод максимума правдоподобия $\Lambda(\vec{x},\alpha) = \dfrac{f_1(\vec{x},\alpha)}{f_0(\vec{x})}$, который при условии дифференцируемости плотности распределения в точке максимума состоит в том, что в качестве оценки принимается решение $\hat{\alpha}(\vec{x})$ уравнения

$$\frac{\partial \ln \Lambda(\vec{x};\alpha)}{\partial \alpha} = 0$$

В общем случае это условие является необходимым, но недостаточным и, чтобы найти абсолютный максимум, нужны специальные алгоритмы.

8.2. Наблюдаемые координаты случайного процесса

Информация, получаемая при наблюдении случайного процесса, непосредственно задается в виде одной или нескольких вещественных функций. Для наших целей будет более удобно во всех случаях, когда это возможно, преобразовать эту информацию в форму последовательности ($x_1, x_2,...$) вещественных чисел; тем самым, разумеется, мы переходим к выборочному пространству, имеющему меньшую мощность, чем пространство всех вещественных функций. В задачах, которые мы будем рассматривать в дальнейшем, такой переход всегда оказывается возможным. Числа x_n в дальнейшем будут называться наблюдаемыми координатами процесса. Мы увидим ниже, что удачный выбор этих координат может существенно облегчить решение задач обнаружения и различения сигналов и построения оценок параметров сигналов.

Рассмотрим следующий важный пример. Пусть $\xi(t)$ — нормальный случайный процесс, наблюдаемый в течение конечного временного интервала $T=(a,b)$. Будем считать этот процесс непрерывным в среднеквадратичном; его среднее значение и ковариационную функцию обозначим через $m(t)$ и, соответственно, $B(t_1,t_2)$. Как было показано ранее, в таком случае наш процесс может быть представлен следующей случайной функцией:

$$\xi(t,\omega)=\xi(t,\eta_1,\eta_2,...)=m(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n\psi_n(t)$$

(соотношение выполняется в среднеквадратичном при любом $t\in T$), где $\psi_n(t)$ - ортонормированными собственные функции ($\int\limits_a^b\psi_m(t)\psi_n(t)dt=\delta_{mn}$) интегрального уравнения

$$\int\limits_a^b B(t_1,t_2)\psi_n(t_2)dt_2=\left|\lambda_n\right|^2\psi_n(t_1),$$

а случайные величины $\eta_n=\int\limits_a^b\left[\xi(t,\omega)-m(t)\right]\psi_n(t)dt=x_n-m_n$ -такие, что $\langle\eta_n\rangle=0$, $\langle\eta_m\eta_n\rangle=\ \delta_{mn}\left|\lambda_n\right|^2$

Величины x_n, в силу теоремы о нормальной устойчивости, являются нормально распределенными независимыми СВ.

Как показывает пример, один из удобных способов такого выбора наблюдаемых координат состоит в задании последовательности $(x_1,x_2,...)$ коэффициентов Фурье нашей реализации относительно некоторой полной ортонормированной системы функций. Особенно удобно выбрать в качестве последней систему собственных функций $\{\psi_n(t)\}$. В таком случае очень легко получить распределение вероятностей для любого конечного числа коэффициентов x_n. Зная последовательность $(x_1,x_2,...)$, мы будем знать и всю реализацию, если только мы условимся отождествлять любые две функции, различающиеся не более, чем на множестве нулевой меры. Ясно, что с точки зрения практики последнее условие является вполне допустимым.

8.3. Обнаружение сигналов на фоне белого гауссова шума

Далее формулируются и решаются задачи обнаружения сигналов для случая, когда помехой является аддитивный белый гауссов шум.

Задачу обнаружения рассмотрим применительно к простому бинарному случаю и общему бинарному случаю.

Простое бинарное обнаружение. В простейшей задаче бинарного обнаружения принятый сигнал по одной из гипотез представляет собой полностью известный сигнал $\sqrt{E}s(t)$ на фоне аддитивного белого гауссова шума $\eta(t)$; принятый сигнал по другой гипотезе представляет собой один шум $\eta(t)$. Таким образом,

$$\xi(t) = \begin{cases} \sqrt{E}s(t) + \eta(t), \quad 0 \le t \le T : H_1 \\ \eta(t), \quad 0 \le t \le T : H_0 \end{cases}$$

Для удобства примем, что $\int_0^T s^2(t)dt = 1$, так что E есть энергия принятого сигнала, а также, что спектральная плотность белого шума $N_0 = N_{0f} / 2\pi$, где N_{0f} спектральная плотность, отнесенная к 1 Гц и имеющая размерность $\lfloor N_{0f} \rfloor = \text{\textit{Дж}}$. Задача заключается в том, чтобы наблюдая $\xi(t)$ на интервале [0, T], решить, какая из гипотез H_0 или H_1 — является истинной.

Следующие соображения облегчат нам решение данной задачи.

1. Результат нашего наблюдения есть непрерывное во времени случайное колебание. Первый шаг — свести его к множеству случайных величин (возможно, счетному бесконечному множеству).

2. Одним из методов является разложение в ряд (см. выше):

$$\xi(t) = \underset{K \to \infty}{l.i.m.} \sum_{n=1}^{K} x_n \psi_n(t)$$

Набор коэффициентов ряда обозначим вектором $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_K)$

Этот метод прямо ведет к цели. Если выбрать в качестве первой ортонормированной функции $\psi_1(t) = s(t)$, то первый коэффициент разложения будет нормальной случайной величиной

$$x_1 = \begin{cases} \int_0^T s(t)\left[\sqrt{E}s(t) + \eta(t)\right]dt = \sqrt{E} + \eta_1 \quad : H_1 \\ \int_0^T s(t)\eta(t)dt = \eta_1 \quad : H_0 \end{cases}$$

Остальные x_n $(n > 1)$ — нормальные случайные величины, которые можно получить, используя некоторую *произвольную полную* ортонормированную систему функций

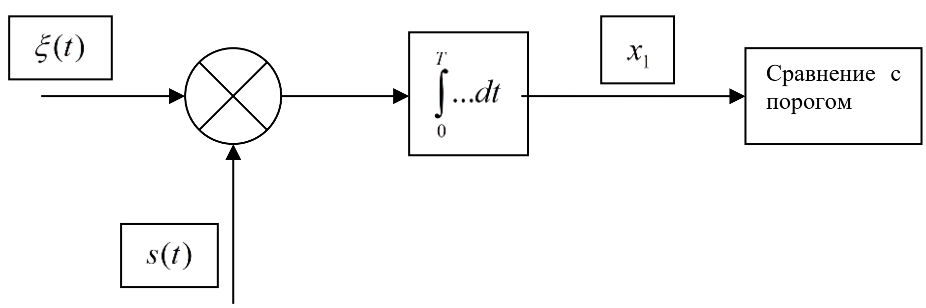
$$x_n = \begin{cases} \int_0^T \psi_n(t)\left[\sqrt{E}s(t)+\eta(t)\right]dt = \eta_n & : H_1 \\ \int_0^T \psi_n(t)\eta(t)dt = \eta_n & : H_0 \end{cases}, \quad n>1$$

Легко проверить, что в случае белого шума

$$\left\langle \eta_i \eta_j \right\rangle = N_{0f}\delta_{ij}$$

Так как η_i, η_j — совместно нормальны, то при $i \neq j$ они - статистически независимы.

Видно, что *только* x_1 зависит от того, какая гипотеза истинна: $M\left[x_1 | H_1\right] = \sqrt{E}$, $M\left[x_1 | H_0\right] = 0$, $D\left[x_1\right] = N_{0f}$. Далее, все x_n $(n>1)$ статистически независимы от x_1. В таких случаях говорят, что x_1 есть достаточная статистика. Поскольку x_n $(n>1)$ не влияют на решение, то нет необходимости их вычислять. Отсюда непосредственно следует эквивалентная структура приемного устройства, которая носит название *корреляционного приемника.*



Он коррелирует входное колебание $\xi(t)$ с хранящейся в памяти приемника копией сигнала $s(t)$. Выходное значение есть x_1, являющееся достаточной статистикой и гауссовой случайной величиной. Отношение правдоподобия имеет вид

$$\Lambda(\vec{x}) = \frac{f_1(\vec{x})}{f_0(\vec{x})} = \Lambda(x_1) = \frac{f_1(x_1)}{f_0(x_1)} = \frac{\exp\left[-\frac{(x_1-\sqrt{E})^2}{2N_{0f}}\right]}{\exp\left[-\frac{x_1^2}{2N_{0f}}\right]} = \exp\left[\frac{\sqrt{E}x_1}{N_{0f}} - \frac{E}{2N_{0f}}\right]$$

Для вынесения решения необходимо сравнить $\Lambda(x_1)$ с порогом C. Если $\Lambda(x_1) > C$, то принимается гипотеза H_1, в противном случае принимается гипотеза H_0. Т.к. $\Lambda(x_1)$ - монотонная функция x_1, то критерий принятия решения можно модифицировать используя

$\ln \Lambda(x_1) = \dfrac{\sqrt{E}x_1}{N_{0f}} - \dfrac{E}{2N_{0f}}$, в результате критерий принятия решения сводится к сравнению с порогом случайной величины $l_1 = \dfrac{\sqrt{E}x_1}{N_{0f}}$, причем

$$M\left[l_1 \middle| H_1\right] = E/N_{0f}\,,\ M\left[l_1 \middle| H_0\right] = 0,\ D\left[l_1 \middle| H_0, H_1\right] = E/N_{0f}\ .$$

Порог выбирается так, чтобы удовлетворялось равенство $\int\limits_C^\infty f_0(x_1)dx_1 = \varepsilon$ (критерий Неймана — Пирсона.)

Прежде чем перейти к более общим задачам, следует подчеркнуть два отдельных момента задачи обнаружения сигналов.

1. Сначала мы сводим принятое колебание к единственному числу, являющемуся точкой в одномерном пространстве решений. Эта процедура физически реализуется операцией корреляции; она инвариантна к выбираемому критерию решения. Указанная инвариантность имеет большое значение, поскольку она позволяет строить устройство обработки сигналов, не связывая себя с выбором какого-либо конкретного критерия.

2. Коль скоро принятое колебание отображено в пространство решений, нам остается учитывать только существенные особенность задачи. Но раз мы перешли к пространству решений, то фактически принятое колебание не имеет уже значения и все физические ситуации, которые приводят к одной и той же картине в пространстве решений, являются для наших целей идентичными. Из нашего простого примера видно, что все сигналы одинаковой энергии отображаются в одну и ту же точку пространства решений, а форма сигнала значения не имеет. Достоверность решения зависит только от отношения $q = E/N_{0f}$ энергии принимаемого сигнала E к спектральной плотности шума N_{0f} (отношения сигнал-шум).

Общая бинарная задача обнаружения на фоне белого гауссова шума. Пусть

$$\xi(t) = \begin{cases} \sqrt{E_1}s_1(t) + \eta(t), & 0 \le t \le T : H_1 \\ \sqrt{E_0}s_0(t) + \eta(t), & 0 \le t \le T : H_0 \end{cases}$$

где $s_0(t)$ и $s_1(t)$ — нормированные, т.е. $\int\limits_0^T s_0^2(t)dt = \int\limits_0^T s_1^2(t)dt = 1$ но *необязательно* ортогональные сигналы. Обозначим коэффициент корреляции между этими сигналами через

$$\rho = \int\limits_0^T s_0(t)s_1(t)dt$$

(Заметим, что $|\rho| \le 1$, так как сигналы являются нормированными.) Если $|\rho| \ne 1$, выберем первые две ортогональные функции следующим образом:

$$\psi_1(t) = s_1(t), \quad 0 \le t \le T$$

$$\psi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left[s_0(t) - \rho s_1(t)\right], \quad 0 \le t \le T$$

$$s_0(t) = \sqrt{1-\rho^2}\psi_2(t) + \rho\psi_1(t)$$

Видно, что $\psi_2(t)$ получается путем вычитания из $s_0(t)$ компоненты $s_0(t)$, коррелированной с $\psi_1(t)$, и нормировки результата. Остальные $\psi_n(t), n > 2$ образуют произвольный ортонормированный ряд, члены которого ортогональны с $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ и выбраны так, что вся система является полной. Коэффициенты ряда (наблюдаемые координаты) равны

$$x_n = \int_0^T \xi(t)\psi_n(t)dt, \quad n = 1,2,...$$

Все x_n, за исключением x_1 и x_2 не зависят от того, какая из гипотез является истинной, и $x_n, n > 2$ статистически независимы от x_1 и x_2. Поэтому адекватным является двумерное пространство решений (x_1, x_2). Случайные величины x_1 и x_2 являются гауссовскими, их средние значения зависят от ситуации и равны

$$M\left[x_n \middle| H_0\right] = \sqrt{E_0}\int_0^T s_0(t)\psi_n(t)dt = s_{0n}, \quad n = 1,2 : H_0$$

$$M\left[x_n \middle| H_1\right] = \sqrt{E_1}\int_0^T s_1(t)\psi_n(t)dt = s_{1n}, \quad n = 1,2 : H_1$$

Компоненты шума вдоль осей x_1 и x_2 независимы и имеют одинаковые нормальные распределения, дисперсия каждой из величин x_n – $\sigma_{x_n}^2 = 2\pi N_0 = N_{0f}, \quad n = 1,2$

$$f_0(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi N_{0f}} \exp\left[-\frac{\sum_{n=1}^{2}(x_n - s_{0n})^2}{2N_{0f}}\right]$$

$$f_1(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi N_{0f}} \exp\left[-\frac{\sum_{n=1}^{2}(x_n - s_{1n})^2}{2N_{0f}}\right]$$

Логарифм отношения правдоподобия принимает вид

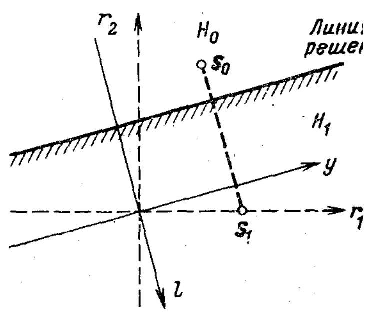
$$\ln\Lambda(x_1, x_2) = -\frac{\sum_{n=1}^{2}\left(x_n - s_{1n}\right)^2}{2N_{0f}} + \frac{\sum_{n=1}^{2}\left(x_n - s_{0n}\right)^2}{2N_{0f}}.$$

В случае равновероятных гипотез порог принятия решения $C = 0$, т.е при $\ln \Lambda(x_1, x_2) > 0$ выбирается гипотеза H_1, в противном случае - гипотеза H_0. В соответствии с этим критерием выбирается та гипотеза H_k, для которой величина

$$\sum_{n=1}^{2} \left(x_n - s_{kn}\right)^2 = \left(\vec{x} - \vec{s}_k\right)^2, \quad k = 0{,}1$$

минимальна. Этот критерий имеет очевидную геометрическую интерпретацию: выбирается та гипотеза H_k, для которой расстояние в пространстве решений между точкой наблюдения $\vec{x} = (x_1, x_2)$ и соответствующей сигнальной точкой $\vec{s}_k = (s_{k1}, s_{k2})$ меньше. Поэтому пространство решений разделяется на две части прямой линией, перпендикулярной отрезку $(\vec{s}_0, \vec{s}_1)$ и проведенной через его середину. Этот же результат мы получим, если преобразуем критерий отношения правдоподобия к виду

$$\vec{x}\left(\vec{s}_1 - \vec{s}_0\right) - \frac{1}{2}(\vec{s}_1^{\,2} - \vec{s}_0^{\,2}) \begin{cases} > 0, H_1 \\ \le 0, H_0 \end{cases}$$



Пространство решений.

Эти рассуждения можно прямо распространить на случай различения *M* сигналов.

8.4. Оценка параметров сигналов в присутствии белого гауссова шума.

Для случая аддитивного белого шума $\eta(t)$ с нулевым средним значением и спектральной плотностью $N_0 = N_{0f} / 2\pi$ принятое колебание можно записать в виде

$$\xi(t) = \alpha s(t, \vec{\beta}) + \eta(t), \quad 0 \le t \le T ,$$

где $s(t, \vec{\beta})$, как и раньше, имеет единичную энергию.

Параметры $\left(\alpha, \vec{\beta}\right)$ и есть те величины, которые мы хотим оценить. Будем считать, что они являются неслучайными величинами, и использовать оценку по максимуму правдоподобия. Функция $\alpha s(t, \vec{\beta})$ есть детерминированное отображение параметров $\left(\alpha, \vec{\beta}\right)$ во временную функцию. Используя такую формулу записи мы тем самым предполагаем, что зависимость $s(t, \vec{\beta})$ от $\vec{\beta}$ нелинейная.

Как и ранее, метод решения задачи заключается в использовании аппроксимации $\xi(t)$

при помощи ортогонального ряда с K коэффициентами

$$\xi_K(t)=\sum_{n=1}^{K}x_n\psi_n(t)$$

где $x_n=\int_0^T\xi(t)\psi_n(t)dt,\quad n=1,2,...$ - независимые гауссовские случайные величины со средними значениями $\langle x_n\rangle=\alpha\int_0^T s(t,\vec{\beta})\psi_n(t)dt=\alpha s_n(\vec{\beta})$ и дисперсией $\sigma^2[x_n]=N_{0f}$.

Плотность вероятности

$$f(x_1,...,x_K;\alpha,\vec{\beta})=\frac{1}{\left(2\pi N_{0f}\right)^{K/2}}\exp\left[-\frac{\sum_{n=1}^{K}\left(x_n-\alpha s_n(\vec{\beta})\right)^2}{2N_{0f}}\right]$$

Логарифм отношения правдоподобия определяется соотношением ($\vec{\beta}_0$ произвольно)

$$\ln\Lambda(x_1,...,x_K;\alpha,\vec{\beta})=\ln\frac{f(x_1,...,x_K;\alpha,\vec{\beta})}{f(x_1,...,x_K;0,\vec{\beta}_0)}=\frac{1}{N_{0f}}\sum_{n=1}^{K}\alpha s_n(\vec{\beta})x_n-\frac{1}{2N_{0f}}\sum_{n=1}^{K}\left[\alpha s_n(\vec{\beta})\right]^2$$

Эти две суммы легко записать в виде интегралов. Обозначим $s_K(t,\vec{\beta})=\sum_{n=1}^{K}s_n(\vec{\beta})\psi_n(t)$. Легко проверить, что (по теореме Парсеваля)

$$\sum_{n=1}^{K}s_n(\vec{\beta})x_n=\int_0^T s_K(t,\vec{\beta})\xi_K(t)dt\xrightarrow[K\to\infty]{}\int_0^T s(t,\vec{\beta})\xi(t)dt,$$

$$\sum_{n=1}^{K}\left[s_n(\vec{\beta})\right]^2=\int_0^T\left[s_K(t,\vec{\beta})\right]^2dt\xrightarrow[K\to\infty]{}1$$

После перехода к пределу $K\to\infty$ логарифм отношения правдоподобия принимает вид

$$\ln\Lambda(\xi(t);\alpha,\vec{\beta})=\underset{K\to\infty}{l.i.m.}\ln\Lambda(x_1,...,x_K;\alpha,\vec{\beta})=\frac{\alpha}{N_{0f}}\int_0^T s(t,\vec{\beta})\xi(t)dt-\frac{\alpha^2}{2N_{0f}}$$

Оценки максимального правдоподобия определяются в результате решения нелинейной системы уравнений

$$\alpha=\int_0^T s(t,\vec{\beta})\xi(t)dt$$

$$\frac{\partial\ln\Lambda(\xi(t);\alpha,\vec{\beta})}{\partial\vec{\beta}}=\frac{\alpha}{N_{0f}}\int_0^T\frac{s(t,\vec{\beta})}{\partial\vec{\beta}}\xi(t)dt=0$$

В нелинейном случае может существовать ряд решений и, чтобы гарантировать абсолютный максимум, необходимо исследовать поведение логарифма отношения правдоподобия.

8.5. Обнаружение и оценка параметров сигналов в присутствии небелого гауссова шума.

Как уже было показано, между обнаружением и оценкой существует тесная связь. По существу решение в обоих случаях включает один и тот же элемент – построение отношения правдоподобия. Простота решения задач обнаружения и оценки на фоне белого шума объясняется тем, что несмотря на произвольно выбранный нами ортонормированный ряд, получающиеся наблюдаемые величины $(x_1, x_2, ...)$ были независимы. В случае небелого (коррелированного) гауссова шума с нулевым средним и функцией корреляции $B_\eta(t_1, t_2)$ такой же простоты можно достигнуть, если использовать каноническое разложение СП (разложение Карунена-Лоэва)

$$\xi(t) = \underset{K\to\infty}{l.i.m.}\sum_{n=1}^{K} x_n \psi_n(t), \quad 0 \le t \le T$$

по собственным ортонормированным функциям интегрального уравнения

$$\int B_\eta(t_1, t_2)\psi_n(t_2)dt_2 = |\lambda_n|^2 \psi_n(t_1),$$

где $x_n = \alpha s_n(\vec{\beta}) + \eta_n$, $x_n = \int_0^T \xi(t)\psi_n(t)dt$, $s_n(\vec{\beta}) = \int_0^T s(t, \vec{\beta})\psi_n(t)dt$, $\eta_n = \int_0^T \eta(t)\psi_n(t)dt$

$\langle \eta_n \rangle = 0, \quad \langle \eta_i \eta_j \rangle = |\lambda_i|^2 \delta_{ij}$, а $\psi_n(t)$, $|\lambda_n|^2$ являются собственными функциями и собственными значениями процесса коррелированного шума. Аналогично случаю нелинейной оценки логарифм отношения правдоподобия определяется соотношением ($\vec{\beta}_0$ произвольно)

$$\ln \Lambda(x_1, ..., x_K; \alpha, \vec{\beta}) = \ln \frac{f(x_1, ..., x_K; \alpha, \vec{\beta})}{f(x_1, ..., x_K; 0, \vec{\beta}_0)} = \sum_{n=1}^{K} U_n = \sum_{n=1}^{K} \frac{1}{|\lambda_n|^2}\left\{\alpha s_n(\vec{\beta})x_n - \frac{1}{2}\left[\alpha s_n(\vec{\beta})\right]^2\right\}$$

Выясним, при каких условиях предел правой части равенства при $K \to \infty$ существует. Заметим, что сл. величины U_n независимые со средними значениями $M[U_n] = \dfrac{\left[\alpha s_n(\vec{\beta})\right]^2}{2|\lambda_n|^2}$ и дисперсиями $D[U_n] = \dfrac{\left[\alpha s_n(\vec{\beta})\right]^2}{|\lambda_n|^2}$. Воспользуемся следующей теоремой Колмогорова: если $U_1, U_2, ...$ последовательность независимых сл. величин и

$$V_K = \sum_{n=1}^{K} U_n, \ \sum_{n=1}^{\infty} M[U_n] < \infty, \ \sum_{n=1}^{\infty} D[U_n] < \infty,$$

то V_K сходится с вероятностью 1, а также в среднеквадратичном к некоторой сл. величине V, причем $M[V] = \sum_{n=1}^{\infty} M[U_n]$, $D[V] = \sum_{n=1}^{\infty} D[U_n]$.

В нашем случае величины U_n - гауссовские и, если $E = \sum_{n=1}^{K} \dfrac{\left[s_n(\vec{\beta})\right]^2}{|\lambda_n|^2} < \infty$, то сл. величина

$$V = \ln \Lambda(\{x_n\}; \alpha, \vec{\beta}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^2} \left\{ \alpha s_n(\vec{\beta}) x_n - \frac{1}{2} \left[\alpha s_n(\vec{\beta}) \right]^2 \right\}$$

также распределена по гауссовскому закону со средним $M[V] = \frac{|\alpha|^2 E}{2}$ и дисперсией $D[V] = |\alpha|^2 E$.

Целесообразно от представления $\ln \Lambda(\{x_n\}; \alpha, \vec{\beta})$ в виде бесконечного ряда перейти к интегральному представлению. Для этого определим функцию

$$S_\beta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n(\vec{\beta})}{|\lambda_n|^2} \psi_n(t).$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $S_\beta(t)$ - решение интегрального уравнения

$$\int_0^T B_\eta(t_1, t_2) S_\beta(t_2)) dt_2 = s(t_1, \vec{\beta}), \quad 0 \le t_1 \le T$$

и что $\ln \Lambda(\{x_n\}; \alpha, \vec{\beta})$ можно представить в виде

$$\ln \Lambda(\xi(t); \alpha, \vec{\beta}) = \alpha \int_0^T S_\beta(t) \xi(t) dt - \frac{|\alpha|^2}{2} \int_0^T S_\beta(t) s(t, \vec{\beta}) dt$$

Таким образом, в случае небелого шума оптимальным является корреляционный приемник, образующий корреляционный функционал принимаемого колебания с опорным сигналом $S_\beta(t)$ с переменными параметрами $\vec{\beta}$. Решение интегрального уравнения является единственным практическим путем для нахождения $S_\beta(t)$.